

31. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010



Praha

2010

Recenzovali: J. Bečvář, M. Bečvářová, M. Hykšová

**Tato publikace byla vytištěna díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690
*Prameny evropské matematiky.***

Všechna práva vyhrazena. Tato publikace ani žádná její část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě, elektronické nebo mechanické, včetně fotokopí, bez písemného souhlasu vydavatele.

© J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.), 2010

© MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze, 2010

ISBN 978-80-7378-128-6

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme vám sborník obsahující texty tří vyzvaných přednášek, texty delších a kratších sdělení, které byly přihlášeny na 31. mezinárodní konferenci *Historie matematiky*. Všechny příspěvky byly graficky a typograficky sjednoceny, některé byly upraveny i jazykově. Zařazen byl též program konference a seznam všech účastníků, kteří se přihlásili do 15. června 2010. Sborník vznikl díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*, finanční pomoci Katedry didaktiky matematiky MFF UK a Ústavu aplikované matematiky FD ČVUT.

V úvodu sborníku připomínáme Štefana Schwabika (1941–2009) a Ivana Saxla (1936–2009), vynikající matematiky, pedagogy a školitele, dobré a nezapomenutelné přátele, pravidelné účastníky konferencí *Historie matematiky*, příznivce matematiky, její historie i vyučování. Otištěná fotografie Š. Schwabika je z kolekce, kterou pořídil M. Tvrdý z MÚ AV ČR, fotografie I. Saxla je dílem Š. Schwabika.

V první části sborníku jsou otištěny texty hlavních přednášek, o něž byli požádáni zkušení přednášející, kteří se věnují matematice, dějinám matematiky, souvislostem matematiky s ostatními sférami lidské činnosti, výchově doktorandů, řízení a organizaci vědecké práce a mnoha dalším aktivitám.

Ve druhé části sborníku jsou publikovány příspěvky jednotlivých účastníků. Konference není monotematicky zaměřena, snažili jsme se poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všem přihlášeným, tj. matematikům, historikům matematiky, učitelům vysokých i středních škol, doktorandům oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* i všem dalším zájemcům o matematiku a její historii. Příspěvky všech doktorandů recenzovali jejich školitelé, pečlivě je prošli a doporučili k otištění.

Program letošní konference je poměrně pestrý. Věříme, že každý najde řadu témat, která ho zaujmou a potěší, že objeví nové kolegy, přátele a spolupracovníky, získá inspiraci, řadu podnětů, motivaci i povzbuzení ke své další odborné práci a ke svému studiu.

Podrobnější informace o letošní konferenci i o všech předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese

<http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html>.

Martina Bečvářová, Jindřich Bečvář

V Praze, v červnu 2010



Štefan Schwabik (1941–2009)

Vzpomínáme a děkujeme.



Ivan Saxl (1936–2009)

Vzpomínáme a děkujeme.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

Balková Lubomíra
Baštinec Jaromír
Bálintová Anna
Bártlová Tereza
Bečvář Jindřich
Bečvářová Martina
Benediktová Marie
Břinda Karel
Čižmár Ján
Fabian František
Halas Zdeněk
Hykš Oldřich
Hykšová Magdalena
Chmelíková Vlasta
Chocholová Michaela
Kalousová Anna
Klouda Karel
Kotůlek Jan
Křápek Milan
Kvasz Ladislav
Kvaszová Milena
Lengyelfalusy Tomáš

Melcer Martin
Mitřengová Dana
Moravec Luboš
Otavová Miroslava
Pazourek Karel
Pelikán David
Pogoda Zdzisław
Sklenáriková Zita
Slavík Antonín
Smýkalová Radka
Starosta Štěpán
Surynková Petra
Sýkorová Irena
Štěpánová Martina
Trkovská Dana
Ulrychová Eva
Václavíková Zuzana
Veselý Jiří
Vízek Lukáš
Więsław Witold
Zahradník Jan
Zichová Jitka

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

I. Vyzvané přednášky

Kvasz L.: *Jazyk matematiky ako predmet historického výskumu*

Veselý J.: *Poznámky k historii funkcionálních rovnic*

Więsław W.: *Matematyka na ziemiach polski w epoce Oświecenia*

II. Konferenční vystoupení (25 minut)

Balková L.: *Paul Erdős a jeho oblíbené problémy Ramseyovy teorie*

Bálintová A.: *Sudoku a história magických štvorcov*

Bártlová T.: *Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec*

Bečvář J., Bečvářová M.: *Metodika některých prací z historie matematiky*

Bečvářová M.: *111 let od příchodu Karla Zahradníka do Brna*

Benediktová M.: *Al-Chvárizmího Aritmetický a Algebraický traktát*

Čížmár J.: *Dielo Karla Zahradníka (geometrické práce)*

Fabian F.: *Kdo je autorem axiomatiky podmíněných pravděpodobností?*

Hykšová M.: *Bruno de Finetti (1906–1985) a filosofie pravděpodobnosti*

Chmelíková V.: *Méně známí učitelé deskriptivní geometrie*

Chocholová M.: *Matematické aplikace v díle Wilhelma Matzky*

Kalousová A.: *Zobecnění Buffonovy úlohy o jehle*

Kotůlek J.: *Problémy Diracovy rovnice 1928–1933*

Křápek M.: *Zapomenuté práce Otakara Borůvky*

Melcer M.: *Eduard Čech a jeho středoškolské učebnice*

Moravec L.: *Jakub Filip Kulík v Olomouci, Štýrském Hradci a Praze*

Otavová M.: *Ladislav Jandera a pěstování početní zdatnosti na pražské universitě*

Pazourek K.: *Tři roky vězím v dělitelnosti*

Pelikán D.: *Gottfried Wilhelm Leibniz: Univerzální řeč*

Pogoda Z.: *Kazimierz Żorawski and the Cracow mathematical school*

Slavík A.: *O řetězovce a hyperbolických funkcích*

Smýkalová R.: *Trigonometrie v Evropě 15. – 17. století*

Surynková P.: *Vývoj lineární perspektivy ve výtvarném umění*

Sýkorová I.: *Rukopis Bakhšháli*

Štěpánová M.: *Počátky teorie matic u nás, obzvláště Weyrova teorie*

Trčková D.: *Od shodnosti k transformacím*

Ulrychová E.: *Základní učební texty z matematiky na VŠE Praha v letech 1954–2009*

Václavíková Z.: *Historické výpočetní pomůcky a netradiční metody aritmetických výpočtů*

Zahradník J.: *Maturitní zkoušky z matematiky na přelomu 19. a 20. století a na začátku 21. století*

Zichová J.: *Lineární model v díle dánského statistika T. N. Thieleho*

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Středa 18. 8. 2010

Dopolední program 10:00–12:00

Zahájení

Plenární přednáška:

J. Veselý: *Poznámky k historii funkcionálních rovnic*

Odpolední program 14:00–15:30

Konferenční vystoupení:

Z. Václavíková: *Historické výpočetní pomůcky a netradiční metody aritmetických výpočtů*

M. Benediktová: *Al-Chvárizmího Aritmetický a Algebraický traktát*

Z. Pogoda: *Kazimierz Żorawski and the Cracow mathematical school*

Odpolední program 16:00–18:00

Konferenční vystoupení:

M. Bečvářová: *111 let od příchodu Karla Zahradníka do Brna*

J. Čižmár: *Dielo Karla Zahradníka (geometrické práce)*

L. Balková: *Paul Erdős a jeho oblíbené problémy Ramseyovy teorie*

Čtvrtek 19. 8. 2010

Dopolední program 8:30–10:00

Plenární přednáška:

W. Więśław: *Matematyka na ziemiach polski w epoce Oświecenia*

Dopolední program 10:30–12:00

Konferenční vystoupení:

M. Chocholová: *Matematické aplikace v díle Wilhelma Matzky*

L. Moravec: *Jakub Filip Kulik v Olomouci, Štýrském Hradci a Praze*

M. Otavová: *Ladislav Jandera a pěstování početní zdatnosti na pražské universitě*

Odpolední program 14:00–15:30

Konferenční vystoupení:

J. Bečvář, M. Bečvářová: *Metodika některých prací z historie matematiky*

M. Melcer: *Eduard Čech a jeho středoškolské učebnice*

Odpolední program 16:00–18:00

Konferenční vystoupení:

K. Pazourek: *Tři roky vězím v dělitelnosti*

A. Bálintová: *Sudoku a história magických štvorcov*

I. Sýkorová: *Rukopis Bakhšháli*

Pátek 20. 8. 2010

Dopolední program 8:30–10:00

Plenární přednáška:

L. Kvasz: *Jazyk matematiky ako predmet historického výskumu*

Dopolední program 10:30–12:00

Konferenční vystoupení:

V. Chmelíková: *Méně známí učitelé deskriptivní geometrie*

J. Zahradník: *Maturitní zkoušky z matematiky na přelomu 19. a 20. století a na začátku 21. století*

E. Ulrychová: *Základní učební texty z matematiky na VŠE Praha v letech 1954–2009*

Večerní posezení 20:00

Sobota 21. 8. 2010

Dopolední program 8:30–10:00

Konferenční vystoupení:

M. Hykšová: *Bruno de Finetti (1906–1985) a filosofie pravděpodobnosti*

J. Zichová: *Lineární model v díle dánského statistika T. N. Thieleho*

F. Fabian: *Kdo je autorem axiomatiky podmíněných pravděpodobností?*

Dopolední program 10:30–12:00

Konferenční vystoupení:

D. Trkovská: *Od shodnosti k transformacím*

T. Bártlová: *Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec*

A. Slavík: *O řetězovce a hyperbolických funkcích*

Odpolední program 14:00–15:30

Konferenční vystoupení:

P. Surynková: *Vývoj lineární perspektivy ve výtvarném umění*

J. Kotůlek: *Problémy Diracovy rovnice 1928–1933*

R. Smýkalová: *Trigonometrie v Evropě 15. – 17. století*

Odpolední program 16:00–18:00

Diskuse o historii matematiky, doktorském studiu a práci

Neděle 22. 8. 2010

Dopolední program 8:30–10:00

Konferenční vystoupení:

M. Štěpánová: *Počátky teorie matic u nás, obzvláště Weyrova teorie*

M. Křápek: *Zapomenuté práce Otakara Borůvky*

A. Kalousová: *Zobecnění Buffonovy úlohy o jehle*

Dopolední program 10:30–12:00

D. Pelikán: *Gottfried Wilhelm Leibniz: Univerzální řeč*

Závěrečná diskuse

Zakončení

VYZVANÉ PŘEDNÁŠKY

JAZYK MATEMATIKY AKO PREDMET HISTORICKÉHO VÝSKUMU

LADISLAV KVASZ

Abstract: In the paper different aspects of the changes of language that occurred during the long history of mathematics are discussed. Several parameters of language, such as its *logical, expressive, methodological, integrative, explanatory* and *metaphorical* power are introduced and are used to characterize the linguistic innovations in mathematics.

0 Úvod

V matematike je pomerne častý jav, že výsledky tvoriace vrchol matematickej tvorby géniov minulosti, ktoré boli výsledkom systematického úsilia mnohých generácií, dnes predstavujú pre priemerného vysokoškolského študenta matematiky nenáročné cvičenie. Napríklad asi 20 kvadrátúr a kubatúr, ktoré tvoria vrchol Archimedovho celoživotného snaženia, dnešný vysokoškolák zvládne behom niekoľkých málo hodín v rámci kurzu matematickej analýzy viacerých premenných. Podobne odvodenie gravitačného zákona z Keplerových zákonov, ktoré predstavuje jeden z kľúčových výsledkov Newtonových Princípií, a ktoré Newtonovi prinieslo obdiv súčasníkov, je dnes nie moc náročným cvičením z klasickej mechaniky. Táto skutočnosť nie je dokladom rastu intelektuálnych schopností v dejinách. Svedčí skôr o zdokonaľovaní kalkulatívnych nástrojov ktoré máme k dispozícii. Tieto nástroje sú dnes omnoho silnejšie a všestrannejšie než nástroje, pomocou ktorých získavali svoje výsledky Archimedes či Newton.

Podobným, rovnako rozšíreným javom je skutočnosť, že dnes i priemerný študent dokáže nájsť chyby v argumentoch matematikov minulosti, ktoré títo matematici ani ich súčasníci nevideli. Eulerove pokusy sčítať oscilujúce rady dnes vyvolávajú u mnohých matematikov úsmev, podobne ako Newtonove pokusy zdôvodniť infinitezimálny počet. Ani v tomto prípade asi nemáme do činenia s nárastom kritickosti myslenia (i keď kultúra kritickosti pri písaní matematických textov asi vzrástla), ale skôr ide o to, že sa zdokonalili **reprezentačné nástroje**, pomocou ktorých je omnoho ľahšie nájsť príklady a protipríklady rôznych matematických tvrdení.

Ako kalkulatívne, tak aj reprezentačné nástroje majú jazykový charakter. Sú to nástroje, pomocou ktorých dokážeme ľahko a bezpečne viesť argumentáciu tam, kde matematici minulosti postupovali po kľukatých a nebezpečných chodníkoch, rovnako ako vieme ľahko a efektívne skonštruovať príklady a protipríklady tam, kde ich naši predkovia hľadali v neprehľadných húštinách. Preto pri výklade dejín matematiky si na tejto prednáške nebudeme všímať ani tak výsledky, ktoré matematici daného obdobia dosiahli, ale pokúsime sa nájsť jazykové nástroje, pomocou ktorých svoje výsledky získavali, formulovali a zdôvodňovali. Algebra či analytická geometria pre nás nebudú v prvom rade *teórie*, teda súbory definícií, tvrdení a dôkazov, tradične radených do danej disciplíny. Algebra či analytická geometria budú pre nás poznaním, získaným pomocou určitého *jazykového nástroja*. Pritom sa budeme snažiť tieto jazykové nástroje čo najpresnejšie opísať. Budeme sa snažiť určiť ich vlastnosti, ktoré nazveme **potenciality**, a ktorých nárast je príznačný pre vývoj matematiky. Rozlíšime šesť potencialít:¹

1. *logickú silu*, ktorá ukazuje ako zložité formuly možno v danom jazyku dokázať

2. *expresívnu silu*, ktorá ukazuje, čo nového, čo sa v predošliých štádiách vymykalo vyjadreniu, teraz jazyk umožňuje vyjadriť
3. *metodickú silu*, ktorá ukazuje, aké metódy umožňuje jazyk zaviesť tam, kde na predošlom štádiu existoval iba súbor nesúrodých trikov
4. *integratívnu silu*, ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vidieť jednotu a poriadok tam, kde sa na báze predošlého jazyka ukazovali len navzájom nesúvisiace prípady
5. *explanatorickú silu*, ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vysvetliť zlyhania jazyka, ktoré boli na predošlom štádiu nepochopiteľné
6. *metaforickú silu*, ktorá ukazuje, ako jazyk umožňuje nájsť vo vzdialených a zdanlivo nesúvisiacich oblastiach analógie pojmov a vzťahov disciplíny, v rámci ktorej sa nový jazyk zrodil

Dúfam, že tento zoznam naplnil pojem „potenciality jazyka matematiky“ konkrétnym obsahom a zdôvodnil použitie tak nezvyklého termínu. Každá z týchto vlastností odкрýva jednu dimenziu, v ktorej jazyk matematiky obohacuje naše možnosti niečo vyjadriť. Preto je prirodzené nazvať ich potencialitami jazyka matematiky. Nárast každej potenciality budeme ilustrovať na prechodoch od (Egyptskej) elementárnej aritmetiky, cez (Grécku) syntetickú geometriu a (rano novovekú) algebru po analytickú geometriu, pričom budeme voliť problémy, na riešení ktorých bude nárast príslušnej potenciality najlepšie viditeľný. Samozrejme, dajú sa zvoliť aj iné príklady, ktoré môžu byť vhodnejšie.

1 Logická sila

Ako prvú budem ilustrovať logickú silu jazyka, pričom ukážem, ako sa táto sila v danom úseku dejín matematiky menila.

1.1 Elementárna aritmetika – overenie jedinečného tvrdenia

Čísla neumožňujú explicitne vyjadriť všeobecnosť. Ako typické tvrdenia elementárnej aritmetiky možno vziať napríklad:

$$135 + 37 = 172$$

alebo

$$24 \times 19 > 456.$$

Sú to jedinečné tvrdenia.² Jazyk elementárnej aritmetiky obsahuje pravidlá, ktoré pomocou manipulácie so znakmi umožňujú takéto tvrdenia overiť. V dejinách je to prvý systém, umožňujúci na báze explicitných pravidiel manipulácie so symbolmi, rozhodnúť o pravdivosti nejakého tvrdenia. Aj keď sú to zatiaľ len jedinečné tvrdenia, význam tohto objavu je nesmierny. Tieto pravidlá sú totiž formálne, teda intersubjektívne, explicitné a preto naučiteľné a prístupné kontrole. Treba zdôrazniť, že tento jazyk sa zásadne odlišuje od toho, čo sa jazykom aritmetiky dnes bežne rozumie, tým, že neobsahuje premenné. To, že jazyk aritmetiky neobsahoval premenné viedlo Egyptanov k nutnosti formulovať všetky úlohy s konkrétnymi číselnými hodnotami. Zoberme ako ilustráciu príklad z *Moskovského papyrusu* (Kolman 1961, s. 41; resp. Vymazalová 2006, s. 82):

„Spôsob výpočtu pyramídy nemajúcej vrchol. Ak máš danú pyramídu bez vrcholu vysokú 6 (lakt'ov), s dolnou hranou 4 (lakte) a hornou 2, umocni 4 na druhú, dostaneš 16, zdvojnásob 4, dostaneš 8, umocni 2 na druhú, dostaneš 4,

(1) pripočítaj týchto 16

(2) k týmto 8 a 4

(3) dostaneš 28, vypočítaj

(4) 1/3 zo 6, dostaneš 2, počítaj

- (5) s 28 dvakrát, dostávaš 56,
 (6) hľa: je to skutočne 56. Našiel si správne.“

Počtár postupne berie čísla figurujúce v zadaní a robí s nimi rôzne úpravy, až napokon dostane to, čo hľadá. Pomocou konkrétneho výpočtu takto ukazuje všeobecný postup riešenia, ktorý sa v jazyku nedá vyjadriť. Jazyk elementárnej aritmetiky bol teda prvým jazykom, ktorý umožňoval riešiť problémy pomocou manipulácie so symbolmi. Jeho logická sila sa obmedzuje na odvodenie jedinečných tvrdení.

1.2 Syntetická geometria – dôkaz všeobecného tvrdenia

Ikonický jazyk geometrie bol prvým jazykom umožňujúcim dokázať všeobecné tvrdenia. Je toho schopný vďaka tomu, že obsahuje zaujímavú inováciu – úsečku neurčitej dĺžky – ktorá je vlastne predchodcom pojmu neznámej. Keď napríklad chceme dokázať, že súčet dvoch párných čísel je číslo párne, tak si párne číslo znázorníme ako obdĺžnik, ktorého výška je rovná dvom, ale ktorého šírka ostane neurčitá. Dôkaz sa potom zakladá na nahliadnutí skutočnosti, že spojením dvoch obdĺžnikov s výškou dva vznikne opäť obdĺžnik s výškou rovnou dva. Keďže sme v našej úvahe pracovali s obdĺžnikmi, ktorých šírka ostala počas celej úvahy neurčitá, dokázali sme tvrdenie pre ľubovoľné dva obdĺžniky, a teda vlastne pre dve ľubovoľné párne čísla. Toto ukazuje zásadnú logickú prevahu jazyka geometrie nad jazykom elementárnej aritmetiky.

Tu sa ukazuje jeden zaujímavý aspekt, ktorý podporuje výklad geometrických obrázkov ako výrazov jazyka. Keď v spomenutom dôkaze nakreslíme príslušný obdĺžnik, tak ho samozrejme musíme nakresliť s konkrétnymi stranami. Preto to, čo je nakreslené na papieri, neobsahuje úsečku neurčitej dĺžky; všetky nakreslené úsečky sú presne také dlhé, ako dlhé sme ich nakreslili. Ale keď tieto úsečky používame v dôkaze, tak s ich dĺžkami pracujeme, akoby boli neurčité. Teda idea neznámej sa v matematike objavuje najprv v implicitnej podobe – ako konštanty (konkrétne úsečka), s ktorou pracujeme ako s neznámou (t.j. ako s úsečkou neurčitej dĺžky).

1.3 Algebra – dôkaz modálneho tvrdenia

Jazyk algebry prináša ako základnú inováciu explicitný symbol pre premennú. V jazyku geometrie bola idea premennej prítomná iba implicitne, ako úsečka neurčitej dĺžky. Na tom sa zakladala schopnosť jazyka geometrie dokázať všeobecné tvrdenie. Keďže jazyk algebry má premennú prítomnú v explicitnom tvare, aj on je schopný dokázať všeobecné tvrdenia. Dokáže však viac. Zoberme vzorec pre riešenie kvadratickej rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Parametre a , b , c dávajú tomuto vzorcu všeobecnosť analogickú tej, ktorú dáva úsečka neurčitej dĺžky geometrickým dôkazom. Avšak okrem jednotlivých písmen, ktoré hrajú analogickú úlohu ako úsečka neurčitej dĺžky **vzorec vyjadruje aj poradie krokov výpočtu**. Takto sa **postup** stáva vyjadriteľným v jazyku. To je zásadná zmena.

Keď si spomenieme na výpočet pyramídy nemajúcej vrchol, môžeme si uvedomiť, že jednotlivé zložky, z ktorých v priebehu výpočtu vzniká výsledný objem, strácajú svoju identitu, a výsledkom je číslo, na ktorom niet ani stopy po tom ako vzniklo. Naproti tomu v geometrii sa jednotlivé prvky konštrukcie nestrácajú, ale tvoria trvalú súčasť výsledného obrázka. Čo sa však stráca je poradie krokov konštrukcie. Preto je nutné ku geometrickým konštrukciám dodať komentár v prirodzenom jazyku, nazývaný **zápis konštrukcie**, v ktorom je zachytená postupnosť krokov, pomocou ktorých bol obrázok

vytvorený. Zápisy konštrukcie, ktorými stredoškolskí profesori trápia žiakov, nie sú ani tak rozmarom pedagógov, ako dôsledkom nedokonalosti jazyka geometrie. Zápis poradia krokov konštrukcie je komentár v prirodzenom jazyku, a teda sa odohráva mimo jazyka geometrie. A táto postupnosť krokov je v algebre zabudovaná do jazyka. K algebraickej formule netreba dodávať „zápis výpočtu“ analogický zápisu geometrickej konštrukcie. Nie je to potrebné, lebo vzorec postupnosť krokov výpočtu priamo vyjadruje.³

Schopnosť explicitne vyjadriť poradie krokov výpočtu umožňuje jazyku algebry **dokázateľ modálne predikáty**, ako napríklad neriešiteľnosť rovnice piateho stupňa, ktorú dokázali Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel a Evariste Galois začiatkom 19. storočia. Zo základnej vety algebry vieme, že každá rovnica piateho stupňa má päť koreňov. V tom nie je problém. Problém je, že tieto riešenia nie je možné vyjadriť prostriedkami algebry. Teda v prípade neriešiteľnosti všeobecnej rovnice piateho stupňa riešenia existujú ako body komplexnej roviny, ale jazyk algebry nie je schopný tieto body explicitne vyjadriť. Jazyk algebry si je však tohto svojho nedostatku plne vedomý, vie ho dokonca dokázať. V tom je jeho prevaha nad jazykmi aritmetiky a syntetickej geometrie. Preto práve dôkazy neriešiteľnosti sú najlepšou ilustráciou logickej sily jazyka algebry.

V jazyku aritmetiky alebo syntetickej geometrie nemáme prostriedky, ktoré by umožnili *vyjadriť*, že nejaká úloha je neriešiteľná. V geometrii sa neriešiteľnosť iba ukazuje napríklad tým, že sa napriek systematickému úsiliu nedarí nájsť konštrukciu trisekcie uhla či duplicity kocky. Neriešiteľnosť je pre geometriu predikát, ktorý sa dá vyjadriť iba v prirodzenom jazyku. Jazyk algebry, na rozdiel od geometrie, umožňuje neriešiteľnosť explicitne vyjadriť. Otázka riešiteľnosti je z pohľadu algebry otázkou vyjadriteľnosti určitej veličiny v požadovanom tvare, čo sa dá technicky uchopiť pomocou pojmu poľa. Dôkazy neriešiteľnosti majú potom spravidla tvar argumentácie, že daný prvok nie je možné vyjadriť v požadovanom tvare, teda že daný prvok nepatrí do určitého poľa. Takúto stavbu mal Gaussov dôkaz nemožnosti konštrukcie pravidelného sedemuholníka, a Galoisov dôkaz neriešiteľnosti rovnice piateho stupňa.

1.4 Analytická geometria – dôkaz existenčného tvrdenia

Carl Friedrich Gauss vo svojej doktorskej dizertácii *Demonstratio nova Theorematis omnem Functionem algebraicam rationalem integram unis Variabilis in Factores reales primi et secundi Gradus resolvi posse* z roku 1799 použil pri dôkaze základnej vety algebry rovinu ako geometricкую reprezentáciu komplexných čísel. Základná veta algebry tvrdí, že pre každý polynóm $f(x)$ existuje bod α tejto roviny, pre ktorý je $f(\alpha) = 0$. Číslo nula na pravej strane je len z historických dôvodov. V algebre je zvykom polynóm upraviť tak, že sa všetky členy presunú na ľavú stranu a na pravej strane ostane nula. V princípe by tam mohlo stáť ľubovoľné iné komplexné číslo. Základná veta algebry vlastne hovorí, že polynóm zadáva surjektívne zobrazenie komplexnej roviny. Preto táto veta nie je čisto algebraickým tvrdením. Algebra slúži na vymedzenie polynomických funkcií, ale vlastnosť, ktorá sa o týchto funkciách v základnej vete algebry tvrdí, je skôr geometrická (či topologická).

Gauss podal štyri dôkazy základnej vety algebry. Prvý z nich vo svojej doktorskej dizertácii. Tento dôkaz bol analytický, zakladal sa na vlastnostiach komplexných funkcií. O 16 rokov neskôr podal ďalší dôkaz, ktorý sa neopiera o geometriu komplexnej roviny, ale bol vedený algebraickými prostriedkami, pomocou teórie symetrických polynómov. Tento dôkaz je podstatne dlhší a náročnejší. Elementárny dôkaz základnej vety algebry možno nájsť v (Courant a Robbins 1941, s. 269–271). Základná veta algebry je existenčné tvrdenie, ktoré možno považovať za vzor radu podobných tvrdení pre diferenciálne rovnice, integrálne rovnice a pre úlohy variačného počtu. Pri takýchto tvrdeniach je rozhodujúca jednak existencia určitého formalizmu, prostriedkami ktorého

sa opisuje objekt, ktorého existencia sa má dokázať. Druhou súčasťou existenčných dôkazov je určitý priestor, v rámci ktorého sa ukáže existencia príslušného objektu. Daný priestor má spravidla vlastnosť určitej úplnosti, uzavretosti, spojitosti či kompaktnosti.

Zdá sa, že analytická geometria bola prvou teóriou, ktorá obsahovala obe zložky úspešného existenčného dôkazu. Jednak to bol algebraický formalizmus, v rámci ktorého je možné formulovať algebraické rovnice, a potom komplexná rovina, teda geometrické kontinuum, ktorého body sú spojené s algebraickým formalizmom pomocou súradnicovej sústavy. Po tom, ako v 19. storočí došlo k aritmetizácii analýzy, geometrické existenčné dôkazy už nie sú považované za dostatočne striktné. Napriek tomu sa zdá, že jazyk analytickej geometrie bol prvým jazykom, ktorý vôbec umožňoval dokázať niečo takého ako existenčné tvrdenie pre širokú triedu úloh.

2 Expresívna sila

Ako druhú potencialitu budem ilustrovať expresívnu silu jazyka, pričom rovnako ako v predošlom prípade, aj teraz prejdem štyrmi zvolenými jazykmi.

2.1 Elementárna aritmetika – schopnosť vyjadriť ľubovoľne veľké číslo

Jazyk elementárnej aritmetiky umožňuje vyjadriť ľubovoľne veľké prirodzené číslo. Dnes sa to môže zdať málo, lebo sme zvyknutí na záporné, iracionálne a komplexné čísla, preto prirodzené čísla nám pripadajú ako obmedzený systém, v ktorom nemožno slobodne odčítať, deliť, ani odmocňovať. Keď si však odmyslíme výdobytky neskoršieho vývoja, možno sa nám podarí precítiť fascináciu, ktorú musel pociťovať egyptský (babylonský, indický, čínsky) počtár, keď si uvedomil, že **pomocou čísel možno všetko spočítať**. Rhindov papyrus začína slovami: „Pravidlá pre preniknutie do vecí, pre poznanie všetkého čo je, všetkých záhad, ..., všetkého skrytého“ (Vymazalová 2006, s. 102). Tento pocit je základom „byrokratického univerzalizmu“, podľa ktorého všetko možno spočítať, zaznačiť do výkazov a vziať do evidencie. Byrokratické plánovanie bolo jedným z najväčších objavov egyptskej (babylonskej, indickej a čínskej) civilizácie. Univerzálnosť byrokracie sa zakladá na expresívnej sile jazyka aritmetiky. Zvyšky prvotnej fascinácie počítaním možno vidieť v mýtoch, v ich záľube vo veľkých číslach, ďalej v Kabale a u pytagorejcov. Archimedov spis *O počte piesočných zŕn* asi najlepšie ilustruje expresívnu silu jazyka elementárnej aritmetiky. Ukazuje, že číselný systém umožňuje odhadnúť dokonca aj počet zŕniak piesku vo vesmíre:

„Sú takí, kráľ Gelon, ktorí si myslia, že **počet zŕn piesku je nekonečne veľký**; pričom pieskom myslím nie len ten, ktorý sa nachádza okolo Syrakúz a na zvyšku Sicílie, ale aj ten, ktorý sa nachádza v každej oblasti či už obývanej alebo nie. A sú takí, ktorí bez toho, aby ho považovali za nekonečné, si myslia, že **nemožno vysloviť číslo**, ktoré je dostatočne veľké, aby presiahlo ich množstvo. A je tiež jasné, že tí, čo hlásajú tento názor, keby si predstavili masu tvorenú pieskom tak veľkú ako masa Zeme, vrátane všetkých jej morí a dutín Zeme vyplnenú do výšky najvyšších hôr, boli by mnohonásobne viac vzdialení od uznania, že nemožno vyjadriť žiadne číslo, ktoré presahuje množstvo zŕniak piesku takto vzatých. Ale ja sa pokúsím ukázať vám, **pomocou geometrických dôkazov**, ktoré budete schopný sledovať, že, čísla mnou vytvorené a dané v práci, ktorú som poslal Zeuxippovi, niektoré presahujú nielen masu piesku rovnako veľkú ako Zem vyplnenú opísaným spôsobom, ale aj masu rovnú veľkosti univerza. ... Tvrdím, že dokonca aj keby bola vytvorená sféra z piesku tak veľká, ako veľká je podľa Architasových predpokladov sféra stálic, tak ešte stále dokážem, že z čísel menovaných v Princípoch niektoré presiahnu svojou veľkosťou počet zŕniak piesku v práve opísanej sfére...” (Heath 1921, s. 81–85).

Samozrejme, geometrické dôkazy, pomocou ktorých Archimedes dokazuje, že je možné vytvoriť číslo, ktoré je väčšie ako počet zŕn v celom univerze, nepatria do aritmetiky. Ale samotný fakt, že tak obrovské číslo existuje, ilustruje expresívnu silu jazyka elementárnej aritmetiky. Egypťskí či Babylonskí počtári síce podobné tvrdenia, ilustrujúce expresívnu silu jazyka aritmetiky, nevedeli dokázať, ale vedeli, že všetko možno počítať.

2.2 Syntetická geometria – schopnosť vyjadriť ľubovoľnú kvadratickú iracionalitu

Jazyk syntetickej geometrie umožňuje prekonať problémy spojené s nesúmerateľnosťou. Pre jazyk aritmetiky predstavuje nesúmerateľnosť závažný problém, ktorý ukazuje, že je nemožné pomer strany a uhlopriečky štvorca vyjadriť pomocou (prírodných) čísel. Naproti tomu pre jazyk geometrie neznamená nesúmerateľnosť žiadnu prekážku. S úsečkami môžeme robiť geometrické konštrukcie, bez ohľadu na to, či sú zhodou okolností súmerateľné alebo nie. Vidíme, že jazyk syntetickej geometrie má expresívnu prevahu nad jazykom elementárnej aritmetiky.

Pomer dĺžok nesúmerateľných úsečiek nie je možné vyjadriť ako pomer celých čísel. Napriek tomu jazyk geometrie umožňuje takéto pomery porovnávať. Za týmto účelom vznikla Eudoxova teória proporcií. Uvedená je v V. knihe *Základov* a zakladá sa na nasledovnej definícii:

„Hovoríme, že veličiny stoja v rovnakom pomere, prvá k druhej ako tretia ku štvrtej, keď pri ľubovoľnom vynásobení rovnaké násobky prvej a tretej oproti rovnakým násobkom druhej a štvrtej, vzaté v pároch sú alebo naraz väčšie alebo naraz rovné alebo naraz menšie.“ (Euklides V., def. 5)

Táto definícia umožňuje porovnať nesúmerateľné veličiny, a ukázať, že napríklad obsah dvoch kruhov sú „jeden k druhému ako štvorce nad ich priemerom“ (Euklides XII, 2). Obsah kruhu a obsah štvorca nad jeho priemerom sú (ako dnes vieme) nesúmerateľné veličiny, ale napriek tomu jazyk geometrie umožňuje dokázať konštantnosť ich pomeru. To ukazuje prevahu expresívnej sily jazyka syntetickej geometrie nad expresívnou silou jazyka elementárnej aritmetiky. Elementárna aritmetika o pomeroch nesúmerateľných veličín nevie nič povedať.

2.3 Algebra – schopnosť vyjadriť ľubovoľné číslo vzniklé radikálovými rozšíreniami

Oproti geometrickému jazyku, ktorý má neznámu v tvare úsečky neurčitej dĺžky, jej druhú mocninu v tvare štvorca s neurčitou stranou a tretiu mocninu v tvare kocky s neurčitou hranou, jazyk algebry umožňuje slobodne tvoriť mocniny vyšších rádov. Terminológia, pomocou ktorej matematici 15. storočia tieto nové mocniny vytvárali, bola poznačená geometrickými analógiami, keď tretiu mocninu neznámej nazývali *cubus* a označovali ju písmenom *c*. Nič však nebránilo formálne pokračovať aj za tretiu mocninu, za ktorú Euklida nepustil priestor. Neznámu nazývali *res* a označovali písmenom *r*, jej druhú mocninu nazývali *censo* a označovali *z*. Pre štvrtú mocninu písali *zz* (*censo di censo*), pre piatu *rzz*, pre šiestu *zzz* a tak ďalej. Takto jazyk algebry umožňuje prekročiť medze, ktoré geometrii ukladá priestor a slobodne tvoriť mocniny ľubovoľného stupňa. Tieto výrazy síce nevieme názorne interpretovať, nevieme, čo si máme pod sedemnástou mocninou neznámej predstaviť, ale to nie je podstatné. Jazyk algebry obsahuje formálne pravidlá, ktoré umožňujú s týmito výrazmi naťahovať rovnakou istotou, s akou Euklides naťahoval s prvou či druhou mocninou neznámej.

Vďaka týmto inováciám sa podarilo nájsť riešenie rovnice tretieho stupňa. Je to prvý výsledok európskej matematiky, ktorý pokračuje antické dedičstvo. Publikoval ho roku 1545 v knihe *Ars Magna Sive de Regulis Algebraicis* taliansky matematik Girolamo Cardano. Riešenie rovnice $x^3 = bx + c$, zapísané v dnešnej symbolike má tvar

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} \quad (2)$$

Cardano nikdy takýto vzorec nenapísal. (Podrobnosti objavu, ako aj pôvodnú Cardanovu formuláciu možno nájsť napríklad v (Kvasz 2008). Na takéto formuly bolo treba čakať ešte jedno storočie. Tak či onak, uvedený výsledok dal algebraikom sebavedomie, vďaka ktorému sa postupne emancipovali spod područia geometrie. Algebraická symbolika umožňuje riešiť problémy, ktoré geometrický jazyk neumožňuje ani len sformulovať.

