Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

# ZÁVĚREČNÁ PRÁCE

## Kurz Vyučování všeobecně vzdělávacího předmětu matematika

Mgr. Marie Dostálová

# Pickova věta

**Konzultant závěrečné práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.**

Praha 2013

Kurz je akreditován u MŠMT na základě § 25 a § 27 zákona č. 563/2004 Sb., o pedagogických pracovnících a o změně některých zákonů, a v souladu se zákonem č. 500/2004 Sb. Pod č. j. 27 655/2012-25-591.

Chtěla bych touto cestou poděkovat svému příteli za trpělivou technickou pomoc při psaní této práce a za vytvoření většiny obrázků. Také bych chtěla poděkovat RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za velice podnětné připomínky. Velké díky také patří mým rodičům a sestře za pročtení konečného textu.

Prohlašuji, že jsem tuto závěrečnou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění.

V ...................... dne ............. podpis

# Obsah

# Úvod

Dostává se vám do rukou práce, která si klade za cíl seznámit čtenáře s Pickovou formulí neboli Pickovým vzorcem pro výpočet obsahu. Tento vzorec není nijak složitý a mnohé možná okouzlí svojí elegancí, jiné možná zaujme svojí jednoduchostí.

Profesor G. Pick publikoval vzorec pro výpočet obsahu jednoduchého mnohoúhelníku, který má vrcholy v mřížových bodech, na konci 19. století. Tomuto výsledku se však dostalo větší pozornosti až v druhé polovině dvacátého století. Od té body se objevují nejrůznější způsoby jak Pickův vzorec dokázat a nacházejí se i zajímavé spojitosti Pickova vzorce s dalšími oblastmi matematiky.

V práci ukážeme několik způsobů jak Pickův vzorec dokázat, naznačíme související témata, ukážeme zobecnění Pickova vzorce pro složitější tvary a v neposlední řadě se dotkneme otázky, jestli je možné nějak jednoduše rozšířit Pickův vzorec pro výpočet obsahu prostorových těles. Práce také obsahuje různorodé příklady, které se dají řešit pomocí Pickova vzorce.

Se životním příběhem profesora Picka se ve stručnosti čtenář může seznámit v medailonku na konci práce.

# Kapitola 1

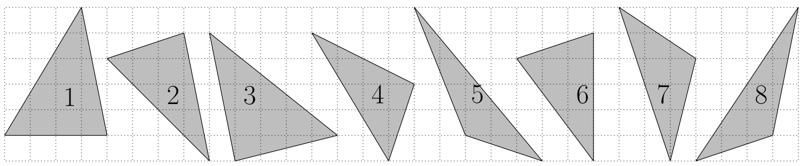
# Kapitola příkladů

V celé práci budeme mluvit o mřížových bodech, proto není na škodu již zde říci, co se za tímto pojmem skrývá. **Mřížové body** jsou takové body, které mají v kartézské soustavě souřadnic celočíselné souřadnice. Jedná se tedy o body z množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Například [3,4] nebo [0, − 19].

## 1.1 Začínáme

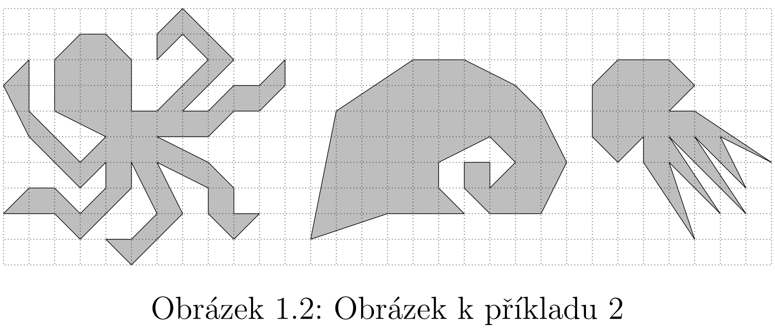
V první podkapitole jsou připravené příklady, jejichž řešení můžete najít v druhé podkapitole. Zkuste se nad nimi zamyslet, propočítat je a až poté se podívat, jaké mají řešení.

**Příklad 1.** Určete obsahy trojúhelníků vepsaných do jednotkové čtvercové sítě na obrázku 1.1. Mají některé trojúhelníky shodný obsah?



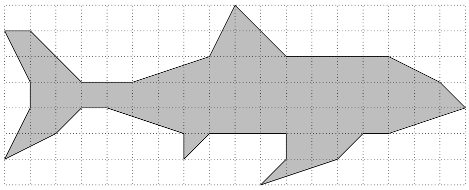

Obrázek 1.1: Obrázek k příkladu 1

**Příklad 2.** Jaké obsahy mají obrazce vepsané do jednotkové čtvercové sítě, které jsou na obrázku 1.2? Všechny vrcholy obrazců jsou v mřížových bodech.

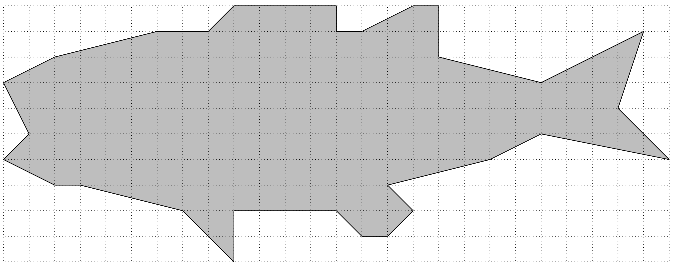


Obrázek 1.2: Obrázek k příkladu 2

**Příklad 3.** Jaký obsah mají ryby vepsané do jednotkové čtvercové sítě na obrázcích? Všechny vrcholy jsou v mřížových bodech.



Obrázek 1.3: Obrázek k příkladu 3



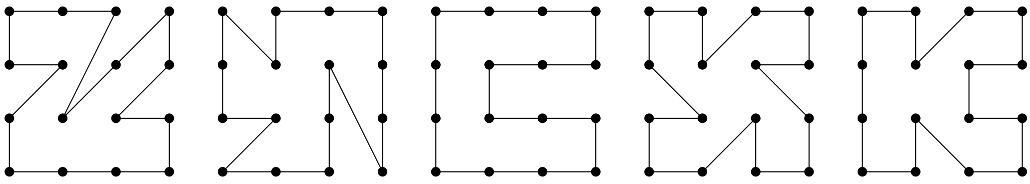
Obrázek 1.4: Obrázek k příkladu 3

**Příklad 4.** Je možné zakreslit rovnostranný trojúhelník do čtvercové sítě tak, aby jeho vrcholy ležely v mřížových bodech?

**Příklad 5.** (převzato ze zdroje [4]) Uvažujme trojúhelníky se základnou délky 1 a výškou délky 2, které mají vrcholy v mřížových bodech. Kolika mřížovými body procházejí hrany takových trojúhelníků? Je to nějaké pravidlo nebo je to náhoda?

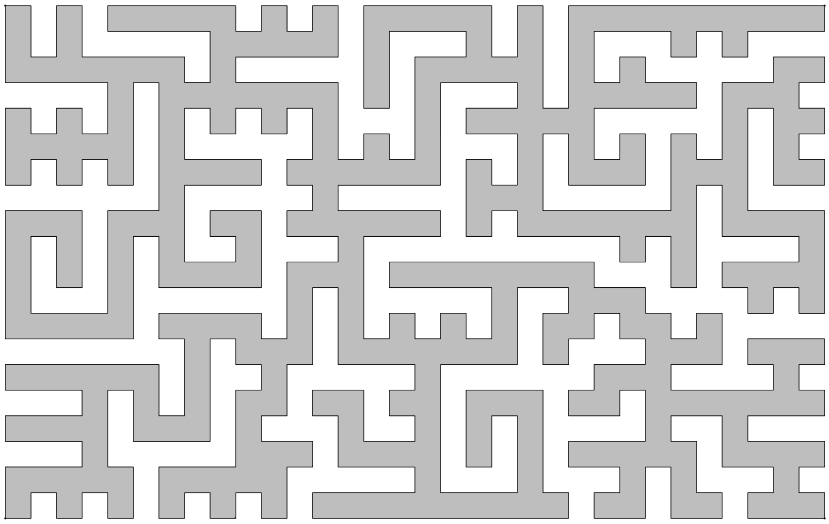
**Příklad 6.** (převzato ze zdroje [4]) Uvažujme trojúhelníky se základnou délky 1 a výškou délky 3, které mají vrcholy v mřížových bodech. Kolik mřížových bodů a kde (na hranách, uvnitř trojúhelníku) takovéto trojúhelníky nutně obsahují?

**Příklad 7.** Který z následujících obrazců má největší obsah?

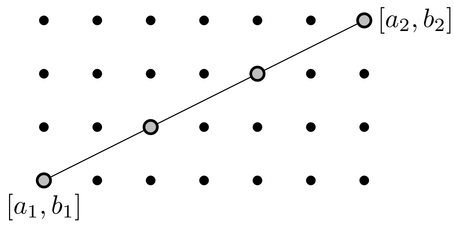


Obrázek 1.5: Obrázek k příkladu 7

**Příklad 8.** (převzato z [12]) Obdélník na obrázku 1.6 byl rozdělen na 40×25 jednotkových čtverečků s vrcholy v mřížových bodech. Některé ze čtverečků byly odstraněny a zůstal obrazec s uzavřenou hranicí, která prochází všemi 40×25 mřížovými body. Jaký je obsah vybarveného obrazce?



Obrázek 1.6: Obrázek k příkladu 8




Obrázek 1.7: Ilustrace k příkladu 9

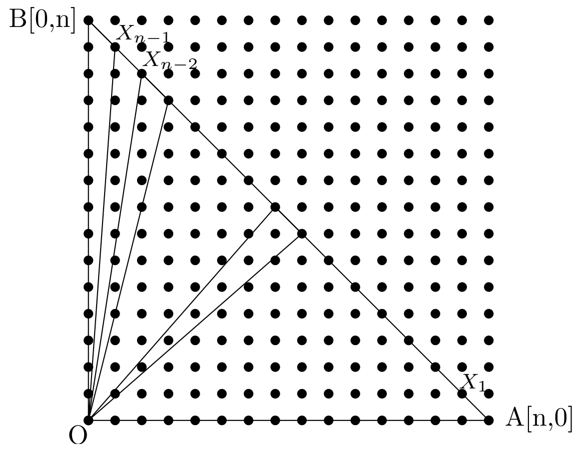
**Příklad 9.** Kolik je mřížových bodů na úsečce spojující mřížové body $[a_1,b_1]$ a $[a_2,b_2]$?

**Příklad 10.** (převzato ze zdroje [4]) Přímka spojující body $A$ $[n,0]$ a $B$ $[0,n]$ má rovnici $x-y=n$. Na této přímce tedy leží všechny body tvaru $[n-i, i]$, $i \in \mathbb{Z}$. Mezi body $A$ a $B$ je $n-1$ těchto bodů, označme je $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Spojíme-li všechny tyto body s počátkem $O$ $[0,0]$, rozdělíme trojúhelník $ABO$ na malé trojúhelníky, jak je naznačeno na obrázku 1.8. Bude nás zajímat počet mřížových bodů uvnitř jednotlivých malých trojúhelníků. Zřejmě dva malé trojúhelníky $OAX_1$ a $OX_{n-1}B$ při osách $x$ a $y$ nebudou obsahovat uvnitř žádný mřížový bod. Ale co ostatní trojúhelníky $OX_iX_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-2$? Dokažte, že pokud je $n$ prvočíslo, pak každý ze zbývajících malých trojúhelníků obsahuje stejný počet mřížových bodů.

Jaký je počet mřížových bodů uvnitř každého malého trojúhelníku $OX_iX_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-2$?

**Příklad 11.** (převzato z knihy [11]) Nakreslete do jednotkové čtvercové sítě dva čtverce o straně délky 5, jejichž vrcholy leží v mřížových bodech, jeden tak, aby obsahoval 36 mřížových bodů, a druhý tak, aby obsahoval 28 mřížových bodů. Navíc dokažte, že čtverec o straně délky 5, jehož vrcholy leží v mřížových bodech, pokrývá maximálně 36 mřížových bodů a minimálně 28 mřížových bodů.

**Příklad 12.** (převzato ze zdroje [4]) Čtverec o obsahu $n^2$, $n \in \mathbb{N}$ položíme náhodně na čtvercovou jednotkovou mříž. Ukažte, že čtverec nemůže zakrývat víc než $(n+1)^2$ mřížových bodů.



Obrázek 1.8: Ilustrace k příkladu 10

**Příklad 13.** (převzato z knihy [11]) Kolika způsoby lze rozměnit dolar na čtvrťáky, deseticenty a pěticenty, pokud je dolar 100 centů a čtvrťák 25 centů?

**Příklad 14.** (převzato z knihy [11]) Kolika způsoby lze rozměnit $D$ dolarů na čtvrťáky, deseticenty a pěticenty, pokud je dolar 100 centů a čtvrťák 25 centů?