2.4 Analytická geometria – schopnosť vyjadriť ľubovoľnú algebraickú krivku

Analytická geometria priniesla nový spôsob vytvárania geometrického tvaru. Útvár je konštruovaný bod po bode pomocou súradníc určených pomocou algebraického vzťahu. To je niečo zásadne iné ako u Euklida. Euklides vytváral útvar z úsečiek a oblúkov kružníc. Euklidovská konštrukcia je konštrukciou pomocou kružidla a pravítka. Euklides má akési „mechanické“ formy, ktoré umiestňuje na papier. Naproti tomu Descartes rozbil každý útvar na body a vynáša ho bod po bode: „*Ak budeme brať postupne nekonečný počet rôznych hodnôt pre úsečku y, dostávame nekonečný počet hodnôt pre úsečku x, a preto nekonečný počet bodov takých ako C, pomocou ktorých možno nakresliť požadovanú krivku*“ (Descartes 1637, s. 319). Descartovi sa takto odkryl omnoho bohatší svet geometrických tvarov, než ako bol svet Euklidov.

Keď sa pozrieme z hľadiska analytickej geometrie na geometriu syntetickú, možno povedať, že až na zopár výnimiek (ako Hippasova *kvadratrix*, Archimédova *špirála*, Nikomédova *konchoida* alebo Dioklova *cissoida* (Heath 1921, s. 226, 230, 238 a 264)) sa celá syntetická geometria točí okolo kvadratických kriviek (kriviek, ktorých rovnice sú dané polynómom druhého stupňa). Svet analytickej geometrie obsahuje neporovnateľne väčšie množstvo objektov, než svet euklidovský. Každý významnejší matematik 17. storočia prišiel s príkladom novej krivky. Stačí spomenúť Descartov *list*, Bernoulliho *lemniskátu*, Pascalovu *ulitu* alebo tiež *kardiódu*, *astroidu* či *strofoidu*. Analytická geometria vlastne naplno využíva bohatstvo, ktoré ponúka algebra. Stačí vziať polynóm, vhodne zvoliť koeficienty a pred nami sa odkrýva tvar, aký Euklides nepoznal.

Pri výklade algebry sme spomenuli, že hlavná prednosť formuly oproti obrázku syntetickej geometrie je, že formula je schopná vyjadriť poradie jednotlivých krokov výpočtu. To sa plne využíva pri konštrukcii krivky. Jednotlivé body krivky sa vynášajú tak, že sa vypočíta hodnota polynómu pre príslušnú hodnotu argumentu. Tu sa formula používa rovnakým spôsobom ako v algebre: ako vzťah určujúci hodnotu určitej veličiny. Pre skonštruovanie krivky však potrebujeme ísť za hranice algebry a vyniesť jej body vedľa seba. Potrebujeme uskutočniť nekonečný počet konštrukcií (ako píše Descartes). V priebehu tohto nekonečného procesu vynášania bodov sa vynorí tvar. Žiaden z jednotlivých bodov tvar nezadáva. Až keď sú všetky body vnesené, vynára sa tvar krivky. Tvar krivky tak nevyjadruje **vzťah medzi neznámymi** x a y (na tomto vzťahu je založená logická sila jazyka algebry); tvar krivky odkrýva vzájomnú **závislosť medzi premennými** x a y . Descartes ešte nemal pojem funkcie, ten prinesie až Leibniz pri budovaní jazyka diferenciálneho a integrálneho počtu. Ale pojem závislosti premenných je rozhodujúcim krokom smerom k pojmu funkcie. Pripomína pojem úsečky neurčitej dĺžky. Podobne ako bola úsečka neurčitej dĺžky predchodcom pojmu neznámej, je pojem závislosti premenných predchodcom pojmu funkcie. Závislosť premenných ešte nie je funkcia, podobne ako úsečka neurčitej dĺžky nie je neznáma. V oboch prípadoch sú to prvky ikonického a nie symbolického jazyka.

3 Metodická sila

Ako tretiu potencialitu budem ilustrovať metodickú silu jazyka.

3.1 Elementárna aritmetika – metóda chybného predpokladu

O jazyku elementárnej aritmetiky možno povedať, že je nemetodický. Je príliš konkrétny na to, aby v ňom bolo možné sformulovať nejaký všeobecnejší postup či metódu na riešenie širšej triedy problémov. Dochované texty to potvrdzujú – sú to zbierky konkrétnych riešených príkladov bez akýchkoľvek metodických rád či návodov.⁴

3.2 Syntetická geometria – konštruktívno-deduktívna metóda

Syntetická geometria prináša pozoruhodnú metódu, ktorú použil Euklides v *Základoch*. Jej výklad možno nájsť v komentári Thomasa Heatha (Euclid I, s. 129–131). Dôkaz určitej propozície či riešenie určitého problému pozostáva z piatich krokov. Prvým je *prótesis* (προτασις), t.j. vyslovenie tvrdenia vo všeobecnom tvare. Napríklad Propozícia 8 Knihy IV znie: „Do daného štvorca vpísať kruh.“

Druhým krokom je *ekthesis* (εκθεσις), t.j. preformulovanie tvrdenia do konkrétneho tvaru, v ktorom sa zavedie označenie: „Nech ABCD je daný štvorec, teda požaduje sa vpísať kruh do daného štvorca ABCD.“ *Ekthesis* je sprevádzaná náčrtom, ku ktorému sa označenie vzťahuje a v ktorom jasne vyznačí, čo je dané. Po *ekthesis* nasleduje často *diorismós* (διορισμός) t.j. upresnenie, v rámci ktorého sa vyjasní, za akých podmienok má úloha vôbec zmysel.

Tretím krokom je *kataskeyé* (κατασκευη), t.j. konštrukcia, pri ktorej sa prvky dané v *ekthesis* postupne dopĺňajú aby sa vytvoril objekt vyžadovaný v úlohe.

Štvrtým krokom je *apódeixis* (αποδειξις), t.j. samotný dôkaz v užšom zmysle. Ide o to, že ani pri čisto dôkazových úlohách dôkaz spravidla nemôže nastúpiť hneď po *ekthesis*, lebo útvar, ktorý vystupuje v tvrdení je nutné doplniť o pomocné prvky (rôzne body, úsečky a oblúky kružníc), ktoré v zadaní nevystupujú, ale o ktoré sa opiera argumentácia dôkazu. Jednou z najkrajších ilustrácií takéhoto doplnenia je Euklidov dôkaz Pytagorovej vety. Až po tom, ako Euklides spustil výšku na preponu trojuholníka a rozdelil tak štvorec nad preponou na dva obdĺžniky, bolo možné dokázať, že obsah jedného obdĺžnika je zhodný s obsahom štvorca nad jednou odvesnou, a obsah druhého obdĺžnika je zhodný s obsahom štvorca nad druhou odvesnou. U Euklida *apódeixis* nasleduje až po skončení *kataskeyé*, čo znamená, že je jasne oddelená konštrukčná časť od dôkazu, ktorý je čisto logickou argumentáciou.

Záverečným piatym krokom je *sympérasma* (συμπερασμα), t.j. záver, spočívajúci v návrate ku všeobecnému diskurzu, ktorý sme opustili v *ekthesis*, kedy sme všeobecné tvrdenie nahradili konkrétnym prípadom. *Sympérasma* spočíva v zopakovaní tvrdenia („Preto v danom štvorci bol vpísaný kruh.“). Vidíme, že euklidovský dôkaz kombinuje analytické kroky so syntetickými.

3.3 Algebra – analytická metóda

Euklidovská geometria je zbierkou nesúvisiacich konštrukčných trikov. Mnohé úlohy vyžadujú dômyselné pomocné konštrukcie, ktoré dávajú široký priestor pre predvádzanie duchaplnosti. Ich zapamätanie je však zbytočné, lebo ďalšia úloha vyžaduje úplne iný trik. Preto síce iným spôsobom ako egyptské počty, ale aj geometria je náročná na pamäť. Nemusíme sa biffovať postupy typu „*spôsob výpočtu pyramídy nemajúcej vrchol*“, ako počtári, stačí si zapamätať triky rôznych konštrukcií. Ale aj týchto trikov je veľa. Algebra umožňuje záplavu konštrukčných trikov redukovat' a izolované postupy spojiť do

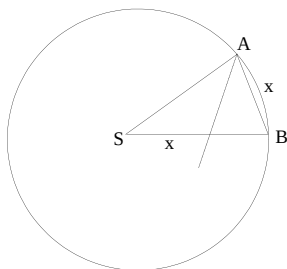
univerzálnej analytickej metódy. Je toho schopná vďaka myšlienke, pochádzajúcej od Francoisa Viëta, ktorý v knihe *In Artem Analyticam Isagoge* (Viète 1591) zavádza na označenie veličín dva druhy premenných: jeden druh pre neznáme, druhý pre parametre úlohy. Pôvodná Viëtova konvencia (používať na označenie neznámych veľké samohlásky A, E, I, O, U a na označenie parametrov veľké spoluhlásky B, C, D, F, G) sa neujala a dnes používame Descartovu konvenciu, ktorá pre neznáme používa malé písmená z konca abecedy (x, y, z, v, w) a pre parametre malé písmená zo začiatku abecedy (a, b, c, d, e). Napriek tomu, že sa nezachovala konkrétna podoba Viëtovej symboliky, jeho idea zaviesť dva typy premenných bola prvoradého významu. Vďaka nej sme schopní vyjadriť určitý matematický problém vo všeobecnom tvare (keď namiesto konkrétnych hodnôt parametrov zapíšeme aj parametre pomocou písmen) a potom pomocou algebraických úprav hľadať jeho všeobecné riešenie v tvare vzorca. Príkladmi takýchto všeobecných vzorcov sú vzťahy (1) a (2) vyjadrujúce riešenie rovníc druhého a tretieho stupňa. Keď máme vyriešiť nejakú konkrétnu rovnicu, nemusíme celý postup opakovať, ale stačí dosadiť do vzorca konkrétne hodnoty parametrov. Vzorec tak vyjadruje v tvare jedinej formuly nekonečný počet konkrétnych postupov. Vďaka Viëtovmu vynálezu algebra získava jednotu metód, aká bola v syntetickej geometrii nemysliteľná.

Viète si bol vedomý významu svojho objavu. Novú metódu nazval analytickým umením. Viëtova metóda sa stala modelom pre ďalšie disciplíny. Analytická metóda prešla postupne z algebry cez geometriu (Descartes 1637), matematickú analýzu nekonečne malých (Euler 1748), mechaniku (Lagrange 1788), teóriu vedenia tepla (Fourier 1822) až do logiky (Boole 1847). Univerzálna metóda ukazuje prednosť algebry pred geometriou. Euklidovská geometria žiadne univerzálne metódy nepozná, je zbierkou trikov, z ktorých každý sa hodí len na zopár príbuzných problémov.

3.4 Analytická geometria – metóda redukcie

Descartova Geometria je rozdelená do troch kníh. Prvá má názov „Problémy, ktorých konštrukcia vyžaduje iba rovné čiary a kružnice“ a otvára sa tvrdením: „Každý problém geometrie možno ľahko redukovať na tvar, v ktorom znalosť dĺžok určitých úsečiek postačuje pre jeho konštrukciu“. Descartes ukazuje, že problémy, ktoré možno skonštruovať pomocou kružidla a pravítka, sú ekvivalentné konštrukcii koreňov rovníc druhého stupňa. Jadrom tejto časti Geometrie je všeobecná stratégia na riešenie všetkých geometrických problémov. Možno ju rozdeliť na tri kroky: pomenovanie, vypísanie rovníc a konštrukcia. V prvom kroku predpokladáme, že problém už bol vyriešený a dáme mená všetkým úsečkám, ktoré sú potrebné pri jeho riešení. V druhom kroku, ignorujúc rozdiel medzi známymi a neznámymi úsečkami, nájdeme vzťahy medzi ich dĺžkami, a zapíšeme ich pomocou rovníc. Tretí krok spočíva v geometrickej konštrukcii koreňov rovnice. Descartes uzatvára túto časť tvrdením, že všetky problémy klasickej geometrie možno vyriešiť uvedenou metódou. Analytická geometria umožňuje redukovať geometrické problémy na algebru. Aby sme si ilustrovali silu tejto redukcie, uvedieme úlohu zostrojiť pravidelný päťuholník.

„Začnime s desaťuholníkom. Predpokladajme, že pravidelný desaťuholník je vpísaný do jednotkového kruhu a označme dĺžku jeho strany x. Keďže uhol ASB je 36° , a zvyšné dva uhly sú rovnaké, sú oba rovné 72° . Preto prerušovaná čiara, ktorá rozpoľuje uhol SAB, delí trojuholník na dva rovnoramenné trojuholníky (plynie to z veľkosti uhlov). Preto prerušovaná čiara rozdelí polomer SB na dve úsečky dlhé x a $1 - x$. Z podobnosti trojuholníka SAB s menším z trojuholníkov vieme, že $1/x = x/(1 - x)$, teda $x^2 + x - 1 = 0$. Kladné riešenie tejto rovnice je $x = (\sqrt{5} - 1) / 2$.“ (Courant a Robbins 1941, s. 122)



Túto úsečku vieme ľahko zostrojiť. $\sqrt{5}$ je uhlopriečka obdĺžnika so stranami 2 a 1. Odčítame od nej úsečku dĺžky 1 a výslednú úsečku rozpolíme. Keď takto získanú dĺžku zoberieme do kružidla a začneme nanášať na obvod jednotkovej kružnice, pričom si budeme všímať iba každý druhý bod, dostaneme vrcholy pravidelného päťuholníka. Tu vidíme výhodu metódy redukcie. Úlohu konštruovať pravidelný päťuholník previedla na úlohu skonštruovať úsečku určitej dĺžky, presne ako hovorí Descartes. Konštrukčná geometria bola náročná, lebo na konštrukciu každého útvaru si bolo treba pamätať špeciálny postup. V analytickej geometrii sa nekonštruujú útvary. Individuálne určenia útvaru sa zapisujú do tvaru algebraických rovníc a tie sa všeobecnými metódami algebry vyriešia. Konštruujú sa potom iba riešenia rovníc, čo sú úsečky určenej dĺžky. Napríklad namiesto konštrukcie pravidelného desaťuholníka sme dostali úlohu zostrojiť úsečku s dĺžkou $(\sqrt{5}-1)/2$. Na konštrukciu úsečiek existujú štandardné metódy. Poznáme postup ako sa konštruuje súčet, súčin, rozdiel, podiel a druhá odmocnina úsečky danej dĺžky. A to je všetko, čo si z geometrie potrebujeme pamätať.⁵

Keď sa z hľadiska analytickej geometrie pozrieme na syntetickú geometriu, tak tam, kde bola pôvodne iba neprehľadná spleť konštrukčných trikov, sa začína črtáť systém. Už si nepotrebujeme pamätať triky – metóda redukcie umožňuje riešiť každý problém štandardným postupom. Nezaujima ju elegancia riešenia. Je možné, že klasickí geometri dokázali zostrojiť päťuholník s menším počtom krokov, ako treba pri postupe uvedenom vyššie. Výhoda uvedenej konštrukcie spočíva v tom, že nijako nesúvisí s päťuholníkom. V prípade ľubovoľného iného útvaru bude postup v hlavných rysoch rovnaký – zmení sa iba rovnica, ktorej koreň budeme konštruovať. Celková schéma však ostane nezmenená. Tá schéma sa zakladá na poznaní, že v geometrii pod zjavným povrchom, na ktorom sa zakladajú triky geometrov, leží vrstva vzťahov, vďaka ktorým sú tieto triky vôbec možné. Je potrebné zmocniť sa tejto hlbšej algebraickej úrovne problému a v nej hľadať riešenie. Vždy sa možno ľahko vrátiť späť, ku zjavnému povrchu. Takto analytická geometria odhaľuje hlbšiu jednotu, ktorá sa skrýva za zdanlivou rôznorodosťou geometrických úloh. Všetky úlohy spočívajú v zostrojení úsečiek, ktorých dĺžka je daná nepriamo, pomocou vzťahov k iným úsečkám, a tieto vzťahy majú tvar algebraických rovníc. To je všetko. Preto metodickú silu jazyka analytickej geometrie budeme charakterizovať jeho schopnosťou zjednotiť postupy syntetickej geometrie.

4 Integratívna sila

Štvrtou potencialitou je integratívna sila jazyka.

4.1 Elementárna aritmetika – jazyk je neintegratívny

Možno konštatovať, že jazyk elementárnej aritmetiky je **neintegratívny**, neumožňuje vytvoriť jednotiaci pohľad. Tento aspekt nachádza potvrdenie v dochovaných textoch,

ktoré sú zbierkami riešených príkladov bez pokusu o nejaký jednotiaci pohľad. Ak sa na papyruse vyskytuje nejaké usporiadanie úloh, toto usporiadanie je dané obsahom (osobitne sa uvádzajú úlohy na výpočet polí, úlohy na výpočet daní, úlohy na výpočet násypov, úlohy na výpočet kanálov). Teda jednotiaci princíp do problematiky nevnaša jazyk, ale pramení z toho, čoho sa príslušné úlohy týkajú.

4.2 Syntetická geometria – jednota Euklidových Základov

Najlepšou ilustráciou integratívnej sily jazyka syntetickej geometrie sú Euklidove *Základy*, ktoré spájajú do jedného celku teóriu čísel, planimetriu, stereometriu a teóriu proporcií (čo je antický ekvivalent teórie reálnych čísel). Dnes prevláda názor, že Euklidove *Základy* sú len sčasti originálnym výtvorom Euklida. Mnohé partie Euklides prebral z diel, ktoré sa nedochovali. *Teóriu proporcií*, uvedenú v V. knihe *Základov*, pravdepodobne prebral od Eudoxa. Od Eudoxa pochádza aj *metóda exhaustácie*, uvedená v XII. knihe. *Klasifikáciu iracionalít* v X. knihe Euklides prebral od Theaiteta a *teóriu čísel*, obsiahnutú v VII.–IX. knihe, od Archyta z Tarentu. Euklidovým originálnym výkonom je *teória Platónskych telies* v XIII. knihe, ktorá tvorí vrchol celého diela. Vidíme, že *Základy* sú kompilátom, obsahujúcim myšlienky významných matematikov. Napriek tomu tvoria jednotný celok, ktorý čitateľa upúta svojou systematickou výstavbou a vzájomnou prepojenosťou jednotlivých tvrdení. A túto jednotu výstavby *Základom* prepožičiava práve jazyk syntetickej geometrie. Jednota Euklidových *Základov* je tak vyjadrením integratívnej sily jazyka syntetickej geometrie.

4.3 Algebra – jednota Bourbakiho matematiky

Pokus o podobnú syntézu v súčasnej matematike, akú pre antickú matematiku tvoria Euklidove *Základy*, uskutočnila v druhej tretine 20-teho storočia skupina francúzskych matematikov, publikujúcich pod pseudonymom Nicolas Bourbaki. Bourbakiho dielo je fascinujúce a zaslúžene si získalo obdiv a uznanie. Jednota, ktorú v matematike Bourbaki nachádza, je štrukturálna jednota, ktorá ilustruje integratívnu silu jazyka algebry.

4.4 Analytická geometria – ???

Nie je ľahké nájsť ilustráciu integratívnej sily jazyka analytickej geometrie.⁶ Možno by touto jednotou mohla byť jednota, ktorú do matematiky vnáša teória kategórií.

5 Explanatorická sila

Ako piatu potencialitu budem ilustrovať explanatorickú silu jazyka.

5.1 Elementárna aritmetika – jazyk je neexplanatorický

Jazyk elementárnej aritmetiky je **neexplanatorický**. Dochované texty obsahujú praktické návody bez akéhokoľvek vysvetľovania. Túto črtu jazyka aritmetiky si všimli aj historici. Jeremy Gray píše v súvislosti s Egyptskou a Babylonskou matematikou o „protirečivých a neexplanatorických výsledkoch“ (Gray 1979, s. 3). Je to pochopiteľné. Ak jazyk nie je schopný vyjadriť všeobecnosť, nie je v ňom možné vysvetľovať ale iba ukazovať.

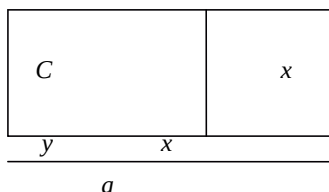
5.2 Syntetická geometria – schopnosť vysvetliť neriešiteľnosť niektorých úloh

Z pohľadu elementárnej aritmetiky je nepochopiteľné, prečo úloha

$$x + y = 10, \quad x \cdot y = 40$$

nemá riešenie. Jazyk syntetickej geometrie dokáže vysvetliť túto zvláštnu skutočnosť:

„Výhodu prechodu ku geometrii môžeme ilustrovať nárastom *explanatorickej sily*. Zrejme neexistujú čísla x a y , ktorých súčet je 10 a súčin 40, a babylonskí pisári sa vyhli diskusi takýchto otázok. Teraz však môžeme nahliadnuť, prečo také čísla neexistujú. V jazyku prikladania plôch máme za úlohu priložiť obdĺžnik s obsahom 40 na úsečku dĺžky 10 so zvyškom v tvare štvorca.



Obsah x y veľkého obdĺžnika C sa mení s x (a preto aj s y) a je najväčší vtedy, keď obdĺžnik má tvar štvorca. V tomto prípade $x = y = a/2$, a obsah je $a^2/4$. Preto daný problém môžeme vyriešiť iba za predpokladu, že $a^2/4$ bude väčšie než daný obsah C . V našom prípade $100/4 = 25$ nie je väčšie ako 40, preto žiadne riešenie nemôže existovať. Diskusia možnosti nájsť riešenie je obsiahnutá v Euklidovi (Kniha VI, Prop. 27) bezprostredne pred riešením príslušného problému“ (Gray 1979, s. 24).

Vidíme, že jazyk geometrie dokáže vysvetliť neexistenciu riešenia určitej úlohy, čo bolo z čisto aritmetického hľadiska nepochopiteľné. Pritom tento konkrétny príklad nárastu explanatorickej sily jazyka si všimli aj historici matematiky.

5.3 Algebra – schopnosť vysvetliť neriešiteľnosť trisekcie uhla

Jazyk algebry umožňuje vysvetliť, prečo sú tri antické problémy (trisekcia uhla, duplicita kocky a konštrukcia pravidelného sedemuhelníka) neriešiteľné pomocou kružidla a pravítka. V rámci syntetickej geometrie je nepochopiteľné, prečo sa tak prirodzene formulované úlohy nedarí vyriešiť. Jazyk algebry to umožňuje pochopiť, lebo dokáže charakterizovať súbor všetkých úloh, ktoré sú riešiteľné pomocou euklidovských konštrukcií. Sú to úlohy, v ktorých sa vyskytujú iba také úsečky, ktorých dĺžky sú buď racionálne čísla, alebo ich možno z racionálnych čísel dostať použitím konečného počtu operácií druhej odmocniny. Na dôkaz toho, že uvedené tri úlohy sú prostriedkami euklidovskej geometrie neriešiteľné, stačí ukázať, že pri ich riešení nevyhnutne vzniknú úsečky, ktorých dĺžky nemajú uvedený tvar (Courant a Robins 1941, s. 120–140; Stewart 1989, s. 50–60). V jazyku geometrie neriešiteľnosť nie je možné ani len vyjadriť, nieto vysvetliť. Naproti tomu jazyk algebry umožňuje príčinu neriešiteľnosti spomenutých úloh pochopiť. Kružidlo a pravítko umožňujú totiž vytvoriť len úsečky, ktorých dĺžky sú z algebraického hľadiska veľmi špeciálneho tvaru. Jazyk algebry má teda explanatorickú prevahu nad jazykom syntetickej geometrie.

5.4 Analytická geometria – schopnosť vysvetliť *casus irreducibilis*

Analytická geometria umožňuje pochopiť, prečo algebraické vzorce niekedy zlyhávajú. Myšlienka pochádza od Newtona. Musíme si uvedomiť, že riešiť algebraickú rovnicu znamená hľadať priesečníky krivky, zodpovedajúcej príslušnému polynómu, s osou x . Keby algebraické vzorce fungovali univerzálne, t.j. pri všetkých hodnotách koeficientov by mali riešenie, znamenalo by to, že všetky krivky musia preŕať os x . To je však nemožné. Nie je ťažké nájsť polynóm, ktorého graf os x nepretína. Preto musí

existovať možnosť, kedy vzorce zlyhajú a táto možnosť zodpovedá neexistencii priesečníka. Nie je ťažké nahliadnuť, že je to práve vtedy, keď sa pod odmocninou objavia záporné čísla. Napríklad vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pre riešenie rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ prestáva fungovať keď je číslo $b^2 - 4ac$ záporné. To nastáva vtedy, keď parabola, daná rovnicou $y = ax^2 + bx + c$, nepretne os x .

Zlyhanie algebraických vzorcov nie je teda prejavom nešikovnosti algebraikov. Práve naopak, keďže algebraické rovnice vyjadrujú priebeh kriviek, vzorce na ich riešenie musia niekedy zlyhať, aby dopriali krivkám potrebnú slobodu. Zlyhanie vzorcov, ktoré z hľadiska algebry mohlo pôsobiť ako nedostatok, ním v skutočnosti nie je. Nie je to ani nejaký výnimočný jav, ale ide o systematický rys algebraických formúl. Jazyk analytickej geometrie teda umožňuje pochopiť zlyhanie jazyka algebry, ktoré bolo z algebraického hľadiska záhadou.⁷ Máme tu do činenia s čímsi podobným, ako keď syntetická geometria umožnila vysvetliť neriešiteľnosť niektorých aritmetických úloh. V oboch prípadoch geometrický jazyk odhalil netušené bohatstvo možných situácií a vyčlenil tie, ktoré sú zodpovedné za zlyhanie symbolického jazyka. Preto tieto vysvetlenia nie sú prejavom duchaplnosti konkrétnych matematikov. Skôr ilustrujú explanatorickú silu jazyka.

6 Metaforická sila

Ako poslednú potencialitu budem ilustrovať metaforickú silu jazyka.

6.1 Elementárna aritmetika – hudobné ladenie

Metaforická sila určitého jazyka môže byť ako pozitívna, kedy metafory otvárajú prístup k uchopeniu novej oblasti javov, tak negatívna, kedy nás metafory systematicky uvádzajú do omylu. Pozitívnu ilustráciu metaforickej sily jazyka elementárnej aritmetiky je pytagorejská teória číselnej harmónie. Na zvuku, ako ho bezprostredne vnímame, niet ničoho, čo by pripomínalo čísla. Napriek tomu Pytagoras rozpracoval teóriu hudobnej harmónie, ktorá v hrubých rysoch platí podnes, a ktorá bola neskôr zdôvodnená teóriou kmitania kontinua a poznatkami fyziológie sluchu. Ako príklad negatívnej metafory možno vziať inteligenčné testy, ktoré tvoria jednu z posledných bášť pytagorejskej číselnej mystiky. Na rozdiel od pytagorejcov dnes už neveríme, že by čísla mohli merať spravodlivosť. Z neznámych príčin však v prípade inteligencie v silu čísel stále veríme.

6.2 Syntetická geometria – zlatý rez vo výtvarnom umení; Spinozova etika

Ako ilustráciu metaforickej sily jazyka syntetickej geometrie možno uviesť teóriu zlatého rezu vo výtvarnom umení a celkovú renesančnú snahu redukovat' estetiku výtvarných diel na geometriu. Samozrejme, príklad hudobnej harmónie zvädza, ale na rozdiel od vlastných kmitov tekutiny vo vnútornom uchu, ktoré poskytujú vysvetlenie toho, prečo niektoré frekvencie vnímame ako harmonické, v oblasti vizuálneho vnímania nemáme žiadne analogické vysvetlenie, prečo by určité pomery mali súvisieť s pocitom krásy. Preto nemožno povedať, či snahy o vybudovanie geometrickej teórie výtvarnej harmónie sú pozitívnu alebo negatívnu ilustráciu metaforickej sily jazyka syntetickej geometrie.

Ešte pozoruhodnejším príkladom metaforickej sily jazyka syntetickej geometrie je Spinozov spis *Etika*. Opäť niet dôvodu, prečo by štruktúra Euklidových *Základov* mala mať niečo spoločné s etikou. Preto aj tu ide o použitie čisto metaforické. Na druhej strane

Spinozov spis je fascinujúce dielo, svedčiace o metaforickej sile geometrického jazyka.

6.3 Algebra – Quesneho ekonómia, Parkinsonove zákony

Ako ilustráciu metaforickej sily jazyka algebry možno vziať vieru moderných ekonómov a riadiacich pracovníkov v „objektivitú“ algebraických vzorcov. Zdá sa, že v tomto prípade, podobne ako v prípade aritmetiky, má metaforická sila kladný aj záporný pól. Ako kladnú ilustráciu metaforickej sily jazyka algebry možno vziať *Tableau économique* Francoisa Quesneya z roku 1758, v ktorom vytvoril model hospodárstva, pomocou ktorého sa snažil ukázať dôsledky zásahov do ekonómie. Model zachytáva sieť tokov v ekonómii a umožňuje sledovať dôsledky rôznych zásahov. V zásade predstavuje veľkú sústavu rovníc (Quesnay ju znázornil graficky) a je tak svojou povahou algebraický.

Na negatívne aspekty metaforickej sily jazyka algebry v ekonómii vtipne a výstižne upozornil C. Northcote Parkinson vo svojej knihe *Parkinsonov zákon* (Parkinson 1962). V tejto práci formuloval dôležitý zákon, udávajúci očakávaný prírastok úradníkov v centrálnom úrade:

$$x = \frac{2k^m + l}{n},$$

kde k je počet úradníkov, ktorí usilujú o povýšenie prijímaním podriadených, l je rozdiel medzi vekom pri nástupe a pri odchode do penzie, m predstavuje počet hodín venovaných na vybavovanie zápisníc a n je počet skutočne vybavených písomností; x udáva počet každoročne požadovaných nových úradníkov. Samozrejme, tento príklad je žart, ale podobné vzorce vyjadrujúce „kvalitu“ vedeckej publikácie už žartom nie sú.

6.4 Analytická geometria – ???

Pre metaforickú silu jazyka analytickej geometrie sa mi zatiaľ nepodarilo nájsť vhodnú ilustráciu.

7 Zhrnutie

Na príklade štyroch historických vrstiev matematiky, predstavovaných elementárnou aritmetikou, syntetickou geometriou, algebrou a analytickou geometriou som sa pokúsil ilustrovať nárast ich *logickej, expresívnej, metodickej, explanatorickej, integratívnej a metaforickej sily*. Dúfam, že sa podarilo ukázať, že týchto šesť potencialít jazyka objektivne existuje a ich analýza predstavuje legítimny predmet historického výskumu.

Poznámky

1 – V knihe (Kvasz 2008) sú uvedené iba štyri potenciality. Nutnosť doplniť dve ďalšie (metodickú a metaforickú silu) som si uvedomil až pri práci na systematickom výklade potencialít jazyka matematiky v (Kvasz 2010).

2 – V *Grundlagen der Arithmetik* Frege uvádza ako príklad aritmetického tvrdenia vzťah $135\,664 + 37\,863 = 173\,527$ (Frege 1884, s. 17). Tento príklad ukazuje, že jazyk elementárnej aritmetiky sa zakladá na formálnych pravidlách manipulácie so symbolmi.

3 – Je dôležité si uvedomiť, že algebra dokáže explicitne vyjadriť postup vďaka tomu, že má implicitný pojem funkcie (alebo ako píše Frege, matematici „dospeli ku skúmaniu jednotlivých funkcií, avšak ešte bez toho, že by v matematickom zmysle použili toto slovo

a že by chápali jeho význam“). Je to práve odlišenie funkcie a argumentu, ktoré umožňujú zo vzorca vyčítať poradie, v akom jednotlivé operácie po sebe nasledujú.

4 – To, že jazyk elementárnej aritmetiky neumožňuje explicitne *sformulovať* žiadnu metódu, neznamená, že príklady riešené napríklad v *Rhindovom papyruse* neobsahujú určitú implicitnú metódu, ktorá nie je vyjadrená, ale sa iba *ukazuje*. Nájdenie implicitnej jednoty postupov použitých pri riešení určitej skupiny matematických úloh je zaujímavý problém. Podobne, ako si matematici starovekého Egypta a Babylónu museli byť aspoň do určitej miery vedomí všeobecnosti svojich postupov (teda toho, že keď sa konkrétne čísla nahradia inými, postupovať možno rovnako), aj keď túto všeobecnosť nedokázali explicitne vyjadriť, je možné, že ich postupy majú aj istú metodickú jednotu. Treba si však uvedomiť, že takáto implicitná jednota nie je prejavom metodickej sily jazyka, ale práve naopak, vzniká ako kompenzácia jeho nemetodickosti.

5 – Musím sa ospravedlniť, ale neodolal som pokušeniu a ako ilustráciu som zvolil príklad, ktorý je elegantný, a kvôli tomu zastiera pointu. Pri konštrukcii pravidelného päťuholníka som totiž použili trik – jeho nahradenie desaťuholníkom. Keby sme to neurobili, dostali by sme podobnú rovnicu, iba by to trvalo o niečo dlhšie. Podstatné tu však nie je, ako rýchle dostaneme rovnicu. Podstatná je skutočnosť, že následná konštrukcia je už triviálna. Všetku prácu sme presunuli na plecía algebry. Algebra nás od rovníc priviedla ku koreňom. Nám ostáva už len zostrojiť koreň, čo je triviálne.

6 – V (Kvasz 2008) som metódu redukcie uviedol ako ilustráciu integratívnej sily jazyka analytickej geometrie. Keď som neskôr dospel k presvedčeniu, že existujú dve ďalšie potenciality (metodická a metaforická sila) zdalo sa mi vhodnejšie metódu redukcie vziať za ilustráciu metodickej a nie integratívnej sily jazyka.

7 – Treba dodať, že s Cardanovým *casus irreducibilis* to nie je tak jednoduché. Polynóm tretieho stupňa, ktorý Cardano skúmal, má tri reálne korene. Máme teda do činenia s jemnejším problémom. Vzorec pre riešenia rovnice tretieho stupňa vyjadruje reálne korene ako kombinácie komplexných veličín. To však nič nemení na skutočnosti, že reprezentácia polynómov pomocou kriviek umožňuje porozumieť javom, ktoré pri algebraickom prístupe pôsobia tajuplne.

Literatúra

- [1] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku, Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, Praha, 2003.
- [2] Boole G.: *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge, 1847.
- [3] Courant R. Robbins H. (1941): *What's mathematics?* Oxford UP, New York, 1978.
- [4] Descartes R. (1637): *Geometrija*. In: *Rassuždenie o metode*. Izdatel'stvo Akademii Nauk CCCP, 1953, str. 299–408.
- [5] Euclid: *The Thirteen Books of the Elements*. Translated by Sir Thomas L. Heath, Dover, New York, 1956.
- [6] Euler L.: *Introductio in analysin infinitorum*. Bousquet, Lausannae, 1748.
- [7] Fourier J.: *Théorie Analytique de la Chaleur*. Paris, 1822.
- [8] Frege G. (1884): *Základy aritmetiky. Logicko-matematické skúmanie pojmu čísla*. Preložil P. Balko, Veda, Bratislava, 2001.

- [9] Frege G. (1891): Funktion und Begriff. In: Frege, G.: *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1989, str. 17–39.
- [10] Gray J.: *Ideas of Space Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*. Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [11] Heath T. (1921): *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981.
- [12] Klein J. (1934): *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. MIT Press, 1968.
- [13] Kolman A. (1961): *Dějiny matematiky ve starověku*. Akademie, Praha, 1968.
- [14] Kvasz L.: *History of Geometry and the Development of the Form of its Language*. Synthese 1998, 141–186.
- [15] Kvasz L. : *Gramatika zmeny*. Chronos, Bratislava, 1999.
- [16] Kvasz L.: *Changes of Language in the Development of Mathematics*. Philosophia Mathematica 2000, 47–83.
- [17] Kvasz L.: *History of Algebra and the Development of the Form of its Language*. Philosophia Mathematica 2006, str. 287–317.
- [18] Kvasz L.: *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [19] Kvasz L.: *Náčrt potencialít jazyka matematiky*. In: Kvasnička V. (ed.) *Kognice a umělý život*, 2010.
- [20] Lagrange J. L. (1788): *Mécanique Analytique*. Paris. Ruský překlad V. S. Gochmana, GITTL, Moskva, 1950.
- [21] Parkinson C. N. (1962): *Parkinsonov zákon*, Vydavatel'stvo Politickej Literatúry, Bratislava, 1966.
- [22] Piper N. (Hrsg. 1996): *Die grossen Oekonomen*. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 1996.
- [23] Stewart I.: *Galois theory*. Chapman and Hall, London, 1989.
- [24] Viète F. (1591): *Introduction to the Analytical Art*. In: Klein, 1934, str. 313–353.
- [25] Vymazalová H.: *Staroegyptská matematika, Hieratické matematické texty*. Český egyptologický ústav, Praha, 2006.

PodĎakovanie

Príspevok je súčasťou grantového projektu VEGA 1/0453/09 *Vedecká racionalita, jej historické predpoklady a filozofické medze*.

Adresa

Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.
 Katedra matematiky a didaktiky matematiky
 Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze
 M.D. Rettigové 4
 116 39 Praha 1

POZNÁMKY K HISTORII FUNKCIONÁLNÍCH ROVNIC

JIŘÍ VESELÝ

Abstract: The contribution is devoted to the origins and the development of the theory of functional equations, especially in the 19th and 20th century. It shows how functional equations assisted the development of mathematics in general (Gamma function, Cauchy functional equations, convexity, harmonic functions etc.). Special attention is given to elementary considerations on the real line and to the role which functional equations could play at the secondary school curricula.

1 Úvod

1.1 Současný stav. Náhledem do databáze MathSciNet zjistíme, že funkcionální rovnice (dále jen FR) se v několika posledních desetiletích těšily velkému a vzrůstajícímu zájmu. Není divu, neboť nacházejí aplikace v mnoha disciplínách, a jak je zmíněno v monografii [23], výsledky se objevují tak rychle, že je obtížné je i v obsáhlé monografii zachytit (srv. s klasickými publikacemi [1], [2] nebo s nedávno vyšlou knihou [20]). Uvnitř matematiky FR úzce souvisejí s teorií pravděpodobnosti a s teorií grup nebo teorií dynamických systémů a vně matematiky jsou intenzivně využívány v ekonomii, v teorii informace, v biologii a fyzice. Jednotlivé speciální výsledky lze nalézt prakticky ve všech odvětvích matematiky a nezanedbatelný je i jejich didaktický potenciál, neboť umožňují jednotný přístup k zavádění elementárních transcendentních funkcí a jsou prakticky nepřehledným zdrojem úloh pro zájmové matematické soutěže.¹

1.2 Z čeho vyjdeme. Exaktní definice FR není příliš jednoduchá. Lze k ní přistoupit např. takto: Definujeme člen pomocí podmínek:

- (a) nezávisle proměnné $x_1, x_2, \dots, x_m$ jsou členy,
- (b) je-li f funkce n proměnných a $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou členy, pak je $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ také člen,
- (c) žádné jiné členy, které se netvoří pomocí (a), (b) neexistují.

Relace $t_1 = t_2$, kde členy t_1, t_2 obsahují alespoň jednu neznámou funkci a konečný počet nezávisle proměnných, je *funkcionální rovnice*. Přitom je třeba vymežit obor funkcí, v rámci kterého řešení hledáme. Nebudeme však tuto definici rozebírat; zvolíme obvyklý postup a spokojíme se s příklady FR (srv. [2]).²

Velice blízko modernímu pojetí řešení FR se dostal již CHARLES BABBBAGE, který 15. června 1815 prezentoval v Královské londýnské společnosti (The Royal Society of London) své úvahy o přímých a inverzních výpočtech. Rozlišoval dva

¹ Základní poučení o FR na velmi dostupné úrovni nalezne čtenář např. v [32] a [34], hlubší poznatky v monografiích [2], [3], [20] a [23]. Zajímavým úlohám je věnována knížka [33].

² Formální definice funkcionální rovnice se objevuje až ve 20. století, i když se s nimi již po několik století pracovalo.

různé přístupy: buď lze k dané funkci f hledat vztahy, kterým vyhovuje, nebo k (daným) vztahům hledat funkce, které jim vyhovují. Demonstroval to na hledání speciálních zobrazení (involucí) a řešil mnoho dalších zajímavých funkcionálních rovnic. Na základě prezentovaných výsledků práce se stal uznávaným matematikem, který byl ceněn zejména pro nové přístupy a studium nové problematiky.³ Přejdeme však ke konkrétním jednoduchým příkladům.

Řešit funkcionální rovnici nebo jejich soustavu znamená nalézt všechny funkce s daným definičním oborem, které splňují rovnice, v nichž vystupují jejich hodnoty. Tak např. máme určit všechny posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, pro něž platí

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

tj. jejichž každý člen je *aritmetickým průměrem* členů sousedních, nebo všechny reálné funkce f definované na množině všech reálných čísel $\mathbb{R}$ takové, že

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

V případě (1) se jedná vlastně o soustavu spočetně mnoha rovnic, kterým mají vyhovovat členy hledané posloupnosti, v případě (2) je těchto rovnic ještě podstatně více. Velmi snadno nahlédneme, že každá aritmetická posloupnost bude řešením (1) a zkušenější čtenář kromě zřejmých řešení $f \equiv 0$ a $f \equiv 1$ rovnice (2) uhodne, že jejím řešením je i exponenciální funkce $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Situaci lze dnes přirovnat k axiomatice: hledané objekty (posloupnosti, funkce) popisujeme jejich vlastnostmi (axiomy). Tento přístup je podstatně starší a užíval se dříve, než se vytváření teorií z daných axiomů stalo v matematice základním nástrojem. Přitom podstatně ovlivnil vývoj matematiky, což budeme ilustrovat na vybraných ukázkách.

1.3 Trocha rané historie. S posloupnostmi pracovali již matematici ve starověku. Připomeňme, že ARCHIMEDES v souvislosti s kvadraturou parabolické úseče v podstatě sečetl geometrickou řadu, jejíž členy byly vždy *geometrickým průměrem* sousedních členů. Jeho metoda komprese aplikovaná na výpočet přibližné hodnoty čísla π užívá posloupností rekurentní povahy: při zdvojnásobování počtu stran pravidelných n -úhelníků vepisovaných a opisovaných kružnici se velikosti stran počítají pomocí velikostí stran z předchozího kroku.⁴

Vzorci (1) lze posunem indexů a úpravou dát tvar rekurence

$$a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1')$$

³ CHARLES BABBAE (1791–1871) přišel jako první s myšlenkou sestavit programovatelný počítač, který však nikdy nedokončil. V r. 1991 byl podle jeho zachovaných plánů sestaven plně funkční počítačový stroj, a to jen za použití prostředků dostupných v 19. století. Tak bylo prokázáno, že by byl jeho stroj už tehdy funkční. Babbage je dnes spíše znám jako vynálezce počítače.

⁴ Vynikající výsledky, k nimž dospěl ARCHIMEDES (287–212 před n. l.), jsou všeobecně známé. Poměrně podrobný popis jeho výpočtů hodnoty π lze nalézt v [12] nebo v Úvodu k [36].

Dříve nežli se rekurencemi budeme zabývat obecněji, připomeňme ještě jeden velmi známý příklad. Ve *Fibonacciho posloupnosti* $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ pocházející ze 13. století jsou prvé dva členy rovny 1 a další jsou vždy součtem dvou členů bezprostředně předcházejících. Je tedy

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots, \quad \text{a} \quad F_1 = F_2 = 1. \quad (3)$$

Definujme $F_0 = 0$ a zaměňme (3) za (3')

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad \text{a} \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1; \quad (3')$$

smysl úpravy je v tom, že vlastně vhodně dodefinujeme F_0 a pracujeme s posloupností $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$. Čísla F_k jsou *Fibonacciho čísla*. Vzorec pro k -tý člen posloupnosti $\{F_k\}$ se nazývá *Binetův vzorec* a začátečníky obvykle překvapí jeho tvar

$$F_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}}. \quad (4)$$

Ještě před Binetem odvodil tento vzorec DE MOIVRE⁵ a položil tak základ důležité metody vytvářejících funkcí. Ukázal totiž, že pokud označíme součet mocninné řady s koeficienty F_k

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k, \quad \text{je} \quad \mathcal{F}(z) = \frac{z}{1 - z - z^2};$$

jednoduchými úpravami lze pak dospět k (4). Blíže viz [35]. My budeme postupovat jiným způsobem.

1.4 Jednoduché lineární rekurence. Nalezení posloupnosti popsané jednoduchými *lineárními rekurencemi* není složité. Vztah

$$a_k = \alpha_1 a_{k-1} + \alpha_2 a_{k-2} + \dots + \alpha_d a_{k-d} \quad (5)$$

je tzv. homogenní lineární rekurence s konstantními koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ řádu d . Budeme hledat posloupnost, která jí vyhovuje, ve tvaru $\{x^k\}$. Po dosazení, vydělení x^{k-d} (předpokládáme $x \neq 0$, nulová posloupnost je triviálním řešením) a úpravě dostaneme *charakteristickou rovnici*

$$x^d - \alpha_1 x^{d-1} - \alpha_2 x^{d-2} - \dots - \alpha_d = 0,$$

⁵ LEONARDO Z PISY (1180–1240) známý jako *Fibonacci* sepsal r. 1202 knihu *Liber Abaci*, v níž popsal úlohu o růstu králičí populace vedoucí na zkoumání posloupnosti popsané pomocí (3). ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) dokázal vzorec (4) r. 1718. V 19. století jej znovu odvodil francouzský matematik JACQUES PHILIPPE MARIE BINET (1786–1856). Pokud jej známe, lze jej snadno dokázat matematickou indukcí. Fibonacciho čísla však znali již indiští učenci VIRAHANKA (asi 600–800), GOPALA (před r. 1135) a HEMACANDRA (kolem r. 1150).

kde $\alpha_d \neq 0$. Podle základní věty algebry má tato rovnice v komplexním oboru $\mathbb{C}$ celkem d kořenů (je $d \geq 1$). Označíme-li je $\xi_1, \dots, \xi_d$ a jsou-li reálné a různé, pak z linearit (5) plyne, že také každá posloupnost tvaru

$$\{a_k\} = \{c_1 \xi_1^k + c_2 \xi_2^k + \dots + c_d \xi_d^k\}$$

je řešením (5). Každé takové řešení závisí na d konstantách $c_1, c_2, \dots, c_d$, které se eventuálně určí pomocí předepsaných hodnot $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$.

Pokud čtenáři připomíná tento postup řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, není to náhoda. Teorie i metody řešení jsou podobné a jsou zde i hlubší souvislosti. Poznamenejme ještě, že i případ vícenásobných reálných kořenů charakteristické rovnice je podobný: je-li ξ_r jejím n -násobným kořenem, vyhovují rekurenci (5) ještě posloupnosti $\{k \xi_r^k\}, \{k^2 \xi_r^k\}, \dots, \{k^{d-1} \xi_r^k\}$. Podrobnější zkoumání nebudeme provádět, pro zvládnutí ilustrativních příkladů nám to postačí.

Vraťme se k Fibonacciho posloupnosti popsané vzorcem (3'). Položme $a_k = x^k$; dostáváme tak rovnici

$$x^k = x^{k-1} + x^{k-2}, \quad \text{resp.} \quad x^2 = x + 1.$$

Poslední rovnice má za kořeny čísla $\xi_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ a $\xi_2 = (1 - \sqrt{5})/2 = 1/\xi_1$. Číslo ξ_1 se obvykle nazývá *zlatý řez*. Odtud dostáváme, že rekurenci v (3') řeší i posloupnost

$$\{c_1 \xi_1^k + c_2 \xi_2^k\}$$

s libovolně zvolenými koeficienty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Jestliže nyní položíme $F_0 = c_1 + c_2 = 0$, $F_1 = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = 1$, snadno určíme $c_1 = -c_2 = 1/\sqrt{5} = 1/(\xi_1 - \xi_2)$. Odtud dostaneme Binetův vzorec

$$F_k = \frac{(\xi_1)^k - (\xi_2)^k}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}},$$

který ukazuje jednu z mnoha překvapivých souvislostí zlatého řezu s něčím, co je zdánlivě velice odlehlé.

Aplikujeme-li popsany postup na rekurenci (1'), dospějeme podobným způsobem ke kvadratické rovnici

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

s dvojnásobným kořenem $\xi = 1$. Posloupnost, která je obecným řešením (1'), má tvar

$$\{c_1 \xi^k + c_2 k \xi^k\}.$$

Položíme-li nyní $a_0 = a$, $a_1 = b$, pak dostáváme $c_1 = a$, $c_2 = b - a$, a tedy při $d := b - a$ i známý vzorec

$$a_k = a + kd, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Povšimněme si, že tato aritmetická posloupnost je restrikcí lineární funkce $f(t) = a + td$, $t \in \mathbb{R}$, na množinu $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ a že restrikce f na množinu všech celých čísel $\mathbb{Z}$ vyhovuje také rekurenci (1').

2 Další vývoj

2.1 Druhý pohled do historie. Obráťme se ke složitějším případům. Jako jeden z prvních příkladů užití funkcionálních rovnic se zpravidla uvádí speciální popis lineární funkce: Funkce f je lineární na intervalu I , jestliže pro každou trojici navzájem různých bodů $x, y, z \in I$, je

$$\frac{y-x}{z-y} = \frac{f(y)-f(x)}{f(z)-f(y)}. \quad (6)$$

V elementárních učebnicích se užívá k definici lineární funkce vztah

$$f(x) = ax + b. \quad (7)$$

Vztah (6) umožňuje dosazením funkce g za f rozhodnout (alespoň teoreticky – uvažovaných trojic je nekonečně mnoho), zda je funkce f lineární na I či nikoli. Na (7) můžeme pohlížet jako na řešení funkcionální rovnice (6), pokud ovšem je $a \neq 0$.⁶ Připomeňme na tomto místě jinou formu (6): Jednoduchou úpravou dostaneme z (6)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}; \quad (6')$$

k tomuto vztahu a k podobnému vztahu (znamení = nahradíme $\leq$) se později ještě vrátíme.

Rovnice (1) říká, že hodnota členu posloupnosti v bodě k je průměrem hodnot jejích členů v bodech od k stejně vzdálených (platí to nejen pro ty „nejbližší“). Zkoumejme nyní reálnou funkci reálné proměnné s analogickou vlastností:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Zřejmě platí (upravujeme pouze rovnost, obory platnosti jsou zřejmé) pro číslo $a := f(0)$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2} = \frac{f(x)+a}{2},$$

⁶ Tuto definici linearity použil NICOLE ORESME (1323–1382) v díle *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* z r. 1352. Oresme studoval jako stipendista od r. 1348 v Paříži, tedy v období, kdy morová nákaza dělala celou Evropu a kdy na její následky zemřela asi třetina jejích obyvatel. Studia teologie dokončil r. 1356 a krátce nato se stal představeným (grand-maitre) Navarrské koleje v Paříži. Od r. 1377 byl biskupem v Lisieux. Byl všestranným učencem, kanovníkem Karla V. a jeho poradcem. Patrně je možné ho označit za nejvýznamnějšího evropského matematika 14. století. Byl Descartovým předchůdcem v zavádění souřadnic – s tím souvisí i jeho popis přírůstek s nenulovou směrnicí. Patrně nejlepší přehled jeho matematických výsledků přináší [22].

a odtud dostaneme s využitím (7)

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + a}{2},$$

neboli

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a.$$

Je-li nyní $g(x) = f(x) - a$, vyhovuje tato funkce tzv. *Cauchyho funkcionální rovnici*

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Její řešení se nazývají *aditivní funkce*. Pro řešení rovnice (7) se někdy užívá název $\frac{1}{2}$ -*lineární funkce*.

Cauchyho funkcionální rovnice jsou vlastně čtyři (srv. [2]) a jsou tvaru

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y),$$

kde na místě znaků $*$ a $\circ$ stojí znaky pro základní operace v $\mathbb{R}$, tj. „+“ nebo „ $\cdot$ “; obory, na nichž se tyto rovnice obvykle řeší, se liší. Věnujme pozornost nejprve rovnici z (8)⁷:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (A)$$

Zřejmě je $f(2x) = f(x+x) = 2f(x)$ a matematickou indukci obdobně dostaneme $f(nx) = nf(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $x = m/n$ je $nx = m$, z čehož plyne $nf(x) = mf(1)$, a tedy

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1) = xf(1). \quad (9)$$

Využitím rovností $f(0) = 0$ a $0 = f(x) = f(x) - f(-x)$ dostaneme z (9) rovnost $f(r) = rf(1)$ pro všechna $r \in \mathbb{Q}$. Jestliže budeme jako Cauchy předpokládat, že f je *spojitým* řešením (A) na $\mathbb{R}$, pak odtud limitním přechodem pro $r_k \rightarrow x$, $r_k \in \mathbb{Q}$, dostaneme

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f\left(\left(\lim_{k \rightarrow \infty} r_k\right) \cdot 1\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k f(1) = xf(1),$$

což již dává $f(x) = xf(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Poměrně podrobný předchozí postup ilustruje, jakým způsobem se funkcionální rovnice tohoto typu řeší.⁸ Snadno také nahléd-

⁷ Tuto rovnici zkoumali již r. 1791 ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752–1833) a r. 1809 CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), ale teprve Cauchyho vyšetřování v [8] z r. 1821 je z dnešních měřítek přesnosti dostatečně uspokojivé. Legendre však již r. 1791 znal všechna spojitá řešení Cauchyho rovnic.

⁸ Popíšme stručně další vývoj poznatků o (A). JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917) r. 1875 ukázal, že lineární funkce tvaru $f(x) = xf(1)$, $x \in \mathbb{R}$, jsou jedinými řešeními (A) spojitými alespoň v jednom bodě. O něco později, r. 1880 dokázal, že stačí předpokládat existenci intervalu $(0, \delta)$ s libovolným $\delta > 0$, na němž je $f(x) > 0$, $x \in (0, \delta)$. R. 1901 dokázal SALVATORE PINCHERLE (1853–1936) (a později nezávisle i jiní), že k linearitě řešení (A) stačí jeho omezenost na libovolném intervalu. MAURICE FRÉCHET (1878–1973) dokázal r. 1913, že k tomu stačí předpokládat jeho měřitelnost a konečně r. 1929 ALEXANDER MARKOVIČ OSTROVSKI (1893–1986) ukázal, že stačí např. jeho majorizace nebo minorizace měřitelnou funkcí na množině kladné Lebesgueovy míry. Naproti tomu již r. 1905 dokázal KARL WILHELM HAMEL (1877–1954) existenci nespojitých řešení rovnice (A) pomocí konstrukce tzv. Hamelovy báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$; tato řešení jsou však patologická, jejich graf je hustý v $\mathbb{R}^2$ a nejsou ani shora, ani zdola omezená na jakémkoli (nedegenerovaném) intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Podrobnější informaci nalezneme čtenář např. v [3].

neme, že každé řešení FR (7) obdržíme z vhodného řešení FR (8) přičtením konstantní funkce.

Obraťme pozornost k jiné Cauchyho rovnici. Jedním ze spojitých netriviálních řešení FR

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in (0, \infty), \quad (\text{L})$$

je i přirozený logaritmus⁹, který se často zavádí jako to řešení f rovnice (L), pro něž je

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x-1)}{x} = 1.$$

Na tomto místě je vhodné si uvědomit, že řešení FR velmi záleží na oboru, na němž rovnici řešíme. Budeme-li řešit rovnici z (11), *avšak pro případ* $x, y \in \mathbb{R}$, pak pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ bude platit po dosazení $y = 0$

$$f(0) = f(x) + f(0),$$

a tak v tomto případě dostáváme jako jediné pouze triviální řešení $f \equiv 0$. Odstraníme-li bod 0, tj. budeme-li rovnici z (11) řešit pro $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, snadno ověříme, že jejím řešením je např. funkce $\log |x|$.

Podobně jediným řešením f rovnice

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (\text{E})$$

které vyhovuje podmínce

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1, \quad (10)$$

je (přirozená) exponenciála. Popišme její zavedení pomocí (E) trochu podrobněji, neboť není bez zajímavosti i pro případné využití na střední škole. Řešeními rovnice (E) jsou zřejmě konstantní funkce $f \equiv 0$ a $f \equiv 1$. Je-li f nenulové řešení (E), existuje alespoň jedno $x_0 \in \mathbb{R}$, pro něž je $f(x_0) \neq 0$. Potom z rovnosti

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)f(0)$$

plyne $f(0) = 1$, a tedy *každé nenulové řešení* rovnice (E) nabývá v bodě 0 hodnoty 1. Dále platí pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0,$$

což znamená, že všechna řešení (E) jsou nezáporné funkce. Protože dále je

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x) \cdot f(-x), \quad (11)$$

⁹ Tuto rovnici již implicitně studoval GREGORIUS SAINT-VINCENT (1584–1667) v práci *Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coní*. Toto dílo, v němž se pracuje geometrickými prostředky, má cca 1250 stran a logaritmu se dotýká studiem vlastností „plochy pod hyperbolou“.

vyhovují *nenulová* řešení rovnice (E) vztahu $f(-x) = (f(x))^{-1}$ a jsou dokonce *všude kladná*. Konečně ze vztahů

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = (f(x))^2, \\ f((n+1)x) &= f(nx+x) = (f(x))^n \cdot f(x) = (f(x))^{n+1}, \end{aligned}$$

dostáváme pomocí matematické indukce

$$f(nx) = (f(x))^n$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$. Snadno nahlédneme, že uvedené vlastnosti patří k základním vlastnostem exponenciálních funkcí.

Až dosud jsme vůbec nevyužili podmínku (10). Ta má velmi závažné důsledky, k jejich získání však potřebujeme některé základní poznatky z diferenciálního počtu. Každá funkce vyhovující funkcionální rovnici (E) a podmínce (10) má derivace všech řádů, je spojitá, rostoucí a konvexní na $\mathbb{R}$ a zobrazuje $\mathbb{R}$ na interval $(0, \infty)$. Platí pro ni $f' = f$. Ukažme odkud to plyne.¹⁰

Již víme, že $f'(0) = 1$. Snadno spočteme derivaci funkce f ve všech ostatních bodech $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot (f(h) - 1)}{h} = f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f(x).$$

Je tedy $f' = f > 0$, resp. $f^{(n)} = f > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.¹¹ Speciálně odtud plyne, že f je rostoucí na $\mathbb{R}$, a je tedy $f > 1$ na $(0, \infty)$ a $f < 1$ na $(-\infty, 0)$.

Zderivujme funkci $g(x) = f(x) - (x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě je

$$g'(x) = f'(x) - 1 = f(x) - 1,$$

takže $g'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $g'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Jelikož je $g(0) = 0$, nabývá g v bodě 0 minima a platí $f(x) \geq x+1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dále podle tvrzení o limitě funkcí a nerovnostech platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty,$$

a s ohledem na (11) je $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Jelikož je f rostoucí spojitá funkce na $\mathbb{R}$, má tzv. Darbouxovu vlastnost (nabývání mezihodnot). Odtud plyne pro obor hodnot R_f funkce f rovnost $R_f = (0, \infty)$.

¹⁰ Poznamenejme, že při hledání diferencovatelného řešení (A) bychom snadno dospěli k rovnici $f'(x+y) = f'(x)$, ze které plyne, že f' je periodická funkce, jejíž periodou je každé $y \in \mathbb{R}$ a je tedy konstantní.

¹¹ Současně jsme dokázali, že každé řešení rovnice (E), vyhovující podmínce (10), vyhovuje diferenciální rovnici $y' - y = 0$.

Je samozřejmě příliš optimistické předpokládat, že by v době vzniku tohoto textu bylo možno probrat na střední škole základní infinitesimální techniky – pokud ano, pak jen na úrovni kalkulu. Podmínku (10) však lze nahradit podmínkou jednodušší. Platí totiž tvrzení:

Pro každou funkci f vyhovující funkcionální rovnici (E) jsou všechny tři následující podmínky ekvivalentní:

$$\begin{aligned} 1 + x &\leq f(x) \leq (1 - x)^{-1} \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}, x < 1, \\ f(x) &\geq x + 1 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} &= 1. \end{aligned}$$

A tak, kromě elementárních výpočtů, které dokazují základní vlastnosti exponenciály, lze předložit žákům střední školy pravdivé a srozumitelné tvrzení: exponenciála je jedinou funkcí f vyhovující funkcionální rovnici (E), pro niž platí $f(x) \geq x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Poznamenejme ještě, že Cauchyho rovnice byly využity např. při důkazu platnosti binomického rozvoje¹²

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

2.2 Další transcendentní funkce. K zavedení goniometrických funkcí pomocí FR existuje řada cest.¹³ Tak např. užití rovnice

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

sahá až k d'Alembertovi.¹⁴ Pokud se předpokládá existence druhé derivace f'' funkce f , je řešení poměrně jednoduché. Viz např. [32]. Velmi často se užívá k zavedení základních goniometrických funkcí součtových (rozdílových) vzorců pro funkce $\sin$ a $\cos$, které chápeme jako funkcionální rovnice na $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x \pm y) &= f(x)f(y) \mp g(x)g(y), & x, y \in \mathbb{R}, \\ g(x \pm y) &= g(x)g(y) \pm f(x)f(y), & x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

¹² Použil je tak již LEONHARD EULER (1707–1783), a dále r. 1797 SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX (1765–1843), r. 1821 AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857), a konečně ve známém memoiru z r. 1826 NIELS HENRIK ABEL (1802–1829). V soudobém pojetí je užít takový přístup v [39].

¹³ Přístup k zavádění elementárních transcendentních funkcí „přes FR“ použil PAUL TANNERY (1843–1904) již r. 1886. Pokusil jsem se takový přístup zpopularizovat v článku [37].

¹⁴ JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783) studoval tuto rovnici již r. 1750 a pak r. 1769. Rovnicí se rovněž zabývali r. 1804 a r. 1811 SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840) a r. 1821 Cauchy. Ten také dokázal, že jediná netriviální spojitá řešení rovnice mají tvar $f(x) = \cos ax$ a $f(x) = \cosh ax$.

Z těchto rovnic dvojice „rozdílových vzorců“ tvoří jednoduchou soustavu FR, která spolu s podmínkou

$$g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad (13)$$

umožňuje pohodlný přístup k současnému zavedení goniometrických funkcí $\cos$ a $\sin$. Ten má nezanedbatelnou výhodu v tom, že na střední škole se právě z těchto vzorců obvykle odvozují všechny ostatní užitečné vzorce pro tyto funkce a není třeba je proto znovu dokazovat. Viz [36].¹⁵

Nyní se vrátíme zpět do 18. století, v němž začíná historie funkce gama. Situaci si přiblížíme příkladem: v rovnosti

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

má levá strana smysl pro přirozená n , avšak pravá strana pro každé $n \in \mathbb{R}$. Vzorec nám umožňuje interpolovat a dosazením do pravé strany odpovědět např. na poněkud pošetilou otázku, kolik je takový součet „do 5,25“. Pro násobení studoval podobnou otázku po „rozumném rozšíření“ faktoriálů Euler.¹⁶ Dospěl k řešení pomocí nekonečných součinů, a tak v podstatě již téměř získal vyjádření Γ -funkce. Odvodil vzorec

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx ,$$

který po substituci a posunutí dává obvyklé integrální vyjádření

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dx , \quad x \in (0, \infty) .$$

Položme otázku, v čem je toto řešení interpolačního problému výjimečné. Takto definovaná Γ -funkce vyhovuje funkcionální rovnici

$$f(x+1) = x f(x) , \quad x \in (0, \infty) , \quad (14)$$

a také podmínce

$$f(1) = 1 . \quad (15)$$

¹⁵ To, že rozdílové vzorce jsou tím „nejsilnějším“ párem, dokázal již r. 1919 OSKAR PERRON (1880–1975). Později v letech 1939–1944 bylo několika matematiky nezávisle dokázáno, že k zavedení obou funkcí stačí jediná z těchto čtyř rovnic (rozdílová formule pro kosinus) a že žádná z ostatních tří FR tuto vlastnost nemá. Od LEOPOLDA VIETORISE (1891–2002) pochází idea využít k jejímu řešení již známé řešení d’Alembertovy rovnice. Viz [2].

¹⁶ Tento interpolační problém předložil Eulerovi pozdější sekretář Petrohradské akademie CHRISTIAN GOLDBACH (1690–1764). Euler našel jeho řešení v letech 1729–1930; bylo publikováno v r. 1738. Autorem dnešního vyjádření včetně označení „gama-funkce“ symbolem Γ a názvů Eulerův integrál prvního a druhého druhu je Legendre. O Eulerově přístupu pojednává [24].

Takových funkcí, které vyhovují (14) a (15), je však stále mnoho. Nepomohou ani další dodatečně požadované vlastnosti jako konvexita či existence spojitých derivací všech řádů na intervalu $(0, \infty)$. Problém je složitější, než se zdá.¹⁷ Existuje však jediná funkce vyhovující (14) a (15), jejíž *logaritmus je konvexní*, a tou je právě funkce Γ ¹⁸.

Speciální roli v důkazu této tzv. Bohr-Mollerup-Artinovy věty hraje vyjádření Γ -funkce tzv. Gaussovým součinem

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}, \quad x \in (0, \infty),$$

a charakteristika konvexity funkce pomocí *funkcionálních nerovností*. Jimi se nyní budeme zabývat.

3 Funkcionální nerovnosti

3.1 Konvexita. Přítomnost funkcionálních rovnic a nerovnic v běžných definicích si často ani neuvědomujeme. Existuje-li $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak, že je

$$f(x \pm a) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

je f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou a . Je-li I interval a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0, \quad x, y \in I, \quad x < y,$$

je funkce f neklesající na I . Je-li I interval a jestliže je

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}, \quad x, y, z \in I, \quad x < y < z, \quad (16)$$

je funkce f konvexní na I .¹⁹

Přestože se jedná o běžně užívané definice, rozebereme tu poslední, protože u konvexity je možných definic více, a některé jsou patrně i frekventovanější. Po roznásobení a úpravě dostaneme

$$f(y)((z - y) + (y - x)) \leq f(x)(z - y) + f(z)(y - x),$$

¹⁷ Již Euler dokázal, že Γ -funkce je transcendentní. Ukazuje se, že je však „transcendentnější“ než běžné elementární transcendentní funkce: R. 1887 OTTO HÖLDER (1859–1937) dokázal, že Γ není ani řešením žádné algebraické diferenciální rovnice.

¹⁸ Toto tvrzení r. 1922 dokázali v podstatě (tvrzení neformulovali) dánští matematici HARALD BOHR (1887–1925) a JOHANNES MOLLERUP (1872–1937). Jejich důkaz r. 1931 významně zjednodušil EMIL ARTIN (1898–1962) v [5]. Funkce Γ se dá poměrně jednoduše rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Podobně lze v tomto oboru jednoznačně určit funkci Γ pomocí podmínek (14) a (15). Je nutno předpokládat, že funkce splňuje (14) v $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$, je zde holomorfní a je omezená na pásu $\{z \in \mathbb{C}; 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$. Toto tvrzení pochází od HELMUTA WIELANDTA (1910–2001) a je z let 1938 až 1939.

¹⁹ Tato podmínka má velmi hezkou „sečnovou“ interpretaci. Viz např. [36].

neboli

$$f(y) \leq f(x) \frac{z-y}{z-x} + f(z) \frac{y-x}{z-x}.$$

Položíme-li nyní $\alpha = (z-y)/(z-x)$, je $(1-\alpha) = (y-x)/(z-x)$, a snadno dostaneme nejprve

$$f(y) = f\left(x \frac{z-y}{z-x} + z \frac{y-x}{z-x}\right) \leq f(x) \frac{z-y}{z-x} + f(z) \frac{y-x}{z-x},$$

a po dosazení za α známou nerovnost

$$f(\alpha x + (1-\alpha)z) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(z). \quad (17)$$

Je zřejmé, že pokud bod y proběhne interval (x, z) , pak α nabude všech hodnot z intervalu $(0, 1)$. Ponecháme čtenáři k uvážení, že se lze jednoduše „vrátit“ od (17) k (16) a že jsme tak obdrželi jinou možnou (ekvivalentní) definici: Funkce f definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je *konvexní* na I , jestliže pro každé dva body $x, z \in I$ a každé $\alpha \in (0, 1)$ platí (17). Jednoduchá geometrická interpretace podmínky (17) znamená, že sečna grafu funkce f procházející body $[x, f(x)]$ a $[z, f(z)]$, $x < z$, leží „mezi body“ x a z nad grafem funkce f . Snadno nahlédneme, že vynechání podmínky $x < z$ nám umožní zabývat se pouze hodnotami $\alpha \in (0, 1/2]$. Množina řešení (17) se tím nezmění, protože faktor $(1-\alpha)$ nabude všech hodnot z intervalu $[1/2, 1)$.

Připomeňme, že množina $M \subset \mathbb{R}^m$ se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in M$ a každé $\alpha \in (0, 1/2]$ leží všechny body z tvaru $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ v M . Jinak řečeno, konvexní množina obsahuje s každými dvěma body celou úsečku, která je spojuje. V $\mathbb{R}$ jsou konvexními množinami právě všechny intervaly, v $\mathbb{R}^2$ jsou konvexními množinami např. všechny uzavřené kruhy či čtverce. Odstraníme-li z konvexní množiny $\mathbb{R}^2$ např. libovolnou úsečku, výsledná množina již nebude konvexní.²⁰

Nyní můžeme definovat konvexitu funkce obecněji v $\mathbb{R}^m$: Funkce f je *konvexní* na konvexní množině $G \subset \mathbb{R}^m$, jestliže pro každé dva body $x, y \in G$ a každé $\alpha \in (0, 1/2]$ je

$$f(\alpha x + (1-\alpha)z) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(z). \quad (17')$$

Snadno nahlédneme, že (17) a (17') pro interval $I \subset \mathbb{R}$ splývají. Načrtneme-li obrázek, zjistíme z názoru, že funkce f definovaná na intervalu $[0, 1]$ tak, že položíme $f(0) = f(1) = 1$ a $f(t) = 0$, $t \in (0, 1)$, je konvexní na $[0, 1]$, ale není v krajních bodech intervalu spojitá. To se však nemůže stát, jestliže je konvexní funkce definována na *otevřeném* intervalu I .

²⁰ Konvexita množin a funkcí úzce souvisí (konvexní funkce má konvexní „nadgraf“ a obráceně funkce s touto vlastností jsou konvexní. Na vágní úrovni se konvexitou zabýval již Archimedes. Za jejím moderním pojetím stojí HERMANN MINKOWSKI (1864–1909). Zásadními poznatky k ní přispěli EDUARD HELLY (1884–1943) a JOHANES RADON (1887–1956). Na počátku 20. století se konvexitou zabýval i JOHAN JENSEN (1859–1925), na jehož počest je užíván název *J-konvexní* funkce.

3.2 J -konvexitá. Jestliže v (17') zafixujeme $\alpha = 1/2$, dostaneme definici konvexity v Jensenově smyslu²¹: Funkce je *J-konvexní* na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jestliže je

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(z). \quad (18)$$

Porovnáním (7) a (18) nahlédneme, že J -konvexní funkce jsou zobecněním funkcí, které jsme již zkoumali, a že každá aditivní funkce je též J -konvexní. Pokud obdobným způsobem zavedeme také funkce J -konkávní, jsou lineární funkce a aditivní funkce současně J -konvexní i J -konkávní. Podle chování aditivních funkcí můžeme očekávat, že např. spojitě J -konvexní funkce budou konvexní. Všimneme si proto výsledků, které jsou z této oblasti známy. Dříve však uvedeme ještě jednu definici.