**Příklad 15.** (převzato z knihy [11]) Pálkařský průměr basebalových hráčů je podle wikipedie relativní statistický ukazatel útočících basebalových hráčů. Je definován poměrem počtu všech dobrých odpalů (hits) k počtu pokusů na pálce (at bat) během dané doby (obvykle měsíc, sezóna, kariéra). Vyjadřuje schopnost pálkaře dobře odpálit míč a dostat se na mety. Neuvádí se v procentech ani v jiné jednotce, zažitý je tvar „.XXX“ (tečka a tři číslice). Například hráč se třemi dobrými odpaly během 11 nadhozů má pálkařský průměr .273, protože $\frac{3}{11} = 0{,}2727272.... \approx .273$. Stejný pálkařský průměr má i hráč se 41 dobrými odpaly z 150 nadhozů nebo se 131 z 480 a stejně tak se 273 z tisíce. Otázka je kolika způsoby může hráč dosáhnout pálkařského průměru .273 z nejvýše 2000 nadhozů?

## 1.2 Pickův vzorec a řešení příkladů

Příklady, které byly v minulé kapitole, lze řešit několika způsoby. Některé příklady byly jednoduché návodné a není na ně potřeba používat nijak složité techniky. Některé jsou ale trochu komplikovanější a pokud známe a použijeme Pickův vzorec, mnohdy si řešení a argumentaci značně usnadníme.

Georg Pick, který byl profesorem na univerzitě v Praze, tento vzorec publikoval v roce 1899 ve své práci [14].

Ještě než vyslovíme větu, o které je celá tato práce, osvětlíme pojem, který se v ní vyskytuje. **Jednoduchý mnohoúhelník** je mnohoúhelník, jehož hranice je uzavřená lomená čára, které sama sebe neprotíná. To znamená, že uvnitř jednoduchého mnohoúhelníku nejsou žádné díry.

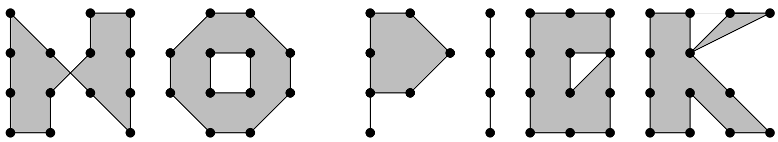
**Věta 1.** ***(Pickův vzorec)*** *Obsah jednoduchého mnohoúhelníku, který má vrcholy v mřížových bodech, je roven*

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

*kde $I$ je počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku a $B$ je počet mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku.*

Je překvapivé, že obsah lze určit jen sečtením bodů. Najednou můžeme počítat obsah nejrůznějších složitých útvarů tak jednoduše. Je to vůbec možné, že obsah nezávisí na tvaru mnohoúhelníku? Z Pickova vzorce také plyne, že obsah mnohoúhelníku, jehož vrcholy jsou v mřížových bodech, je buď celočíselný nebo celé číslo plus jedna polovina.

Pozor ale na to, že Pickův vzorec platí jen pro jednoduché mnohoúhelníky. Na povedené ilustraci z knihy [11] jsou příklady mnohoúhelníků, pro něž Pickův vzorec neplatí. Nevěšte ale hlavu, existuje rozšíření i pro takovéto mnohoúhelníky s vrcholy v mřížových bodech, budeme o něm mluvit v kapitole 3.1.



Obrázek 1.9: Příklad mnohostěnů, které nejsou jednoduché

Důkaz Pickova vzorce ukážeme později, a ne jen jeden. Nejdříve však vyřešíme příklady, které byly v minulé kapitole.

**Výsledky a Řešení:**

Příklad 1: Trojúhelníky mají následující obsahy:

| Trojúhelník | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Obsah | 10 | 8 | 10,5 | 7 | 6,5 | 7,5 | 7 | 7 |

Trojúhelníky číslo 4, 7 a 8 mají stejný obsah.

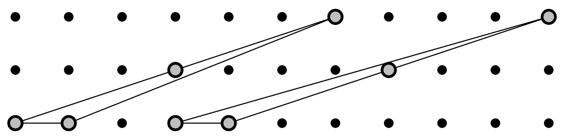
Příklad 2: Chobotnice má obsah 40,5, ulita má obsah 33,5 a medúza má obsah 18,5.

Příklad 3: Ryba na obrázku 1.3 má obsah 49,5 a ryba na obrázku 1.4 má obsah 140,5.

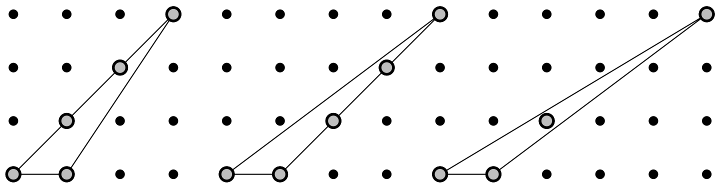
Příklad 4: Pokud by takový rovnostranný trojúhelník existoval, jeho obsah by byl podle vzorce pro obsah trojúhelníku roven $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, kde $a$ je délka jeho strany. Jelikož $a$ je vzdálenost mezi dvěma mřížovými body je $a^2$ vždy celé číslo. A to proto, že buď je $a$ délka úsečky rovnoběžné s osou $x$ nebo osou $y$, nebo je $a$ délka přepony nějakého pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami rovnoběžnými s osami $x$ a $y$. Z Pythagorovy věty dostáváme, že $a^2$ je celé číslo. Z Pickova vzorce však víme, že obsah jednoduchého mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech, je nějaký celočíselný násobek $\frac{1}{2}$. Takový obsah ale pro rovnostranný trojúhelník není možný, protože nelze napsat ve tvaru $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Příklad 5: Každý takový trojúhelník má právě jednu hranu, která prochází jedním mřížovým bodem. Viz obrázek 1.10. Důkaz tohoto faktu lehce dává Pickův vzorec.

Příklad 6: Každý takový trojúhelník má podle zadání tři vrcholy v mřížových bodech a pak buď jeden mřížový bod uvnitř nebo dva mřížové body na hraně. Viz obrázek 1.11. I tento fakt lehce plyne z Pickova vzorce.



Obrázek 1.10: Příklad trojúhelníků s výškou 2



Obrázek 1.11: Příklad trojúhelníků s výškou 3

Příklad 7: Obsah všech obrazců je stejný, všechny mají stejný počet mřížových bodů na hranici a žádný mřížový bod uvnitř.

Příklad 8: Podle zadání se jedná o jednoduchý mnohoúhelník, můžeme tedy aplikovat Pickův vzorec. Hranice prochází úplně všemi $40 \times 25$ mřížovými body, tj. $B = 1000$ a žádný mřížový bod není uvnitř, tedy $I = 0$. Celkový obsah je tedy 499.

Příklad 9: Na úsečce spojující body $[a_1,b_1]$ a $[a_2,b_2]$ je

$$NSD(|a_2 - a_1|,|b_2 - b_1|) + 1$$

mřížových bodů, kde $NSD(k,l)$ značí největší společný dělitel čísel $k$ a $l$.

Úsečka má směrový vektor $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. Body, které leží na této úsečce, mají souřadnice $[a_1,b_1] + \lambda(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$, kde $\lambda$ nabývá hodnot od 0 do 1, nula pro bod $[a_1,b_1]$ a jedna pro $[a_2,b_2]$. Mřížové body jsou pak takové, pro které jsou $\lambda(a_2 - a_1)$ a $\lambda(b_2 - b_1)$ celá čísla. Pokud jsou čísla $|a_2 - a_1|$ a $|b_2 - b_1|$ soudělná existuje několik $\lambda$, aby čísla $\lambda(a_2 - a_1)$ a $\lambda(b_2 - b_1)$ byla celá. Pokud označíme $d = NSD(|a_2 - a_1|,|b_2 - b_1|)$, budou se taková vhodná $\lambda$ postupně rovnat $0 = \frac{0}{d}$, $\frac{1}{d}, \ldots, \frac{d-1}{d}$, $\frac{d}{d} = 1$. Je jich tedy $d + 1$.

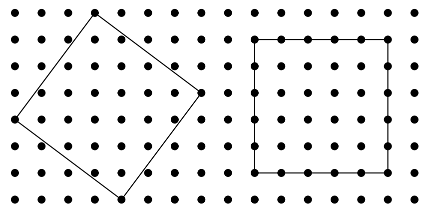
Příklad 10: Pokud je $n$ prvočíslo, pak jsou čísla $i$ a $n - i$ vzájemně nesoudělná pro libovolné $i$. Pokud by totiž $n - i$ a $i$ byly dělitelné číslem $d$, dělilo by toto číslo i $(n - i) + i = n$. To znamená, že pro $i \neq 0$ na přímce $ix + (n - i)y = 0$, není mezi počátkem a bodem $[n - i, i]$ žádný další mřížový bod. Jiné mřížové body tedy leží pouze na hranách $AO$ a $BO$.

Nyní si povšimněme toho, že všechny malé trojúhelníky $OX_iX_{n-i}$, $i = 1, \ldots,$ $n - 2$, mají stejnou výšku i délku základny, která leží na úsečce $AB$. Proto mají stejný obsah. Každý z trojúhelníků má pouze tři mřížové body na své hranici, což jsou právě jeho vrcholy, proto dostáváme z Pickova vzorce, že všechny mají uvnitř stejný počet mřížových bodů.

Teď už není těžké určit počet mřížových bodů uvnitř každého malého trojúhelníku, který je $\frac{n+1}{2}$.

Příklad 11:

Pickův vzorec nám dává rovnost $25 + 1 = I + \frac{B}{2}$. Pokud chceme maximální počet mřížových bodů ve čtverci, snažíme se najít polohu čtverce, ve které je



Obrázek 1.12: Řešení příkladu 11

maximální počet mřížových bodů na hranici. To nastane v případě, že hrany čtverce leží rovnoběžně s osami $x$ a $y$ a je $4 \times 5 = 20 = B$, pak je $I = 16$. Minimální počet bodů na hranici je $B = 4$, tedy jen vrcholy čtverce. Pak je $I = 24$.

Příklad 12: V případě, že čtverec leží tak, že jeho vrcholy jsou v mřížových bodech a jeho hrany jsou rovnoběžné s osami $x$ a $y$, zakrývá přesně $(n+1)^2$ mřížových bodů. Protože obvod čtverce je $4n$, nemohou hrany čtverce v jeho obecné poloze obsahovat více než $4n$ mřížových bodů. Pickův vzorec $n^2 = I + B/2 - 1$ dává do souvislosti obsah čtverce s vrcholy v mřížových bodech a počet mřížových bodů na jeho hranách a uvnitř něj. Celkový počet mřížových bodů, které může čtverec překrýt, je $I + B$, což, jak vyplývá z následující nerovnice, je maximálně $(n+1)^2$,

$$I + B = I + \frac{B}{2} - 1 + \frac{B}{2} + 1 = n^2 + \frac{B}{2} + 1 \leq n^2 + \frac{4n}{2} + 1 = (n+1)^2.$$

Příklad 13: Kolika způsoby lze rozměnit dolar na čtvrťáky, deseticenty a pěticenty? Tato úloha zdánlivě nesouvisí s obsahem nějakého mnohoúhelníku natož s Pickovým vzorcem, ale zdání může klamat. Ukážeme tři způsoby řešení této úlohy, jak jsou popsány v knize [11], a zjistíme, že i zde se Pickův vzorec hodí.

*První řešení.*

Pro první řešení zvolíme nejpřímější postup a to vypsat si systematicky všechny možné kombinace čtvrťáků, deseticentů a pěticentů, tak aby jejich součet byl jeden dolar, tedy sto centů. Hledáme trojice $(c,d,p)$ tak, aby splňovaly rovnici $25c + 10d + 5p = 100$.

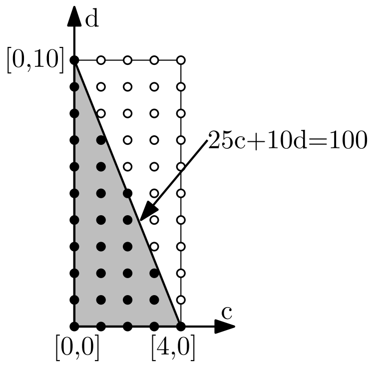
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| d = 10 | (0,10,0) | | | | |
| d = 9 | (0,9,2) | | | | |
| d = 8 | (0,8,4) | | | | |
| d = 7 | (0,7,6) | (1,7,1) | | | |
| d = 6 | (0,6,8) | (1,6,3) | | | |
| d = 5 | (0,5,10) | (1,5,5) | (2,5,0) | | |
| d = 4 | (0,4,12) | (1,4,7) | (2,4,2) | | |
| d = 3 | (0,3,14) | (1,3,9) | (2,3,4) | | |
| d = 2 | (0,2,16) | (1,2,11) | (2,2,6) | (3,2,1) | |
| d = 1 | (0,1,18) | (1,1,13) | (2,1,8) | (3,1,3) | |
| d = 0 | (0,0,20) | (1,0,15) | (2,0,10) | (3,0,5) | (4,0,0) |
| | c = 0 | c = 1 | c = 2 | c = 3 | c = 4 |

Tímto systematickým výčtem všech možností dostáváme, že existuje 29 možností, jak rozměnit dolar.