Jestliže zvolíme pevně $\alpha \in (0, 1/2]$ a budeme požadovat, aby funkce f vyhovovala nerovnosti (17) pro každé dva body x, y z intervalu I a toto pevně zvolené α , dostaneme definici α -konvexní funkce na I . Budou výsledky pro α -konvexní funkce obdobné jako pro aditivní a J -konvexní funkce? Již poměrně dávno bylo dokázáno, že *spojitě* α -lineární, resp. α -konvexní funkce jsou lineární, resp. konvexní. Přibližme alespoň částečně elementární metody, které se k důkazu těchto vlastností používají.

Je-li funkce f α -lineární a $f(0) = 0$, je aditivní. To plyne z této úvahy:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\alpha \frac{x}{\alpha} + (1-\alpha) \frac{y}{1-\alpha}\right) = \alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha)f\left(\frac{y}{1-\alpha}\right) = \\ &= \left(\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha)f(0)\right) + \left(\alpha f(0) + (1-\alpha)f\left(\frac{y}{1-\alpha}\right)\right) = \\ &= f\left(\alpha \frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0\right) + f\left(\alpha 0 + (1-\alpha) \frac{y}{1-\alpha}\right) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Funkce $f - f(0)$ je α -lineární, je-li f α -lineární. Odtud a z předchozí úvahy plyne aditivita α -lineární funkce. Již víme, že *spojitě* aditivní funkce jsou lineární (jsou β -lineární pro všechna racionální $\beta \in (0, 1/2]$), takže tím jsme důkaz dokončili.

O obecných α -lineárních funkcích a postačujících podmínkách pro jejich spojitost bychom mohli uvést výčet jednotlivých vylepšování postačujících podmínek jako u aditivních funkcí²². Zároveň poznamenejme, že pro každé pevně zvolené $\alpha \in (0, 1/2]$ existují *nespojitá* řešení funkcionální rovnice

$$f(\alpha x + (1-\alpha)z) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(z), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Zajímavější jsou z tohoto hlediska poznatky o α -konvexních funkcích. Uvedeme podrobněji pouze rozdíly v chování s tím, že každá α -lineární funkce je také zároveň α -konvexní. Tak např. nespojitě aditivní funkce zkonstruované Hamelem r. 1905

²¹ Z hlediska funkcionálních nerovností to znamená značnou redukci množiny nerovností, kterými se zabýváme. Je proto přirozenou otázkou, zda se tím množina řešení nezvětší.

²² Podobal by se značně již dříve uvedené poznámce o spojitosti aditivních funkcí, neboť často studium těchto funkcí probíhalo současně.

jsou J -konvexní a jejich restrikce na interval $I \subset \mathbb{R}$ jsou J -konvexní (a zároveň J -konkávni) na I . Viz [15]. Obdobné konstrukce nespojitých α -konvexních funkcí (případně s dodatečnými vlastnostmi) lze nalézt v literatuře. Viz [10]. Jako ukázkou vlastností funkcí tohoto typu ocitujeme tvrzení z [10], str. 117: Pro libovolně zvolené $\alpha \in (0, 1/2]$ existuje na $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, α -konvexní (která není α -lineární!) shora neomezená funkce, která je *buď zdola omezená, nebo zdola neomezená*. Není těžké si rozmyslet, že graf takové funkce na $\mathbb{R}$ již nemusí být hustý v $\mathbb{R}^2$.

Zajímavé je také následující tvrzení: Je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ konvexní otevřená množina a zvolíme-li pevně $\alpha \in (0, 1/2]$, pak funkce f α -lineární na G je *lineární*, je-li jistá velmi komplikovaná množina dosti velká, tj. existují-li $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tak, že je

$$\lambda_*(\{x \in G; f(x) \leq a\} \cup \{x \in G; f(x) \geq b\}) > 0, \quad (20)$$

kde λ_* je vnitřní Lebesgueova míra, která je zde užita vzhledem k neměřitelnosti nespojitých α -lineárních funkcí na G .

4 Harmonické funkce

4.1 Základní vlastnosti. Vraťme se k rovnici (7) nebo až k rovnici (1). Obě vyjadřují hodnotu funkce v nějakém bodě x definičního oboru jako aritmetický průměr jejích hodnot v bodech, které jsou v $\mathbb{R}$ od bodu x stejně vzdáleny. Při zobecňování do prostorů $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, vyplňují tyto body sféry se středem v bodě x a je jich nekonečně mnoho. Budeme se zabývat pouze případem $m = 2$ a užívat označení $z = [x, y]$, i když řadu úvah lze bez obtíží provádět v prostoru $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Spojitou funkci v $\mathbb{R}^2$ lze integrovat na každé kružnici vzhledem k „normalizované délce oblouku“ a zkoumat tak spojitě funkce, pro něž je

$$f(z) = L(f; z, r) := \frac{1}{2\pi r} \int f(t) d\lambda(t). \quad (21)$$

Zde je r poloměr uvažované kružnice a faktor $1/(2\pi r)$ délkovou míru normalizuje. Podobně lze pracovat i s obsahovými průměry a zkoumat (spojitě či obecněji) funkce, pro které je

$$f(z) = A(f; z, r) := \frac{1}{\pi r^2} \int f(u) d\mu(u), \quad (21')$$

kde μ je Lebesgueova dvourozměrná míra na kruhu

$$B(z, r) := \{u \in \mathbb{R}^2; \text{dist}(z, u) < r\};$$

faktor $1/(\pi r^2)$ má opět normalizační charakter.

Funkce spojitě na $\mathbb{R}^2$, které vyhovují podmínce (21) nebo (21') pro každé $z \in \mathbb{R}^2$ a každé $r > 0$, se nazývají *harmonické funkce*. Je známo, že tyto funkce lze charakterizovat nejen jako funkce s *vlastností průměru* (21) či (21'), ale též jako spojitá řešení tzv. *Laplaceovy diferenciální rovnice*

$$Lf(z) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(z) = 0. \quad (22)$$

Rovnost (22) říká, že součet druhých parciálních derivací funkce f je v každém bodě $z \in \mathbb{R}^2$ roven 0.²³ Čtenář by si měl uvědomit, že v $\mathbb{R}$ se tato rovnice redukuje na jednoduchou diferenciální rovnici $y'' = 0$ a že tudy vede i jednoduchá cesta ke zobecnění do prostorů vyšší dimenze (stejně tak lze lehce zobecňovat do vyšší dimenze přes „průměrové vlastnosti“ (21) nebo (21')). V prostoru $\mathbb{R}^2$ jsou však harmonickými funkcemi nejen funkce lineární, ale i mnoho dalších, např. funkce $f_1(z) = e^x \cos y$ nebo $f_2(z) = e^x \sin y$, které jsou reálnou a imaginární částí funkce e^z , $z \in \mathbb{C}$. Je přirozené vyšetřovat harmonické funkce na oblasti G , což je otevřená souvislá množina. Podmínky (21) nebo (21') se pak uvažují pouze pro $r > 0$, pro něž je

$$\{u \in \mathbb{R}^m; \text{dist}(z, u) \leq r\} \subset G.$$

Tato r jsou pro dané $z \in G$ *přípustná*. Systém všech funkcí harmonických na G budeme značit $\mathcal{H}(G)$.

Vlastnosti, které se pro lineární funkce v $\mathbb{R}$ jeví jako zřejmé, nejsou zdaleka zřejmé pro harmonické funkce na $G \subset \mathbb{R}^2$. Tak např. harmonická *nekonstantní* funkce na oblasti G nemůže nabývat svého maxima či minima v žádném bodě $z \in G$. Toto tvrzení se obvykle nazývá *princip maxima*. Viz např. [17]. V $\mathbb{R}$ je taková funkce rostoucí či klesající v otevřeném intervalu a tvrzení je tedy triviální. Nyní se vrátíme k dalším poznatkům pro případ $m = 1$.

4.2 Ještě o průměrech. Připomeňme, že *spojitá* funkce na otevřeném intervalu I je lineární, jestliže pro všechna $x \in I$ a *všechna* přípustná r je (srovnejte se (7))

$$f(x) = \frac{f(x-r) + f(x+r)}{2}. \quad (23)$$

Dokonce stačí, je-li tato podmínka v každém bodě $x \in I$ splněna pro přípustná $r = \rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, pro něž pro každé $\varepsilon > 0$ posloupnost $\{\rho_k\}$ (závisící na x !) obsahuje $r_l < \varepsilon$. Bude však analogické tvrzení platit v případě, že podmínku průměru analogickou k (21) nebo (21') budeme mít v každém bodě x k dispozici jen pro jeden či dva přípustné poloměry r ? Nežli se začneme touto otázkou zabývat, uvědomme si, že chceme svázat „lokální“ a „globální“ podmínky pro chování funkce. K ověření podmínky (22) v bodě z stačí znát f na jakémkoli okolí z , ve druhém případě jsme vázáni na okolí odpovídající přípustnému(-ým) poloměrům pro z .

Technicky to znamená řešit otázku, zda další zmenšení „počtu rovnic“ povede k ekvivalentním výsledkům. Již jednoduchá pozorování ukazují, že např. funkce

²³ Tuto diferenciální rovnici studovali v různých souvislostech již r. 1752 Euler a v letech 1760 až 1761 JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813). Později pak mj. PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827), po kterém je operátor L a celá rovnice v (22) pojmenována. Harmonické funkce, kterým dali toto jméno r. 1879 WILLIAM THOMSON (Lord KELVIN) (1824–1907) a PETER GUTHRIE TAIT (1831–1901), se velmi často objevují ve fyzice při popisu stacionárních jevů. Označení ‘harmonické funkce’ se nejprve užívalo jen pro polynomy a kolem r. 1900 se začalo užívat v dnešním pojetí. Vlastnost průměru spojitých řešení Laplaceovy rovnice jako první patrně dokázal r. 1840 Gauss a to, že je charakterizuje, dokázal r. 1905 PAUL KOEBE (1882–1945). Podrobnosti lze nalézt v [31].

$f(x) = \text{dist}(x, \mathbb{N}), x \in \mathbb{R}$, nebo funkce $g(x) = \cos \pi x, x \in \mathbb{R}$, mají vzhledem ke své periodicitě vlastnost (23) pro všechna r , která jsou přirozenými čísly, a přesto nejsou lineární na $\mathbb{R}$. Pro druhou funkci, ač je nekonečněkrát diferencovatelná, neexistuje žádný interval, na kterém by byla lineární.

Problém byl vyřešen v r. 1958.²⁴ Bylo dokázáno, že pro $m \geq 2$ dva poloměry stačí, pokud jejich podíl neleží ve výjimečné množině. Popis této výjimečné množiny je obecně komplikovaný, nás však zajímá jen jednorozměrný případ. Tam touto výjimečnou množinou je množina všech kladných racionálních čísel. To také vysvětluje, proč v uvedeném příkladu existují nelineární spojitá řešení systému FR. Poznamenejme ještě, že Hamelův příklad nespojitých aditivních funkcí ukazuje, že pokud nepředpokládáme spojitost funkce f , existují funkce, které v každém bodě $x \in (a, b)$ vyhovují rovnici (23) pro všechna přípustná $r > 0$ a přesto nejsou lineární.

Obraťme se k nyní k „jednorůměrovým“ větám. Nechť je ke každému bodu x z oblasti $G \in \mathbb{R}^2$ přiřazeno jedno přípustné $r =: \delta(x)$. Tážeme se, zda rovnosti

$$f(x) = L(f, x, \delta(x)), \quad x \in G, \quad (24)$$

nebo rovnosti

$$f(x) = A(f, x, \delta(x)), \quad x \in G, \quad (24')$$

zaručují, např. za předpokladu spojitosti funkce f , že funkce f je harmonická na G . Nás bude opět nejvíce zajímat případ $m = 1$, ale bez zajímavosti není obecnější informace pro vyšší dimenzi.

I když byl problém patrně znám již dříve, explicitně formulován byl r. 1968. Ve sbírce úloh [27] ho JOHN EDENSOR LITTLEWOOD (1885–1977) popsal takto: ... *Je-li w spojitá na uzávěru $\overline{D}$ omezené oblasti D , a je-li „jednorůměrová“, tj. je v každém bodě rovna svému průměru přes kružnici opsanou tomuto bodu a ležící spolu se svým vnitřkem v D , pak je w harmonická v D (Kellogg, [21]). Jestliže je w omezená, můžeme připustit i konečný počet výjimečných bodů na hranici. ... Tak vzniká otázka: Je-li w spojitá na omezené D a má jednorůměrovou vlastnost, je již w harmonická? Domnívám se, že odpověď je NE, i když by D byl kruh. Je to obtížný problém, neboť taková funkce závislá pouze na r to být nemůže a nespojitost v jediném bodě hranice to vylučuje také (což eliminuje jeden z přirozených přístupů). ... Poznamenávám, že kladná odpověď je slabší v případě integrace přes kruh, odpovídající záporná odpověď je příslušně silnější.*

Poslední poznámka je jednoduchým důsledkem elementární věty o střední hodnotě: Pokud pro spojitou funkci h platí v nějakém bodě z rovnost $h(z) = A(h, z, r_0)$ pro nějaké $r_0 > 0$, pak existuje $0 < r < r_0$, pro něž $h(z) = L(h, z, r)$.

Na řešení tohoto obtížného problému se čekalo čtvrt století. Dnes jsou známy např. případy, kdy δ -harmonicitu s „plošnými“ průměry ($A(f, z, \delta(z)) = f(z)$)

²⁴ Výsledky, pocházející od JEANA FRÉDÉRIC A. DELSARTA (1903–1968) z [11], byly po jistou dobu považovány za kuriozitu. Viz [40]. Srovnajte též s [13].

spolu s jistými dodatečnými podmínkami zaručují harmonicitu f . Na druhé straně se potvrdila Littlewoodova domněnka, že pouze „sférická“ průměrová vlastnost ($f(z) = L(f, z, \delta(z))$) i při spojitosti f harmonicitu nezaručuje.²⁵ Nás však zajímá v této souvislosti pouze jednodimenzionální případ.

4.3 Dirichletova úloha. Nežli postoupíme dále, připomeňme tzv. *Dirichletovu úlohu*. Ta spočívá pro danou omezenou oblast G v $\mathbb{R}^2$ v určení spojitě funkce na uzávěru $\overline{G}$ oblasti G tak, aby na hranici ∂G splývala s předem danou spojitou funkcí g a aby její zúžení na G leželo v $\mathcal{H}(G)$. U oblastí s jednoduchou hranicí (např. hladkou) je to vždy možné. V $\mathbb{R}$ je situace obzvlášť jednoduchá. Oblastí G je interval a jeho hranicí je množina jeho koncových bodů. Pokud předepíšeme hodnotu funkce g v těchto bodech, je řešením Dirichletovy úlohy pro G lineární funkce, která nabývá v koncových bodech G těchto hodnot jako g .

V souvislosti s příklady uvedenými ve spojitosti s Delsartovým výsledkem by se mohlo zdát, že by existence nelineárních funkcí mohla spočívat v neomezenosti oboru či s tím, že δ je uvnitř vyšetřovaného intervalu „velmi malá“. Začneme s omezeným intervalem (a, b) . Přiřaďme každému $x \in (a, b)$ číslo r_x , pro něž je $a < x - r_x < x < x + r_x < b$. Tážeme se, zda existuje *spojitá* funkce f a (kladná) funkce r_x , $x \in (a, b)$, taková, že

$$f(x) = \frac{f(x - r_x) + f(x + r_x)}{2}, \quad x \in (a, b), \quad (25)$$

není lineární funkce. Pokud nepřidáme další podmínku, je odpověď kladná a nepomůže ani dodatečný předpoklad omezenosti funkce. f ²⁶

Je-li F primitivní funkce k f na (a, b) , tj. $F' = f$, a jestliže (25) nahradíme vztahem

$$f(x) = \frac{F(x + r_x) - F(x - r_x)}{2r_x}, \quad x \in (a, b), \quad (25')$$

a předpokládáme, že existují obě jednostranné konečné limity $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$, pak je již f nutně lineární funkce. Viz opět [19]. Na pravé straně v (25') je jednorozměrný analog průměru v (21') a toto tvrzení má ještě starší kořeny.²⁷ Klíčovou roli v něm hraje následující již dříve zmíněný princip maxima.

²⁵ K částečným výsledkům přispěla celá plejáda matematiků, řešení podali r. 1994 WOLFARD HANSEN (*1940) a NIKOLAI NADIRASHVILI (*1955), kteří dokázali, že existuje spojitá (dokonce nekonečně krát diferencovatelná) funkce f na otevřeném jednotkovém kruhu v $\mathbb{R}^2$ s průměrovou funkcí $\delta(z)$, $0 < \delta(z) < 1 - \|z\|$, která vyhovuje podmínce $L(f, z, \delta(z)) = f(z)$ a která *není* harmonická. Obecnějšímu problému, kdy jsou δ -harmonické funkce zároveň již harmonické, se věnovali v celé sérii článků, jejichž výsledky se nebudeme zabývat.

²⁶ Tento výsledek pochází z r. 1954. Viz [19]. Odpovídající 'zigzag' protipříklad je popsán i v monografii [9] z r. 1966, kde je připisován M. Schiffmanovi. Kniha [9] je anglickým překladem podstatně přepracovaného vydání díla, které vyšlo v *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Poznamenejme, že 1. díl této části vyšel r. 1924 a 2. díl r. 1937; jako autor se u přepracovaného 2. dílu někdy uvádí Richard Courant.

²⁷ Již r. 1909 EUGENIO ELIA LEVI (1883–1917) dokázal, že *měřitelná* funkce f splňující v oblasti G podmínku průměru typu (21) pro všechna přípustná r splňuje i podmínku typu (21') pro všechna přípustná r a je tedy spojitá a harmonická.

Je-li f spojitá na uzávěru $\overline{G}$ omezené oblasti $G \subset \mathbb{R}^m$, kde $m = 1$ nebo $m = 2$, a δ -harmonická v G , nabývá svého maxima na hranici ∂G . Přiblížme si základní myšlenku důkazu. Množina, na níž funkce f nabývá maxima, je uzavřená. Pokud by celá ležela v G , obsahovala by bod z_0 , ve kterém by vzdálenost $\text{dist}(z_0, \partial G)$ nabývala svého *kladného* minima. Odtud se odvodí spor, neboť stejné hodnoty by musela vzhledem k podmínce průměru nabývat f i v nějakém bodě se vzdáleností od hranice ještě menší. To se např. v $\mathbb{R}$ využije tak, že od f odečteme lineární funkci g , která v krajních bodech G nabývá stejných hodnot jako f . Protože rozdíl $f - g$ je rovněž spojitá δ -harmonická funkce, na kterou můžeme aplikovat princip maxima, dostaneme odsud již snadno $f - g = 0$. Stojí za to si povšimnout, že celou úvahu lze snadno provést pro průměry typu (21) nebo (21') a také převést i do prostorů vyšší dimenze.²⁸

Je ještě jeden důvod, pro který jsme podnikli malou exkurzi do teorie harmonických funkcí. Jestliže zvolíme pevně $n \in \mathbb{N}$ a budeme se zabývat v rovině $\mathbb{R}^2$ jednoduchými FR, budou přirozenými kandidáty na vyšetřování funkce f , které budou v každém bodě $z \in \mathbb{R}^2$ aritmetickým průměrem hodnot funkce f ve vrcholech všech pravidelných n -úhelníků se středem z . Je známo, že řešeními takového systému FR jsou *harmonické polynomy* ve dvou proměnných. Jako jeden z jedno-dušších výsledků uvedeme tento: Jestliže je v $\mathbb{R}^2$ *spojitá* funkce f v každém bodě $z \in \mathbb{R}^2$ průměrem hodnot ve vrcholech každého čtverce se středem z a se stranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, pak je f harmonickým polynomem stupně nejvýše čtvrtého. Viz [4].²⁹

4.3 Závěrečná poznámka. Předchozí text je jenom výřezem z historie funkcionálních rovnic. Vědomě jsme tak pominuli mnoho souvisejících výsledků a zájemce odkazujeme na citované monografie [2] a [20]. Tak např. v souvislosti s řešením diferenciálních rovnic studoval Euler tzv. homogenní funkce.

Je-li dáno $\gamma \in \mathbb{R}$, pak rovnice

$$f(tx, ty) = t^\gamma f(x, y), \quad x, y, t \in (0, \infty) \quad (26)$$

se nazývá Eulerovou rovnicí a funkce, které jí vyhovují, nazýváme *homogenními funkcemi stupně γ* . Jsou to tedy např. funkce

$$\frac{x+y}{2} \quad (\gamma = 1), \quad \frac{x}{y} \quad (\gamma = 0), \quad x^2 + 4y^2 - 2xy \quad (\gamma = 2).$$

²⁸ Tvrzení, které jsme dokázali, pochází z r. 1909 od VITA VOLTERRY (1860–1940). Viz [38]. R. 1912 Volterrův důkaz zjednodušil GIUSEPPE VITALI (1875–1932). Od něj též pochází důkazový princip, postavený na triku „nejbližšího bodu“. Poznamenejme ještě, že na postupném průměrování, kde $f_k(z) = A(f_{k-1}, z, \delta(z))$, $f_0 = f$, lze založit metody k řešení Dirichletovy úlohy. HENRI LEBESGUE (1875–1941) to dokázal v r. 1912 pro $\delta(z) = \text{dist}(z, \partial G)$. Za funkci f_0 zvolíme libovolné spojitě rozšíření funkce g spojitě na ∂G „dovnitř“, tj. spojitou funkci na $\overline{G}$, a pak řešením Dirichletovy úlohy pro omezenou oblast G a podmínku g je $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Viz [25].

²⁹ Stačí předpokládat daleko méně než globální spojitost, např. omezenost řešení na množině kladné dvourozměrné míry. Pomocí aditivních funkcí je popsána i celá struktura nespojitých řešení systému FR a jsou řešeny i případy průměrů obecnější povahy (případ pravidelných n -úhelníků).

Vzniká otázka, zda lze popsat všechny homomogenní funkce pro daný stupeň γ . Pro řešení tohoto problému položíme $t = x^{-1}$ a dostaneme z (26) rovnici

$$f(x, y) = x^\gamma f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Odtud vidíme, že existuje vzájemná jednoznačná korespondence mezi funkcemi g , definovanými na intervalu $(0, \infty)$ a homogenními funkcemi, kterou popisuje vztah

$$f(x, y) = x^k g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Uvažujme nyní obecnější rovnici

$$f(tx, ty) = h(t) \cdot f(x, y), \quad x, y, t \in (0, \infty). \quad (27)$$

Položíme

$$f((tu)x, (tu)y) = h(t) \cdot f(tx, ty), \quad x, y, t, u \in (0, \infty),$$

a upravujeme

$$\begin{aligned} f((tu)x, (tu)y) &= h(tu) \cdot f(x, y), \\ f(tx, ty) &= h(t) \cdot f(x, y) = h(t) h(u) \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Z nalezeného vztahu je patrné, že h vyhovuje zbývajícím Cauchyho rovnici (té, kterou jsme v předchozím textu zcela pominuli):

$$h(tu) = h(t) \cdot h(u), \quad t, u \in (0, \infty).$$

Není bez zajímavosti (viz [20]), že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou s Cauchyho rovnici ekvivalentní FR

$$|f(x+y)|^n = |f(x) + f(y)|^n.$$

Avšak mnohem zajímavější jsou pro nás FR, které zobecňují Cauchyho rovnice.³⁰

$$\begin{aligned} f(x+y) &= g(x) + h(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \\ f(x+y) &= g(x) \cdot h(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \\ f(x \cdot y) &= g(x) \cdot h(y), \quad x, y \in (0, \infty), \\ f(x \cdot y) &= g(x) + h(y), \quad x, y \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Tyto rovnice lze chytrým jednoduchým trikem redukovat na Cauchyho rovnice. Ukažme to velice stručně na příkladu rovnice (A).

³⁰ Tyto rovnice studoval r. 1903 JAN VILÉM PEXIDER (1874–1914), kterému je věnována jedna z publikací edice *Dějiny matematiky* (viz [7]). Tento svazek vyšel i v anglické verzi. V něm čtenář nalezne řadu dalších informací.

V rovnici

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

položme

$$f(t) = \varphi(t) + a + b, \quad g(t) = \varphi(t) + a, \quad h(t) = \varphi(t) + b,$$

takže dostaneme rovnost

$$(\varphi(x+y) + a + b) = (\varphi(x) + a) + (\varphi(y) + b).$$

Odtud vidíme, že φ vyhovuje Cauchyho rovnici (A) pro aditivní funkce. Například pro spojité funkce f, g, h , dostaneme $\varphi(t) = \varphi(1)t$ a

$$f(t) = \varphi(1)t + a + b, \quad g(t) = \varphi(1)t + a, \quad h(t) = \varphi(1)t + b,$$

kde $f(0) = a + b$, $g(0) = a$ a $h(0) = b$.

Bez širších souvislostí by se mohly jevit některé popisované problémy jako příliš elementární a samoúčelné. Některé se zrodily přímo ve vícerozměrné verzi a my jsme je pouze zúžili na jednorozměrný případ. Doufám, že se mi uvedenými jednoduchými příklady podařilo čtenáře přesvědčit, že FR tvoří elegantní partii matematiky s mnoha užitečnými souvislostmi a že tato partie nepostrádá kromě elegance i jistou krásu.

Literatura

- [1] Aczél J.: *Ein Blick auf Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [2] Aczél J.: *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York and London, 1966.
- [3] Aczél J.: *On history, applications and theory of functional equations*, Functional Equations: History, Applications and Theory, D. Reidel, Dordrecht – Boston – Lancaster, 1984.
- [4] Aczél J., Haruki H., McKiernan M.A., Sakovič G.N.: *General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials*, Aequationes Mathematicae **1** (1968), 37–53.
- [5] Artin E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig – Berlin, 1931.
- [6] Beckenbach E.F.: *Convex functions*, Bulletin of the American Mathematical Society **54** (1948), 439–460.
- [7] Bečvář J., Slavík, A. (ed.): *Jan Vilém Peřider 1874–1914*, Dějiny matematiky 5, Prometheus, Praha, 1997 (anglická verze: History of Mathematics 38, Matfyzpress, Prague, 2009).
- [8] Cauchy L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821.
- [9] Courant R., Hilbert D.: *Mathematical methods of Physics, vol. II*, Interscience Pub., New York, 1966.

- [10] Deák E.: *Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine gemeinsame Verallgemeinerung von beiden*, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica **5** (1962), 109–154.
- [11] Delsarte J.: *Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **246** (1958), 1358–1360.
- [12] Edwards C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.
- [13] Flatto L.: *The converse of Gauss's theorem for harmonic functions*, Journal of Differential Equations **1** (1965), 483–490.
- [14] Green J. W., Gustin W.: *Quasiconvex sets*, Canadian Journal of Mathematics **2** (1950), 489–507.
- [15] Hamel G.: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichungen $f(x+y) = f(x) + f(y)$* , Mathematische Annalen **60** (1905), 459–462.
- [16] Hansen W.: *Littlewood's one-circle problem, revisited*, Expositiones Mathematicae **26** (2008), 365–374.
- [17] Helms L. L.: *Introduction to potential theory*, Wiley-Interscience, New York – London, 1969.
- [18] Huckemann F.: *On the 'one circle' problem for harmonic functions*, Journal of the London Mathematical Society (2) **29** (1954), 491–497.
- [19] Jensen J. J. W. V.: *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Mathematica **30** (1905), 175–191.
- [20] Kannappan P.: *Functional equations and inequalities with applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.
- [21] Kellogg O. D.: *Converses of Gauss's theorem on the arithmetic mean*, Transactions of the American Mathematical Society **36** (1934), 227–242.
- [22] Kirschner S.: *Nicole Oresme*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, <http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/nicole-oresme/>, 2009, Fall 2009.
- [23] Kuczma M.: *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, P. W. N, Uniwersytet Slaski, Warszawa – Kraków – Katowice, 1985.
- [24] Laugwitz D., Rodewald B.: *Auf Eulers Spuren zur Gammafunktion*, Mathematische Semesterberichte **33** (1986), 201–212.
- [25] Lebesgue H.: *Sur le problème de Dirichlet*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **154** (1912), 335–337.
- [26] Levi E. E.: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), Ser. 5, 18₁ (1909), 10–15.
- [27] Littlewood J. E.: *Some problems in real and complex analysis*, D. C. Heath and Co. Raytheon Education Co., Lexington, Massachusetts, 1968.
- [28] Matkowski J., Rätz J.: *Convex functions with respect to an arbitrary mean*. General inequalities, 7 (Oberwolfach, 1995), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 123, Birkhäuser, Basel, 1997, 249–258.
- [29] Matkowski J.: *Generalized convex functions and a solution of a problem of Zs. Páles*, Publicationes Mathematicae Debrecen **73** (2008), no. 3-4, 421–460.
- [30] Netuka I.: *Harmonické funkce a věty o průměru*, Časopis pro pěstování matematiky **100** (1975), 391–409.

- [31] Netuka I., Veselý J.: *Mean Value Property and Harmonic Functions*, Classical and Modern Potential Theory and Applications, NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, 359–398.
- [32] Neuman F.: *Funkcionální rovnice*, SNTL, Praha, 1986.
- [33] Small C. G.: *Functional equations and how to solve them*, Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2007.
- [34] Smítal J.: *O funkciách a funkcionálnych rovniciach*, Alfa, Bratislava, 1984.
- [35] Trojovský P., Veselý J.: *Vytvořující funkce*, Pokroky matematiky fyziky a astronomie **45** (2000), 7–35.
- [36] Veselý J.: *Základy matematické analýzy* (ve dvou dílech), Matfyzpress, Praha, 2004 a 2009.
- [37] Veselý J.: *Existuje královská cesta k exponenciále a logaritmu?*, Učitel matematiky **4** (1996), 65–80 (č. 2) a 129–145 (č. 3).
- [38] Volterra V.: *Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), Ser. 5, **18** (1909), 263–266.
- [39] Walter W.: *Analysis*, Springer-Lehrbuch, Springer, Berlin, 1992.
- [40] Zalcman L.: *Offbeat integral geometry*, American Mathematical Monthly **87** (1980), 161–175.

Adresa

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.
 Matematický ústav UK
 Matematicko-fyzikální fakulta
 Univerzita Karlova v Praze
 Sokolovská 83
 186 75 Praha 8 – Karlín
 e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz

MATEMATYKA NA ZIEMIACH POLSKI W EPOCE OŚWIECENIA

WITOLD WIĘŚLAW

Abstract: We are going to present the state and development of mathematical sciences on Polish territories in the years 1740–1832, i.e. in the time of Enlightenment in Poland. After a cassation of Jesuits in 1773, the Commission of National Education – a first Ministry of Education in the World – had organized a new educational system in Poland, based on new programs, new teachers and new textbooks in Polish. Reforms of education in schools and universities are to be discussed, including the most important, reform of the Commission of National Education (KEN), based on Educational Laws (1783). Reforms of KEN implied higher level of mathematics in Poland, in particular in the Main Schools (Cracow and Vilna). After decline of Poland in 1795, Polish Universities in Cracow and in Vilna still were working. New parts of mathematics had appeared in university programs. Warsaw University was founded in the year 1816, closed after November uprising in 1831. Polish mathematicians started to publish their papers in international journals. Owing to the high level of education, including mathematics, started by the Commission of National Education, Polish nation saved his identity during 123 years of the slavery.

0 Wstęp

Stan matematyki w I połowie XVIII nie przedstawiał się najlepiej. W szkołach nauczano matematyki w bardzo ograniczonym zakresie. Nacisk kładziono raczej na przedmioty humanistyczne, w tym naukę łaciny. Kolegia jezuickie, a tych była większość, matematykę traktowały w sposób elastyczny, stosownie do zaleceń w przepisach *Ratio Studiorum* (1599), normujących funkcjonowanie tych szkół. Podobne rzecz się miała na uniwersytetach, w Akademii Krakowskiej i Akademii Jezuickiej w Wilnie. Kasata zakonu jezuitów w roku 1773 wymusiła konieczność przeprowadzenia reform szkolnictwa. Zreorganizowano je w sposób jednolity w skali całego kraju, przeprowadzając reformę całego szkolnictwa, w tym uniwersytetów. Wprowadzono pierwsze w świecie ministerstwo edukacji zwane *Komisją Edukacji Narodowej* (w skrócie: KEN). Kierowało ono całym szkolnictwem w oparciu o *Ustawę Edukacyjną* z roku 1783. W oparciu o Ustawę wprowadzono jednolite programy nauczania, dostosowując do nich odpowiednie podręczniki, na które ogłoszono konkursy. Nauczanie miało się odbywać po polsku, a sprawami programów i podręczników miała się zajmować specjalna agenda, *Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych*, kierowane przez księdza Grzegorza Piramowicza. Reformie poddano też uniwersytety. Niestety, skuteczne reformy przerwał ostatecznie upadek państwa polskiego wraz z trzecim rozbiorem w 1795 roku. Jednak zmiany w nauczaniu pozostały, nie zmienili ich zaborcy w początkowym okresie. Rosja i Prusy, wzorując się na modelu KEN, przeprowadziły podobne reformy do polskich. Dzięki aktywności Jana Śniadeckiego, zarówno na Sejmie rozbiorowym w Grodnie (1793), jak i później, w wyniku wizyty w Wiedniu u cesarza Austrii (1797), zaborcy nie zlikwidowali polskich uniwersytetów, gwarantując ich istnienie poprzez zabezpieczenie odpowiednich kwot na ich egzystencję. Po rozbiorach oba uniwersytety, po krótkim zastoju na przełomie XVIII i XIX wieku, funkcjonowały nie najgorzej. Dzięki odpowiedniej polityce rektora Uniwersytetu Wileńskiego, Jana

Śniadeckiego (w latach 1807–1815), Cesarski Uniwersytet Wileński stał się czołowym uniwersytetem Rosji aż do jego likwidacji w 1832 roku. Reformy i system edukacji w Polsce okazał się być na tyle trwałym i skutecznym, że jeszcze w latach trzydziestych XIX wieku na obrzeżach dawnej Rzeczypospolitej (Witebsk, Połock, Kamieniec Podolski, Krzemieniec itd.) funkcjonowały polskie szkoły, nauczające po polsku, z polskich podręczników, często w oparciu o *książki elementarne*, tzn. w oparciu o podręczniki zatwierdzone i wydane przez Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych, albo w oparciu o inne książki polskojęzyczne.

Poziom obu uniwersytetów, w Krakowie i w Wilnie, nie odbiegał w tym czasie, ani w zakresie programów nauczania, ani też w zakresie oferty dla studiujących, od innych uniwersytetów w Europie środkowej (Dorpat, Królewiec, Berlin, Praga), niekiedy znacznie przewyższając reprezentowany tam poziom. Na naszych uniwersytetach brakowało jednak twórczo pracujących matematyków, którzy czasami (choć nie tak często, jak dziś) trafiali się na innych uczelniach. Po prostu w tamtych czasach profesor miał nauczać matematyki, a nie tworzyć ją. Twórcami bywali tylko nieliczni.

System szkolnictwa KEN z pewnością dopomógł Polakom w utrzymaniu tożsamości narodowej przez cały okres zaborów, tzn. aż do odzyskania niepodległości po I wojnie światowej, tzn. do 1918 roku.

W omawianym okresie polskie uniwersytety funkcjonowały pod różnymi nazwami. Uniwersytet w Krakowie funkcjonował wtedy jako:

1. Akademia Krakowska (Academia Cracoviensis) do 1773 roku;
2. Szkoła Główna Koronna (1773–1797);
3. Universität Krakau (1797–1809);
4. Uniwersytet Jagielloński (1809–1830 i później).

Natomiast w tym okresie Uniwersytet Wileński funkcjonował jako:

1. Akademia Wileńska (Academia Vilmensi Societatis Jesu) do 1773 roku;
2. Szkoła Główna Litewska (1773–1797);
3. Cesarski Uniwersytet Wileński (1797–1832).

W 1816 roku powstał Królewski Uniwersytet Warszawski, który istniał do roku 1831. Został zlikwidowany przez władze rosyjskie po powstaniu listopadowym.