*Druhé řešení* bude vyžadovat trochu představivosti. Pokud vybereme počet čtvrťáků a deseticentů v rozměnění, bude tímto výběrem už určeno, kolik pěticentů musíme dodat, aby součet mincí byl jeden dolar. Stačí nám tedy hledat jen všechny možné kombinace počtu čtvrťáků $c$ a počtu deseticentů $d$, aby platilo $25c + 10d \leq 100$.

Představme si, že máme před sebou na stole čtyři čtvrťáky a deset deseticentů. Dohromady mají tyto mince hodnotu dva dolary a s jejich pomocí můžeme reprezentovat všechny možné kombinace na rozměnění dolaru. Máme pět možností, kolik vzít čtvrťáků ($c = 0,1,2,3,4$), a jedenáct možností pro deseticenty ($d = 0,1,\ldots,10$). Dohromady $5 \cdot 11 = 55$ možných kombinací mincí. Přesně dolar dostaneme ve třech možnostech, a to $(c,d) = (4,0)$, $(2,5)$ a $(0,10)$. Zbývá 52 možností, které musíme doplnit pěticenty. Částka, kterou vybereme, je $25c+10d$ centů, a na stole zůstane $4-c$ čtvrťáků a $10-d$ deseticentů, jejichž hodnota je $200-(25c+10d)$ centů. Z toho vidíme, že 52 kombinací se skládá z 26 komplementárních párů, jejichž hodnota je dohromady 200 centů. Tedy 26 kombinací dává částku menší než dolar a 26 kombinací větší než dolar. Dohromady dostáváme, že je $26 + 3 = 29$ možností, jak rozměnit dolar s použitím čtvrťáků, deseticentů a pěticentů.

*Ve třetím způsobu* řešení budeme počítat body uvnitř trojúhelníku. V úloze o rozměnění dolaru vlastně hledáme počet celočíselných kombinací čísel $(c,d)$ tak, aby $25c + 10d \leq 100$. Počet pěticentů opět neuvažujeme, protože je jednoznačně určen čísly $c$ a $d$. V kartézské soustavě souřadnic budeme počítat, kolik je mřížových bodů v trojúhelníku vyznačeném na obrázku. Každý mřížový bod




v trojúhelníku odpovídá nějaké možnosti rozměnění dolaru. Například bod [1,4] odpovídá jednomu čtvrťáku, čtyřem deseticentům a sedmi pěticentům. Pokud spočteme body vyznačené na obrázku dostaneme 29, což, jak už víme, je počet možných rozměnění dolaru na čtvrťáky, deseticenty a pěticenty. Pro tento malý trojúhelník nebylo těžké mřížové body spočítat rovnou. Mohli bychom ale k tomuto účelu lehce použít Pickův vzorec, jak to uděláme v dalším příkladu, kdy nás zajímá, kolika způsoby lze rozměnit více dolarů.

Třetí přístup kombinoval myšlenky prvního a druhého řešení. Stačí si uvědomit, že každý z mřížových bodů v trojúhelníku odpovídá jedné kombinaci v tabulce v prvním řešení. Obdélníkové pole s $5 \cdot 11 = 55$ mřížovými body odpovídá všem možným kombinacím, které lze složit ze čtyř čtvrťáků a deseti deseticentů, které jsme uvažovali v druhém řešení. Body pod diagonálou odpovídají kombinacím mincí s celkovou hodnotou menší než je dolar, tři body na diagonále třem kombinacím, kdy jsme dostali přesně dolar, a body nad diagonálou odpovídají kombinacím mincí, které mají celkovou hodnotu větší než dolar.

Příklad 14: Pokud se ptáme, kolika způsoby lze rozměnit $D$ dolarů na čtvrťáky, deseticenty a pěticenty, ptáme se vlastně kolik je celočíselných, nezáporných řešení rovnice

$$25c + 10d + 5p = 100D,$$

kde $c$ je počet čtvrťáků, $d$ počet deseticentů a $p$ pěticentů. Celou rovnice můžeme vydělit 5 a dostaneme

$$5c + 2d + p = 20D.$$

Pokud určíme $c$ a $d$, bude již $p$ určeno, proto nám stačí hledat kombinace $c$ a $d$ tak, že splňují

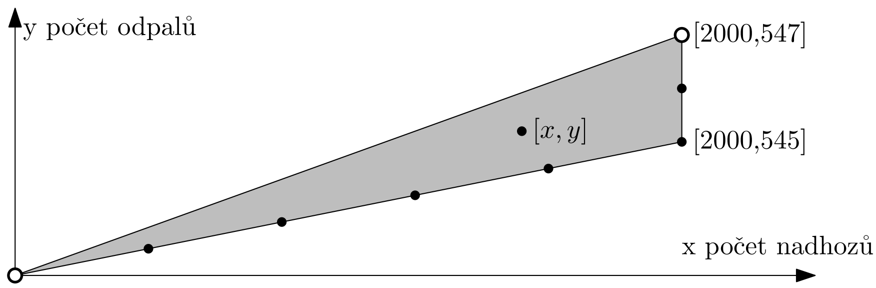
$$5c + 2d \leq 20D,\ c \geq 0,\ d \geq 0.$$

Tyto tři nerovnosti určují trojúhelník s vrcholy [0,0], [$4D$,0] a [0,$10D$]. Každý mřížový bod tohoto trojúhelníku pak odpovídá jedné z možných kombinací čtvrťáků, deseticentů a pěticentů v rozměnění $D$ dolarů. Využijeme Pickův vzorec pro určení počtu mřížových bodů v trojúhelníku. Obsah trojúhelníku pak je $S = \frac{1}{2} \cdot 40D^2$. Na obvodu je $4D + 10D + NSD(4D{,}10D)$ mřížových bodů, kde jsme použili výsledek Příkladu 9 pro určení počtu mřížových bodů na spojnici bodů [$4D$,0] a [0,$10D$]. Největší společný dělitel $4D$ a $10D$ je $2D$, proto je počet bodů na obvodu trojúhelníku $B = 16D$. Pickův vzorec dává $20D^2 = I + \frac{1}{2} \cdot 16D - 1$, tedy uvnitř máme $I = 20D^2 - 8D + 1$ mřížových bodů. Celkový počet mřížových bodů v trojúhelníku je pak $I + B = 20D^2 + 8D + 1$, což je počet všech možností, jak rozměnit $D$ dolarů na čtvrťáky, deseticenty a pěticenty.

Příklad 15: Podíváme-li se na basebalovou úlohu z matematického hlediska, hledáme počet dvojic $(x,y)$, jejichž poměr $\frac{y}{x}$ je mezi 0,2725 a 0,2735 a zároveň je $0 < x \leq 2000$. Pokud požijeme počítač nebo jinou výpočetní techniku můžeme získat seznam všech takových dvojic. S Pickovým vzorcem dostaneme výsledek i bez otrockého vypisování všech možností. Pálkařský průměr bude .273, pokud $x$ a $y$, $0 < x \leq 2000$, splňují

$$0{,}2725 = \frac{545}{2000} \leq \frac{y}{x} < \frac{547}{2000} = 0{,}2735.$$

Všechny dvojice $(x,y)$, které hledáme, jsou mřížové body náležející trojúhelníku s vrcholy [2000,545], [2000,547] a [0,0].




Obrázek 1.13: Palkařský průměr .273

Obrázek ilustruje tento trojúhelník, i když osy $x$ a $y$ nemají stejné měřítko. Trojúhelník má obsah 2000, protože svislá strana má délku 2 a příslušná výška je 2000. Na hranici jistě leží tři vrcholy trojúhelníku a jeden mřížový bod na svislé hraně. Na hraně [2000,545], [0,0] leží čtyři, protože čísla 2000 a 545 jsou soudělná a jejich největší společný dělitel je 5, viz Příklad 9, zato čísla 2000 a 547 soudělná nejsou, a tak na poslední hraně žádný mřížový bod neleží. Podle Pickova vzorce je

$$2000 = I + \frac{8}{2} - 1 = I + 3,$$

takže uvnitř trojúhelníku je $I = 1997$ bodů. Dva vrcholy trojúhelníku musíme z celkového počtu možností odečíst, jsou to [0,0] a [2000,547], které jsou na obrázku naznačeny prázdným kolečkem a neodpovídají zadání. Počet možností, jak získat požadovaný pálkařský průměr z maximálně 2000 nadhozů, je tedy $I + B - 2 = 2003$.

# Kapitola 2

# Důkazy a souvislosti

Sedmdesát let zůstal Pickův elegantní vzorec skoro nepovšimnut. Pozornost opět získal díky H. Steinhausově knize Mathemtical Snapshots, která vyšla v roce 1969. Od té doby matematici našli mnoho důkazů Pickova vzorce s využitím nejrůznějších metod. Některé zajímavé souvislosti a důkazy ukážeme.

Než se pustíme do prvního důkazu **Pickova vzorece**, připomeneme jeho znění.

Obsah jednoduchého mnohoúhelníku, který má vrcholy v mřížových bodech je roven

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

kde $I$ je počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku a $B$ je počet mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku.

## 2.1 První důkaz Pickova vzorce

V minulé kapitole jsme se již seznámili s Pickovým vzorcem a s jeho aplikacemi. Zůstal nám ale dluh. Vzorec jsme sice vyslovili, používali, ale nedokázali jsme, že opravdu platí. V této kapitole proto ukážeme, že platí. V důkazu budeme postupovat podle knihy [11].

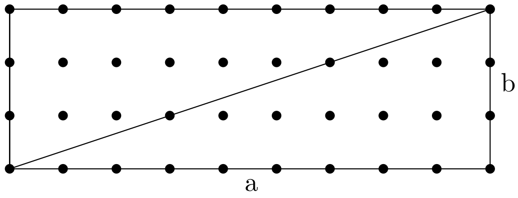
*Důkaz.* Začneme od nejjednoduších tvarů. Platí opravdu Pickův vzorec například pro obdélník se stranami délky $a$, $b \in \mathbb{N}$, který má hrany rovnoběžné s osami $x$ a $y$? Na obvodu má takový obdélník $2a + 2b = B$ mřížových bodů, viz obrázek 2.1. Uvnitř je $(a-1)(b-1) = I$ mřížových bodů. Pickův vzorec opravdu platí, protože

$$I + \frac{B}{2} - 1 = (a-1)(b-1) + \frac{1}{2}(2a + 2b) - 1 = ab,$$

což odpovídá obsahu obdélníku.

Pickův vzorec tedy platí pro obecný obdélník. Platí také pro pravoúhlý trojúhelník, který vznikl rozdělením obdélníku úhlopříčkou na půl, tedy pro obecný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek $a$ a $b$, které jsou rovnoběžné s osami $x$ a $y$? K ověření Pickova vzorce v tomto případě musíme ukázat, že platí

$$I + \frac{B}{2} - 1 = \frac{ab}{2}.$$




Obrázek 2.1: Obdélník s vrcholy v mřížových bodech a hranami délky $a$, $b$

Označme $B^*$ počet mřížových bodů na přeponě včetně krajních bodů. Pak je počet mřížových bodů na hranici trojúhelníku

$$B = a + b + B^* - 1.$$

Protože $B^*$ mřížových bodů na úhlopříčce leží na hranici obou pravoúhlých trojúhelníků, na které úhlopříčka rozděluje obdélník, dostáváme tedy

$$2I + 2B = (a+1)(b+1) + B^*,$$
$$I + B = \frac{1}{2}\big((a+1)(b+1) + B^*\big).$$

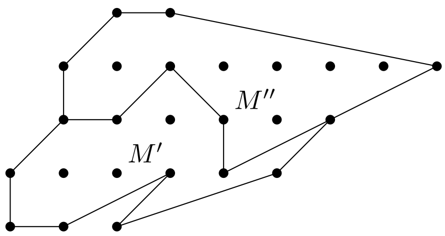
Z toho plyne

$$I + \frac{B}{2} - 1 = I + B - \frac{B}{2} - 1 = \frac{1}{2}\big((a+1)(b+1) + B^*\big) - \frac{1}{2}(a+b+B^*-1) - 1 = \frac{ab}{2}.$$

Pickův vzorec tedy opravdu platí pro pravoúhlý trojúhelník.

Zatím jsme ukázali, že vzorec platí pro obdélník a pravoúhlý trojúhelník, dále přejdeme už k obecným jednoduchým mnohoúhelníkům s vrcholy v mřížových bodech. Pozor, jednoduchý mnohoúhelník v tomto smyslu nenaznačuje, že mnohoúhelník nemá komplikovaný tvar, ale že jeho hranice je uzavřená lomená čára, která sama sebe nikde neprotíná.

Předpokládejme, že jednoduchý mnohoúhelník $M$ je rozdělen do dvou menších mnohoúhelníků $M'$ a $M''$ jako je naznačeno na obrázku 2.2.




Obrázek 2.2: Mnohoúhelník $M$ rozděleny na dva mnohoúhelníky

Obsahy těchto mnohoúhelníků jistě splňují

$$S_M = S_{M'} + S_{M''},$$

kde $S_M$ je obsah mnohoúhelníku $M$ a podobně $S_{M'}$,$S_{M''}$ pro $M'$ a $M''$. Nyní předpokládejme, že podle Pickova vzorce je

$$S_{M'} = I' + \frac{B'}{2} - 1,$$
$$S_{M''} = I'' + \frac{B''}{2} - 1.$$

Ukážeme, že obsah velkého mnohoúhelníku $M$ také splňuje Pickův vzorec. Počet mřížových bodů, které leží na společné části hranice menších mnohoúhelníků $M'$ a $M''$, označme $B^*$. Počet mřížových bodů v mnohoúhelníku $M$ je pak dán

$$\begin{aligned} I &= I' + I'' + B^* - 2, \\ B &= B' + B'' - 2B^* + 2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Takže

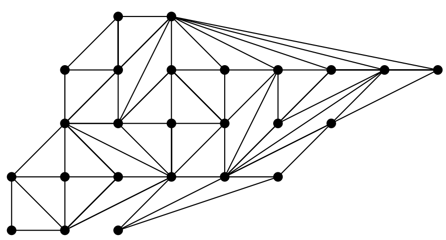
$$\begin{aligned} S_M &= S_{M'} + S_{M''} = (I' + \frac{B'}{2} - 1) + (I'' + \frac{B''}{2} - 1) = \\ &= (I' + I'' + B^* - 2) + \frac{1}{2}(B' + B'' - 2B^* + 2) - 1 = I + \frac{B}{2} - 1. \end{aligned}$$

Předchozí výpočet ukazuje, že pokud pro mnohoúhelníky $M'$ a $M''$ platí Pickův vzorec, platí i pro mnohoúhelník $M$. To znamená, že Pickův vzorec $I + \frac{B}{2} - 1$ je **aditivní** stejně jako obsah, tj. zůstává v platnosti i pro celek vzniklý sečtením částí, pro které vzorec platil. Obsahy nemusíme pouze sčítat, můžeme je též odečítat a tak předchozí tvrzení můžeme vyslovit i takto: pokud pro mnohoúhelníky $M$ a $M'$ platí Pickův vzorec, platí i pro mnohoúhelník $M''$. Princip aditivity tedy můžeme dále používat a každý mnohoúhelník rozdělit na vhodné části, jejichž obsah již dokážeme spočítat. Připomeňme ještě, že v popsané aditivitě je důležité, že výsledný mnohoúhelník je opět jednoduchý. Pokud by složený mnohoúhelník nebyl jednoduchý, neplatily by totiž vztahy (2.1).

Dále budeme analyzovat základní stavební kameny, na které lze mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou v mřížových bodech, rozdělit. Jsou jimi **elementární trojúhelníky**, jejichž vrcholy jsou mřížové body, ale které již žádné další mřížové body neobsahují ani uvnitř ani na hranici. Každý mnohoúhelník budeme chtít rozdělit na elementární trojúhelníky. Toto rozdělení budeme nazývat **elementární triangulace**. Elementární triangulace není jednoznačná, dokonce většinou existuje několik možností, jak ji udělat. Nám bude stačit, že existuje a že má vždy stejný počet elementárních trojúhelníků.

Pojďme do práce, musíme dokázat, že elementární trojúhelníky splňují dvě důležité vlastnosti. Zformulujeme je do dvou tvrzení.

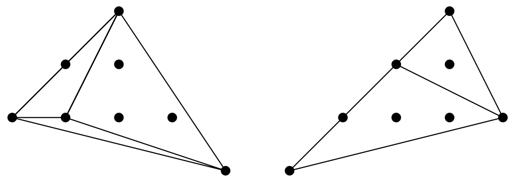
**Tvrzení 2.** *Každý mnohoúhelník, který má vrcholy v mřížových bodech, má elementární triangulaci.*



Obrázek 2.3: Příklad možné triangulace mnohoúhelníku $M$

*Důkaz.* Zaprvé každý mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech může být pomocí úhlopříček rozdělen na trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech. Zadruhé každý neelementární trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech může být rozdělen na dva nebo tři menší trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech,

- pokud obsahuje vnitřní mřížový bod, propojením tohoto bodu s vrcholy trojúhelníku,
- pokud obsahuje mřížový bod na hraně, spojením tohoto bodu s protějším vrcholem:



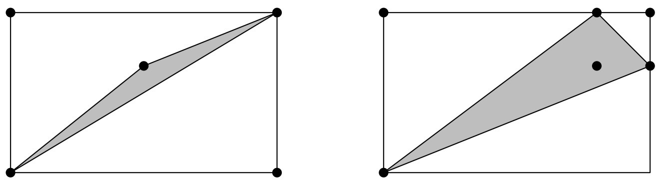
Obrázek 2.4: Dvě možnosti jak rozdělit trojúhelník, který není elementární

Pokud budeme tato dělení opakovat, dokud bude existovat nějaký mřížový bod, který leží uvnitř nebo na hraně nějakého trojúhelníku a není jeho vrcholem, dostaneme rozdělení, které bude elementární triangulací.

❑

**Tvrzení 3.** *Obsah každého elementárního trojúhelníku je* $\frac{1}{2}$.

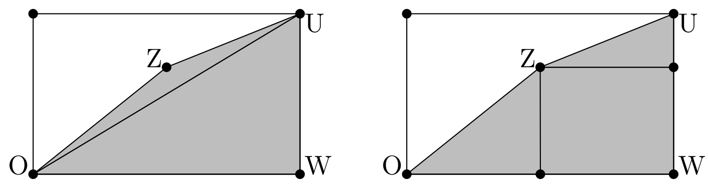
*Důkaz.* Každý trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech může být vepsán do obdélníku s hranami, které jsou rovnoběžné s osami $x$ a $y$. Hrany tohoto obdélníku jsou úsečky, které jsou popsány maximem a minimem $x$-ové a $y$-ové souřadnice vrcholů trojúhelníku. Z hlediska vepsání do obdélníku existují dva druhy trojúhelníků s vrcholy v mřížových bodech. Buď je strana trojúhelníku úhlopříčka v obdélníku nebo není, jak ilustruje obrázek 2.5.



Obrázek 2.5: Trojúhelníky vepsané do obdélníků

Elementární trojúhelníky mohou odpovídat pouze konfiguraci vlevo na obrázku 2.5, protože trojúhelník vpravo musí obsahovat vnitřní mřížový bod, jak je naznačeno. Nejdelší strana elementárního trojúhelníku je úhlopříčka obdélníku a jediné mřížové body na úhlopříčce jsou její krajní body.

Vepsáním elementárního trojúhelníku $OUZ$ do obdélníku vznikne čtyřúhelník $OWUZ$ viz obrázek 2.6. Pro čtyřúhelník platí Pickův vzorec, protože může být rozdělen na obdélník a dva pravoúhlé trojúhelníky, jak ukazuje daný obrázek. Pickův vzorec také platí pro pravoúhlý trojúhelník $OWU$. Odečtením obsahů




Obrázek 2.6: Doplnění elementárního trojúhelníku do čtyřúhelníku

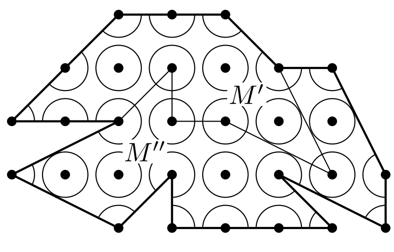
dostáváme, že musí platit i pro elementární trojúhelník $OUZ$. Elementární trojúhelník má $I = B = 3$, a tak z Pickova vzorce, který je již dokázán pro obdélníky a pravoúhlé trojúhelníky, dostáváme, že obsah elementárního trojúhelníku je $\frac{1}{2}$. ❑

Tímto je dokončen důkaz Pickova vzorce. Ukázali jsme, že Pickův vzorec je platný pro elementární trojúhelníky. Díky aditivitě bude vzorec platný i pro jednoduché mnohoúhelníky, které složíme z elementárních trojúhelníků. Na druhou stranu pokud máme jednoduchý mnohoúhelník, můžeme jej rozdělit na elementární trojúhelníky, pro než Pickův vzorec platí, a opět díky aditivitě Pickova vzorce dostaneme obsah celého jednoduchého mnohoúhelníku. ❑

## 2.2 Důkaz Pickova vzorce přes úhly viditelnosti

Pickův vzorec je dokázán, ale jak již bylo řečeno dříve, důkazů tohoto krásného vztahu je mnohem více. Někomu se možná bude více líbit následující přímočarý důkaz. Publikoval jej Dale E. Varberg [17] a je založený na myšlence o úhlech viditelnosti.

*Důkaz.* Nejdříve přiřaďme každému mřížovému bodu $P_k$ uvnitř mnohoúhelníku $M$ váhu $w_k = \frac{\theta_k}{2\pi}$, kde $\theta_k$ je úhel „viditelnosti“ v bodě $P_k$, kterým se díváme dovnitř mnohoúhelníku.



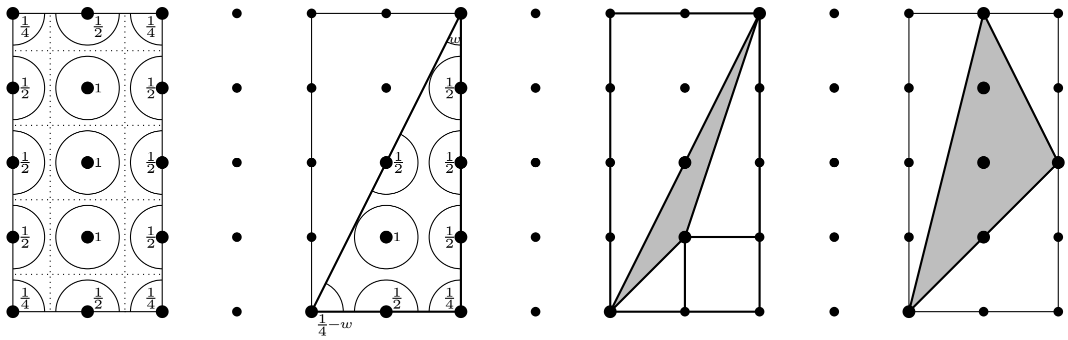

Obrázek 2.7: Mnohoúhelník rozdělený na dva mnohoúhelníky s naznačenými úhly viditelnosti

Vnitřní mřížové body mnohoúhelníku mají $w_k = 1$, mřížové body, které leží na hranách mnohoúhelníku a nejsou jeho vrcholy, mají $w_k = \frac{1}{2}$. Ve vrcholu, který má například $w_k = \frac{1}{4}$, hrany svírají pravý úhel, nebo ve vrcholu, který má $w_k = \frac{1}{6}$, hrany svírají úhel $\frac{\pi}{3}$ atd. O váze $w_k$ můžeme uvažovat jako o příspěvku, který vrchol $P_k$ přidává do společného obsahu mnohoúhelníku.

Budeme definovat veličinu

$$W = \sum_{P_k \in M} w_k.$$

Ukážeme, že $W$ je obsah mnohoúhelníku. Nejdříve se zaobírejme otázkou, jestli je $W$ aditivní podobně jako obsah. To znamená, že pokud máme mnohoúhelník $M$, který vznikne spojením dvou mnohoúhelníků $M'$ a $M''$, je $W(M) = W(M') + W(M'')$. Popsaná vlastnost je důsledek toho, že úhly viditelnosti v $M'$ a $M''$ v mřížových bodech na jejich společné hraně dávají úhly viditelnosti vůči mnohoúhelníku $M$, tedy opravdu $W$ je aditivní.




Obrázek 2.8: Obdélník s naznačenými úhly viditelnosti, převzatý z [7]

V dalším kroku musíme ukázat, že $W$ odpovídá obsahu mnohoúhelníku. Nejdříve uvažme obdélník, který má hrany rovnoběžné s osou $x$ a $y$ a jehož vrcholy leží v mřížových bodech. Pro tento případ je zřejmé, že $W$ je obsah obdélníku, jak je ilustrováno na obrázku 2.8 vlevo. Pokud uvážíme pravoúhlý trojúhelník, který má odvěsny rovnoběžné s osami $x$ a $y$, veličina $W$ opět dává stejný výsledek jako obsah, protože stačí díky již dokázané aditivitě vzít $W$ pro celý obdélník a vydělit je dvěma, viz obrázek 2.8.

Dále libovolný trojúhelník lze doplnit na obdélník s využitím pravoúhlých trojúhelníků a obdélníků, jak je naznačeno na obdélnících vpravo na obrázku 2.8. Veličina $W$ je aditivní, a tak $W$ obecného trojúhelníku dostaneme vhodným odečtením veličiny $W$ pro obdélníky a pravoúhlé trojúhelníky. Stejně tak bychom získali i obsah takového trojúhelníku, a tak $W$ pro obecný trojúhelník je roven obsahu tohoto trojúhelníku.

Poznamenejme, že v důkazu zatím nebyl nikde použit předpoklad o jednoduchosti mnohoúhelníku. Princip, na kterém je důkaz založen, využijeme ještě v Kapitole 3.1, kde budeme mluvit o zobecněném Pickově vzorci pro mnohoúhelníky, které nejsou jednoduché.

Konečně se dostáváme k samotnému důkazu Pickova vzorce. Pro jednoduchý mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou mřížové body, platí podle Věty 1

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

kde $I$ je počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku a $B$ je počet mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku.