1 Lata 1701–1773

1.1 Szkolnictwo

W tym okresie większość szkół (średnich) to były szkoły prowadzone przez jezuitów (66), pijarów (tylko 19) i kilka nielicznych innych szkół (kolonie akademickie czy też szkoły bazylianów). Zakres nauczania matematyki sprowadzał się do elementarnej arytmetyki i fragmentów geometrii elementarnej wg *Elementów* Euklidesa lub innego dzieła, wzorowanego na Euklidesie.

1.1.1 Pijarzy. Collegium Nobilium Stanisława Konarskiego

Pijarzy rozpoczęli swoją działalność w Polsce w wieku XVII. Pierwsze kolegium pijarów powstało w Warszawie w roku 1643 z inicjatywy króla Władysława IV.

Stanisław Konarski, pijar, po czteroletnich studiach w Rzymie, w latach 1725–1729, zapoznawszy się z systemem nauczania w szkołach zgromadzenia pijarów, postanowił po powrocie do kraju założyć szkołę, nauczanie w której chciał oprzeć na najlepszych wzorach zagranicznych. Szkołę taką otworzył w Warszawie, w roku 1740. Nazwał ją *Collegium Nobilium*. Wkrótce model kształcenia młodzieży szlacheckiej, wzorowany na szkole Konarskiego i zreformowanym programie nauczania, przejmą jezuiti, organizując liczne *Collegia Nobilia* w całej Rzeczpospolitej.

W modelu kształcenia Konarskiego duży nacisk położony był na nauki ścisłe. Pijarzy przejawiali bardzo dużą aktywność w zakresie nauk ścisłych. Zachowało się wiele dokumentów związanych z nauczaniem matematyki w szkołach pijarskich po założeniu *Collegium Nobilium*. W drugiej połowie XVIII wieku, a w szczególności w okresie reform KEN, pijarzy wydali wiele bardzo dobrych podręczników matematyki. Część z nich funkcjonowała później równolegle z podręcznikami matematyki Lhuilliera. Niektóre z nich były pod względem dydaktycznym wartościowsze od książek Lhuilliera, a przede wszystkim od *Algebry* Lhuilliera, która z wielu względów nie była najodpowiedniejszym podręcznikiem tego przedmiotu.

Już w roku 1742 ukazał się drukiem podręcznik matematyki (Jan Kies albo Kiesius, *Institutiones Mathematicae*). Książka zawiera wykład arytmetyki, geometrii i sześć tablic. Zapewne był to pierwszy podręcznik matematyki w *Collegium Nobilium* Konarskiego. Nowością jest wprowadzenie systemu dwójkowego i czwórkowego. Część arytmetyczna zawiera elementy algebry, a więc symbolikę literową, proporcje i równania stopnia 1 i 2, przykłady równań liniowych i formalne różniczkowanie wielomianów (*De Methodo Differentiarum*). Zakres geometrii nie odbiega od przyjętego w XVIII wieku. Jest to kompendium podstawowych pojęć planimetrii i stereometrii i trygonometrii płaskiej. W książce są piękne tablice ryte w miedzi, przedstawiające siatki wielościanów i innych brył.

Początkowy program matematyki w *Collegium Nobilium* można odtworzyć z opisu w roku 1754. Wykłady były jeszcze po łacinie. Wzorowane były na książkach Christiana Wolffa, których liczne wydania były w użyciu w Europie w XVIII wieku.

Rok później, Bernard Siruć wydał w Rzymie, w roku 1755, zbiór kilku prostych zadań z analizy matematycznej. Jest to pierwszy tekst poświęcony analizie matematycznej, wydany przez Polaka. Jednak po powrocie do Polski, już jako profesor Szkoły Głównej Litewskiej, nie zajmował się matematyką.

Czego naprawdę uczono z matematyki w *Collegium Nobilium* Konarskiego, można dowiedzieć się z rękopisów Józefa Mniszecha z lat 1755, 1757 i 1759. Wykładowcą matematyki w latach 1757–1759 był Wiśniowski. Jego wykłady *Elementa Philosophiae* spisane w trzech tomach przez Mniszecha, obejmowały elementy logiki, elementy astronomii w ujęciu kopernikańskim, elementy mechaniki, optyki itd. W zakres wykładu matematyki wchodziły tradycyjne elementy arytmetyki z początkami algebry (zapis dziesiętny, działania na liczbach, symbolika literowa, najprostsze równania, wyciąganie

pierwiastków stopnia dwa i trzy), a z geometrii (*Compendium Geometriae*) podstawowe pojęcia i twierdzenia planimetrii wraz z elementami stereometrii, obejmującymi bryły obrotowe, przekroje stożkowe i podstawowe formuły na obliczanie powierzchni i objętości brył.

Przytoczony zakres wykładu jest zbliżony do programu wykładu matematyki Bartscha w Akademii Wileńskiej (1707/1708) z tą jednak różnicą, że w Collegium Nobilium brakło elementów geometrii analitycznej.

Nową jakość stanowią pijarskie podręczniki, przede wszystkim arytmetyki i algebry, wydawane w latach siedemdziesiątych XVIII stulecia: *Arytmetyka* Skaradkiewicza (1766), *Geometria* Bystrzyckiego (1769), *Nauka Matematyczna* Marquarta (1772), *Algebra* Węgleńskiego (1775), *Geometria* Skaradkiewicza (1776), *Algebra* Ustrzyckiego (1778), *Jeometria praktyczna* Zaborowskiego (1786), wreszcie *Arytmetyka* Bielskiego (1793). Na osobną uwagę zasługuje *Arytmetyka prostacka* Sirucia (1777), czyli podręcznik arytmetyki dla analfabetów. Podręczniki algebry Ustrzyckiego i Węgleńskiego, po nieznacznym rozszerzeniu, mogłyby śmiało konkurować z *Algebrą* Lhuilliera. Zresztą w raportach wizytatorów KEN można odnaleźć informacje wskazujące na to, że podręczniki pijarów były często w użyciu, mimo ustawowego obowiązku posługiwania się *książkami elementarnymi*, tzn. podręcznikami wydаныmi przez KEN. Szczególnie dużym powodzeniem cieszyła się *Geometria praktyczna* Zaborowskiego. Była po prostu łatwiejsza od książek Lhuilliera. Na zakończenie warto odnotować, że Collegium Nobilium Konarskiego była pierwszą szkołą w Polsce, w której do programu nauczania włączono elementarną algebrę.

1.1.2 Szkoła Rycerska

Szkołę Rycerską, zwaną też Korpusem Kadetów, utworzył król Stanisław August Poniatowski w roku 1765, lokując ją w Warszawie. Celem było nie tylko kształcenie kadry oficerskiej, lecz także przygotowywanie urzędników do służby państwowej. Szkoła przetrwała do roku 1794. Komendantem Szkoły był książę Adam Czartoryski, który jednak często spędzał wiele czasu poza Warszawą. Korpus zaplanowany był na dwustu słuchaczy. Jednak ich liczba nigdy nie przekroczyła osiemdziesięciu. Oprócz słuchaczy stacjonarnych byli każdego roku słuchacze dochodzący z kwater w Warszawie, nie odnotowani w oficjalnych dokumentach Korpusu. Do takich słuchaczy należał np. Karol Hube, syn Michała. Szkoła została zamknięta po trzecim rozbiórze. Odegrała ona ważną rolę w historii Polski. Jednym z jej wychowanków był Tadeusz Kościuszko.

Wśród kadry wykładającej matematykę były osoby wybitne. Do takich należeli Christian Pflaiderer¹ i Michał Hube. Mniej wybitnym wykładowcą matematyki był Józef

¹ Christian Pflaiderer (1736–1821) był od samego początku (tzn. od roku 1775) członkiem Towarzystwa do Ksiąg Elementarnych aż do wyjazdu z Polski, tzn. do roku 1782. Uczestniczył aktywnie w pracach Towarzystwa, recenzując nadesłane prospekty podręczników z matematyki i fizyki. Ponadto brał udział w pracach nad ostatecznymi wersjami wszystkich podręczników Lhuilliera i książki Hubego z fizyki. Na 237 (26. XI 1781) posiedzeniu Towarzystwa powołano zespół w składzie: Gawroński, Hołowczyc i Pflaiderer do czytania *Algebry* Lhuilliera i *Fizyki* Hubego. Na 248 posiedzeniu Towarzystwa, w dniu 19 lutego 1782, Pflaiderer pożegnał się z Komisją przed wyjazdem na uniwersytet w Tybindze (Tübingen), na którym do końca życia był profesorem matematyki i fizyki. Jego miejsce w Towarzystwie zajął Simon Lhuillier, którego podręczniki zostały już wcześniej zatwierdzone lub wydrukowane. Jako matematyk Pflaiderer zajmował się głównie *Elementami* Euklidesa. (vide: Deduction der Euclidischen Definitionen 2, 3, 5, 7 des V. Buchs der

Łęski, który wykładał matematykę w Korpusie Kadetów w ostatnich latach jego istnienia. Christian Pfleiderer był profesorem matematyki i fizyki w Szkole Rycerskiej w latach 1766–1782, a w latach 1772–1782 dyrektorem generalnym nauk. Michał Hube był profesorem matematyki w Korpusie i następcą Pfleiderera na stanowisku dyrektora generalnego nauk w latach 1782–1794. Józef Łęski był wychowankiem Pfleiderera. Łęski wykładał matematykę w Korpusie w latach 1789–1794, tzn. aż do jej zamknięcia.

Ponieważ część szkolenia i musztra odbywały się w języku niemieckim, w tym też języku przygotowano podręcznik matematyki. Dwujęzyczny tekst przygotował pijar, ks. de Brochwic Jelinek, prefekt warszawskiego Collegium Nobilium. Wstęp do książki podpisany jest przez Kaufmana, o którym niczego nie wiadomo.

Nowo powstałe szkoły, Collegium Nobilium Konarskiego i Szkoła Rycerska, pod patronatem króla Stanisława Augusta Poniatowskiego, stworzyły pewien wyłom w starym systemie szkolnictwa polskiego. Stanowiły wzór reform, ale na pełną reformę edukacji trzeba było jeszcze poczekać.

1.2 Uniwersytety

1.2.1 Matematyka w Akademii Krakowskiej przed okresem reform KEN

Niewiele zachowało się dokumentów świadczących o stanie matematyki w Akademii Krakowskiej przed okresem reform Komisji Edukacji Narodowej, a w szczególności przed wizytą Hugona Kołłątaja. O stanie Akademii Krakowskiej pisał Hugo Kołłątaj:²

24. SZKOŁA GŁÓWNA KRAKOWSKA

Nie będziemy tu wspominać, do jakiego stopnia sławy doszła niegdyś Szkoła Główna Krakowska w Polsce i Europie. Te chwalebne dla nauk i umiejętności nie mogą należeć do naszych dziejów. Biorąc ich epokę od roku 1750 i rozbierając uwagę czasy ostatnie, przyznać z żalem potrzeba, że ta sławna niegdyś całej Polski szkoła w bardzo lichym znajdowała się stanie. [...]

i dalej (*loc. cit.*, s. 58):

26. CO DO UMIEJĘTNOŚCI

[...] Matematyka szła przeciw lepiej. Algebry wprowadzić nie mieszczone jeszcze między matematyczne nauki, w geometrii jednak trzymano się *analysim veterum*. Systema Kopernika, choć był uczniem i członkiem tej szkoły, nie było przyjęte ani w astronomii, ani w fizyce, i nie można się temu dziwić, bo astronomia nie miała obserwatorium, a fizyka zatrudniała się metafizycznymi kwestyjami. Najznakomitszą osobą w matematycznej szkole był Regius astrologus; do niego należał rząd nad tą szkołą, aprobacja kalendarzów z ich prognostykami, które miały wziętość między domatorami i gospodarzami. [...]

Elemente, *Archiv der reinen und angewandten Mathematik herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg*, Heft 7, 1798; Die Scholien zu Buch II der Elemente Euclid's, *Academische Schriften.*, Stuttgart, 1826).

² Hugo Kołłątaj, *Stan oświecenia w Polsce w ostatnich latach panowania Augusta III (1750-1764)*. [Reprint: Ossolineum, Wrocław, 1953.]

Podstawą materialnego bytu Akademii były stare fundacje i przywileje królewskie na druk kalendarzy. Przywilej taki otrzymała Akademia Krakowska od Augusta II w roku 1714. Wcześniej takie przywileje otrzymywały osoby prywatne, np. matematyk toruński i gdański, Paweł Pater w roku 1703. W oparciu o przywilej wydany Akademii Krakowskiej, Kostkowski wydawał kalendarze w Krakowie.³ Zysk z kalendarzy wspomagał częściowo Akademię. Stosownie do dokumentu fundacyjnego Akademii Krakowskiej,⁴ profesorowie prawa mieli otrzymywać 280 grzywien, a profesorowie filozofii 50 grzywien (!) z żup wielickich, jednak przez stulecia Akademia tych pieniędzy nie potrafiła wyegzekwować. W cytowanym dokumencie opisana została sytuacja profesorów matematyki.

Kołłątaj (*loc. cit.*) jako ważną postać na Wydziale Filozoficznym Akademii Krakowskiej wymienia Marcina Świątkowskiego.

W istniejącej sytuacji finansowej rozwój nauki, a nawet przetrwanie poszczególnych dyscyplin naukowych na uniwersytecie było bardzo utrudnione. Tym niemniej odbywały się różne imprezy naukowe, uzyskiwano stopnie naukowe itd. Prześledźmy na przykładzie wybranych dokumentów, jak to wyglądało w praktyce.

Jakub Niegowiecki w oparciu o *Almagest* Ptolemeusza i korzystając z traktatu Archimedesza *O sferze i walcu* twierdził, że wykonalna jest nie tylko kwadratura koła, ale że można skonstruować bok kwadratu, którego objętość jest równa objętości danej kuli, tzn. przestrzenny analogon kwadratury koła.

W roku 1759 odnotowano wykłady matematyki Michała Mrugaczewskiego i Adama Jagielskiego⁵ z 1767.

O próbie reform mówiono już w roku 1767. Indeks dysput akademickich z roku 1767 nie wymienia żadnych tematów z czystej matematyki. Po hasłem *Ex Mathesi* odnajdujemy jedynie pytania szczegółowe z astronomii, dotyczące układu słonecznego. Z przytoczonych przykładów wynika, że aktywność naukowa matematyków w Akademii Krakowskiej w XVIII stuleciu, przed pierwszymi reformami akademii, była bardzo ograniczona. W tych czasach nie było, co prawda, wymogu pracy twórczej, a nawet bywało to źle widziane. Tym niemniej, było gorzej, niż źle.

Zachował się spis profesorów z roku 1774 i opis sytuacji uczelni w tymże roku. Na Wydziale Filozoficznym było niewiele wykładów. Oto lista:

Facultas Philosophica cum suis Praelectionibus.
Magistri Collegiati. [...]

M. Adamus Jagielski Phiae Dr & Regius Matheseos Pr, Geometra Juratus, praeligit
Trigonometriam Planam & Sphericam horâ 8vâ in Lectorio Ptolomaei.

³ Jerzy Grzegorz Kostkowski, *Kalendarz polski i ruski*, Kraków 1710. Na rok Pański 1716. Przywilej królewski wystawiony był miennie na Kostkowskiego: *Augustus II, Dei gratia rex Poloniae* [...] *clarissimi magistri Georgii Gregorii Kostowski, artium liberalium et philosophiae doctoris Collegae Minoris, ordinarii et privilegii mathematici Nostri imprimere* [...].

⁴ Kazimierza Wielkiego *Dyplom Założenia Uniwersytetu*, 1364, dnia 12 maja, w Krakowie (w: *Alamanach Jubileuszowy Uniwersytetu Jagiellońskiego z Kalendarzem na lata 1900 i 1901*).

⁵ AUJ rks 1, s. 700: *Cursus Mathematicus Michaeli Mrugaczewski 1759. s. 856: Convocatio 3tio Anno Dni 1766. die 5. Februarii celebrata est convocatio Universitatis et extradita 3tio, ad deferendum Consilium de extraneo Algebraista, modoque Adamus Jagielski Phil. Dr Matheseos Professor Collego Minor.*

M. Josephus Szabel Phiae Dr & Matheseos Pr, Geometra Juratus, praeligit *Geographiam Theoreticam* horâ 7mâ matutina in Lectorio *Ptolomaei*.

M. Franciscus Matawowski Phiae Dr, Matheseos Pr, Geometra Juratus, praeligit *Philosophiam Eclecticam* horâ 8vâ in Lectorio *Aristotelis*.

M. Andreas Znaczkowski Phiae Dr, Matheseos Pr, praeligit *Geometriam Theoreticam* horâ 2dâ in Lectorio *Ptolomaei*.

M. Nepomuceni Gaworski Phiae Dr, Matheseos Pr, Geometra Juratus, praeligit *Architecturam Militarem et Civilem* horâ 1mâ in Lectorio *Ptolomaei*.

Professores Extranei
Cracoviae Legentes.

M. Josephus Meyzel Phiae Dr, Matheseos Pr, praeligit *Hydrostaticam* horâ 4tâ in Lectorio *Ptolomaei* [...]

M. Sebastianus Czaputowicz Phiae Dr & Pr, praeligit *Arithmeticam Vulgarem in integris et fractis* horâ 1mâ in Lectorio *Aristotelis*.

M. Stanislaus Kruszyński Phiae Dr, Matheseos Pr, praeligit *Tabulas Cassini supputandorum motuum Caelestium*, horâ 4tâ in Lectorio *Aristotelis*. [...]

VV. Philosophiae Baccalaurei.

V. Antonius Muszynski [...]

V. Felix Radwanski [...]

V. Joannes Sniadecki [...]

V. Johannes Selbierakowski. [...]

Pierwsi trzech bakałarze związani będą z Akademią przez wiele lat, Radwański odegra ważną rolę w historii tego uniwersytetu, a Śniadecki w historii obu szkół głównych.

Spróbujmy teraz ocenić poziom nauczania matematyki.

W Bibliotece Jagiellońskiej zachował się rękopis matematyczny z XVIII wieku, zapewne z pierwszej jego połowy. Ponieważ nie ma proveniencji tego dokumentu, więc można podejrzewać, że rękopis ten zawsze był w Akademii Krakowskiej. Rękopis składa się z 19 zeszytów i zawiera elementy matematyki i obszerny wykład fizyki (239 s.). Notatki prowadzone były przez kilka lat i niektóre hasła powtarzają się.

Classis 1^{ma} Scientiarum Mathematicarum: Arithmetica, Geometria, Trigonometriam et Algebram Complectens

PARS 1^{ma} ARITHMETICA, Caput 1^{mum}. De 5 Speciebus Numerorum. (s. 1–16)

In Physicam (s. 1–239)

Classis 1^{ma} Scientiarum Mathematicarum: Tractatus 1^{mus} Arithmeticae Decimali Correspondens (24 s.)

Tractatus II Geometriae Theoricae repondens (23 k.)

Classis 1^{ma} Scientiarum Mathematicarum: De Speciebus Numerorum Integrum (14 k.)

De Numeris Fractis

Classis 1^{ma} Scientiarum Mathematicarum: Pars 2 Geometria (8 s.)

D.O.M. In Analysin Speciosam

Caput 1^{mum}. Preliminaria Algebrae: Algebra est Arithmetica Literalis

Caput 2^m. De Algorithmis seu suis operationibus Calculi Litteralis.

Wyłożona jest krótko (10 s.) elementarna arytmetyka, w tym działania na liczbach w systemie dziesiętnym (*De Logistica Decimali*). Dołączona jest tabliczka mnożenia 9×9 (*Abacus Pythagoricus*) i ułamki (*De Numeris Fractis*). Ponadto omówione jest potęgowanie i pierwiastkowanie liczb (pierwiastki stopnia 2 i 3), oraz proporcje.

Wykład geometrii zawiera informacje o trójkątach prosto- i krzywoliniowych, o gnomonie i najprostsze konstrukcje geometryczne (połowienie kąta, konstrukcja trójkąta o danych bokach); ponadto mierzenie wysokości i twierdzenie Pitagorasa.

W części algebraicznej wprowadzona jest symbolika algebraiczna, w tym symbole nierówności ($<$, $>$), wzór dwumienny dla kwadratu i sześciangu, działania na wielomianach, najprostsze ułamki i zapis potęg, np. a^3 .

Taki materiał mógłby z powodzeniem być wykładany w II połowie XVII wieku.

Nauczanie matematyki w Akademii Krakowskiej w 1774 roku obejmowało:

In Ima Classe. Arithmetica (Logistica. Decimalis). Geometria Theorica. Trigonometria (Plana. Sphaerica). Algebra.

In 2da Classe. Mechanica, Statica, Hydrostatica, Aerometria, Hydraulica.

In 3tia Classe. Optica, Perspectiva, Catoptrica, Dioptrica, Astronomia (Sphaerica, Theoretica).

In 4ta Classe. Geographia, Hydrographia, Chronologia, Gnomonica. Architectura (Militaris, Civilis).

Cztery lata później, w czasie wizytacji Hugona Kołłątaja, zakres nauk matematycznych nie uległ zmianie. Szkolnictwo znajdowało się w kryzysie i wymagało pilnych reform. O tym okresie Kołłątaj tak pisał:

Matematyka w tej Akademii znać, że niegdyś dobrze ułożona była. Kóżda jej część jeszcze ma swoją osobną lekcją, a co w innych akademiach bardzo trudno. Arytmetyka, algebra,⁶ geometria, geografia, astronomia, mechanika, hydraulika, architektury obydwie i pierrololika porządnie co półroczne wszystkie dawane bywają z jakimkolwiek dla aplikujących się pożytkiem, ale dla niedostatku instrumentów i obserwatorium, jako też, że żadna nadgroda do tej umiejętności akademików nie wiąże, pochodzi stąd, że akademicy mniej użytecznych chwytają się części, a często zamiast matematyków przestają na tem, że się kalendarznikami stają albo w geometrii praktycznej najwięcej ćwiczą się. [...]

W roku 1776, Kołłątaj planował zmiany w wykładzie nauk ścisłych, w tym matematyki. W jego notatkach z 1776 roku czytamy m. in.:

Matematyka dziś w Akademii na cztery dzieli się klasy, y czterech ma Professorów [po czym przytacza program z 1774 roku]. [...] Podział ten iest dobry, utrzymać go należy, oprócz że z Czwartej Klasy Architekturę Cywilną odesłać można do pięknych sztuk. Nad te cztery Lekcyje iest ieszcze w Akademii Geometria Praktyczna; y tę zachować należy, a dla pożytku rzemiosł, przysłałoby, aby Lekcyja Mechaniki co Święto dawana była w ięzyku Polskim. Takowa Mechanika powinna być obfita w różne pożyteczne

⁶ Tu Kołłątaj się pomylił: algebry, choćby w szczątkowej postaci, jeszcze nie wykładano.

modele, y Professor przychylić się do tych experymentów, ktore w zażyciu byłyby nayłatwieysze, a w wykonaniu nayprościeysze. Potrzebne także iest iak naywygodnieysze Obserwatorium, ktoreby służyło nie tylko dla układania Experymentów Matematycznych, ale także dla praktyki Uczniów. Takowe Obserwatorium trzeba wystawić, y dobremi insrumentami podług myśli Matematyki opatrzyć.

Naukę o Chandlu [!] iako zasadzającą się na proporcjach y Arytmetyce, do Matematyki przyłączam. Professor tey nauki powinien znać Kombierstwo, Chandel Zagraniczny, Stan Chandlu Kraiowego y Reprodukcją Kraiową. [...]

Nie lepiej wygląda książkowa wersja wykładu matematyki w Akademii Krakowskiej. Dwujęzyczny (polsko-łaciński) podręcznik arytmetyki *Dla Młodzi uczącej się WAKADEMII KRAKOWSKIEY* można porównać pod względem treści i języka tylko z gorszymi podręcznikami arytmetyki z XVII wieku. Tekst składa się z pytań i odpowiedzi w rodzaju:

Większość polskich terminów zaczerpnięto z *Geometry Polskiego* Stanisława Solskiego (*Zabawa XIV*): *cyfra* to zero; *jednoć* to jedynka; *mnożąca* to czynnik itd. Książkę napisano zapewne znacznie wcześniej, ale ukazała się w pierwszym roku reform. Jak widać, reforma Akademii Krakowskiej nie przełożyła się od razu na programy i zakres wykładów, bo nie mogła się przełożyć.

Na nienajlepszy stan nauk matematycznych wskazuje też brak prywatnych wykładów z matematyki. Tradycją uniwersytetów europejskich, zapoczątkowaną w Getyndze w XVIII wieku, były tzw. *wykłady prywatne*. Odbýwały się one odpłatnie dla zainteresowanych studentów i były corocznie ogłaszane. Wykłady prywatne dały początek seminariom naukowym. W roku 1774 nie było wykładów prywatnych z nauk matematycznych. Można przypuszczać, że we wcześniejszych latach było podobnie.

Mimo zapowiedzianych reform, w dalszym ciągu wykładano matematykę według kanonu z początku XVIII wieku.

Wykład części matematycznej oparty jest na źródłach z XVII wieku i wcześniejszych. Wynika to stąd, że brak jakiegokolwiek symboliki algebricznej, formuły matematyczne wyrażane są słownie. Definicje funkcji trygonometrycznych są takie jak u Bartłomieja Pitiscusa z końca XVI wieku, mimo, że od czasów Newtona posługiwano się wyrażeniami analitycznymi. Standardowe zagadnienia to podział figur płaskich lub na prostsze figury o równych polach i analogiczne zagadnienie w przestrzeni: konstruowanie brył o objętości równej innym danym bryłom poprzez różne konstrukcje przybliżone. Konstrukcje takie są tylko opisane, bez jakiegokolwiek uzasadnienia, czy też obliczeń. Po przeanalizowaniu całego tekstu można odnieść wrażenie, że wykładowca dysponował notatkami z wykładu matematyki z XVII wieku i odtwarzał je wiernie na wykładach, co było kanonem od powstania Akademii Krakowskiej. Taki sposób wykładu był przyjęty na wszystkich uniwersytetach w Europie aż do XVIII stulecia. Wykłady Jagielskiego poświęcone są w dużej części tematom, które dziś już nie należą do matematyki (astronomia, fizyka, architektura). Wykład tego materiału jest również bardzo archaiczny jak na koniec XVIII wieku. Wkrótce jednak poprawi się sytuacja na Akademii Krakowskiej, przemianowanej na Szkołę Główną Koronną. Okres reform przyniesie

istotną poprawę sytuacji. Jednak nie uda się w pełni nadrobić zaległości w stosunku do nauki światowej. Nie było zresztą takich priorytetów.

1.2.2 Matematyka w Akademii Wileńskiej przed okresem reform KEN

Praktycznie jedynym źródłem informacji o zakresie nauczania w dawnych uniwersytetach są zachowane podręczniki, rękopisy (notatki i konspekty wykładów) i publikowane przez uczelnie programy wykładów (*Układy Lekcji*). Sytuacja polityczna w Polsce w pierwszej połowie XVIII stulecia nie sprzyjała rozwojowi nauki. Przez ziemie Rzeczypospolitej, szczególnie północne, przetaczała się *Wojna Północna*, między Polską, Rosją i Szwecją, z różnym natężeniem, przez około trzydzieści lat. Stan Akademii Wileńskiej nie przedstawiał się najlepiej. Ale i ten ostatni sąd nie jest w pełni prawdziwy. Interesujących informacji na temat matematyki w Akademii Wileńskiej dostarcza rękopis z 1707 roku, starannie napisany, z licznymi pięknymi rysunkami. Jego autorem jest Jakub Bartsch [Barszcz], który w tym czasie wykładał matematykę w Akademii Wileńskiej. Tekst podzielony jest na krótkie numerowane ustępy. Zgodnie z ówczesnym kanonem studiów na wydziale filozoficznym (bo tam wykładano matematykę), program oprócz matematyki obejmował także dyscypliny, które dziś funkcjonują już samodzielnie. Wykłady matematyki w Akademii Wileńskiej w roku akademickim 1707/1708 obejmowały arytmetykę z elementami algebry i geometrię. Program ten, obejmując mierzenie długości, powierzchni i objętości, z zastosowaniami trygonometrii płaskiej i użyciem logarytmów, nie odbiega od obowiązującego wówczas kanonu wykładu matematyki na uniwersytetach. Część arytmetyczna i algebraiczna wykładu zawiera arytmetykę liczb całkowitych i wymiernych, działania na liczbach niewymiernych (wyrażenia pierwiastnikowe), rozwiązywanie równań liniowych, układów takich równań (2×2) i równań kwadratowych. Ponadto w tekście występują zadania prowadzące do równań diofantycznych stopnia 1, których rozwiązania podane są w postaci parametrycznej. Na koniec anonimowy autor rękopisu formułuje podstawowe twierdzenia trygonometrii w postaci równości algebraicznych i rozwiązuje wzorcowe zadania z geometrii analitycznej. Np. zadania w ustępach 86 i 88 (*Caput 3tium, Problemata Indeterminata*) są niemal identyczne z zadaniami V i VI w książce Newtona *Arithmetica Universalis* (1707), s. 104–106 wydania z roku 1720). Również rozwiązania cytowane przez Bartscha bardzo przypominają rozwiązania podane przez Newtona. Z dużym więc prawdopodobieństwem Jakub Bartsch znał podręcznik Newtona, bo mógł go znać: książka Newtona jest do dziś w Bibliotece Uniwersytetu Wileńskiego.

Wynika stąd, że poziom wykładów matematyki w roku 1707/1708 w Wilnie nie odbiegał od standardów europejskich.

Książka Jakuba Nakcyanowicza⁷ jest wolnym przekładem, a właściwie streszczeniem dzieła Christiana Wolffa dokonany przez Nakcyanowicza. Służyła ona zapewne jako podręcznik akademicki w Wilnie. Znane są jej dwa wydania: z 1759 i 1761 roku. Wtedy jeszcze łacina była językiem nauki i zapewne dlatego Nakcyanowicz przygotował tekst łaciński. Wykład Nakcyanowicza obejmuje arytmetykę, elementy geometrii (planimetria i stereometria), oraz trygonometrię płaską. Arytmetyka napisana jest precyzyjnie

⁷ JACOBUS NAKCYANOWICZ, PRAELECTIONES MATHEMATICAE EX WOLFIANIS ELEMENTIS ADORNATAE [...] TOMUS PRIMUS Qui commentationem de Methodo Mathematica Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam Planam & Analysisim complectitur. Vilnae. Typis S. R. M. Academicis. Annō 1759.

i staranie, zawiera definicje i twierdzenia, m. in. definicje liczb niewymiernych, pierwszych, liczb złożonych i względnie pierwszych. Własności liczb sformułowane są w postaci dziewięciu aksjomatów, dotyczących własności równości i nierówności, np.

Aksjomat III: $A = B$ implikuje $A + C = B + C$.

Aksjomat IV: $A > B + C$ implikuje $A > B$ i $A > C$ [wszystkie liczby są dodatnie]

Aksjomat V: $A > B$ pociąga $A + C > B + C$.

Aksjomat VIII: $A = B$ implikuje $AC = BC$.

W książce wyłożone są logarytmy, ułamki dziesiętne i sześćdziesiątkowe, oraz liczne algorytmy (*Arithmetica calculatoria*). Brak zadań zrekompensowany jest przykładami numerycznymi ilustrującymi wprowadzone algorytmy. Geometria wyłożona jest ściśle według Euklidesa, ale wykład geometrii i trygonometrii zawiera już elementy symboliki algebraicznej, wówczas jeszcze niechętnie stosowanej w podręcznikach. Zakres materiału przypomina program w rękopisie Bartscha z 1707 roku.

Z powyższego wynika, że stan nauczania matematyki na Litwie w XVIII i pierwszych trzydziestu latach XIX wieku nie był taki zły, jak można by sądzić. Również poziom nauczania uniwersyteckiego nie odbiegał od poziomu nauczania w Akademii Krakowskiej. Wykład matematyki w Akademii Wileńskiej, jak o tym świadczą programy wykładów, których z braku miejsca nie będę omawiać szczegółowo, obejmował dość duży program odpowiadający temu, czego nauczano na innych uniwersytetach europejskich. W przeciwieństwie jednak do nich, w Akademii Wileńskiej nie prowadzono żadnych badań naukowych w zakresie matematyki. Doktoraty i inne awanse oparte były na kompilacjach z klasyków, głównie z Euklidesa, Apolloniusza, czy też Arystotelesa i były, w istocie pozbawione jakiegokolwiek wartości naukowej. Co prawda w Wilnie profesorem został Bernard Siruć, autor pierwszego polskiego tekstu z zadaniami z analizy matematycznej, wydane po łacinie w 1755 roku w Rzymie, ale w Wilnie otrzymał katedrę prawa kanonicznego, które wykładał przez wiele lat, nie angażując się w wykłady matematyki.

Szczegółowy opis sytuacji w naukach ścisłych w Akademii Wileńskiej podaje Piechnik.⁸ Próbę reform podjęto w połowie XVIII wieku, wysyłając kolejnych uczonych na studia do Pragi. Jezuiccy matematycy z Wilna utrzymywali ściśle kontakty z Akademią w Pradze. Ze zrozumiałych względów matematycy wileńscy nie jeździli na studia do Krakowa, bowiem niemal od początku powstania Akademii Wileńskiej jej kontakty z Akademią Krakowską były dość chłodne. Pamiętano w Wilnie, że to właśnie działalność Jana Brożka w XVII stuleciu nie tylko uniemożliwiła jezuitom przejęcie wpływów w Akademii Krakowskiej, ale nawet doprowadziła do zamknięcia Kolegium Jezuickiego w Krakowie, aspirującego do rangi akademii. W połowie XVIII wieku młodzi, uzdolnieni matematycznie jezuici byli wysyłani z Wilna na dwuletnie studia do Pragi, do Józefa Steplinga. Tomasz Żebrowski (1714–1758) przebywał w Pradze w latach 1750–1752, podejmując pod kierunkiem Steplinga studia astronomiczne i matematyczne. Podobnie, Kazimierz Naruszewicz (1730–1803) odbył studia u Steplinga w latach 1754–1756. W tym samym okresie przebywał w Pradze Marcin Poczubut (1728–1810), zwany Odlanickim, studiując u Steplinga matematykę i grekę. Wybuch wojny siedmioletniej w 1756 roku i niebezpieczeństwo oblężenia Pragi zmusiły Poczubutę do powrotu do Wilna.

⁸ Ludwik Piechnik SJ, *Odrodzenie Akademii Wileńskiej 1730-1993*, Rzym 1990. Apud „Institutum Historicum Societatis Jesu”.

Kontakty z Akademią Jezuicką w Pradze zaowocowały wprowadzeniem najnowszych osiągnięć matematyki do programów uniwersyteckich. W 1753 roku zaczęto po raz pierwszy wykładać w Akademii Wileńskiej elementy analizy matematycznej,⁹ w bardzo ograniczonym zakresie.