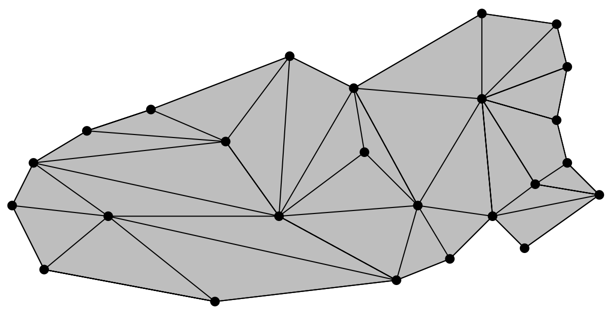
Jednoduchý $n$-úhelník má $n$ vnitřních úhlů, což jsou právě všechny úhly viditelnosti při vrcholech a jejich součet je $(n-2)\pi$. Například trojúhelník má součet vnitřních úhlů $\pi$, čtyřúhelník $2\pi$ atd. Počet mřížových bodů, které jsou na hranici $n$-úhelníku, ale nejsou jeho vrcholy je $B - n$, pak je součet úhlů viditelnosti k nim náležejícím $(B-n)\pi$. Teď již dostáváme, že součet všech úhlů viditelnosti, náležejících všem $B$ mřížovým bodům na hranici mnohoúhelníku (jak vrcholům, tak bodům, které nejsou vrcholy mnohoúhelníku), je $(B - n)\pi + (n - 2)\pi = (B - 2)\pi$. Takže pokud **I** je množina vnitřních mřížových bodů mnohoúhelníku $M$ a **B** je množina mřížových bodů na jeho hranici, je obsah mnohoúhelníku

$$S = W(M) = \sum_{P_k \in \mathbf{I}} w_k + \sum_{P_k \in \mathbf{B}} w_k = I + \frac{(B-2)\pi}{2\pi} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

❑

## 2.3 Třetí důkaz Pickova vzorce

Než se pustíme do dalšího důkazu Pickova vzorce, který opět vychází z knihy [11], ujasněme si, co rozumíme pod pojmem triangulace nějakého mnohoúhelníku již ne nutně s vrcholy v mřížových bodech. **Triangulace** je rozdělení tohoto mnohoúhelníku na trojúhelníky tak, že žádný z vrcholů nějakého z trojúhelníků neleží na hraně jiného trojúhelníku, jak je naznačeno na obrázku 2.9.



Obrázek 2.9: Možná triangulace mnohoúhelníku

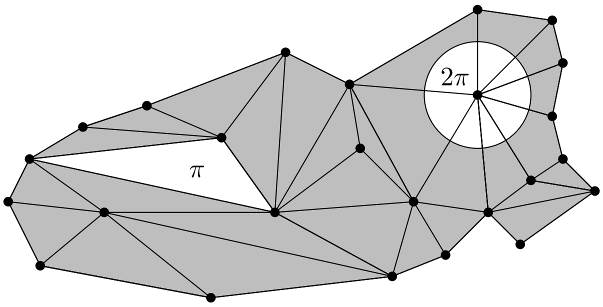
Jak již víme díky Tvrzení 2 a 3, jednoduchý mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech má elementární triangulaci a obsah každého elementárního trojúhelníku je $\frac{1}{2}$. K důkazu Pickova vzorce by tedy vlastně stačilo zjistit, kolik elementárních trojúhelníků je v každé takové elementární triangulaci. Pokud by tento počet byl $2I + B - 2$, kde, jak jsme již zvyklí, $I$ je počet vnitřních a $B$ počet hraničních mřížových bodů, byli bychom hotovi. Je to pravda, ale tento fakt musíme dokázat a uděláme to pro mnohoúhelník, jehož vrcholy nemusejí být mřížové body.

**Tvrzení 4.** *Triangulace jednoduchého mnohoúhelníku s $B$ vrcholy na hranici a $I$ vrcholy uvnitř je složená z $T$ trojúhelníků, kde pro $T$ platí*

$$T = 2I + B - 2.$$

*Důkaz.* K ověření tohoto tvrzení uvažme součet všech vnitřních úhlů všech trojúhelníků v triangulaci mnohoúhelníku, který označíme $\Upsilon$. Tento součet budeme počítat dvěma způsoby a porovnáme oba výsledky. Zaprvé každý trojúhelník v triangulaci má součet vnitřních úhlů roven $\pi$. Takže

$$\Upsilon = T\pi.$$




Obrázek 2.10: Triangulace s naznačenými součty úhlů

Zadruhé součet úhlů okolo každého z $I$ vnitřních bodů je $2\pi$ a v $B$ vrcholech na hranici je součet $\pi(B-2)$ podle vzorce pro součet vnitřních úhlů mnohoúhelníku. Tedy dostáváme

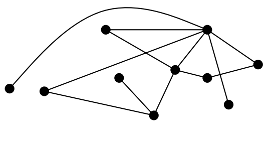
$$\Upsilon = \big(2I + (B-2)\big)\pi.$$

Pokud porovnáme oba vztahy pro $\Upsilon$ dostaneme požadovanou rovnost.

❏

## 2.4 Eulerův vzorec

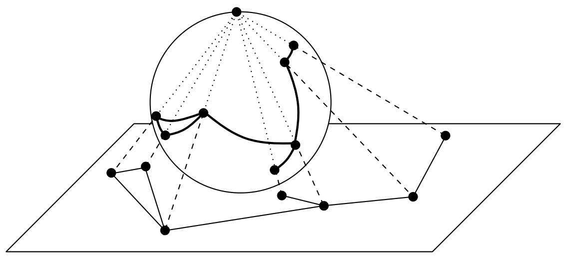
K dalšímu důkazu Pickova vzorce využijeme Eulerův vzorec, který nás zavede na výlet do teorie grafů. Ale pozor, nejedná se o grafy funkcí, ale o jistá schémata, která vhodným způsobem popisují nejrůznější situace. **Grafem G** chápeme množinu **vrcholů** $\mathcal{V}$ spolu s množinou **hran** $\mathcal{H}$, což jsou spojnice mezi některými dvojicemi vrcholů. Vrcholy grafu mohou například znázorňovat obce v nějakém okrese a hrany silnice mezi nimi. Jindy mohou vrcholy reprezentovat účastníky nějakého plesu a spojnice mohou reprezentovat dvojice účastníků, kteří se navzájem znají.



Obrázek 2.11: Příklad grafu

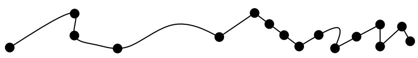
Pokud bychom se ponořili do teorie grafů hlouběji, setkali bychom se s nejrůznějšími typy grafů. Právě zavedený pojem grafu by potom dostal další upřesňující přízviska: obyčejný neorientovaný graf.

Z plejády nejrůznějších grafů nás bude zajímat **rovinný graf**, čímž rozumíme graf, který lze nakreslit v rovině bez toho, aby se hrany křížily. Každý takový graf rozděluje rovinu na konečný počet oblastí, které budeme nazývat **stěny**. Pozor, mezi stěny počítáme i oblast vně grafu. Ekvivalentně lze definovat rovinný graf jako takový graf, který lze nakreslit na dvoudimenzionální sféru bez toho, aby se jeho hrany křížily. Tato ekvivalence vychází například z toho, že na sféře lze zvolit libovolný bod, který není vrcholem grafu, ani není na jeho hraně, a z tohoto bodu můžeme stereografickou projekcí zobrazit zbytek sféry do roviny. Stereografická projekce je naznačená na obrázku 2.12.



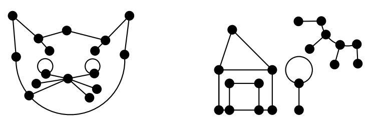
Obrázek 2.12: Stereografická projekce grafu na sféře

Ještě než se dostaneme k Eulerově vzorci, seznámíme se s několika pojmy teorie grafů. Posloupnost vrcholů $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ postupně propojených hranami z $P_1$ do $P_2$, z $P_2$ do $P_3$ ... z $P_{n-1}$ do $P_n$ se nazývá **cesta**.



Obrázek 2.13: Příklad cesty

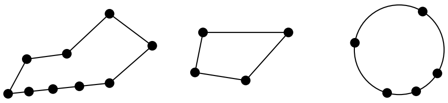
**Souvislý graf** je pak takový graf, v němž existuje cesta mezi každými dvěma vrcholy.



Obrázek 2.14: Příklad souvislého a nesouvislého grafu

**Kružnice** je uzavřená cesta z vrcholu, přes jiné vrcholy zpět do původního vrcholu, tj. jedná se o cestu, v níž je $P_1 = P_n$.

**Strom** je takový graf, který je souvislý a neobsahuje kružnici. **Kostrou grafu** rozumíme nejmenší souvislý podgraf **G** souvislého grafu, to znamená, že obsahuje všechny vrcholy grafu a některé z původních hran tak, aby počet hran byl minimální, ale graf **G** zůstal souvislý. Takto zavedená kostra grafu je stromem, tj. neobsahuje žádnou uzavřenou kružnici, protože z kružnice lze odstranit jednu hranu a získat stále souvislý graf s menším počtem hran. Není těžké si rozmyslet, že libovolný strom má počet vrcholů o jedna větší než je počet jeho hran. Zkuste si to rozkreslit. Důkaz by postupoval indukcí od nejjednodušího stromu, což je jeden vrchol k větším stromům. Stačí si uvědomit, že s každým přidáním hrany přibude i jeden vrchol.



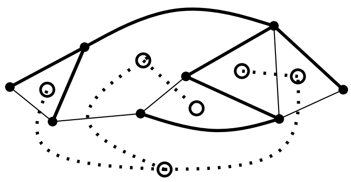
Obrázek 2.15: Příklad kružnic v teorii grafů

**Věta 5.** ***(Eulerův vzorec)*** *Pro souvislý rovinný graf* **G** *s $V$ vrcholy, $H$ hranami a $S$ stěnami platí*

$$V - H + S = 2.$$

Důkazů Eulerova vzorce je bezpočet, uvedeme důkaz z knihy [1], který lze dohledat již v knize od von Stauda z roku 1847.

*Důkaz.* Buď $\mathcal{T} \subset \mathcal{H}$ podmnožina hran grafu **G**, které jsou hranami kostry grafu **G**. Dále budeme potřebovat duální graf $\mathbf{G}^*$ k grafu **G**. Ten vznikne následujícím postupem: Do grafu **G** přidáme jeden nový vrchol do každé stěny, nezapomeneme ani na vnější stěnu. Tyto vrcholy propojíme hranou tehdy, pokud odpovídající si stěny mají společnou hranu. Pokud stěny sousedí několika hranami, přes každou hranu nakreslíme jednu novou hranu. Tím jsme získali duální graf $\mathbf{G}^*$.



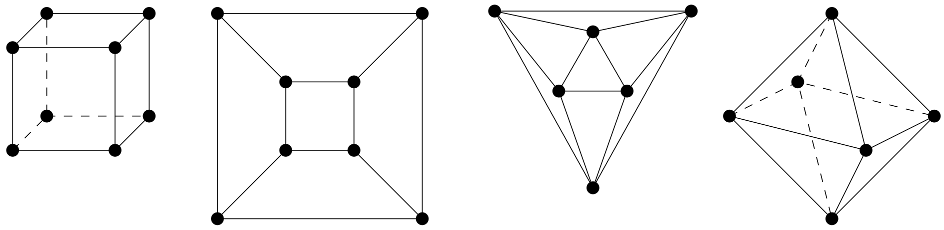
Obrázek 2.16: Kostra v duálním grafu

Uvažme $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{H}^*$ množinu hran v duálním grafu, která odpovídá hranám grafu **G**, které nejsou hranami libovolné pevně zvolené kostry, tj. nejsou v $\mathcal{T}$. Hrany v $\mathcal{T}^*$ propojují všechny stěny, protože původní kostra grafu $\mathcal{T}$ neobsahuje kružnice. Také $\mathcal{T}^*$ neobsahuje kružnice, protože jinak by oddělila nějaký vrchol grafu **G** uvnitř kružnice od hran vně kružnice. To nelze, protože $\mathcal{T}$ spojuje všechny vrcholy grafu $G$ a s $\mathcal{T}^*$ nemá žádný průsečík. Takže $\mathcal{T}^*$ je kostrou v $\mathbf{G}^*$.

Pro každý strom platí, jak jsme si rozmysleli výše, že počet jeho vrcholů je o jedna větší než počet jeho hran. Pro strom $\mathcal{T}$ dostaneme, že počet vrcholů je $V = H_{\mathcal{T}} + 1$ zatímco pro $\mathcal{T}^*$ dostaneme počet stěn $S = H_{\mathcal{T}^*} + 1$, kde $H_{\mathcal{T}}$ značí počet hran v $\mathcal{T}$ a $H_{\mathcal{T}^*}$ počet hran v množině $\mathcal{T}^*$. Sečtením obou rovností dostaneme $V + S = (H_{\mathcal{T}} + 1) + (H_{\mathcal{T}^*} + 1) = H + 2$. Přitom jsme využili vztah $H = H_{\mathcal{T}} + H_{\mathcal{T}^*}$, protože každá hrana grafu **G** je buď součástí kostry grafu **G** nebo jí odpovídá hrana duální kostry $\mathcal{T}^*$.

❑

Euler dokázal rovnost $V - H + S = 2$ již v roce 1752, někdy se však tvrdí, že tento vztah znal již Descartes v roce 1640. Původní tvrzení však popisovalo namísto rovinných grafů konvexní mnohostěny, pro které platí stejný vztah. **Konvexní mnohostěny**, totiž takové, že spojnice libovolných dvou jejich bodů leží celá uvnitř mnohostěnu, tj. že povrch není nikde „prohnutý dovnitř“, lze převést



Obrázek 2.17: Graf krychle a osmistěnu

na rovinné grafy, které mají stejný počet vrcholů, hran a stěn. Na obrázku jsou naznačeny rovinné grafy pro krychli a osmistěn.

Pro zajímavost uveďme, že v topologii, která zkoumá vlastnosti těles a prostorů bez ohledu na vzdálenosti, úhly či křivosti, se zavádí **Eulerova charakteristika** tělesa $\chi = 2 - 2g$, kde $g$ je tzv. rod, který udává počet „děr“ v tělese. Například koule nebo krychle má rod 0, torus má rod 1 stejně jako hrneček s jedním uchem a hrnec se dvěma uchy má rod 2. Pro nejrůznější hranoly se Eulerova charakteristika $\chi$ počítá právě pomocí nám již známého vzorce

$$\chi = V - H + S.$$

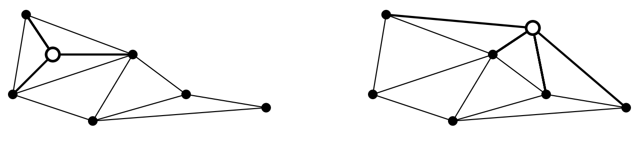
Například rod krychle nebo jiných konvexních těles je nula, tedy opravdu

$$V - H + S = 2 = \chi.$$

Následující větu o hranách a z ní vycházející důkaz Pickova vzorce publikoval W. W. Funkenbusch [6] v roce 1974.

**Věta 6.** ***(o hranách)***
*Počet hran grafu, který je triangulací jednoduchého mnohoúhelníku, splňuje* $H = 3I + 2B - 3$*, kde* $H$ *je počet hran,* $B$ *je počet vrcholů na hranici grafu a* $I$ *je počet vrcholů uvnitř grafu.*

*Důkaz.* Mějme graf, který je triangulací jednoduchého mnohoúhelníku. Abychom tvrzení dokázali stačí ukázat, že vzorec platí pro nejjednodušší jednoduchý mnohoúhelník a že platí pro mnohoúhelníky, které vzniknou, přidáme-li do grafu jeho triangulace nový vrchol a tím tento graf zvětšíme. Nejjednodušší mnohoúhelník je trojúhelník, tj. $B = 3$, $I = 0$ a vzorec je splněn, protože počet hran je $H = 3$.



Obrázek 2.18: Příklad přidání bodů

Předpokládejme, že vzorec platí pro nějaký graf, který je triangulací jednoduchého mnohoúhelníku, existují dvě možnosti, jak přidat do grafu nový vrchol. Pokud přidáme do grafu vnitřní bod jako na obrázku 2.18 vlevo, zvedne se počet hran $H$ v grafu o 3 a dokazovaný vzorce bude stále platit.

Pokud přidáme do grafu hraniční vrchol jako na obrázku 2.18 vpravo, přidáme nějaký počet nových hran, který označme $X$. Počet nových hran je minimálně 2 a to kvůli tomu, aby se stále jednalo o triangulaci nějakého jednoduchého mnohoúhelníku. Dvě nové hrany jdou do vrcholů, které zůstaly hraničními a zbylé jdou do vrcholů, které byly původně hraniční, ale teď jsou vnitřní, takže je těchto nově vnitřních vrcholů $X - 2$. Počet vrcholů uvnitř se tedy zvýšil o $X - 2$, vrcholům na hranici přibyl jeden nový a ubylo $X - 2$ vrcholů. Dosaďme do dokazovaného vzorce:

$$H + X = 3(I + X - 2) + 2\big(B + 1 - (X - 2)\big) - 3,$$

$$H + X = 3I + 2B - 3 + 3X - 2X - 6 + 6.$$

Vidíme, že jej můžeme upravit na vztah pro původní graf bez přidaného vrcholu

$$H = 3I + 2B - 3,$$

proto vzorec platí i pro větší graf. Tímto je správnost vzorce ověřena. ❑

Nyní již máme vše důležité a můžeme ukázat důkaz Pickova vzorce s využitím Eulerova vzorce.

*Důkaz.* Mějme mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech a jeho elementární triangulaci. Použijeme-li Eulerův vzorec $V - H + S = 2$ pro tento rovinný graf, dostaneme

$$V = I + B,$$

$$S = 2 - V + H,$$

$$H = 3I + 2B - 3.$$

Počet elementárních trojúhelníků je $S - 1$ a jejich obsah, jak již bylo dokázáno dříve viz Tvrzení 3, je $\frac{1}{2}$. Obsah mnohoúhelníku je pak

$$\frac{1}{2}(S - 1) = \frac{1}{2}(2 - (I + B) + (3I + 2B - 3) - 1) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

❑

## 2.5 Další výsledky o mřížových bodech

Pickův vzorec není jediným výsledkem o mřížových bodech. V dalším uvedeme několik zajímavých vět a, aby nenásledoval jen jejich výpis, dokážeme pomocí Minkowského věty jiným způsobem Tvrzení 3 z prvního důkazu Pickova vzorce.

Začneme větou, kterou Blichfeldt publikoval v roce 1914 v článku [3]. Bez zajímavosti není ani to, že tvrzení věty může být dokonce zobecněno do libovolné dimenze.

**Věta 7.** ***(Blichfeldt)*** *Každý omezený rovinný obrazec $M$ s obsahem ostře větším než $A$ muže být posunut tak, aby počet mřížových bodů uvnitř $M$ byl alespoň $A+1$.*

**Věta 8.** ***(Browkin)*** *Pro libovolné přirozené číslo $n$ existuje v rovině čtverec s právě $n$ mřížovými body uvnitř.*

Toto tvrzení, které lze nalézt v [18], bylo dokonce zobecněno na libovolný tvar, o což se zasloužili Schinzel a Kulikowski. Browkin poté tvrzení převedl do tří dimenzí a dokázal jej pro krychli.

Následuje tvrzení, které dokázal Hermann Minkowski v roce 1889. Nejdříve však osvětlíme následující pojmy.

**Omezená množina** je taková množina, kterou lze celou uzavřít do koule o konečném poloměru.

Pokud řekneme o množině, že je **symetrická kolem počátku**, máme na mysli, že pokud je v množině bod se souřadnicemi $[x_1, \dots, x_n]$, pak je v množině také bod $[-x_1, \dots, -x_n]$.

**Věta 9.** ***(Minkowski)*** *V $n$-rozměrném prostoru platí, že každá omezená konvexní množina $C$, která je symetrická kolem počátku a má obsah větší než $2^n$, obsahuje nejméně jeden mřížový bod kromě počátku.*

*Speciálně: omezená konvexní množina v rovině, která je symetrická kolem počátku a má obsah větší než 4, musí obsahovat nejméně jeden mřížový bod, kromě počátku.*

Lze najít nejrůznější přímé důkazy Minkowského věty, například v článku [15], nebo je také možné tvrzení v celé obecnosti dokázat pomocí Blichfeldtovy věty. Pro nás však bude stačit Minkowského větu dokázat pouze v rovině.

Ještě než se však pustíme do důkazu, který postupuje podle [2], vysvětlíme, co znamená operace „$a \bmod b$“. Výsledkem je zbytek po dělení čísla $a$ číslem $b$. Pokud navíc chceme říci, že i číslo $c$ má stejný zbytek po dělení číslem $b$ jako $a$, zapíšeme to takto

$$c \equiv a \bmod b.$$

Tento zápis čteme: $c$ **je kongruentní s** $a$ **modulo** $b$. Např. platí $7 \equiv 22 \bmod 5$. Čísla $a$ a $c$ však nemusí být pouze celá a kladná, např. $-1{,}7 \equiv 3{,}3 \bmod 5$.

*Důkaz.* V důkazu budeme používat mřížové body a dvojnásobné mřížové body, tedy takové body, které jsou ve tvaru $[2x, 2y]$, pro $x, y \in \mathbb{Z}$.

Celá rovina $\mathbb{R}^2$ lze „vydláždit“ čtverci, $X + (\lambda, \mu)$, kde $X$ je dvojnásobný mřížový bod a parametry $\lambda$, $\mu$ probíhají celý interval $\langle 0,2)$. Tyto čtverce jsou disjunktní, to znamená, že žádné dva z nich nemají společný bod.

Množina $C$ je omezená, proto je překryta jen konečným počtem čtverců $X_1 + (\lambda, \mu)$, …, $X_n + (\lambda, \mu)$, označme $C_1$, …, $C_n$ průniky množiny $C$ se čtverci, tj. $C_1 = C \cap \big(X_1 + (\lambda, \mu)\big)$, atd. Pak jsou jistě $C_1$, …, $C_n$ disjunktní a součet jejich obsahů je roven obsahu množiny $C$.

Označme $\square$ čtverec $[0,0] + (\lambda, \mu)$, $\lambda$, $\mu \in \langle 0,2)$. Zobrazení

$$f : [x,y] \mapsto [x \bmod 2, y \bmod 2]$$

zobrazuje celou rovinu do čtverce $\square$ tedy $f : \mathbb{R}^2 \to \square$. Toto zobrazení přesune všechny kousky $C_1$, …, $C_n$ do čtverce $\square$. Obsah množiny $C$ je stejný jako součet obsahů jednotlivých kousků $C_1$, …, $C_n$ a je podle předpokladu věty větší než 4, což je obsah čtverce $\square$. Proto se musí alespoň dva kousky $f(C_j)$ a $f(C_k)$ překrývat. V tomto překryvu vyberme bod $f(P_1) = f(P_2)$, že $P_1 \in C_j$ a $P_2 \in C_k$.

To znamená, že pro souřadnice bodů $P_1 = [x_1,y_1]$ a $P_2 = [x_2,y_2]$ musí platit $x_1 \equiv x_2 \bmod 2$ a $y_1 \equiv y_2 \bmod 2$, což lze jinak zapsat také jako $(x_1 - x_2) \equiv 0 \bmod 2$ a $(y_1 - y_2) \equiv 0 \bmod 2$, tj. čísla $x_1 - x_2$ a $y_1 - y_2$ jsou dělitelná dvěma. Protože body $P_1$ a $P_2$ jsou různé, nejsou obě tyto čísla zároveň rovna nule.

Protože je množina $C$ symetrická podle počátku leží v ní bod $-P_2 = [-x_2,-y_2]$ a protože je konvexní leží uvnitř množiny $C$ celá úsečka mezi body $P_1$ a $-P_2$. Střed této úsečky bod $\frac{1}{2}(P_1 - P_2) = [\frac{1}{2}(x_1 - x_2),\frac{1}{2}(y_1 - y_2)]$ tedy jistě leží v množině $C$. Jak už víme, čísla $x_1 - x_2$ a $y_1 - y_2$ jsou dělitelná dvěma a nejsou zároveň obě nuly, proto bod $\frac{1}{2}(P_1 - P_2)$ má celočíselné souřadnice a jedná se o jeden hledaný mřížový bod v množině $C$, který není počátkem.

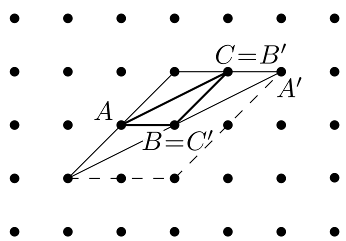
❑

Z Minkowského věty máme, že v množině leží kromě počátku jeden nenulový mřížový bod, ze symetrie množiny však dostáváme, že tam existuje ještě bod s tímto symetrický. Pokud započítáme i počátek, tedy nulový mřížový bod, který je v množině díky její konvexitě, dostaneme tvrzení:

V omezené konvexní množině v $\mathbb{R}^n$ symetrické kolem počátku, která má obsah větší než $2^n$, jsou alespoň tři mřížové body.

S pomocí Minkowského věty ukážeme jiným způsobem jeden ze základních stavebních prvků důkazů Pickova vzorce a to, že obsah elementárního trojúhelníku je jedna polovina, viz Tvrzení 3. V první části důkazu budeme postupovat podle článku [15].

*Důkaz.* Nechť $\Delta ABC$ je elementární trojúhelník. Otočme tento trojúhelník o $180°$ kolem středu hrany $a$, která je proti vrcholu $A$. Nový trojúhelník označme jako $\Delta A'B'C'$, vrchol $B'$ odpovídá v otočení vrcholu $C$ a $C' = B$. Tato rotace přesouvá mřížové body na mřížové body. Protože jediné mřížové body, které byly v $\Delta ABC$, jsou jeho vrcholy, uvnitř rovnoběžníku $ABA'C$ také nebudou žádné mřížové body.