W XVIII stuleciu odnajdujemy w Wilnie następujących matematyków jezuitów: Thomas Żebrowski wymieniony jest pod datą 16. XI 1752 jako *professor matheseos*. Jacobus Nakcyanowicz wymieniony jest 10. X 1759 roku jako *professor mathematicae*, a 15. X 1773 jako *professor theologiae*. Josephus Powilewicz wymieniony jest 10. XI 1759 jako *professor logices*, a w 1771 odnotowany jest jako *philosophiae doctor*. Casimirus Naruszewicz (1730–1803) odnotowany jest 3. XI 1764 roku jako *professor mechanicae*, a rok później, 12. XII 1765 jako *thypographiae praeses*, tzn. jako prefekt drukarni, coś więcej niż dyrektor wydawnictwa uniwersyteckiego, gdyż w zakres jego obowiązków wchodziła również cenzura. Był on rektorem Collegium Nobilium S. J. w Wilnie w latach 1769–1773, a od roku 1767 sekretarzem prowincji jezuitów. Martinus Poczbut (1728–1810) odnotowany jest 3. XI 1764 roku jako *professor astronomiae*, a trzy lata później, 17. XI 1767 jako *professor astronomiae, Regiique observatori ac thypographiae praeses*, tzn. administrator Drukarni Akademickiej. Benedictus Dobszewicz (albo: Doboszewicz) odnotowany jest 14. X 1755 jako *professor arithmeticae et geometriae*, dziesięć lat później, 12. XII 1765 roku jako *professor Theologiae*. Kasata zakonu zastała go 15. X 1773 na stanowisku prorektora (*procancellarius Academiae*). Franciscus Narwoysz, odnotowany jest 9. XI 1769 jako *professor matheseos*, a 15. X 1773 jako *professor philosophiae*. Po kasacie zakonu nadal był profesorem Uniwersytetu Wileńskiego i pisał najdłuższe i najbardziej szczegółowe konspekty swoich wykładów z analizy matematycznej, wzorowanych niemal dosłownie na Newtonie. Ksiądz Josephus Mickiewicz, stryj Adama Mickiewicza, odnotowany jest 15. X 1773 w *Laureae Academicae* jako *auditor theologiae*. Później wykładał jednak przez wiele lat fizykę; ponadto kierował Uniwersytetem Wileńskim (choć formalnie nie był rektorem) w roku 1794 i w roku akademickim 1806/1807, a w XIX wieku był przez kilkanaście lat dziekanem *Oddziału Nauk Fizycznych i Matematycznych na Cesarskim Uniwersytecie Wileńskim*, jak wtedy mówiono.

Oto spis wykładowców matematyki w Akademii Wileńskiej:

Jakub Bartsch (1699–1701, 1707–1710); Aleksander Sokolski (1701–1704); Stanisław Witakowski (1704–1705); Jan Narbutowicz (1705–1710, 1711–1712); Aleksander Kulesza (1711–1720); Maciej Karwacki (1720–1731); Jerzy Fursewicz (1731–1733); Marcin Bystrzycki (1733–1737, 1750–1751); Mikołaj Siemieński (1737–1738); Józef Moroz (1738–1739); Kazimierz Schultz (1739–1743); Krzysztof Rzepnicki (1743–1748); Stanisław Jurewicz (1742–1746); Kazimierz Hołowka (1749–1750); Józef Pażowski (1751–1752); Tomasz Żebrowski (1752–1758); Benedykt Dobszewicz (1754–1757); Jakub Nakcyanowicz (1759–1760); Joannes Rossignol (1761–1763); Joannes Fleuret (1761–1762); Kazimierz Naruszewicz (1763–1767); Tadeusz Jodłowski (1766–1767, 1770–1771); Ludwik Roszkowski (1767–1768, 1771–1772); Franciszek Narwoysz (1766–1770, 1772–1773); Tadeusz Jurewicz (1768–1769); Józef Kirkiełło (1769–1770); Michał Sienicki (1770–1772); Onufry Dylewski (1770–1771); Andrzej Strzecki (1771–1773); Antoni Kode (1770–1773); Ignacy Suchorski (1773–1774). Po niektórych z nich pozostały rękopisy. Wiadomo też, co wykładali niektórzy z nich. Np. Kulesza wykładał

⁹ Vide: SPECIMEN MATHEMATICUM Ex Arithmetica, Geometria, Trigonometria & Algebra. In quo, à Religioso Societatis JESU Matheseos Auditore infra exposita Quaesita, Theoremata, Problemata definiuntur, Demonstrantur, Resolventur, Praeside R. P. THOMA ZEBROWSKI Societatis JESU, AA. LL. et Philosophiae Doctore, Actuali Matheseos Professore. EXHIBEBITUR. In Aula Academica Universitatis Vilnensis Societatis JESU. Annò MDCCLIII. Mense Juliò, Die 27.

w roku 1715 geografię matematyczną i gnomonikę. Karwacki wykładał w roku 1721 arytmetykę, geometrię i krzywe stożkowe, gnomonikę, wyznaczanie współrzędnych geograficznych. W 1727 doszła do tego geodezja, stereometria, chronologia z elementami astronomii. Wykład stereometrii zawierał m. in. dowód twierdzenia Archimedesa o objętości kuli.

1.2.3 Podręczniki akademickie

W wieku XVIII było już wiele podręczników matematyki na poziomie akademickim. Wyjątkowym jednak powodzeniem cieszyły się książki filozofa Christiana Wolffa, oryginalnie wydawane po niemiecku. Można domniemywać, że pomysł przetłumaczenia odpowiednich tomów dzieła Christiana Freyherrna von Wolffa, *Der Anfangs=Gründe aller Mathematischen Wissenschaften*, z któregoś kolejnego wydania tej książki (pierwsze było w 1710 roku) został podsunęty Nakcyanowiczowi przez jego zakonnych zwierzchników. Książka składa się z dwóch części: *Elementa Arithmeticae*. (151 s.); *Elementa Geometriae*. (310 s.+ tabl. I–XVI). Nie wiadomo, czy wydana została trzecia część poświęcona analizie. Część druga jest typowym wówczas wykładem geometrii Euklidesa, z naciskiem na zadania o zamianie figur jednego rodzaju na inne o tym samym polu (Caput VI. *De figurarum dimensione, additione, subtractione, multiplicatione, commutatione, divisione*). Trygonometria wyłożona została tak, jak to zrobił Bartolomeus Pitiscus z Zielonej Góry na początku XVII wieku (funkcje *sinus rectus*, *sinus versus*, *tangens*, *secans* definiowane są w ustalonym kole jako odpowiednio zdefiniowane odcinki).

Każdą z nich kończą *THEOREMATA et PROBLEMATA*, podstawowe fakty dotyczące tych tematów, wraz z zadaniami w formie problemów, uzupełniających podstawowy tekst. Tekst można traktować jako konspekt z matematyki wykładanej w Akademii Wileńskiej. Po krótkim omówieniu przykładów liczb niewymiernych, zebrane są najprostsze fakty z algebry, w tym ogólny wzór dwumienny Newtona i informację o liczbach zespolonych. Następnie autorzy cytują najważniejsze twierdzenia planimetrii i stereometrii, wraz z trygonometrią w ujęciu z XVI wieku (Bartolomeus Pitiscus). W części II zebrane są najprostsze fakty z analizy matematycznej, w ujęciu różniczek, tzn. w duchu Leibniza. Tekst jest bardzo ubogi, ale można na tej podstawie odtworzyć program wykładu matematyki.

Akademię Wileńską S. J. zasiliło w 1761 roku dwóch matematyków francuskich: Jean Fleuret i Jean Rossignol, sprowadzonych przez rektora Hasłowskiego na katedrę fizyki doświadczalnej. Obaj po dwóch latach wyjechali z Polski. Pierwszy podobno został misjonarzem w Chinach, a drugi wyjechał na południe Europy nie mogąc znieść surowego klimatu Wilna. Rossignol zostawił w rękopisie podręcznik trygonometrii datowany na 1763 rok. Jest to tekst poświęcony planimetrii i trygonometrii płaskiej, logarytmom i ich zastosowaniom, a kończy zapowiedziany w tytule wykład trygonometrii sferycznej. Do tekstu dołączony jest dodatek *Questiones Arithmeticae, quae Analytica Methodo facillime solvunt, uti videbit* (15 s.), zawierający elementarny wstęp do algebry, w tym 20 łatwych zadań prowadzących do równań liniowych, m. in. zadania dotyczące handlu. Do tekstu Rossignola dołączony jest dodatek o ogrodnictwie. Na końcu czytamy: *Finitum. Anno 1763. Mense Junio 28. w Czarnobyli*.

2 Reformy Komisji Edukacji Narodowej (1773–1795)

2.1 Szkolnictwo. Komisja Edukacji Narodowej

Kasacja zakonu jezuitów z dnia 21. VII 1773 postawiła Polskę przed niebezpieczeństwem, że zaniknie nauczanie w kraju. Z drugiej strony pojawiała się nieoczekiwana szansa na zreorganizowanie szkolnictwa w kraju według nowych koncepcji. Decyzją sejmiku z dnia 24. X 1773 roku ustanowiona została *Kommissyya Edukacyi Narodowej Korony Polskiej i W. Ks. Litewskiego*. Główne cele, które stały przed KEN, to: przejęcie szkół pojezuickich wraz z ich strukturą organizacyjną i materialną; zorganizowanie nowego, zreformowanego systemu edukacji w Polsce; wreszcie praktyczne przygotowanie tego systemu poprzez odpowiedni system prawny, przygotowanie kadry nauczycielskiej i administracyjnej, oraz odpowiednich programów szkolnych i dostosowanych do nich podręczników. Należy sobie uświadomić, że KEN była, w istocie, pierwszym ministerstwem edukacji. System szkolnictwa miał kształt piramidy: szkołom głównym (uniwersytetom) podlegały szkoły niższego szczebla, aż na szkołach parafialnych kończąc. Zależność szkół była hierarchiczna: szkoły główne typowały wizytatorów do kontroli szkół niższego szczebla. Natomiast same były wizytowane przez osoby wytypowane przez KEN. Sprawozdania z wizytacji były przekazywane do KEN, gdzie w oparciu o nie podejmowano odpowiednie decyzje.

Jak wynika z raportów posiedzeń KEN, głównym tematem posiedzeń były sprawy finansowe – dotacje dla szkół, trudności z przejmowaniem szkół pojezuickich, katedry uniwersyteckie (np. powołanie katedry chirurgii w Akademii Wileńskiej), pensje profesorów i nauczycieli, których nobilitowała *Ustawa Edukacyjna* w roku 1783, nazywając ich *profesorami*, ale też takie drobne sprawy, jak zmniejszenie wymiaru godzin dla konkretnego nauczyciela z powodu złego stanu zdrowia, zgoda na prowadzenie przez niego zajęć w innej klasie (profesor przypisany był do konkretnej klasy), czy też zgoda na prowadzenie pensji (o taką zgodę prosił de Virion z Poznania). Podejmowano też i inne decyzje. Na 91 posiedzeniu KEN (19. X 1774) postanowiono, że *w szkołach dysydenckich, z którymi teraz z przydanym przez Kommissyą funduszem, szkoły katolickie w niektórych miejscach łączone być mają: rektor jeden katolik, a drugi dysydent równej powagi i władzy używać napotem będą.*[...] Niewiele później, 11. XI 1774, KEN postanowiła: 3) *Decydowali kościół i Kollegium w Łucku w województwie Wołyńskim odstąpić kapitule Łuckiej, z temi kondycjami, że najprzód szkoły wygodne wymurować i dla profesorów wygodnego mieszkania na zawsze intra moenia collegii też kapituła pozwolić obowiązana będzie; powtóre, że biskup Łucki najskuteczniej przyłożyć się zechce do ustanowienia szkół parafialnych w swojej diecezyi.* [...]

Niezależnie od spraw bieżących prowadzone były prace władz przygotowujące przyszłą reformę. Rok później gotowy był już projekt reformy.

W okresie reform KEN podjęto próbę zreformowania Szkoły Rycerskiej. Inicjatywa króla spowodowała zmianę programów nauczania w Korpusie Kadetów. Komendant Szkoły, książę Adam Czartoryski, sfinansował kilkuletni pobyt kapitana artylerii Józefa Jakubowskiego, profesora Korpusu, we Francji, w celu odpowiedniego przygotowania go do przetłumaczenia podręcznika Bézouta dla francuskich szkół wojskowych na język polski. Czterotomowe dzieło Bézouta przetłumaczył Józef Jakubowski. Wydano je

w roku 1781.¹⁰ Polską terminologię uzgadniał Jakubowski z Towarzystwem do Ksiąg Elementarnych.¹¹ Trudno powiedzieć, w jakim stopniu korzystano z tej książki w Szkole Rycerskiej – brak odpowiednich dokumentów. Biorąc jednak pod uwagę, że matematykę wykładał wtedy Michał Hube, można być niemal pewnym, że z książki tej korzystał.

2.1.1 Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych

W 1775 KEN utworzyła nowy organ – Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych. Kierował nim ksiądz Grzegorz Piramowicz. Początkowo Towarzystwo miało przygotować reformę podręczników; z czasem doszły do tego dalsze funkcje organizacyjne, przygotowanie odpowiednich projektów ustaw i przepisów, reforma uniwersytetów, nadzór nad wszystkimi szkołami, wyposażenie szkół w pomoce naukowe. Cały ciężar pracy nad reformą szkolnictwa spadł na Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych. To ono, w całym okresie swojej działalności (1773–1794) odbyło aż 641 wielogodzinnych posiedzeń, na których m. in. ustalano programy poszczególnych przedmiotów, zatwierdzano podręczniki szkolne, które wygrały konkurs, dyskutowano i decydowano o polskiej terminologii naukowej, jakiej należało użyć w tych podręcznikach.

2.1.2 Podręczniki Lhuillera dla Szkół Narodowych

Simon Antoine Jean Lhuillier (1750–1840) był nauczycielem matematyki w Genewie. W 1877 wygrał konkurs na podręcznik arytmetyki, ogłoszony wcześniej przez Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych. Przybył do Polski, gdzie był nauczycielem i bibliotekarzem na dworze księcia Adama Czartoryskiego, w latach 1777–1788. Od 1795 był profesorem uniwersytetu w Genewie. Jego osiągnięcia naukowe skupiały się wokół geometrii i analizy matematycznej. W jednej z prac uogólnił wyniki A. J. Lexella dotyczące *polygonometrii*, tzn. mierzenia wielokątów. Dziś wyniki te bardzo łatwo

¹⁰ Étienne Bézout, Nauka Matematyki. do użycia Artylerji Francuzkiej napisana przez P. Bezout Towarzysza Akademij Nauk, i Marynarskiéy etc. a dla pożytku pospolitego, osobliwie dla Korpusu Artylerji Narodowej na Polski język przełożona z Roskazu i Nakładem Jego Królewskiej MCI. Pana Naszego Miłostiwego do druku podana. [Tłum. Józef Jakubowski z dzieła: Étienne Bézout, *Cours de mathematiques a l'usage du corps royale de l'artillerie*, 1770. wyd. I.]

Tom Pierwszy Zawieraący w sobie Fundamenta Arytmetyki i Jeometry. W Warszawie. w Drukarni XX. Missyonarzow. R. P. M.DCC.LXXXI.

Tom Drugi Zawieraący w sobie Algebrę, i przystósowanie Algebry do Jeometry. W Warszawie. w Drukarni XX. Missyonarzow. R. P. M.DCC.LXXXI.

Tom Trzeci Zawieraący w sobie Fundamenta powszechné Mechaniki i Hidrostatyki; poprzedzone Rachunkami służącymi za wstęp do Nauk Fizyczno-Matematycznych. w Warszawie w Drukarni XX. Missyonarzow. R. P. M.DCC.LXXXII.

Tom Czwarty Zawieraący w sobie Przystósowanie zasad powszechnych Mechaniki, do różnych przypadków Ruchu i Równowagi. w Warszawie w Drukarni XX. Missyonarzow. R. P. M.DCC.LXXXII.

¹¹ We wstępie do dzieła Bézouta Jakubowski pisał: Ja w tłómaczeniu, starałem się przywieźćować się nietak do słów, iako raczyéy do wyrażenia myśli Autora, w sposób, ile możności prosty, iasny, i krótki. W przełożeniu wyrazów właściwych tęg Nauce, stósowałem się do słów, upoważnionych wyborém Prześw. Kommissyi Edukacyjnég: na których mi zaś zbywało, pozwoliłem sobie przełożyć ie podług rozumieniá własnego, z tym warunkiem, że ie gotów iestém poprawić, iak wyidą dalsze dzieła téżze Prześw. Kommissyi, podług której ustaw, usiłowalem także, zachować się i w *Pisowni* (Orthographie). Jeżeli zaś, (iak mam przyczynę obawiać się), uchybiłem w niektórych miéyscach, fundamentów niespracowanego Autora Grammatyki dla szkół Narodowych, Łaskawy czytelnik niechay to przebaczyć raczy, częścią memu początkowému w tég miérze przedsięwzięciu, częścią Drukarni.

uzyskać stosując liczby zespolone, ale w tamtych czasach były daleko niebanalne. W innej pracy podjął jedną z wielu prób uściślenia podstaw analizy matematycznej, wtedy jeszcze bardzo mało precyzyjnej. Znany jest też wzór *Lhuiliera* w trygonometrii sferycznej. Jednak największym osiągnięciem naukowym Lhuiliera jest uogólnienie wzoru Eulera dla wielościanów: jeżeli W jest wielościanem jednoczynnym (tzn. bez "dziur"), H liczbą jego ścian, S liczbą wierzchołków, A liczbą krawędzi, to, jak zauważył Euler w roku 1750: $H + S - A = 2$. Otóż Lhuilier zauważył w roku 1812, że wzór ten prawdziwy jest tylko dla wielościanów rodzaju zero. Natomiast dla wielościanów rodzaju n (tzn. mających n "dziur") $H + S - A = 2 - 2n$. Liczba ta nazywana jest dziś *charakterystyką Eulera wielościanu* W . Argumenty Lhuiliera nie są jeszcze pełnym dowodem, ale spostrzeżenie było bardzo ważne. Lhuilier wiele też publikował w czasopiśmie *Annales de Mathematiques pures et appliques* na początku XIX wieku.

W oparciu o przyjęte zasady Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych ogłosiło konkurs na książki elementarne. Wszystkie konkursy na podręczniki matematyki wygrał w kolejnych latach Simon Lhuilier. Jego podręczniki stały się podstawą nauczania matematyki w zreformowanej szkole polskiej. Były to książki:

SIMON LHUILIER – PODRĘCZNIKI DLA SZKÓŁ NARODOWYCH:

- [1] Arytmetyka dla Szkół Narodowych, w Warszawie, w Drukarni Nadwornej J. K. Mci. Roku 1778. [tłum. X. Andrzej Gawroński] (9 wydań 1781–1799) Cena Zł. 1. Gro. 5.
- [2] Geometriá dla Szkół Narodowych. Część I. W Krakowie 1780 Roku. [tłum. X. Andrzej Gawroński] (wyd. II, 1785) Cena Zł. 3.
- [3] Geometriá dla Szkół Narodowych. Część II. W Drukarni Nadwornej J. K. Mci. Roku 1781. (wyd. II, 1785) Cena Zł. 1 i gro. 3 sreb.
- [4] Algiebra dla Szkół Narodowych. Piérwszy raz wydaná. Roku 1782. W Marywilu u Michała Gröllá. Tłumaczył X. Andrzej Gawroński, Kanonik Krakowski, Lektor J. K. Mci. Nieoprawná Zł. 6.

Prócz podręczników Lhuiliera do kanonu nauczania matematyki w polskich szkołach włączono książkę:

- [5] IGNACY ZABOROWSKI, Logarytmy dla Szkół Narodowych. Piérwszy ráz wydané. W Warszawie Roku 1787.

2.2 Reformy Uniwersytetów

Reformę Akademii Krakowskiej, przemianowanej na Szkołę Główną Koronną, stosownie do Ustawy Edukacyjnej z 1783 roku, przeprowadzał Hugo Kołłataj, oddelegowany do Krakowa przez KEN. Ściśle z nim współpracowali: Jan Śniadecki, profesor matematyki wyższej i astronomii i Jan Jaśkiewicz, profesor fizyki, wszyscy bardzo młodzi, w wieku poniżej 30 lat. Po kilku latach reformy uległy zahamowaniu, w związku z przymusowym wyjazdem Kołłataja z Krakowa. Upadek państwa w 1795 roku uniemożliwił dokończenie reform Szkoły Głównej Koronnej.

Szkołę Główną Litewską zreformował Marcin Poczeb, wybitny astronom, wieloletni rektor tego uniwersytetu. Niechęć do reform KEN spowodowała, że

przebiegały one w Wilnie wolniej i mniej skutecznie niż w Krakowie. W okresie reform KEN, matematyka w Wilnie nieco podupadła. Dopiero za rządów rektora Jana Śniadeckiego (1807–1815) przywrócona zastała rola matematyki i nauk ścisłych na Uniwersytecie Wileńskim, już pod rządami Rosji.

Najważniejsza jednak sprawa, to próba odpowiedzi na pytanie, dlaczego tak słabo rozwijano nowe działy matematyki, dlaczego nie było prac twórczych? Odpowiedzią jest przyjęty model nauczania uniwersyteckiego w okresie reform KEN. Na próby ponawiane przez Jana Śniadeckiego, aby rozwijać matematykę wyższą w Szkole Głównej Koronnej, odpowiadał prezes KEN, prymas Michał Poniatowski, wyjaśniając w listach do niego, że przede wszystkim potrzebni są absolwenci uniwersytetu w życiu codziennym.¹² Trzeba więc najpierw wykształcić pewną liczbę specjalistów. Potem dopiero będzie można pomyśleć o wykładach matematyki wyższej dla wąskiego grona studentów. Co prawda w innych sprawach dotyczących matematyki (np. utworzenie nowych katedr matematyki, przyjmowanie nowych profesorów) Michał Poniatowski, kierujący wówczas KEN, zdawał się całkowicie na trzydziestolatka, Jana Śniadeckiego. Jednak co do pryncypiów prymas był nieugięty. To jeszcze nie czas na przygotowywanie absolwentów do pracy twórczej. Państwu Polskiemu potrzebni są praktycy, dobrzy fachowcy. W sposób zupełnie nie zamierzony poplecznikiem prymasa stał się ksiądz Andrzej Trzcíński, profesor fizyki, który zamiast studiować fizykę za granicą, zgodnie z zaleceniem KEN, studiował medycynę. Po powrocie drukował paszkwile na matematykę i Śniadeckiego, ośmieszając i wyszydzając matematykę jako narzędzie fizyki. Jego wykłady fizyki były tak niekompetentne, że usiłowano pozbawić go katedry. Postawa Trzcíńskiego może świadczyć o oporze części kadry uniwersytetu przeciwko jakimkolwiek zmianom starego systemu. Punkt widzenia podobny do reprezentowanego przez prymasa Poniatowskiego przyjęto od roku 1803 na rosyjskim z urzędu, a w praktyce polskim (kadra, studenci, język wykładowy) Cesarskim Uniwersytecie Wileńskim. Jeżeli Uniwersytet Krakowski nastawiony był na kształcenie nauczycieli i kadry potrzebnej w gospodarce, to Uniwersytet Wileński kładł główny nacisk na to ostatnie. Kształcenie nauczycieli nie było tam zbyt rozwijane.

Widać więc, że nie było żadnych racjonalnych przesłanek, aby rozwijać najnowsze działy matematyki. Była już odpowiednio przygotowana do tego kadra. Zarówno w czasach KEN, jak i później, wysyłano pracowników nauki na studia zagraniczne, często wieloletnie. Jednak po powrocie uczeni ci zobowiązani byli do realizowania przyjętych programów nauczania różnych przedmiotów, zaliczanych wówczas do matematyki. Na studiowanie nowych działów matematyki, a tym bardziej na ich rozwijanie, nie było ani czasu, ani oczekiwania.

W omawianym okresie w zasadzie nie było żadnej aktywności naukowej na uniwersytetach. Poziom i zakres nauczania matematyki uniwersyteckiej był bardzo różny, choć nie było tak źle, jak piszą niektórzy. Stopniowa poprawa następowała w okresie reform Kołłątaja, język polski stał się językiem wykładowym. Od lat

¹² Trzeba pamiętać, że wobec braku wyspecjalizowanych uczelni, uniwersytet kształcił zarówno budowniczych, architektów, inżynierów jak i lekarzy. Dlatego studia na wydziałach filozoficznych (a później na *oddziałach fizyczno-matematycznych*, jak je wtedy nazywano) obejmowały nie tylko *Elementy* Euklidesa, *Stożkowe Apolloniusza*, *elementy arytmetyki*, lecz także astronomię, mechanikę, statykę, hydraulikę, architekturę cywilną i militarną, gnomonikę itp. Np. na Uniwersytecie Wileńskim duża frekwencja na wykładach matematyki była zapewniona przez studentów medycyny i studentów chirurgii (to były dwa odrębne kierunki studiów w XIX wieku), którzy w programach studiów mieli wykłady matematyki.

siedemdziesiątych osiemnastego wieku stopniowo wchodzi do nauczania elementy matematyki wyższej, tzn. geometria analityczna płaszczyzny, podstawowe pojęcia analizy matematycznej w ujęciu bardzo archaicznym, często niemal dosłownie według Newtona (Narwojsz), elementy trygonometrii płaskiej i sferycznej, ze względu na potrzeby astronomii i kartografii, oraz elementarny wstęp do algebry, tzn. podstawowe własności wielomianów jednej i wielu zmiennych. Również na dość dobrym poziomie stał wykład mechaniki, używający całego dostępnego aparatu matematycznego. Co najciekawsze, pierwsze próby wykładania analizy matematycznej odnajdujemy w niektórych gimnazjach zakonnych, i to wcześniej, niż na uniwersytetach. Ważną rolę odegrała książka Jana Śniadeckiego, pierwszy w języku polskim podręcznik akademicki algebry i geometrii analitycznej.¹³ Gdyby nie był napisany po polsku, niewątpliwie odegrałby ważną rolę w nauczaniu uniwersyteckim w Europie.

Reformy KEN, na ogół udane ujednolicenie zakresu i programu nauczania, w tym także matematyki, w dość krótkim czasie dały zastępy młodych ludzi lepiej, niż poprzednio przygotowanych do słuchania wykładów z matematyki wyższej. Jednakże tragiczne wydarzenia polityczne w bardzo widoczny sposób wpłynęły na stan Szkół Głównych i na cały zreformowany system szkolnictwa.

2.2.1 Szkoła Główna Koronna (Kraków)

Poniżej przedstawione jest krótkie omówienie wykładów matematyki w Szkole Głównej Koronnej w latach 1781–1793.

Wykłady z nauk matematycznych w latach 1781–1793

Jan Kanty Krusiński, *Filozofii Doktor, Matematyki elementarney publiczny Professor, Szkół Koronnych Jeneralny Wizytator*: po zakończonym z Algiebrzy Traktacie o Funkcyach i Zrównaniach przestępnych, z początkiem nowego roku 1792, zacznie od nayspierwszych początków Kurs matematyki początkowey, mając traktować w tym roku szkolnym Arytmetykę teoretyczną, Arytmetykę praktyczną i Jeometrią teoretyczną 1787/88, 1791/92, 1792/93, algebra [wg Śniadeckiego] 1788/89, 1790/91, 1792/93, Trygonometria 1790/91, 1792/93, *Elementy* Euklidesa, *DATA*, niektóre podania z Archimedesza 1792/93.

Felix Radwański, *Filozofii DOKTOR, Matematyki początkowéy PROFESSOR, GEOMETRA przysięgły*: algebra [wg J. Śniadeckiego] 1782/83, 1785/86, mechanika praktyczna dla rzemieślników 1782/83, 1790/91, 1791/92, 1792/93, początki Jeometrii Euklidesa, do których przyda cenniejsze z Archimedesza Podania o kuli, ostrokręgu i wałku [w zastępstwie J. K. rusińskiego]. Trygonometria płaska 1783/84, 1785/86, 1786/87, Kurs Matematyki początkowey 1783/84, 1786/87, Mechaniki i Hidrauliki Professór publiczny, Kurs Mechaniki (statyka) 1791/92, 1792/93, Hidrodynamika 1792/93, Hidraulika 1788/89, 1791/92, 1792/93.

¹³ Jan Śniadecki, Rachunku algebraicznego TEORYA Przystósowaná do Geometrii Linii Krzywych [...] TOM PIERWSZY Zawierający Algbrę na dwie części podzieloną. [...] TOM II. w którym się przez zrównania nieoznaczone tłómaczą własności LINII i POWIERZCHNI KRZYWYCH. W Krakowie W Drukarni Szkoły Głównej Koronnéy Roku 1783.

Jan Śniadecki, *Filozofii Doktor, Matematyki wyższej i Astronomii publiczny Professor, Szkoły Głównej Sekretarz*, ciągnąc Kurs Matematyki wyższej zacznie Rachunek integralny, gdzie wyłożywszy ogólne sposoby całkowania zrównań między dwiema i więcej ilościami odmiennymi, użycie tego Rachunku okaże w tłumaczeniu Praw biegu, a szczególniej w teorii Attrakcyi ciał Niebieskich wszystkie Prawa biegu w Planetach i kometach obserwacyą stwierdzone, ze zrównań dyfferencyalnych drugiego porządku wydobywając. Przyda do tego Rachunek odmienności przystosowanej do zagadnień fizycznych 1785/86, 1790/91, 1791/92, algebra [wg własnej książki] 1786/87, 1787/88, 1788/89, 1790/91, 1791/92, KOLLEGIUM FIZYCZNEGO PREZES, Kurs Matematyki Wyższej 1791/92, Trygonometrya Sferyczna [w wykładzie astronomii] 1791/92, Kurs Matematyki początkowej (Arytmetyka, Początki Euklidesa, fragmenty z dzieł Archimedesesa) 1787/1788, Początki Rachunku Dyfferencyalnego i Integralnego 1783/84, 1792/93.

Z powyższego zestawienia widać, że Krusiński wykładał cyklicznie matematykę elementarną (arytmetyka, geometria, trygonometria płaska, algebra), Radwański głównie mechanikę i jej elementy, oraz mechanikę dla rzemieślników (w niedziele), a Śniadecki wykłady przypisane do jego katedr, tzn. matematykę wyższą i astronomię wraz z niezbędnymi dodatkami z matematyki (geometria analityczna i trygonometria sferyczna). Wiadomo też, na czym oparty był jego wykład analizy. W jednym z dokumentów¹⁴ czytamy:

JAN CHRZCICIEL SNIADOCKI *Filozofii DOKTOR, Matematyki wyższej y Astronomii PROFESSOR*: w Poniedziałki, Szrody y Piątki od w pół do trzeciej do czwartej tłumaczyć będzie Geometrią wyższą, która całą teorią linii krzywych Algebraicznych y przestępnych z natury zrównań wydobytą zamknie. Przydą do téy sposób wyrażania w zrównaniach zwierzchni płaskich y krzywych, mający służyć uczącym się za pomoc do Mechaniki wyższej. Co zakończywszy przystąpi do wykładania początków rachunku differencyalnego, z Xiążki JMć Pana Cousin Sławnego akademii Umiejętności Geometry. Tenże sam dawać będzie począwszy od Trygonometryi Sferycznej, gdzie Skutki Biegów Niebieskich wyciągnioné z Obserwacyi przywodzić będą do Zrównań Algebraicznych, aby Słuchający tém łatwiej związki skutków niebieskich y wzajemną początków Geometry, z Obserwacyami zgodę za pomocą rachunku obięli. [...]

Wyjaśnia to, dlaczego nie zachowały się notatki Śniadeckiego z wykładów analizy. Być może takich notatek w ogóle nie było, a jego wykład oparty był, jak pisze, na książce Cousina.¹⁵ Tłumaczy to też, dlaczego Śniadecki planował napisać dalsze tomy *Rachunku Algebraicznego Teoryi ...* (1783). Potrzebny był podręcznik analizy matematycznej w języku polskim. Do końca życia Śniadeckim próbował zmobilizować się do tej pracy, ale nie zdążył.

¹⁴ *PRÆLECTIONES AKADEMICÆ QUÆ IN PEINCIPE REGNI SCHOLA à Ima Octobris Anni 1782. ad diem ultimam Junij 1783. publice tradentur.*

¹⁵ Jacques Antoine Joseph Cousin, *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, Paris 1777. Od 1779 roku Śniadecki był w Paryżu, gdzie poznał m. in. Cousina. Zapewne miał własny egzemplarz tej książki. Mógł też korzystać z egzemplarza, który jest do dziś w Bibliotece Jagiellońskiej.

2.2.2 Szkoła Główna Litewska (Wilno)

12. X 1781 Podkanclerzy Litewski Joachim Chreptowicz włączył Akademię Wileńską do systemu reform KEN. Jest to formalna data powstania Szkoły Głównej Litewskiej.

Poniżej przytaczam listę wykładów z matematyki, publikowaną na początku każdego roku akademickiego.

W latach 1794/95 i 1795–96 nie było wykładów w Szkole Głównej Litewskiej.

Wykłady z nauk matematycznych w latach 1781–1794

X. Tadeusz Kundzicz *Nauk Wyzwolonych y Filozofii Doktor, Koadjutor Proboszcz Kosciola S. Trójcy, Collegii Physici V. Sekretarz, zastępujący miejsce Nauczyciela Matematyki stosowanej: mechanika* 1781/82, 1783/84, 1784/85, 1785/86, 1786/87, 1788/89, (*publiczny i ordynaryyny Matematyki stosowanej Professor*) 1788/89, statyka 1789/90, 1790/91, 1791/92, 1792/93, (*publiczny i ordynaryyny Matematyki Professor*) Traktat o Sekcyach Konicznych, Traktaty o Rachunkach Differencyalnych i Integralnych, Traktat Dynamiki 1793/94.

Józef Mickiewicz *Nauk Wyzwolonych y Filozofii Doktor, Fizyki Teoretyczney i Experimentalney Professor: mechanika, hydrostatyka, elektryczność (cyklicznie)* 1783/84, 1784/85, 1785/86, 1786/87, 1788/89, 1789/90, 1790/91, 1791/92, 1792/93, 1793/94, arytmetyka, geometria i mechanika dla rzemieślników (w niedziele i święta) 1784/85, 1788/89, 1791/92.

Franciszek Milikont Narwoysz *Świętey Teologii Doktor, Matematyk J. K. Mci, Pleban Sokoldzki, publiczny wyższy Matematyki Professor: analiza matematyczna (wg Methodus fluxionum Newtona)* 1783/84, 1786/87, 1788/89, 1789/90, (*wg Eulera Introductio in Analysin Infinitorum*) 1793/94, algebra i geometria analityczna (*wg Newtona Arithmetica Universalis*) 1783/84, 1784/85, 1785/86, 1786/87, 1788/89, 1792/93, 1793/94, teoria linii krzywych (*wg Newtona; w tym opis linii trzeciego stopnia*) 1785/86, 1790/91.

Ignacy Reszka [...] *publiczny Astronomii Professor: astronomia* 1798/99.

Bernard Siruć¹⁶ *Prawa Cywilnego Doktor, publiczny Prawa Rzymskiego Professor [...] tłumaczyć przed się bierze Ustawy Justyniana [...]* 1781/82.

Andrzej Strzecki *S. Theologii Doctor, Collegii Physici Prezydent, Astronom J. K. Mci y Astronomii publiczny Professor: astronomia (z trygonometrią sferyczną)* 1781/82, 1783/84, 1784/85, 1788/89, 1789/90, 1790/91, 1791/92, 1793/94.

Mikołaj Tomaszewski *Nauk Wyzwolonych y Filozofii Doktor, Vice Professor Matem: i Sekretarz Coll: Physici: będzie dawał lekcye Matematyki początkowej dla tych, którzy nie dość w niey ćwiczeni, ze szkół mniejszych na lekcye przychodzą Akademickie* 1788/89, 1789/90, 1790/91, 1791/92.

¹⁶ To nie pomyłka. Pijara Sirucia cytuję tu dlatego, że z wykształcenia był matematykiem: studia ukończył w Rzymie, publikując tam po łacinie zbiór zadań z analizy matematycznej (1755). Był on również autorem książeczki *Arytmetyka prostacka* z 1777 roku, podręcznika arytmetyki dla analfabetów. Niestety, w Wilnie nie wykladał matematyki.

3 Lata 1795–1832

3.1 Szkolnictwo

Zarówno Prusy, jak Rosja, przejęły w znacznym stopniu model KEN. W Rosji nie tylko model reform był wzorowany na polskiej Ustawie Edukacyjnej, ale również realizacja była w dużym stopniu w wykonaniu Polaków. Książę Adam Jerzy Czartoryski (syn Kazimierza) był w roku 1803 ministrem spraw zagranicznych Rosji, potem współorganizował nowy system edukacji w Rosji, oparty na sześciu uniwersytetach, jako Szkołach Głównych (uniwersytety w Dorpacie, Wilnie, Petersburgu, Moskwie, Charkowie i Kazaniu, pierwszy z niemieckim językiem wykładowym, drugi z językiem polskim, pozostałe rosyjskojęzyczne). Uniwersytety kierowały podlegającymi im okręgami szkolnymi. Zapewne z wymienionych powodów podręczniki Lhuilliera służyły w Wileńskim okręgu szkolnym do lat dwudziestych XIX wieku, a więc niemal pół wieku, a nawet miały nowe wydania. Pod pozostałymi zaborami dość szybko wyeliminowano podręczniki będące wcześniej w użyciu.