Obrázek 2.19: Náčrt rovnoběžníku vzniklého z elementárního trojúhelníku

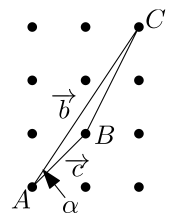
Dále proveďme rotaci kolem středů zbývajících hran. Získáme trojúhelník, jehož střední příčky tvoří původní trojúhelník $\Delta ABC$. Uvnitř tohoto trojúhelníku také není žádný vnitřní mřížový bod. Otočme celý velký trojúhelník kolem bodu $B$ o $180°$. Původní a otočený trojúhelník tvoří rovnoběžník, který je omezený, konvexní a symetrický kolem bodu $B$, který je jediný vnitřní bod v rovnoběžníku a který označme jako počátek. Podle Minkowského věty nemůže mít rovnoběžník obsah větší než 4. Rovnoběžník je tvořen osmi elementárními trojúhelníky shodnými s $\Delta ABC$, a tak obsah elementárního trojúhelníku může být nejvýše $\frac{1}{2}$.

Pro výpočet dolního odhadu obsahu trojúhelníku s vrcholy o celočíselných souřadnicích $A = [a_1,a_2],B = [b_1,b_2]$ a $C = [c_1,c_2]$ použijeme vektorový součin.

Platí totiž

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}\,|\sin\alpha = \frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}\,|$$

pro vektory $\vec{b} = (a_1 - c_1, a_2 - c_2, 0)$ a $\vec{c} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, 0)$ a úhel $\alpha$ mezi nimi při vrcholu $A$.




Obrázek 2.20: vektorový součin

Dostáváme

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\big((a_1 - c_1)(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1)(a_2 - c_2)\big),$$

což je $\frac{1}{2}$ krát nějaké nenulové celé číslo, tedy obsah trojúhelníku bude nejméně $\frac{1}{2}$. v předchozí části důkazu jsme zjistili, že obsah trojúhelníku může být nejvýše $\frac{1}{2}$, a tak dostáváme, že obsah elementárního trojúhelníku je $\frac{1}{2}$.

❑

# Kapitola 3

# Zobecnění a rozšíření

V této kapitole budeme uvažovat, jak rozšířit Pickův vzorec pro složitější tvary a nebudeme se již omezovat pouze na jednoduché mnohoúhelníky. V druhé části se dotkneme otázky rozšíření Pickova vzorce do prostoru.

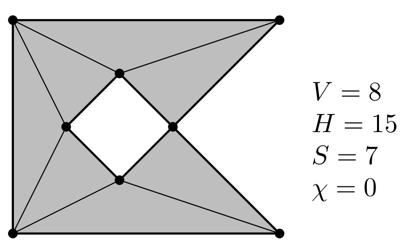
## 3.1 Zobecnění pro rozmanitější tvary

Pro zobecnění budeme vycházet z článku [17]. Budeme uvažovat obecný mnohoúhelník $M$, který má vrcholy v mřížových bodech, a může obsahovat díry nebo se jeho hrany mohou protínat. Jediné, co požadujeme, je, aby mnohoúhelník byl sjednocením konečného počtu trojúhelníků, které mají vrcholy v mřížových bodech. Pickův vzorec je potřeba pro takovéto obecnější mnohoúhelníky drobně upravit. H. Hadwiger a J. M. Wills v článku [8] uvedli a ukázali tento zobecněný Pickův vzorec.

**Věta 10.** ***(Zobecněný Pickův vzorec)*** *Buď $M$ mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou mřížové body. Pak*

$$S = V - \frac{H}{2} - \chi,$$

*kde $V$ je počet všech mřížových bodů uvnitř a na hranách mnohoúhelníku, $H$ je počet jeho hran (spojnic od mřížového bodu k mřížovému bodu) a $\chi$ je Eulerova charakteristika.*




Obrázek 3.1: Možná triangulace pro počítání Eulerovy charakteristiky

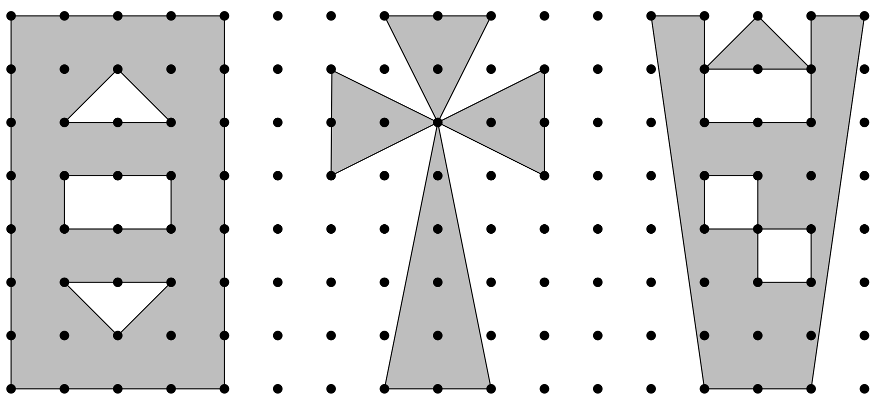
O Eulerově charakteristice jsme se již zmínili před Větou 6, mluvili jsme ale o prostorových tělesech. **Eulerova charakteristika pro mnohoúhelníky** se počítá podobně. Najdeme nějakou triangulaci tohoto mnohoúhelníku a spočteme počet vrcholů $V$, počet hran $H$ a počet trojúhelníků, neboli vnitřních stěn $S$, které patří do mnohoúhelníku, pak je Eulerova charakteristika rovna

$$\chi = V - H + S.$$

Pro jednoduchý mnohoúhelník vychází Eulerova charakteristika 1, pro mnohoúhelník, který má $m$ oddělených děr, je Eulerova charakteristika rovna $1 - m$.

Pro jednoduché mnohoúhelníky zobecněný Pickův vzorec platí, protože počet bodů na hranici mnohoúhelníku je roven počtu hran, ze kterého se hranice mnohoúhelníku skládá $B = H$ a Eulerova charakteristika je 1.

Než budeme dokazovat zobecněný Pickův vzorec v plné obecnosti, ověřme jej v případě mnohoúhelníku s $m$ oddělenými dírami, které jsou samy o sobě jednoduché mnohoúhelníky. Například vlevo na obrázku 3.2 je takový mnohoúhelník s $m = 3$. Eulerova charakteristika je pro takový mnohoúhelník s $m$ dírami rovna $\chi = 1 - m$.



| | | |
|---|---|---|
| $V = 40$ | $V = 20$ | $V = 26$ |
| $H = 36$ | $H = 16$ | $H = 24$ |
| $\chi = -2$ | $\chi = 1$ | $\chi = -2$ |
| $S = 40 - \frac{1}{2} \cdot 36 + 2$ | $S = 20 - \frac{1}{2} \cdot 16 - 1$ | $S = 26 - \frac{1}{2} \cdot 24 + 2$ |

Obrázek 3.2: Nejednoduché mnohoúhelníky

K ověření zobecněného Pickova vzorce (10) použijeme pro mnohoúhelník s $m$ dírami princip z důkazu Pickova vzorce přes úhly viditelnosti, viz podkapitola 2.2. Označme $B_0$, $B_1, \ldots, B_m$ počty mřížových bodů na vnější hranici a na hranicích jednotlivých $m$ děr. Celkový počet mřížových bodů na hranici pak je $B_0 + B_1 + \ldots + B_m = B$ a počet hran je roven počtu mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku $H = B$. Pro celkový počet mřížových bodů pak zřejmě platí $V = I + B = I + H$. Dále si stačí uvědomit, že součet úhlů viditelnosti dovnitř mnohoúhelníku na $k$-té díře, je $(B_k+2)\pi$, zatímco na vnější hranici je to $(B_0-2)\pi$. Pak již můžeme vypočítat obsah mnohoúhelníku jako součet počtu vnitřních mřížových bodů $I$ a těch úhlů viditelnosti $\theta_k$ dovnitř mnohoúhelníku vydělených $2\pi$, které odpovídají mřížovým bodům $P_k$ ležícím na hranici mnohoúhelníku, tj. všem mřížovým bodům z množiny $\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned} S &= I + \frac{1}{2\pi} \sum_{P_k \in \mathbf{B}} \theta_k = \\ &= I + \frac{(B_0 - 2)}{2} + \frac{(B_1 + 2)}{2} + \ldots + \frac{(B_m + 2)}{2} = \\ &= I + \frac{1}{2}(B_0 + B_1 + \ldots + B_m) + (m - 1) = \\ &= I + \frac{B}{2} - \chi = V - \frac{H}{2} - \chi. \end{aligned}$$

Postup s využitím úhlů viditelnosti již bohužel nebude fungovat pro prostřední a pravý mnohoúhelník na obrázku 3.2, protože na nich se hranice mnohoúhelníku protíná a již počet vrcholů na hranici neodpovídá počtu hraničních úseků, tj. $B \neq H$. Zde jsme již nuceni ke klasickému použití elementárních trojúhelníků.

*Důkaz.* Předpokládejme, že obecný mnohoúhelník, jehož obsah nás zajímá, je rozdělen na elementární trojúhelníky, tj. máme nějakou jeho elementární triangulaci s vrcholy v mřížových bodech. Označme $V$, $H_t$ a $S_t$ počet vrcholů, hran a trojúhelníků v této triangulaci. Každý trojúhelník má 3 hrany a každá z hran náleží dvěma trojúhelníkům kromě hran, které jsou na okraji mnohoúhelníku $M$. Takže dostáváme $3S_t = 2H_t - H$, pokud tuto rovnost upravíme, dostaneme

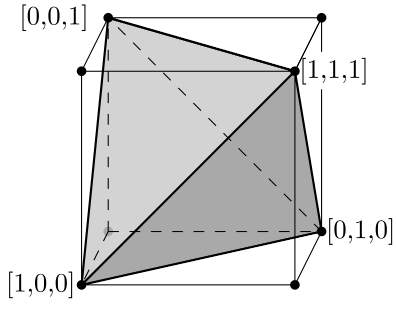
$$S_t = -H + 2H_t - 2S_t = -H + 2V - 2(V - H_t + S_t) = 2V - H - 2\chi.$$

Každý elementární trojúhelník má obsah $\frac{1}{2}$, z čehož již dostáváme požadovaný vztah pro obsah mnohoúhelníku $S = \frac{1}{2}S_t = V - \frac{H}{2} - \chi$.

❑

## 3.2 Rozšíření do prostoru

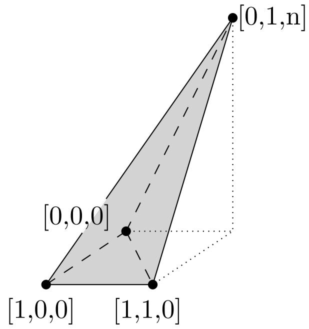
Minkowského věta platí i pro prostory vyšší dimenze. Mohli bychom si proto myslet, že i Pickův vzorec lze zobecnit pro vícedimenzionální prostory. Avšak tak jednoduché to není. Už v trojrozměrném prostoru lehce najdeme mnohostěny, jejichž vrcholy leží v mřížových bodech a které mají stejný počet mřížových bodů uvnitř a na hranici mnohostěnu, ale jejichž obsah je různý.




Obrázek 3.3: Čtyřstěn vepsaný do krychle

Obrázek z knihy [11] ukazuje jednotkovou krychli rozdělenou na pět jehlanů. Vnitřní jehlan s vrcholy [0,0,1], [1,0,0], [0,1,0] a [1,1,1] má všechny strany rovnostranné trojúhelníky a je pravidelným čtyřstěnem. Čtyři vnější jehlany pak mají tři stěny pravoúhlé trojúhelníky a jednu stěnu rovnostranný trojúhelník. Všechny jehlany mají čtyři mřížové body na své hranici a žádné vnitřní mřížové body. Pokud by existoval nějaký jednoduchý vzorec, který by podobně jako Pickův, využíval pouze počet mřížových bodů k určení objemu mnohostěnu v prostoru, měly by všechny tyto jehlany stejný objem. Ale pokud použijeme vzorec pro obsah jehlanu tj. obsah základny krát jedna třetina výšky, dostaneme, že každý ze čtyř vnějších jehlanů má objem $\frac{1}{6}$. Protože celá jednotková krychle má objem 1, musí být obsah vnitřního pravidelného jehlanu $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Další ilustrace tentokrát z [15] také ukazuje, proč neexistuje jednoduchá analogie Pickova vzorce v prostoru. Uvažujme jehlan, který má jako základnu trojúhelník s vrcholy [0,0,0], [1,0,0] a [1,1,0] a jehož vrchol je v bodě $[0,1,n]$, kde $n \in \mathbb{N}$. Tento jehlan jistě pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ neobsahuje žádné další mřížové body, objem však má podle vzorce pro objem jehlanu roven $\frac{n}{6}$.

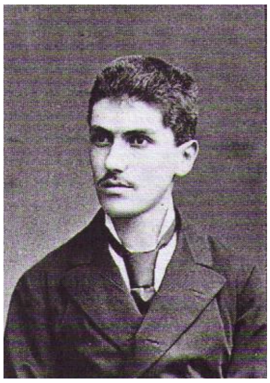



Obrázek 3.4: Jehlan, který má jen 4 vrcholy, ale různý objem podle polohy hlavního vrcholu

J. E. Reeve [16] zobecnil Pickův vzorec pro třídimenzionální prostor s využitím „půlmřížových bodů“. Těmito půlmřížovými body myslíme takové body $[a,b,c]$, že $[2a,2b,2c] \in \mathbb{Z}^3$. Reeve dokázal určit obsah mnohostěnu, jehož vrcholy jsou mřížové body, pomocí počtu mřížových a půlmřížových bodů uvnitř a na hranici mnohostěnu.

Dále se rozšířením Pickova vzorce do prostoru nebudeme zabývat. Tomu, koho by toto téma zajímalo, doporučuji článek [9].

# Medailonek o Georgu Pickovi



Obrázek 3.5: Georg Alexander Pick

Georg Alexander Pick se narodil 10. srpna 1859 ve Vídni do židovské rodiny, jeho rodiče byli Josefa Schleisinger a Adolf Josef Pick. Jeho otec jej vyučoval doma až do jedenácti let, pak nastoupil na gymnázium a následně v letech 1875 až 1879 studoval na univerzitě ve Vídni matematiku a fyziku. V roce 1880 získal doktorát pod vedením L. Königsbergera, který je považován za žáka K. Weierstrasse. Po dokončení doktorátu ve Vídni přijal místo pomocného asistenta E. Macha na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze. V roce 1882 byl Georg Pick habilitován, v roce 1888 byl jmenován mimořádným profesorem a v roce 1892 řádným profesorem matematiky na Pražské německé univerzitě. Dva semestry pravděpodobně 1884-1885 strávil na univerzitě v Lipsku, kde byl ovlivněn prací F. Kleina. Ve školním roce 1900-1901 byl děkanem filozofické fakulty. V roce 1927 byl jmenován emeritním profesorem. (Zasloužilý profesor, který v rámci své penze stále může působit na univerzitě.) Aktivní působení na univerzitě ukončil v roce 1929 a vrátil se do Vídně. Po obsazení Rakouska se odstěhoval v roce 1938 zpátky do Prahy. Zde byl Pick zvolen členem České akademie věd a umění, ale po obsazení Prahy nacisty byl z akademie vyloučen. Čtyři roky poté, co se vrátil do Prahy, byl dne 13. července 1942 deportován pod číslem 824 transportem AAq do Terezína. Tam o dva týdny později 26. července 1942 zemřel ve věku nedožitých 83 let.

Georg Pick působil 46 let v Praze jako vysokoškolský učitel. V pedagogické činnosti se věnoval hlavně analýze a geometrii. Vedl 20 disertačních prací. Mezi jeho doktorské studenty patří například E. Stránský nebo K. Löwner, pozdější profesor německé univerzity v Praze a po nucené emigraci profesor na významných amerických univerzitách.

V letech 1876 až 1939 publikoval Georg Pick 67 prací. Tyto práce jsou například z integrálního počtu, komplexní analýzy, diferenciálních rovnic, geometrie a diferenciální geometrie. Jméno Pick není v matematice zapomenuto, kromě Pickova vzorce jeho jméno nese ještě Schwarzovo-Pickovo lemma, které rozšiřuje Schwarzovo lemma z komplexní analýzy, nebo Pickova matice, která souvisí s interpolací analytických funkcí.

Za zmínku také stojí přátelství mezi Georgem Pickem a Albertem Einsteinem. Pick byl hybnou silou při schvalování Einsteinovy žádosti o místo profesora teoretické fyziky na univerzitě v Praze. Během jeho pobytu v letech 1911 až 1912 byl Georg Pick Einsteinovým velmi blízkým kolegou. Poutal je nejen profesionální vztah, ale oba hráli na housle a často hrávali spolu. Například M. Brdička [5] o jejich vztahu píše. „Einsteinův duchovní život se v té době skládal hlavně z vědy a hudby. Spřátelil se s G. Pickem, který byl nejen výborným geometrem ochotným pomoci při nejasnostech absolutního diferenciálního počtu a při jeho aplikacích na geometrizaci fyziky, resp. v položení základů obecné relativity, ale i nevšedním komorním hudebníkem, jenž zprostředkoval Einsteinovi místo ve smyčcovém kvartetu. Přátelské kontakty mezi Pickem a o 20 let mladším Einsteinem nebyly přerušeny ani po Einsteinově odchodu z Prahy. Poslední Pickův dopis Einsteinovi do Princetonu je z r. 1939, z doby po okupaci Čech a nedlouho před Pickovým transportem do koncentračního tábora v Terezíně, z něhož se již nevrátil.“ V době Einsteinova pobytu v Praze vedl také Georg Pick přednášku Infinitesimalgeometrie. „Není také žádných pochyb,“ jak uvádí [13], „že Pick a Einstein vedli odborné diskuze.“ Svědčí o tom např. závěrečná poznámka v rozšířeném textu Einsteinovy přednášky z 28. 2. 1914; viz dokument 30 v [10], strana 607: „Na závěr vyslovuji poděkování mému dřívějšímu kolegovi G. Pickovi za jeho poznámky, které výklad věci zásadně zjednodušily.“

Často se polemizuje, jakou roli sehrál Georg Pick v Einsteinově odvození speciální teorie relativity. Citáty z nejrůznějších zdrojů k tomuto tématu lze najít v článku Georg Pick – pražský kolega Alberta Einsteina od I. Netuky [13].

# Závěr

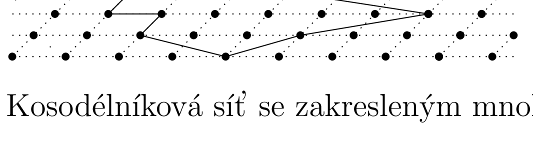
Tato práce zdaleka nevyčerpala všechna témata, která souvisí s Pickovým vzorcem. Na závěr ještě zmíníme několik souvislostí, které v práci nejsou více rozebrány. V kapitole 3.2 jsme se již trochu dotkli tématu rozšíření Pickova vzorce do prostoru. Nabízí se však otázka, zda existuje analogie Pickova vzorce v $n$-dimenzionálních prostorech, pro $n > 3$, nebo zda lze vyslovit nějaká další zajímavá tvrzení o mřížových bodech v $n$-dimenzionálním prostoru jako jsou Věty 7 a 9.

Pokračovat by se dalo také v Příkladu 13 o tom, jak rozměnit dolar. Co kdybychom nerozměňovali dolar, ale třeba českou dvoustovku na padesátikoruny, pětikoruny a dvoukoruny. Vyřešení této úlohy jistě nebude problém. Použijeme stejný princip jako u rozměňování dolaru. Ale pojďme dál. Co kdybychom přidali ještě dvacetikoruny. Najednou již nelze použít úplně stejný postup, ale musíme jej upravit, protože jsme se dostali od problému, který lze řešit převedením na počítání mřížových bodů v rovině, k problému, který lze převést na hledání počtu mřížových bodů v prostoru. Podobnou úlohou se zabývá i kniha [11], když řeší otázku: Kolika způsoby lze rozměnit dolar na čtvrťáky, deseticenty, pěticenty a centy? V této knize také najdete obecný vzorec pro počet možností jak složit nějakou částku ze tří druhů mincí.

Pokud bychom se vrátili do Pickova článku [14], kde profesor Georg Pick publikoval svůj vzorec, zjistíme, že jej formuloval mnohem obecněji. Neuvažoval pouze pravoúhlou čtvercovou síť, ale dokonce i kosodélníkovou síť. V takovém případě je objem mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech odpovídajících kosodélníkové síti roven

$$S = S_k(I + \frac{B}{2} - 1),$$

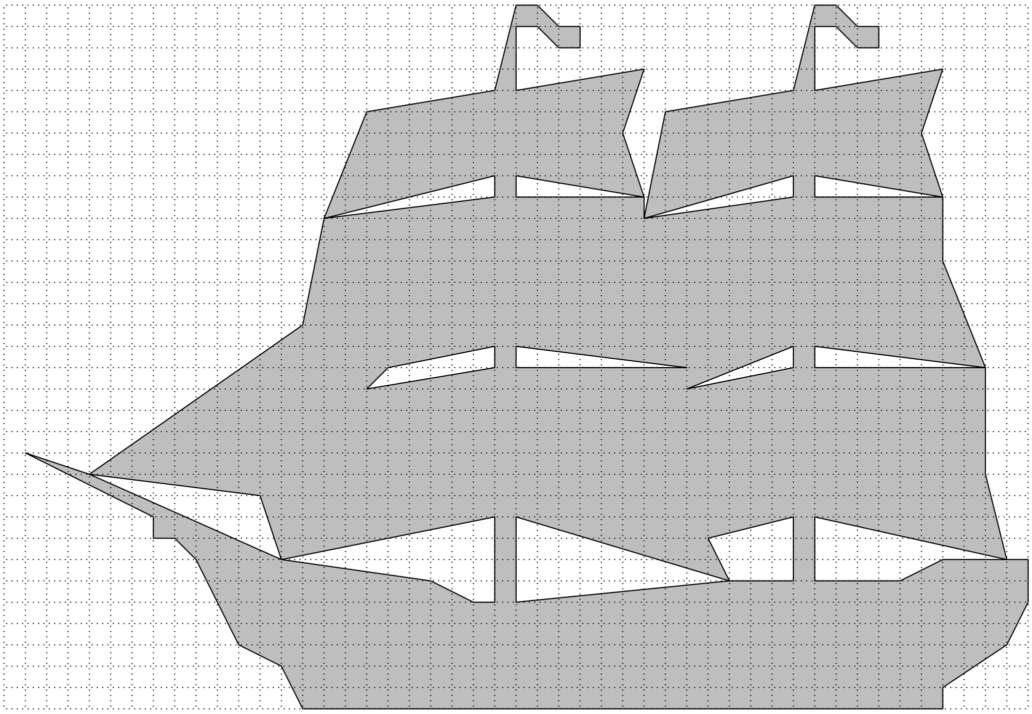
kde $S_k$ značíme obsah nejmenšího kosodélníku, ze kterého se skládá kosodélníková síť, $I$ je počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku a $B$ je počet mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku s tím rozdílem, že mřížové body uvažujeme v kosodélníkové síti. Odvození tohoto tvrzení a mnohem více lze nalézt v článku [9].



Obrázek 3.6: Kosodélníková síť se zakresleným mnohoúhelníkem

Další směr, kterým bychom se mohli ubírat, je souvislost Pickova vzorce s Fareyovými posloupnostmi a Stern-Brocotovým stromem v teorii čísel, viz [4].

Pokud hledáte další příklady, které souvisejí s Pickovým vzorcem, možným zdrojem je kniha [11].



# Literatura

[1] Aigner, M. Ziegler G. M. *Proofs from THE BOOK (4th ed.)*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2009. ISBN 978-3-642-00855-9.

[2] Bensimon, I. *Minkowski's Convex Body Theorem.* Project for MA341, Boston University, 2009. http://math.bu.edu/people/kost/teaching/MA341/Minkow.pdf.

[3] Blichfeldt, H. F. *A New Principle in the Geometry of Numbers, with Some Applications.* Trans. Amer. Math. Soc. 15, 1914, 227-235.

[4] Bogomolny, A. *Applications of Pick's Theorem from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.* http://www.cut-the-knot.org/ctk/PickApps.shtml, Accessed 15 August 2013.

[5] Brdička, M. *Einstein a Praha, Česká einsteinovská pohlednice.* Čs. čas. fyz. A 29, 1979, 269–275.

[6] Funkenbusch, W. W. *From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem.* American Mathematical Monthly 81, 1974, 647–648.

[7] Ostermann, A.,Wanner, G. *Geometry by Its History.* New York: Springer, 2012. ISBN 978-3-642-29162-3.

[8] Hadwiger, H., Wills, J. M. *Neuere Studien über Gitterpolygone.* J. Math, 280, 1975, 61-69.

[9] Iseri, H. *An Exploration of Pick's Theorem in Space.* Mathematics Magazine Vol. 81, No. 2, April, 2008, 106-115.

[10] Klein, M. J., Kox, A. J., Schulmann, R. (Eds.) *The collected papers of Albert Einstein* Princeton: Princeton University Press, Vol. 5. 1993.

[11] Michael, T. S. *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures.* Baltimore: JHU Press, 2009. ISBN 9780801897047.

[12] Montgomery, H. *A Timely Problem.* Mathematics Magazine Vol. 85, No. 3, June 2012, 220.

[13] Netuka, I. *Georg Pick - pražský matematický kolega Alberta Einsteina.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44, 1999, No. 3, 227-232.

[14] Pick, A. G. *Geometrisches zur Zahlenlehre, Sitzungsberichte Lotos.* Praha: Naturwissenschaftlich-Medizinschen Vereines für Böhmen, NF 19, 1899, 311–319.

[15] Ram Murty, M., Nithum Thain, *Pick's Theorem via Minkowski's Theorem.* The American Mathematical Monthly Vol. 114, No. 8, October, 2007, 732-736.

[16] Reeve, J. E. *On the volume of lattice polyhedra.* Proceedings of the London Mathematical Society (3rd Ser.), 7, 1957, 378–395.

[17] Varberg, D. E. *Pick's theorem revisited.* American Mathematical Monthly 92, 1985, 584–587.

[18] Weisstein, E. W. *Browkin's Theorem.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/BrowkinsTheorem.html.