3.2 Uniwersytety

Jeżeli stan matematyki w okresie reform KEN, przed ostatnim rozbiorem, można w przybliżeniu uznać za porównywalny w obu szkołach głównych, to w piętnastolecie 1815–1830 matematyka w Wilnie rozwijała się prężniej. Oferta dydaktyczna z matematyki i pokrewnych dziedzin była w Wilnie znacznie bogatsza niż w innych uniwersytetach tego regionu. Zarówno uniwersytet w Królewcu, jak i uniwersytet w Dorpacie, miały w tym czasie bardzo ubogą ofertę z matematyki. Na każdym z tych uniwersytetów było dwóch, okresowo trzech matematyków, którzy musieli obsłużyć cały proces dydaktyczny. Również w Krakowie oferta w zakresie nauczania matematyki była uboższa, niż w Wilnie. Dopiero Karol Hube zaczyna odbudowywać po roku 1815 poziom i zakres wykładów matematyki w Krakowie.

W Warszawie, w roku 1820, powstaje uczelnia wojskowa, Szkoła Aplikacyjna Artylerii i Inżynierii. Musi ona, z powodu braku kadry wykładowców, dzielić się nimi z Uniwersytetem Warszawskim. Jest kilka ambitnych prób w zakresie wykładów i prób zaznajomienia się z najnowszą matematyką, ale kończy je likwidacja obu uczelni wraz z całym systemem szkolnictwa niższego szczebla.

Wiek XIX przynosi nowoczesny wykład analizy matematycznej, na wszystkich trzech uniwersytetach (Kraków, Warszawa, Wilno) wzorowany na dziełach matematyków francuskich, często dosłownie według Lagrange’a czy też Lacroix.

3.2.1 Uniwersytet Krakowski

W 1794 roku wojska pruskie zajęły Kraków, a po ich wycofaniu wkroczyły wojska austriackie. Kraków był pod okupacją austriacką do roku 1809, kiedy to znalazł się w granicach Księstwa Warszawskiego (do roku 1815). Przez krótki okres po rozbiorach Uniwersytet Krakowski był niemieckojęzyczny. W czasie Księstwa Warszawskiego i Królestwa Polskiego znów z polskim językiem wykładowym. W okresie 1815–1846

Wolne Miasto Kraków było stolicą Rzeczypospolitej Krakowskiej, znajdującą się pod kontrolą Austrii, Prus i Rosji.

Poniżej przedstawiony jest wyciąg z *Prospektów Lekcyi*. Obok nazwiska wymienione są nazwy wykładanych przedmiotów, bez rozróżnienia poszczególnych działów, a w nawiasie rok akademicki, w którym odbywał się dany wykład.

Kazimierz Brzuchalski, matematyka elementarna 1810/11, 1811/12.

Karol Hube, wstęp do matematyki (algebra, analiza nieoznaczona, trygonometria) 1812/13, 1814/15, 1815/16, 1816/17, rachunek różniczkowy i całkowy z zastosowaniami w fizyce i mechanice 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1818/19, 1819/20, 1828/29, 1829/30, 1830/31, 1831/32, teoria równań, trygonometria sferyczna i geometria analityczna 1817/18, 1818/19, 1819/20, 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, 1831/32, analiza algebraiczna, trygonometria sferyczna i geometria analityczna z teorią powierzchni drugiego stopnia według Hachette 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, 1831/32, analiza skończona (*analysis finitorum*) 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, astronomia teoretyczna i praktyczna 1824/25.

Józef Łęski, sporządzanie map geograficznych z pomocą rzutu stereograficznego 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1817/18, 1818/19, 1819/20, 1820/21, 1821/22, 1822/23, astronomia 1816/17, 1818/19, 1819/20, 1820/21, 1821/22, 1822/23.

Filip Menciszewski, geometria wykreślna 1814/15, mechanika i hydraulika 1814/15.

Józef Tomaszewski, geometria wykreślna 1815/16.

Franciszek Sapalski, geometria wykreślna 1816/17, 1817/18, 1818/19, 1819/20, 1820/21, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1829/30, 1831/32, mechanika i hydraulika 1816/17, 1817/18, 1818/19, 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, 1831/32, algebra i trygonometria 1817/18, gnomonika 1819/20, 1821/22, architektura i mechanika praktyczna 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, 1831/32.

Augustyn Frączkiewicz, matematyka niższa 1817/18.

Franciszek Szopowicz, matematyka elementarna (arytmetyka, algebra, geometria elementarna z praktyką według Lacroix) 1818/19, 1819/20, 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1823/24, 1828/29, 1829/30, 1830/31, 1831/32, algebra i traktat o przekrojach stożkowych 1824/25, 1825/26, 1826/27.

Roman Markiewicz, elementy matematyki 1820/21.

Feliks Radwański, mechanika i hydraulika 1820/21, 1821/22, 1829/30, architektura 1830/31.

Wincenty Karczewski, astronomia 1823/24, 1824/25.

Maximilian Weisse, astronomia 1825/26, 1826/27, 1829/30, 1830/31.

3.2.2 Cesarski Uniwersytet Wileński

Spisy planowanych wykładów na Uniwersytecie Wileńskim w latach 1800–1831 dostarczają bogatej informacji o zakresie i różnorodności wykładanych przedmiotów. Poniżej przedstawiony jest wyciąg z tych *Prospektów Lekcyj*. Obok nazwiska wymienione są nazwy wykładanych przedmiotów, bez rozróżnienia poszczególnych działów, a w nawiasie rok akademicki, w którym odbywał się dany wykład.

X. Tadeusz Kundzicz, *Nauk Wyzwolonych i Filozofii Doktor, Prałat, Kanclerz Wileński, Kanonik Inflantski, Publiczny Ordynaryjny Matematyki Stosowanej Professor*: mechanika, hydrostatyka, mechanika cieczy 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1801/02, 1802/03.

X. Józef Mickiewicz, *Nauk Wyzwolonych i Filozofii Doktor, Kanonik Smoleński, Proboszcz Wiszniewski, Fizyki Teorycznej i Experimentalnej Professor*: fizyka (cykl trzyletni) 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1801/02, 1802/03.

Franciszek Milikont Narwoysz, *Nauk Wyzwolonych, Filozofii i Świętej Teologii Doktor, Matematyk bywszy Królewski, Jeden z dwónastu Towarzystwa umiejętności Włoskiego, Kanonik Smoleński, Publiczny i Zwyczajny czystej Matematyki wyższej i rachunku wysokiego Professor*: analiza matematyczna (wg Newtona *Methodus fluxionum*) 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1801/02, 1802/03, 1805/06, 1807/08, 1808/09; algebra (wg Newtona *Arithmetica Universalis*) 1797/98, 1798/99.

Ignacy Reszka, *Nauk Wyzwolonych i Filozofii Doktor, Publiczny Astronomii Profesor*, astronomia (z trygonometrią sferyczną) 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1802/03, 1805/06, 1807/08, 1808/09.

Karol Christian Langsdorf, *Professor Matematyki Stosowanej w Imperatorskim Uniwersytecie Wileńskim*, algebra 1804/05, mechanika, hydrodynamika i technologia 1804/05, 1805/06. [wykładał po łacinie]

Michał Szulc, *Filoz: Doktor, Architektury Cywilnej i Militarnej Publicz: zwyczaj: Profes: architektura cywilna i militarna* 1805/06, 1807/08, 1808/09, 1810/11, 1811/12.

Stefan Stubielewicz, *Filoz: Doktor obrany Professor Fizyki*: fizyka 1805/06, 1807/08, 1808/09, 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14.

Zachariasz Niemczewski, *Filoz: Doktor, Uniwersytetu Adjunkt*: wstęp do matematyki 1805/06, analiza matematyczna 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14, 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1817/18, 1818/19, 1819/20.

Michał Kado, *Doktor Filozofii, Uniwersytetu Adjunkt*: kartografia 1805/06, 1807/08, 1808/09.

Tomasz Życki, *Filoz. Doktor, Matematyki Professor Extraordinaryny*: matematyka elementarna (arytmetyka, planimetria, trygonometria płaska) 1797/98, 1798/99, 1801/1802, 1807/08, algebra z geometrią (wg książki Jana Śniadeckiego) 1797/98, 1798/99, 1808/09, 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14, 1814/15, 1815/16.

Cezary Kamieński, *Filoz. Doktor, Adjunkt Uniwersytetu*: astronomia z trygonometria sferyczną 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14.

Kaietan Krassowski, *Fil. Doktor*: fizyka 1814/15, 1816/17, 1817/18, 1818/19, 1820/21, rolnictwo 1821/22.

Felix Drzewiński, *Fil. Doktor*: mineralogia 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1819/20, fizyka 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Wincenty Karczewski, *Filoz. Magister*: astronomia 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1817/18.

Ignacy Horodecki, *Fil. Doktor, Radca Nad., Adjunkt Uniwersytetu*: mineralogia 1817/18, 1818/19, 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1823/24.

Antoni Wyrwicz, *Fil. Doktor*: algebra (wg Jana Śniadeckiego) 1817/18, 1818/19, 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31; astronomia i trygonometria sferyczna (wg Jana Śniadeckiego) 1820/21, 1823/24, analiza 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Piotr Sławiński, *Fil. Doktor*: astronomia i trygonometria sferyczna (wg Jana Śniadeckiego) 1818/19, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1826/27, 18 27/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Michał Pelka-Poliński, *Fil. Doktor, Akad. Florenc. Członek, Matematyki Prof.*: algebra wyższa (wg Jana Śniadeckiego) 1819/20, 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1823/24, mechanika 1824/24, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, geometria analityczna 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, geodezja wyższa 1820/21.

Karol Podczaszyński, *Magister Filozofii*: architektura 1820/21, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Józef Twardowski, *Fil. Doktor*: algebra z geometrią analityczną 1822/23 (nigdy nie miał wykładów).

Michał Oczapowski, *Ekonomia* 1822/23, 1824/25, 1827/28, 1829/30, 1830/31, rolnictwo 1823/24, 1828/29.

Walerian Górski, *Fil. Doktor*: mechanika 22/23, mechanika praktyczna 1823/24, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Hipolit Rumbowicz, *Fil. Magister*: geometria wykreślna 1824/25, 1827/28, 1829/30, 1830/31.

Antoni Szahin, *Fil. Magister*: geodezja 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Zygmunt Rewkowski, *Fil. Magister*: rachunek prawdopodobieństwa 1830/31.

Tomasz Życki, *Nauk Wyzwolonych y Filozofii Doktor, Matematyki wyższej Vice-Professor*: matematyka elementarna 1798/99.

3.2.3 Królewski Uniwersytet Warszawski

W roku 1815 powstaje w Warszawie nowy uniwersytet, trzeci polski uniwersytet w środkowej Europie. Od początku istnienia aż do jego zamknięcia w 1831 roku Uniwersytet Warszawski borykał się z ogromnymi problemami kadrowymi, szczególnie na Wydziale Fizyczno-Matematycznym. Nie zdołano jeszcze w tak krótkim czasie ugruntować poziomu i zakresu nauczania matematyki, gdy wiatr historii zgasił słaby jeszcze płomień nauki, w tym matematyki.

Na początku planowano w Warszawie trzy katedry: katedrę matematyki czystej, katedrę matematyki stosowanej i katedrę astronomii oraz osobny profesor do geometrii wykreślnej. Wykłady na Królewskim Uniwersytecie Warszawskim obejmowały:

Franciszek Armiński, rachunek całkowity 1817/18, algebra wyższa 1820/21.

Antoni Dąbrowski, matematyka elementarna 1817/18, algebra wyższa i geometria analityczna 1817/18, 1818/19, 1819/20, 1821/22, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, rachunek różniczkowy 1817/18, 1818/19, rachunek różniczkowy i całkowity 1819/20, 1821/22, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, rachunek różniczkowy, całkowity i wariacyjny 1820/21.

Kajetan Garbiński, Geometria wykreślna 1825/26, matematyka elementarna 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, geometria analityczna 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Adryan Krzyżanowski, algebra wyższa 1821/22, 1822/23, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, mechanika analityczna 1821/22, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1825/26, 1826/27, 1827/28, rachunek losów 1824/25, rachunek różniczkowy i całkowity 1826/27, 1827/28, matematyka elementarna 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Rafał Skolimowski,¹⁷ algebra wyższa 1819/20, mechanika analityczna 1819/20, 1820/21, geometria analityczna 1820/21.

Augustyn Frączkiewicz, algebra wyższa 1828/29, 1829/30, 1830/31, rachunek różniczkowy i całkowity 1828/29, 1829/30, 1830/31.

¹⁷ Rafał Skolimowski przeszedł w roku 1820 do nowo powstałej Szkoły Wojskowej Aplikacyjnej.

Bibliografia

- [1] Witold Więśław: *Matematyka polska epoki Oświecenia*. Fraszka Edukacyjna, Warszawa, 2007, stron 360.

Adresa

Prof. Witold Więśław
Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyczny
Plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
e-mail: witold.wieslaw@poczta.onet.pl

KONFERENČNÍ VYSTOUPENÍ

PAUL ERDŐS A JEHO OBLÍBENÉ PROBLÉMY Z RAMSEYOVY TEORIE

LUBOMÍRA BALKOVÁ

Abstract: Paul Erdős was one of the most prolific mathematicians who have ever lived. He is an author or co-author of about 1500 papers in the fields of Combinatorics, Number Theory, and Graph Theory. It is well-known that Erdős loved prime numbers. Here, we focus also on his interest in the so-called Ramsey theory – a discipline he invented and enriched with many results.

1 Zázračné dítě

1.1 Bertrandův postulát

Již od útlého dětství věděl Paul Erdős (26. 3. 1913, Budapešť – 20. 9. 1996, Varšava), že bude matematikem. Přátele své matky bavil tím, že z hlavy podle jejich data narození počítal, kolik vteřin jsou na světě. Když mu bylo deset let, otec mu ukázal Euklidův důkaz tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho. Paul Erdős byl okouzlen. Právě hledání elegantních důkazů se stalo smyslem jeho života. P. Erdős tvrdil, že Bůh má v rukou Knihu, ve které jsou jen ty nejhezčí důkazy. Opravdoví matematici jsou ti, jejichž důkazy se podobají těm z Knihy. Pro jeho spolupracovníky bylo největší pochvalou, když P. Erdős ohodnotil jejich důkaz slovy: „It’s straight from the Book.“ Poprvé okouznil P. Erdős maďarské matematické kruhy jako 18-letý. Jeho jednoduchý důkaz Bertrandova postulátu, že mezi každým přirozeným číslem a jeho dvojnásobkem leží prvočíslo, zdaleka předčil Čebyševův důkaz z roku 1850.

2 Ramseyova teorie

2.1 Problém s happy-endem

Maďarští matematici se scházeli ve 30. letech pravidelně u sochy Anonyma, kronikáře 12. století, začalo se jim proto přezdívat *Anonymous Group*. Členkou skupiny se stala i nadaná Esther Kleinová a přišla s řešením následujícího problému: „Kolik bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce, je třeba zadat, aby některé čtyři z nich tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku?“ Problém kroužek matematiků zaujal a zanedlouho vyrukovali s hypotézou, že $2^{n-2}+1$ bodů garantuje, že mezi nimi najdeme vrcholy konvexního n -úhelníku. Dosud není hypotéza dokázána, ale hned po několika týdnech našel György Szekeres počet bodů postačující pro existenci konvexního n -úhelníku. Tím si získal ruku Esther a tehdy Paul Erdős nazval úlohu *Happy End Problem* a tak také vstoupila do povědomí matematiků. György Szekeres měl štěstí, že Paul Erdős neměl zájem o ženy, protože vzápětí podstatně Szekeresovu postačující podmínku vylepšil. Šlo o první Erdősův výsledek z Ramseyovy teorie – oblasti matematiky, jejímž byl průkopníkem a již obohatil nesčetnými výsledky.

2.2 Problém společenský

Rok po řešení problému s happy-endem odjíždí P. Erdős na studia do Anglie. Antisemitské Maďarsko pro něj není bezpečné. Stýská se mu ale po domově, je totiž velmi silně poután ke své matce, která se o něj bude starat a doprovázet jej na

nekonečných cestách po celý život. Podle slov Bély Bollabáse: „Od roku 1934 spí Paul Erdős jen výjimečně sedm dní ve stejné posteli.“ Útěchu mu přináší intenzivní práce. Věnuje se i nadále Ramseyově teorii, která – zjednodušeně řečeno – hledá minimální počet prvků, jež garantují nějakou vlastnost. Klasickým příkladem je *Party Problem*: „Jaký je nejmenší možný počet hostů na narozeninové oslavě, má-li být zajištěno, že mezi nimi existuje trojice, kde každý zná každého, nebo existuje trojice, kde nikdo nezná nikoho?“ Správná odpověď je 6 osob. Pokud požadujeme stejnou vlastnost po čtveřicích, pak je minimální počet lidí 18. Pro pětice už se pouze ví, že minimální počet hostů je někde mezi 43 a 49 a pro šestice mezi 102 a 165. Zobecnění problému vedlo k zavedení Ramseyových čísel, jejichž vlastnosti P. Erdős s oblibou studoval a při té příležitosti vyvinul metodu pravděpodobnostního důkazu, která má dnes velký význam v teoretické informatice při snižování výpočetní náročnosti algoritmů.

Další matematické výsledky P. Erdőse, ale i jeho život a jeho svérázná osobnost jsou výborně popsány v [1], [2] a [3].

3 Odpočinek až v hrobě

3.1 Erdősovo číslo

P. Erdős zůstal aktivním matematikem až do své smrti v 83 letech. Na rady přátel, aby zvolnil, odpovídal: „Na odpočinek je čas v hrobě.“ Na svém kontě má však nejen nepočítaně vlastních výsledků a elegantních důkazů, ale náleží mu ještě další obrovská zásluha. Při svých cestách po světě nečekaně klepal na dveře svých kolegů, aby jim sdělil: „Má mysl je otevřená,“ a pustil se s nimi do práce na některém z problémů, které šel svým kolegům přímo na míru. Že měl opravdu mnoho spolupracovníků, potvrzuje počet článků, které z této spolupráce vzešly. P. Erdős jich má na kontě 1475 s více než 500 spoluautory. Není divu, že na jeho počest bylo definováno Erdősovo číslo [4]:

P. Erdős sám má číslo 0, ti, kdo s ním napsali článek, mají číslo 1, ti, kdo publikovali článek s nějakým spoluautorem P. Erdőse, mají číslo 2 atd. Existuje odhad, že 90 procent aktivních matematiků má Erdősovo číslo menší než 8.

Literatura

- [1] Csicsery G.–P.: *N Is a Number: A Portrait of Paul Erdős*. DVD, Springer, Berlin, 1999.
- [2] Hoffman P. : *The Man Who Loved Only Numbers. The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*. Hyperion, New York, 1998.
- [3] Schechter B.: *My brain is open: The mathematical journeys of Paul Erdős*. Simon & Schuster, New York, 2000.
- [4] The Erdős Number Project [online]. Poslední revize 30. dubna 2010 [cit. 5. 6. 2010]
<http://www.oakland.edu/enp/>

Adresa

Ing. Ľubomíra Balková, Ph.D.
 Katedra matematiky
 Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
 České vysoké učení technické
 Trojanova ulice 13
 120 00 Praha 2
 e-mail: l.balkova@centrum.cz

SUDOKU A HISTÓRIA MAGICKÝCH ŠTVORCOV

ANNA BÁLINTOVÁ, R. TROJÁČKOVÁ

Abstract: The game *Sudoku* – named as Rubik cube of the XXIst century – is very popular in mass media. The classical *Sudoku* is a magic Latin square. At Middle age Arab people were the first who gave some their mathematical applications. We will follow evolution of the magic square from this time up to now.

1 Úvod

1.1 Súčasný stav

História *magických štvorcov* je veľmi bohatá a pestrá – samozrejme – veď od pradávna priťahovali ľudstvo svojou zvláštnou magickou silou. Oficiálne ich história začína v X. storočí, keď boli po prvýkrát študované ako matematický objekt. Existuje obrovské množstvo ich modifikácií. V súčasnosti ich najpopulárnejšiu verziou je hra Sudoku, nazývaná tiež Rubikovou kockou XXI. storočia. Táto mimoriadne populárna hra bola zaregistrovaná v Japonsku pod ochrannou značkou vydavateľstva Nikoli Corporation Olt. Z tejto krajiny pochádza aj jej názov, v japončine *Su* znamená číslo a *Doku* jediné. Svetovým fenoménom sa však stala zásluhou Novozélandčana Waynea Goulda. Tohto advokáta na dôchodku veľmi zaujala kombinatorická hra, na ktorú náhodne natrafil pri svojom pobyte v krajine vychádzajúceho slnka. No a opäť sa potvrdilo, ako je osudové mať v správnu chvíľu, na správnom mieste ten správny nápad. Vytvoril počítačový program, ktorý generuje automaticky mriežky Sudoku a ponúkol ho americkým novinám The Times – a tak začala ich triumfálna cesta okolo sveta prostredníctvom médií. Je symbolické, že práve tam, kde voľakedy vznikla. Jej uznávaným autorom z roku 1979 je totiž práve Američan Howard Garns. Je o ňom známe, že bol inšpirovaný jednak magickými štvorcami všeobecne, a jednak konkrétnym problémom, ktorý riešil v 18. storočí uznávaný švajčiarsky matematik Leonhard Euler – tzv. problém 36 dôstojníkov. V anglofónnej oblasti je hra Sudoku známa ako *Number Place*. Pripomeňme si pre úplnosť princíp klasického Sudoku: cieľom je vyplniť danú štvorcovú tabuľku postupnosťou navzájom rôznych prirodzených čísel (prípadne písmen alebo iných symbolov). Každé z nich sa nachádza práve jedenkrát v každom riadku, stĺpci a v každom čiastočnom štvorci. Vo väčšine prípadov sú použité čísllice od 1–9, skúšaný štvorec je typu 9×9 a čiastočné štvorce sú typu 3×3 . Niekoľko prvkov postupnosti je k dispozícii priamo v zadaní, štvorcovú tabuľku treba skompletizovať. Zanechajme však Sudoku a sústreďme sa na *magické štvorce* Tento názov sa v bežnej reči používa pre špeciálne druhy štvorcových schém, ale treba si uvedomiť, že v prípade Sudoku ide vlastne o latinské, magické štvorce. Nie je neúčinné pripomenúť si ich definície i keď sú často opakované v literatúre [2], [3].

Magický štvorec rádu n – je chápaný ako štvorcová tabuľka, v ktorej sú umiestnené čísla 1, 2, ..., n^2 tak, aby súčet čísel v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach bol rovnaký. Toto číslo sa nazýva konštanta magického štvorca a je rovná $(n^3+n)/2$. Latinský štvorec rádu n je chápaný ak štvorcová tabuľka, v ktorej sú umiestnené čísla 1, 2, ..., n

tak, aby v každom riadku a stĺpci boli navzájom rôzne čísla. Niekedy je výhodnejšie použiť čísla 0, 1, 2, ..., $n-1$.

Príklad latinského štvorca rádu 3
vytvoreného z prvkov
0, 1, 2

1	0	2
2	1	0
0	2	1

Príklad magického štvorca rádu 3
vytvoreného z prvkov
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

4	3	8
9	5	1
2	7	6

1.2 Východzie poznatky

Prv než budeme sledovať históriu magických štvorcov, pripomeňme si aspoň niekoľko prvkov z jej „predhistórie“. Notoricky známa legenda, spojená s magickým zoskupením prvkov na pancieri korytnačky, známeho ako *Diagram od rieky Lo* (Čína niekoľko storočí pred naším letopočtom). Prvý známy manuálne vyrobený exemplár – číslice sú reprezentované geometrickými útvarmi (Čína 300 rokov p. n. l.). Prvý známy exemplár zostavený z číslic, ktorým sa zvykneme hovoriť, *arabské* pochádza z Indie.

Môžeme teda konštatovať, ako mnohokrát predtým, že pravdepodobne pôvod týchto fascinujúcich útvarov je v ďalekých východných kultúrach. Je všeobecne známe, že staré kultúry prikladali číslam magický význam. Ako už bolo spomenuté v predchádzajúcej časti, história ako vedecká disciplína, uznáva magické štvorce počnúc X. storočím. V tomto období boli totiž po prvýkrát definované ako matematické pojmy a nie ako dovtedy mystické. O tento kľúčový moment sa zaslúžili arabskí matematici, ktorí požívali označenie *Harmonické usporiadanie čísiel*. Písomné zdroje z tohto obdobia sú veľmi rôznorodé. Niektoré obsahujú informácie o základných vlastnostiach magických štvorcov, iné uvádzajú návody na ich konštrukciu. V súčasnosti sú už k dispozícii preklady najstarších známych písomných dokumentov, ktoré umožňujú zrekonštruovať ich vznik a vývoj. Vezmime do úvahy aj niekoľko neskorších zdrojov, ktoré síce nepriniesli nové originálne výsledky, ale zdokonalili tie predchádzajúce. Uvedme z nich niekoľko pozoruhodných, v chronologickom usporiadaní:

1. *Kniha o harmonickom usporiadaní prvkov vo štvorci*, autor Abu'l-Wafa al Buzani (940–997/998). Je jedným z dvoch najstarších písomných dokumentov, popisuje veľmi jasne všeobecné princípy konštrukcií, ale naproti tomu nevysvetľuje priamo použiteľné konkrétne metódy. Čitateľ získa teoretické vedomosti, ale nie praktický návod.
2. Encyklopédia publikovaná v Bagdade okolo r. 983, autor Rasa 'il Ihkwan al-Safa. Nájdeme v nej prvé magické štvorce rádu 5 a 6.
3. Ďalším zdrojom je druhá kapitola z knihy *Komentár k Aritmetike od Nikomaka*, autor Ali b.Ahmad al-Antaki (zomrel r. 987). Komentár sa týka diela *Úvod do aritmetiky*, ktoré sa venuje partii matematiky dnes známej ako teória čísiel. Tento

spis, i keď neohromí svojou originalitou, je zaujímavý kvôli historickým informáciám z daného obdobia. Je zaujímavé aj tým, že zohralo dôležitú úlohu v procese prenosu gréckych znalostí zo Strednej Európy do islamského sveta.

4. Zvláštnym prípadom je Abu Ishaq al-Zarkali, ktorý žil v XI. storočí v moslimskom Španielsku. Je autorom viacerých astronomických objavov nesúcich aj jeho meno. Pochádza od neho príspevok k tematike, v ktorom nájdeme 7 príkladov štvorcov rádu 3 až 9. Sú pridružené k 7 planétam, ako bolo v tom čase zvykom. I keď sú uvedené bez toho, že by bola vysvetlená ich konštrukcia, pre nás majú význam v tom, že potvrdzujú znalosť magických štvorcov v Španielsku v XI. storočí.
5. Abu Hatim Muzafar Asfizani (Perzia), bol skôr astronóm a mechanik ako matematik. Svoju reputáciu ohľadne skúmanej tematiky si získal hlavne vysokými didaktickými schopnosťami. I keď bez teoretického zdôvodnenia, vysvetľuje praktické metódy mimoriadne jasne, čo ich robí prístupnými širokému okruhu čitateľov.
6. Byzantínek Manuel Moschopoulos (spis z r. 1300) – dlho mu bolo pripisované otcovstvo niektorých konštrukčných metód. Štúdium starých arabských textov však prispelo k záveru, že v jeho prípade išlo o pokus znovu zostrojiť konštrukcie známe už predtým v islamskom svete v X. alebo XI. storočí.
7. Abd al – Wahbab ibn Ibrahim Zanjani (Perzia), stred XIII. storočia. Je autorom síce malého, ale súdiac podľa množstva zachovalých kópií, veľmi známeho spisu. Hlavná pozornosť je venovaná praktickej stránke, a síce ako vyplniť magické štvorce 3. a 4. rádu.
8. Egyptan Muhamad Ghabramallisi vydal okolo roku 1600 mimoriadne obsérne dielo o konštrukciách magických štvorcov. Obsahuje všetky dovtedy známe metódy a na viac veľa cenných historických informácií, ktoré chýbali. Autor pojednáva aj o iných magických útvaroch, ako sú napríklad magické kružnice alebo magické štvorce s „dierami“ (necháva sa prázdne políčko, často stredové).

Väčšina originálnych textov bola preložená relatívne nedávno. Sú obsiahnuté v obširnom diele, ktorého autorom je súčasný švajčiarsky matematik a historik Jacques Sesiano [4].

Prvé štúdie v Európe sa objavujú v rukopisoch zo XIV. storočia a následne sú spojené s tak prestížnymi menami ako Cardano, Fermat, Euler, Franklin. Avšak v „modernej Európe“, všeobecné konštrukčné metódy *magických štvorcov* pochádzajúce z arabských krajín, zostali nepovšimnuté až do XX. storočia.

2 Nové výsledky

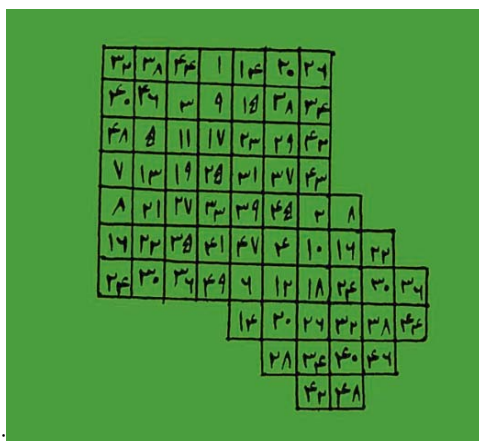
2.1

I keď sa latinské – magické štvorce tešia veľkej pozornosti, súborného diela o nich sme sa dočkali len relatívne nedávno [2]. Situáciu vystihol popredný slovenský matematik, Juraj Bosák, v komentári k tomuto dielu: *Kniha predstavuje prvý pokus o monografiu v latinských štvorcach. Vyše dvestoročné čakanie na súborné spracovanie tematiky je pravdepodobne dôsledkom faktu, že seriózne záujem matematikov o túto partiu bol podmienený len pomerne nedávno v súvislosti s objavením hlbších vzťahov*

k iným disciplínam (algebra, geometria, štatistika, teória kódovania), toľko citát. Čo je veľmi cenné, kniha obsahuje aj súpis otvorených problémov v tejto oblasti.

2.2

Niektorých vedcov tematika *magických štvorcov* zaujala natoľko, že jej venovali temer celoživotnú pozornosť. Taký je aj prípad, už spomínaného autora J. Sesiana, ktorého dlhoročné bádanie vyústilo vydaním monografie: *Carrés magiques dans les pays islamiques* [4]. Kniha je vyvrcholením jeho štvrtstoročného bádania vo svete magických štvorcov. Predstavuje zjednotenie množstva článkov a štúdií, ktoré počas 25 rokov publikoval. Je jeho *Opus Magnum* na tému magických štvorcov, ako uvádza Max Lejbovicz, vo svojom mimoriadne priaznivom komentári k prvému vydaniu knihy v roku 2004. Vydanie vyvolalo veľký ohlas a aj ostatné komentáre nešetřili superlatívami. Ukážkou z knihy je magický útvar predstavený na obrázku 1.



Obrázok 1

Zostáva dúfať, že toto dielo bude sprístupnené aj našim čitateľom a dočkáme sa jeho slovenského alebo českého prekladu.

2.3

Čo sa týka samotných konštrukcií, boli zostrojené tzv. multi-magické štvorce. V júni roku 2001 dokonca prvý známy penta-magický štvorec rozmerov 1024×1024 , autori: André Viricel a Christian Boyer. Títo dvaja francúzski matematici ohlásili mesiac predtým, teda v máji 2001, aj skonštruovanie prvého tetra-magického štvorca rozmerov 512×512 . Ale ako sa ukázalo neskôr, nebol ani prvým ba dokonca ani najmenším. Dodatočne sa zistilo, že už v roku 1983 skonštruoval Charles Devimeux tetra-magický štvorec o rozmeroch 256×256 . Ich prvenstvo ohľadne penta-magického štvorca však zostalo neohrozené. Na obrázku č. 2 sú zobrazené 4 rohy tohto historického exempláru. Pozrime sa teraz na jeho vlastnosti:

1. Každé z čísel od 0 po 1048575 sa nachádza vo štvorci práve jedenkrát.

2. Súčet čísiel v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach je rovnaký, teda štvorec je magický a magický súčet $S1 = 536870400$.
3. Súčet štvorcov prvkov v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach je rovnaký a magický súčet
 $S2 = 375299432076800$.
4. Súčet tretích mocnín prvkov v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach je rovnaký, teda štvorec je tri -magický a magický súčet
 $S3 = 295147342229667840000$.
5. Súčet štvrtých mocnín prvkov v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach je rovnaký, teda štvorec je tetra-magický a magický súčet
 $S4 = 247587417561640996243120640$.
6. Súčet piatich mocnín prvkov v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach je rovnaký, teda štvorec je penta-magický a magický súčet
 $S5 = 216345083469423421693932062720000$.

0	733632	419712	...	628863	314943	1048575
866545	395569	745329	...	303246	653006	182030
685538	82978	791138	...	257437	965597	363037
...	...	...	...	...	...	...
685597	83933	790941	...	257634	964642	362978
867086	395982	744590	...	303985	652593	181489
1023	733759	418943	...	629632	314816	1047552

Obrázok 2

Tento matematický výsledok zaujal natoľko, že bol dokonca zaznamenaný do Guinnensovej knihy rekordov pod titulom *Objavenie prvého známeho penta-magického štvorca*. O pár rokov neskôr nasledovalo vylepšenie oboch spomínaných multi-magických štvorcov.

Jún 2003: penta-magický štvorec rozmerov 729×729 , Li Wen, Čína.

Február 2004: tetra-magický štvorec rozmerov 243×243 , Pen Fegchu, Čína.

Konštrukcie týchto zložitých útvarov sú dosiahnuté pomocou počítačovej techniky – pochopiteľne, manuálna konštrukcia je temer nepredstaviteľná.

2.4

Začiatok tretieho tisícročia bol sprevádzaný stále narastajúcou popularitou hry Sudoku. Roky 2005 a 2006 spustili hotové „sudokové tsunami“. Zašlo to až tak ďaleko, že od roku 2006 sú v tejto organizovaná majstrovstvá sveta: 2006 – India, 2007 – Česká republika (Praha), 2008 – India, 2009 – Slovensko (Žilina). Nečudo, že popularita je tak obrovská. Netreba mať špeciálne vedomosti – číslice v riadkoch, stĺpcoch a štvorčekoch sú zrozumiteľné všade na svete.

3. Záver

O latinských, magických štvorcoch existuje pomerne veľké množstvo štúdií s rôznym zameraním. Cieľom tohto príspevku bolo upozorniť okrem iného na moment, keď zo sveta mystiky vstúpili do sveta vedy. Stali sa tak jedným z troch hlavných fenoménov, ktorými arabskí matematici prispeli k rozvoju matematiky.

Venovanie sa kombinatorickým hrám je dôležitejšie, ako si možno uvedomujeme. Predstavujú istý druh intelektuálnej gymnastiky a na ich dôležitosť nás upozorní aj citát jedného z najväčších géniov XX. storočia Alberta Einsteina: *Zdá sa, že podstatnou črtou intelektuálneho myslenia je kombinatorická hra.*

Literatúra

- [1] Dénes J., Kedwell A. D.: *Latin squares and their applications*. Academics, Kiadó, Budapest, 1974.
- [2] Kopský V.: *Neobvyklé štvorce*. VTM číslo 10/1987.
- [3] Semanišinova I., Trenkler M.: *O nadprirodzenej korytnačke, magických štvorcoch a kockách*. Obzory matematiky, fyziky a informatiky 4/2000(29), 21–34.
- [4] Sesiano J.: *Carrés magiques dans les pays islamiques*. Presses polytechniques universitaires romandes, CH-1015, Lausanne, 2004.

Adresa

RNDr. Anna Bálintová, CSc.
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Monastir
Avenue de l' Environnement
5019 Monastir
Tunisie
e-mail: abalintova@seznam.cz

EULERŮV-MACLAURINŮV SUMAČNÍ VZOREC

TEREZA BÁRTLOVÁ

Abstract: The aim of this paper is to explore the history of the Euler-Maclaurin summation formula, its applications and related concepts such as the Bernoulli numbers. It contains a sketch of Euler's original derivation of the summation formula.

1 Úvod

Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec byl objeven už v první polovině 30. let 18. století a i dnes je často využíván v mnoha matematických oborech. Popisuje vztah mezi sčítáním funkčních hodnot nějaké funkce f a jejím integrálem:

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_{a-1}^b f(x)dx + \frac{1}{2}(f(b) - f(a-1)) + \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(b) - f^{(j-1)}(a-1)) + R_m,$$

kde a, b jsou celá čísla, m je přirozené číslo, f je funkce definovaná na intervalu $[a-1, b]$, kde má spojitě derivace až do řádu m a B_i jsou Bernoulliho čísla.

Zbytek R_m je dán rovnicí

$$R_m = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_{a-1}^b \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x)dx,$$

kde $\tilde{B}_m$ je funkce, která vznikne z Bernoulliho polynomu B_m na intervalu $[0, 1]$ tak, že jej periodicky dodefinujeme na celé reálné ose.

Jak uvádí Pengelley v článku [5], kouzlo Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce spočívá především v tom, že zachycuje jemné rozdíly mezi sumou a integrálem a umožňuje nám tak řešit poměrně složité příklady pouze jako jeho jednoduchou aplikaci.

2 Objevitelé sumačního vzorce

Sumační vzorec byl objeven dvěma matematiky, Leonhardem Eulerem a Colinem Maclaurinem. Leonhard Euler se v roce 1730 snažil pokořit basilejský problém, tedy určit přesnou hodnotu součtu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Byl tehdy přesvědčený, že hodnota tohoto součtu je $\frac{\pi^2}{6}$, ale chtěl svůj výsledek ověřit ještě numericky. V roce 1735 se mu to podařilo. Euler objevil sumační vzorec, pomocí kterého vyjádřil součet převrácených druhých mocnin na prvních dvacet desetinných míst. Ve své knize, kterou vydal o dvacet let později a nazval ji *Institutiones Calculi Differentialis*, se zaměřuje právě na vztahy mezi diferenciálním počtem a nekonečnými řadami. Poprvé zde uvádí tvar sumačního vzorce a ve dvou kapitolách této knihy se věnuje odvození sumačního vzorce, jeho nesčetným aplikacím, ale také Bernoulliho číslům (viz článek [5]).

Zhruba ve stejné době objevil sumační vzorec zcela nezávisle na Leonhardu Eulerovi také Colin Maclaurin. Oba matematici odvodili sumační vzorec v podstatě stejným způsobem, ale i přesto že jsou pozorování obou mužů velmi podobná, jsou na sobě navzájem nezávislá. Maclaurinův přístup je o trochu více geometrický, než Eulerův. Colin Maclaurin své výsledky publikoval roku 1742 v knize *A Treatise of Fluxions*. Maclaurin se své práci odvolával na geometrické metody starověkých Řeků a na Archimédovu metodu (viz článek [2]). Ani Euler, ani Maclaurin ve svém tvaru sumačního vzorce nespécifikovali tvar zbytku.

3 Bernoulliho čísla a Bernoulliho polynomy

Bernoulliho čísla byla objevena Jacobem Bernoullim před rokem 1695 (viz článek [6]). Bernoulli našel vzorec pro součet mocnin přirozených čísel

$$S_c(n) = \sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1} + \frac{c \cdot (c-1) \cdot (c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 n^{c-3} + \\ + \frac{c \cdot (c-1) \cdot (c-2) \cdot (c-3) \cdot (c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 n^{c-5} + \dots$$

a odhalil pravidlo, kterým se řídí koeficienty B_i . Tyto konstanty dnes nazýváme Bernoulliho čísly a definujeme je rekurentním předpisem:

$$B_0 = 1, \quad B_{m-1} = -\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m}{k} B_k.$$

Podle předchozího předpisu si může vyjádřit několik prvních hodnot Bernoulliho čísel:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

Bernoulliho polynomy jsou definovány předpisem

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k}.$$

4 Eulerův důkaz sumačního vzorce

Zaměříme-li se na Eulerův postup, kterým dospěl k sumačnímu vzorci, je nutno poukázat i na některé nedostatky v jeho důkazu (viz kniha [3] a článek [5]).

Nejprve budeme uvažovat součty

$$S = F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + \dots + F(n), \\ s = F(0) + F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(n-1),$$

přičemž F je libovolná primitivní funkce k funkci f .

Vypočítáme rozdíl mezi S – s pomocí Taylorovy řady

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}F''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}F'''(x_0) + \dots,$$

přičemž dosadíme za $x = k - 1, x_0 = k$:

$$F(k - 1) = F(k) - F'(k) + \frac{1}{2!}F''(k) - \frac{1}{3!}F'''(k) + \dots,$$

$$F(k) - F(k - 1) = \frac{F'(k)}{1!} - \frac{F''(k)}{2!} + \frac{F'''(k)}{3!} - \dots.$$

Odtud pak vyplývá, že rozdíl $S - s$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$F(n) - F(0) = \sum_{k=1}^n F'(k) - \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n F''(k) + \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n F^{(3)}(k) - \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n F^{(4)}(k) + \dots.$$

Nyní využijeme toho, že $F' = f$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f'(k) - \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f''(k) + \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n f^{(3)}(k) - \dots. \quad (1)$$

Rovnice (1) platí pro libovolnou funkci, nejen pro funkci f . Můžeme tedy místo f psát f', f'' atd. Tím dostaneme rovnice tvaru:

$$\sum_{k=1}^n f^{(i)}(k) = f^{(i-1)}(n) - f^{(i-1)}(0) + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f^{(i+1)}(k) - \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f^{(i+2)}(k) + \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n f^{(i+3)}(k) - \dots,$$

kde $i \geq 1$.

Pomocí získaných vztahů odstraníme sumy na pravé straně rovnice (1) a dostaneme

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x)dx - \alpha(f(n) - f(0)) + \beta(f'(n) - f'(0)) - \gamma(f''(n) - f''(0)) + \delta(f'''(n) - f'''(0)) - \dots, \quad (2)$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ jsou jistá čísla. V následujícím postupu ukážeme, jak Euler našel jejich hodnoty.

Jestliže ve vztahu (2) postupně nahradíme funkci f jejími derivacemi f', f'', f''' atd., získáme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_0^n f(x)dx - \alpha(f(n) - f(0)) + \beta(f'(n) - f'(0)) - \dots \\ - \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f'(k) &= - \frac{1}{2!}(f(n) - f(0)) + \frac{\alpha}{2!}(f'(n) - f'(0)) - \dots \\ \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f''(k) &= \frac{1}{3!}(f'(n) - f'(0)) - \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Uvědomme si, že součet levých stran rovnic je roven integrálu $\int_0^n f(x)dx$ podle rovnice (1). Rovnice tedy sečteme a po úpravě dostaneme

$$0 = \left(-\alpha - \frac{1}{2}\right)(f(n) - f(0)) + \left(\beta + \frac{\alpha}{2!} + \frac{1}{3!}\right)(f'(n) - f'(0)) + \dots,$$

odkud plynou vztahy pro hledané koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$

$$\alpha + \frac{1}{2!} = 0, \quad \beta + \frac{\alpha}{2!} + \frac{1}{3!} = 0, \quad \gamma + \frac{\beta}{2!} + \frac{\alpha}{3!} + \frac{1}{4!} = 0, \dots \quad (3)$$

Vyřešením těchto rovnic zjistíme, že

$$\alpha = \frac{B_1}{1!}, \quad \beta = \frac{B_2}{2!}, \quad \gamma = \frac{B_3}{3!}, \quad \delta = \frac{B_4}{4!}, \dots$$

Nyní známe jednotlivé koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, vrátíme se tedy zpět k naší rovnici (2) a koeficienty do ní dosadíme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_0^n f(x)dx - \frac{B_1}{1!}(f(n) - f(0)) + \frac{B_2}{2!}(f'(n) - f'(0)) - \\ &\quad - \frac{B_3}{3!}(f''(n) - f''(0)) + \frac{B_4}{4!}(f^{(3)}(n) - f^{(3)}(0)) - \dots \end{aligned}$$

Euler pracoval s nekonečným součtem na pravé straně rovnosti. Tato Eulerova úvaha byla však chybná, protože řada může být divergentní. Proto také dnešní tvar Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce obsahuje pouze konečné součty.

Euler postupoval při dokazování sumačního vzorce čistě analyticky. Maclaurin se naopak ve svém důkazu opíral především o geometrické souvislosti a velmi často se odvolával na obrázek znázorňující danou situaci. Obě odvození sumačního vzorce, jak podle Maclaurina tak podle Eulera, využívají rozvoje do Taylorovy řady. Zásadní odlišnost obou důkazů je v použití matematického notace – Euler používal leibnizovskou notaci, na kterou jsme dnes zvyklí, zatímco Maclaurin používal newtonovskou notaci, tzn. „fluxe“ a „fluenty“. Přehledné srovnání obou důkazů poskytuje článek [4].

5 Aplikace Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce

Oba objevitelé věnovali také velkou pozornost počítání konkrétních příkladů pomocí sumačního vzorce. Euler jej např. použil na funkci $f(x) = x^{m-1}$ a odvodil tak vzorec pro součet mocnin přirozených čísel

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \dots + n^m,$$

ke kterému již dříve bez důkazu dospěl Bernoulli.

Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec je také mocným nástrojem na výpočet částečných součtů harmonické řady

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

a s ní spojené Eulerovy konstanty γ . Dosadíme-li do sumačního vzorce funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, dostaneme přibližný vzorec pro částečné součty harmonické řady

$$H_n \doteq \ln n + \gamma + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j} \cdot \frac{1}{n^j}.$$

Pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce můžeme také získat přesnou hodnotu součtu převrácených mocnin přirozených čísel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots + \frac{1}{n^{2k}},$$

nebo nalézt přibližnou hodnotu čísla π .

Aplikujeme-li Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec na funkci $f(x) = \ln x$, dostaneme vztah pro přibližný výpočet součtu

$$\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \dots + \ln n = \ln n!.$$

Z něj pak můžeme odvodit známý Stirlingův vzorec pro aproximaci faktoriálu

$$k! \approx \frac{\sqrt{2\pi k} k^k}{e^k}.$$

6 Závěr

Zájemce o důkaz Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce a jeho aplikace odkazují na bakalářskou práci [1], kterou jsem sepsala pod vedením RNDr. Antonína Slavíka, Ph.D.

Literatura

- [1] Bártlová T.: *Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec a jeho aplikace*. Bakalářská práce, MFF UK, Praha, 2010.
- [2] Grabiner J.: *Was Newton's Calculus a Dead End? The Continental Influence of Maclaurin's Treatise of Fluxions*. The American Mathematical Monthly 104(1997), 393–410.
- [3] Hairer E., Wanner G.: *Analysis by Its History*, Springer, 2008.
- [4] Mills S.: *The Independent Derivations by Leonhard Euler and Colin MacLaurin of the Euler-MacLaurin Summation Formula*. Archive for History of Exact Sciences 33(1985), 1–13.

- [5] Pengelley D. J.: *Dances between continuous and discrete: Euler's summation formula*. In Robert Bradley and Ed Sandifer (eds.), *Proceedings, Euler 2K+2 Conference* (Rumford, Maine, 2002), Euler Society, 2003.
- [6] Porubský Š.: *Matyáš Lerch's book „Bernoulli polynoms“*. *Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum* 7(2003), 119–141.

Adresa

Tereza Bártlová
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: tereza.bartlova@seznam.cz

METODIKA NĚKTERÝCH PRACÍ Z HISTORIE MATEMATIKY

JINDŘICH BEČVÁŘ, MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Abstract: The main aim of the paper is to give an overview of methodical concepts, methods, tools and processes which can be used for writing monographs on the life and work of some mathematician or monographs analysing the historical development of some mathematical discipline.

1 Úvod

Tento příspěvek volně navazuje na předchozí články *Práce historika matematiky* [1] a *Interpretace matematických výsledků našich předků* [2], které byly otištěny ve sbornících předchozích dvou konferencí. I jeho cílem je metodická pomoc začínajícím badatelům, zejména doktorandům oboru *Obecné otázky matematiky (a informatiky)*. Doufáme, že může být užitečný při sepisování prací, které budou buď zcela, nebo alespoň zčásti věnovány následujícím dvěma tématům:

- **Život a dílo nějakého matematika** (práce zpracovaná v duchu monografií edice *Dějiny matematiky*).
- **Vývoj nějaké matematické disciplíny**, širší či užší odborné problematiky, problému nebo okruhu problémů apod., v určitém, více nebo méně dlouhém časovém období.¹

Druhé téma se přitom téměř jistě objeví (a mnohdy i vícekrát) v komplexních biografiích věnovaných osobnostem. Je totiž nezbytné, aby byly při zpracování života a díla konkrétního matematika podrobně popsány a zhodnoceny právě jeho matematické výsledky.

Metodické poznámky k prvnímu tématu vycházejí z bohatých zkušeností získávaných postupně od osmdesátých let 20. století při zpracovávání monografií věnovaných Eduardu Weyrovi, Janu Vilému Pexiderovi, Františku Josefu Studničkoví, Karlu Rychlíkovi, Vladimíru Kořínkovi a Ladislavu Svante Riegrovi, které vyšly v edici *Dějiny matematiky* (svazky 2, 5, 10, 22, 27, 36, 38), Josefu Smolíkoví [5], při sepisování monografií věnovaných zakladatelům Jednoty českých matematiků, překladatelům Eukleidových *Základů*, české matematické komunitě a českým kořenům bulharské matematiky, resp. při přípravě monografie o Emilu Weyrovi a jeho studijním pobytu v Itálii nebo při práci na Jarníkových matematických zápiscích z univerzity v Göttingen (edice *Dějiny matematiky*, svazky 13, 20, 28, 34, 40, 43). Poznamenejme, že do celkového vývoje našeho matematicko-historického bádání tří uplynulých desetiletí byla aktivita související s tvorbou biografických monografií zařazena v poměrně obsáhlé stati *Historie matematiky již potřícáté!* [3].

Poznámky ke druhému tématu jsou shromážděny na základě poznatků získaných při sepisování celé řady prací o vývoji matematiky, zejména monografií *Matematika ve středověké Evropě*, *Matematika ve starověku – Egypt a Mezopotámie*, *Z historie lineární algebry*, ale i článků *Algebra v 16. a 17. století*, *Hrdinský věk řecké matematiky I, II*

¹ Obě témata jsou formulována pro matematiku. Metodické úvahy, které následují, však mají v řadě směrů univerzální platnost. Mohou být užitečné i při sepisování řady prací týkajících se dějin vědy obecně.

(edice Dějiny matematiky, svazky 19, 23, 35, resp. svazky 12, 1 a 7) a při vedení několika doktorských disertačních prací, které byly zaměřeny hlavně na životy a díla českých matematiků.

Základní a zcela obecný metodický pokyn. Rozvažte, jakou práci chcete sepsat a co má být jejím cílem. Pečlivě si prohlédněte větší počet publikací podobného charakteru, naše i zahraniční, kriticky je zhodnoťte, rozhodněte, co je pro vás inspirativní, poučte se ze struktury těchto prací. Pečlivě načrtněte osnovu svého připravovaného spisu, dobře promyslete postup prací, abyste pracovali efektivně, spolehlivě a přesně, abyste se zbytečně nevraceli k materiálům, které jste již jednou prošli, prostudovali a zpracovali. Pro začátečníka je to poměrně těžký úkol; čím lépe a precizněji si však tuto etapu promyslí, připraví a zvládne, tím lépe a rychleji se mu bude studovat a zejména psát.

Materiálů, které lze využít k takovéto základní inspiraci, je celá řada. Již jsme zmínili edici Dějiny matematiky, která je velmi úzce spjata s doktorským studiem oboru *Obecné otázky matematiky (a informatiky)*.² Soustřeďuje téměř dvacetileté zkušenosti naší práce v dějinách matematiky. Více než čtyřicet svazků této edice může být velkou inspirací pro další autory, a to jak po stránce obsahové, tak po stránce metodické.

Existuje však řada dalších monografií, studií, článků, či dokonce popularizačních prací, z nichž můžeme čerpat poznatky nejrůznějšího charakteru, metodické a inspirační podněty. Připomeňme např. edici *Osobnosti*, kterou připravuje Nadace Universitas Masarykiana, z níž nám budou jistě nejbližší knihy *Otakar Borůvka* [12], *Kurt Gödel* [13] či *Vladimír Ůlehlá* [16], dále publikace věnované M. Zlámalovi [10], V. Jarníkovi [14], V. Doležkovi [17] a G. Choquetovi [11] nebo tzv. *bílé knihy* vydávané v osmdesátých letech minulého století Jednotou československých matematiků a fyziků (Bolzano, Einstein, Hronec, Záviška atd.), edici *Portréty* vydávanou nakladatelstvím Orbis (např. Newton) apod. Pojetí těchto knih se však výrazně odlišuje od koncepce komplexních monografií edice Dějiny matematiky. Určitou inspiraci mohou poskytnout i jednotlivé svazky edice *Velké postavy vědeckého nebe*, které vydalo v nedávné době nakladatelství Prometheus. Jejich charakter je však především popularizační. Zmiňme ještě slovenskou edici *Svet vedy*, v níž se objevily knihy věnované Š. Schwarzovi a J. Hroncovi.

Rozsáhlou edicí, v níž vyšla řada kvalitních titulů věnovaných světovým vědcům, byla *Serijska Naučno-bibliografičeskaja literatura* vydávaná sovětským nakladatelstvím Nauka. Z dnešní mladé generace však již rusky čte málokdo. Vřele doporučit lze i edici *Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner* (Gauss, Newton, Lobačevski, Wiener, Klein, Euler, Stevin, Cantor, Eukleides, Ries atd.). Z dalších zahraničních publikací je možno připomenout monografie z edice *Vita mathematica* (Nevanlinna, Grassmann, Eukleides, Galois, Bessel, Wiener, Berkeley, Riemann atd.).

Inspiraci týkající se vývoje matematiky jako takové je rozumné hledat jednak v encyklopediích, větších učebnicích, obecných a speciálních monografiích věnovaných matematice (nebo příslušné užší disciplíně) a její historii, jednak v časopiseckých článcích. Z časopisů lze doporučit zejména *Archive for History of Exact Sciences*, *Archives internationales d'histoire des sciences*, *Historia mathematica*, *ISIS*, *Istoriko-matematičeskije issledovanija*, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, *N.T.M.*, *Annals of Science* atd. – více viz [1]. V edici Dějiny matematiky vyšlo několik svazků

² O vzniku a vývoji této edice, charakteru jejích svazků atd. viz [4].

(kromě již výše uvedených), které zcela spadají do druhého výše vymezeného tématu; připomeňme tyto tituly: P. Šarmanová, Š. Schwabik: *Malý průvodce historií integrálu*, P. Šišma: *Teorie grafů 1736–1963*, K. Mačák: *Počátky počtu pravděpodobnosti*, J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*, K. Lepka: *Historie Fermatových koeficientů*, K. Mačák: *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938*, A. Slavík: *Product Integration, its History and Applications*, L. Lomtatidze: *Historický vývoj pojmu křivka*, V. Chmelíková: *Zlatý řez nejen v matematice* (svazky 6, 8, 9, 12, 14, 26, 29, 30, 39). Několik rozsáhlejších článků týkajících se vývoje určité problematiky je otištěno ve sbornících této edice (Š. Schwabik; M. Hykšová, J. Šišma, I. Saxl, A. Slavík; H. Durnová, Š. Bilová; V. Svobodová; J. Čížmár, I. Saxl a L. Ilucová, D. Trkovská, svazky 3, 24, 25, 32, 33).

Vysoce uznávaná je rozsáhlá německá edice věnovaná historii exaktních a přírodních věd a osobnostem světové vědy, která vychází pod názvem *Algorismus. Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften*; v současné době má téměř osmdesát svazků. Vydává ji Menso Folkerts, světově uznávaný historik vědy.

Z hlediska metodiky je vhodné odkázat čtenáře na zajímavou knížku Umberta Eca (*1932), italského literárního teoretika, estetika a spisovatele, nazvanou *Jak napsat diplomovou práci* [9], v níž jsou diskutovány četné zkušenosti týkající se zadávání a sepisování diplomových prací; mnohé z nich lze rovněž úspěšně využít při práci na disertacích z dějin matematiky. Velmi cenné myšlenky a podněty pro studium vývoje vědy (a tedy i matematiky) jsou v nedávno vydané knize Daniela Špeldy *Proměny historiografie vědy* [15].

2 Monografie věnované osobnostem

Cílem první části tohoto článku je shromáždění nejdůležitějších metodických pokynů pro přípravu komplexně pojatých biografických monografií v duchu výše uvedených svazků edice *Dějiny matematiky*. Tvorba takovýchto monografií podrobně mapujících životy a díla významných českých matematiků, kteří ovlivnili vývoj matematického bádání v českých zemích, některými svými výsledky se zařadili do světové matematiky a výrazným způsobem zasáhli do trendů ve vyučování matematice na našich středních i vysokých školách, byla započata na MFF UK již v osmdesátých letech 20. století. Širším cílem těchto monografií je mapování rozvoje vědecké práce v matematice, vývoje vyučování matematice a obecněji života české matematické komunity ve druhé polovině 19. století a v první polovině 20. století (sjednocující monografií je práce [8]). Právě k tomuto cíli směřuje poměrně obsáhlé studium veškeré vědecké, odborné, pedagogické a organizační práce vybraných výrazných osobností – matematiků, včetně podrobného poznání jejich životních osudů, jejich snah a dalších aktivit. Mnohé práce publikované v edici *Dějiny matematiky* navíc dobře ukazují, že lze napsat nejen odbornou, ale v řadě partií i poměrně čtivou práci.³

Monografie věnovaná zvolené osobnosti X by se měla skládat z následujících větších celků, které vytvoří její základní, rámcovou strukturu:

³ Mnohé články věnované významným osobnostem bývají často sepsány poměrně narychlo, někdy z povinnosti jako jubilejní články či nekrology. Bohužel se stává, že jsou jen přepisovány a mírně modernizovány dřívější texty. Staré chyby a nedopatření jsou tak mnohdy přenášeny do nových článků, některé skutečnosti zůstávají deformovány, jiné zatemněny. Jen málokdy je provedena hlubší analýza, byť jen některé dílčí odborné problematiky. Širší faktografie nejsou vytvářeny vůbec.

1. Životní osudy.
2. Vědecká a odborná činnost.
3. Faktografické přílohy.
4. Obrazová příloha.
5. Resumé.

Faktografické přílohy by měly obsahovat (pokud možno) úplný *seznam prací* zvolené osoby X (monografií, učebnic, vědeckých a odborných prací, metodických a popularizačních článků, nepublikovaných rukopisů atd.) doplněný přesnými odkazy na referativní časopisy, na publikované recenze, na webové stránky, kde jsou tyto práce vystaveny apod., *soupis všech publikovaných recenzí* (případně i nepublikovaných posudků) napsaných osobou X, *přehled pedagogické činnosti*, *seznam vedených a posuzovaných doktorských prací*, *seznam dochované korespondence* s uvedením míst jejího uložení apod.⁴ Při vyhledávání informací a údajů pro faktografické přílohy v archivech a knihovnách je nutno postupovat systematicky, velmi pečlivě a vyvinout maximální snahu o úplnost.

Tato partie by měla být zpracovávána přednostně, neboť shromažďuje materiál, z něhož se bude vycházet při sepisování ostatních kapitol připravované práce – životní osudy, popis a hodnocení vědecké, odborné, pedagogické a veškeré další činnosti zvolené osoby X. Během celé doby, po níž na tématu pracujeme, je třeba informace pro faktografické přílohy soustavně doplňovat. Cílem této části práce je totiž podat co nejúplnější přehled všech aktivit osoby X.

V matematických kruzích nebývá zvykem sestavovat podrobnou faktografii ve výše uvedeném smyslu; většinou se vystačí se soupisem publikací (mnohdy neúplným), který někdy dokonce zcela chybí. Prakticky nikdy nebývá sepsán přehled pedagogického působení, soupis vedených a oponentovaných doktorských disertačních prací, přehled dochované korespondence apod. Faktografie jsou v matematických kruzích málo ceněné, neboť jejich sestavení nevyžaduje matematickou erudici.

Vytvoření podrobné faktografie je časově náročné, neboť je třeba shromáždit, zpracovat a analyzovat rozsáhlý, různorodý a poměrně bohatý materiál. Lze ji však později dobře využít k následnému komplexnímu hodnocení zkoumané osobnosti, neboť máme k dispozici podrobný přehled všech jejích aktivit (vědeckých, odborných, pedagogických a dalších). K danému časovému okamžiku pak je možno snadno zjistit, na jakých tématech osoba X pracovala, co, kde a v jakém rozsahu vyučovala, zda a jak souviselo zaměření vědecké práce s výukou, zda a kdy byly výsledky vědecké práce prezentovány na konferencích, seminářích atd. Lze poměrně lehce usoudit, zda byla nebo nebyla zpracovávána moderní problematika, zda bylo rozpracováno současně více různých témat apod. Dále lze zjistit, jaké doktorské práce osoba X zadávala, oponentovala, zda výsledky doktorandů využívala, nebo zda naopak doktorandi rozvíjeli myšlenky svého učitele. Lze také vnímat charakter veškerých aktivit osoby X; zda převažovala vědecká či pedagogická činnost, jak vypadala její širší společenská, politická, národnostní a kulturní aktivita, zda se do odborných aktivit promítaly rodinné či společenské problémy apod. Podrobnou faktografií je možno využít i při hlubším studiu dílčího problému zdánlivě nesouvisejícího se studovanou osobností.

⁴ Je pochopitelné, že se faktografické přílohy různých osob mohou značně lišit svým rozsahem i charakterem – souvisí to s odlišným zaměřením práce a aktivit jednotlivých osobností a s množstvím dochovaných materiálů.

Sestavujeme-li seznam publikací, vycházíme, máme-li štěstí, z dříve publikovaného soupisu prací v nekrologu nebo jubilejním článku; ten prověřujeme, doplňujeme a upřesňujeme. Pokud nemáme k dispozici starší soupis prací, opíráme se při prvním pátrání o údaje v biografických a bibliografických slovnících, o referativní časopisy, o jejich elektronické verze, v nichž je zabudován systém vyhledávání. Další informace čerpáme z katalogů a databází knihoven, výročních zpráv středních škol, spolků a společností. Tato práce někdy představuje přímo detektivní pátrání. Zejména tehdy, rozhodneme-li se vyhledávat i články publikované v denním tisku nebo v popularizačních časopisech. Pak je třeba se obrnit trpělivostí; nejprve vytipovat hlavní či regionální periodika, v nichž by mohly být takové články vytištěny, a pak prolistovat stovky a tisíce stránek s nadějí na pozitivní výsledek. Články, které takto objevíme, však mohou objasnit popularizační, ale i politické, sociální či kulturní aktivity a názory zkoumané osobnosti. Podobně sestavujeme soupis recenzí.

Sepisujeme-li seznam pedagogického působení a přehled oponovaných doktorských prací, je třeba pečlivě projít seznamy přednášek na příslušné univerzitě, resp. technice, někdy katalogy posluchačů, knihy rigoros, archivní fondy jednotlivých škol (posudky na doktorské práce, archivované práce, zápisy ze zasedání profesorských sborů apod.), výroční zprávy středních škol, školní kroniky apod. Potřebné informace však můžeme najít i v nekrologu, v osobních pamětech nebo v pamětech či vzpomínkách kolegů, žáků, přátel apod.

Situace s korespondencí je komplikovanější. Nejčastěji začínáme pátrat v osobní pozůstalosti, která může být v soukromém vlastnictví nebo v archivu či několika archivech. Další korespondence často bývá – pokud vůbec existuje – rozptýlena na nejrůznějších místech ve fondech rodinných příslušníků, kolegů, žáků, přátel, spolků, organizací apod. Někdy se podaří vyhledat nebo objevit větší soubor dopisů; ten je pak cenným materiálem hlavně pro biografickou část monografie. Velmi často je však objem zachované korespondence nepatrný.

Faktografické přílohy nejsou jen samoúčelným prodloužením monografie; stojí na počátku seriózního hodnocení života a díla osoby X. Opomineme-li sestavení kvalitní faktografie, zbavujeme se tak možnosti získat kompletní obraz.

Obrazové přílohy výrazně dokreslují atmosféru doby. Mohou obsahovat *podobizny* či *fotografie* osoby X, její rodiny, kopie zajímavých *archivních materiálů* (vysvědčení, zápisy v matrikách a v katalozích studentů, korespondence, rukopisy apod.), *titulní listy* učebnic či nejvýznamnějších prací. Autor připravované práce by měl pamatovat na obrazové přílohy během celé doby, kterou věnuje danému tématu, a pořízovat si kvalitní kopie či fotografie všech materiálů, které by mohl pro obrazovou přílohu použít. Měl by je tedy shromažďovat současně s informacemi pro faktografické přílohy. Obsah obrazových příloh výrazně závisí na materiálech, které se dochovaly a podařilo se je najít, a rovněž na typu osoby X. Přílohy se tedy mohou podstatně lišit od jedné monografie ke druhé. Autor by měl ve své práci uvést soupis všech obrazových příloh s udáním místa uložení originálů. Při shromažďování a přípravě obrazové přílohy je třeba využívat nejmodernější technologie (kopírování, skenování, fotografování, počítačové zpracovávání obrázků apod.). Viz např. [18].

Informace pro faktografické přílohy a materiály pro obrazové přílohy je nutno vyhledávat **v knihovnách a archivech**, mnohé mohou být i **v soukromém vlastnictví**. Ze získaných materiálů je třeba pozorně a pečlivě čerpat veškeré informace pro kapitulu o životních osudech osoby X a průběžně je třídit, pořádat, analyzovat, vyhodnocovat

a soustavně kompletovat. Při sestavování seznamu publikací osoby X je zapotřebí vyhledat pokud možno veškeré publikace, upřesnit jejich citace a případně si pořizovat kopie těch, s nimiž budeme muset později intenzivně pracovat. Dále je užitečné shromážďovat nejrozličnější bibliografické odkazy, primární i sekundární literaturu vztahující se ke zpracovávanému tématu. Veškeré shromážděné poznatky je třeba utřídit ještě před začátkem práce na dva hlavní tematické celky, které jsou věnovány jednak životu osoby X, jednak jeho vědeckým, odborným, pedagogickým, organizačním a společenským aktivitám, a tyto dva celky dále podrobněji tematicky nebo časově rozdělit a připravit pro další zpracovávání. Velmi důležité je zaznamenávat si i veškeré negativní výsledky bádání (např. které materiály byly prostudovány bez jakéhokoli výsledku).

První kapitola může být nazvána **Životní osudy osoby X**. Podrobné zpracování běhu života osoby X je nutno sepsat na základě informací čerpaných z materiálů, které byly vyhledány v archivech, knihovnách, případně získány od příbuzných, známých apod. Někdy je třeba nahlédnout v příslušném archivu do fondů středních či vysokých škol, vyhledat nejrozličnější materiály a paměti kolegů, současníků, rodinných příslušníků apod. Životní osudy je vhodné uvádět v souvislostech s vědeckou, odbornou i pedagogickou aktivitou osoby X; tomu výrazně napomáhá již zpracovaný seznam publikací, přehled pedagogické činnosti a další faktografické přílohy. Je zajímavé upozornit na to, v jaké životní situaci napsala osoba X své nejdůležitější práce, zda byly spjaté s jejím tehdejší pedagogickým působením (základní a výběrová výuka) apod.

Obsáhlou partii **Vědecká a odborná činnost osoby X** je mnohdy vhodné tematicky rozčlenit. Podle charakteru veškerých aktivit osoby X lze v jednotlivých kapitolách, případně podkapitolách, věnovat pozornost *vědecké práci*, tj. původním matematickým výsledkům (tuto partii lze dále členit podle oborů, disciplín, problémů apod.), *další odborné činnosti* (redakční práce, recenze, posudky, projekty, patenty apod.), *učebnicím* (pro vysoké školy, střední školy apod.), *pedagogickým aktivitám* (role přednášejícího, učitele, inspektora, zkušebního komisaře, školitele, oponenta diplomových, doktorských či disertačních prací apod.), *organizačním a společenským aktivitám* (role ve vědeckých komunitách), *popularizačním aktivitám* apod. Při zpracovávání této partie je třeba opět vyjít z úplného seznamu publikací osoby X, roztrždit veškeré práce podle jejich typu a obsahu do jednotlivých kategorií (vědecké práce, učebnice, práce didaktické, metodické, vzdělávací, popularizační apod.), postupně charakterizovat jejich obsah, zhodnotit je z hlediska doby, v níž vznikly, ale i z hlediska současnosti, zařadit je do kontextu vývoje v našem regionu, v Evropě, případně ve světě. V pasážích věnovaných ostatním aktivitám by měly být popsány ty činnosti, které není možno přirozeným způsobem chápat jako odbornou práci v matematice a které nestačí připomenout pouze v biografické části publikace. Metodice zpracovávání a hodnocení vědecké práce se budeme věnovat v další části tohoto článku.

Biografické monografie by měly být uzavřeny poměrně obsažným cizojazyčným **resumé** (většinou anglickým), které bude stručně, ale výstižně charakterizovat obsah jednotlivých částí knihy. Původně jsme se domnívali, že práce věnované českým matematikům více či méně regionálního charakteru nemohou být pro zahraničí zajímavé. Řada našich zkušeností s prezentacemi některých knih na mezinárodním poli však v poslední době přispěla k zásadní změně našich názorů. Zahraniční badatelé totiž mají překvapivě velký zájem nejen o témata našich prací, ale i o metodiku, která v nich byla použita. I z tohoto důvodu bylo o biografických monografiích edice Dějiny matematiky referováno v zahraničí (viz např. [6], [7]). Poznamenejme ještě, že se v poslední době

pozornost (v evropském i světovém měřítku) výrazně přesunuje od postav světového významu, které vybočují natolik, že vůbec necharakterizují svoji dobu (např. Descartes, Kepler, Grassmann apod.), k vědcům národního či regionálního významu (např. Caramuel⁵).

Zdůrazněme ještě, že se úhly pohledu a hodnocení osoby X obvykle mění již za jejího života, další názory se pak objevují v následujících desetiletích či stoletích. V monografii je nutno podrobně popsat a analyzovat příčiny takovýchto změn hodnocení v souvislosti s dalším vývojem vědy, s postupnými změnami chápání vědecké, odborné i pedagogické práce, s proměnou společenské atmosféry, případně i v souvislosti s nově objevenými materiály apod. Dřívější hodnocení je nutno upřesnit, opravit, nebo zcela změnit, nalézt další aspekty jednotlivých aktivit osoby X, jiné úhly pohledu apod. Prezentovaná stanoviska je třeba pečlivě zdůvodnit, podložit je pádnými argumenty, objevenými archivními prameny, nalezenými souvislostmi, vědeckými pracemi žáků, následovníků apod.

Takto koncipované biografické monografie přinášejí poměrně přesný pohled na životní osudy a dílo jednotlivce, navozují však i řadu dalších otázek. Komplexní pojetí monografie (zejména rozsáhlé, podrobné a pečlivě sestavené faktografické přílohy) umožňují dalším badatelům hledat nové interpretace, nové pohledy, např. v rámci celkového hodnocení vědecké práce ve zvolené disciplíně, v daném období, v daném regionu apod.

3 Práce věnované vývoji matematiky

Pro sepisování podrobného pojednání o vývoji nějaké matematické disciplíny, ať už se jedná o širší či užší téma (které může, ale nemusí být součástí biografické monografie), je třeba mít určité matematické znalosti. Pokud chybí, je nutno je během práce na tématu načerpat studiem příslušných partií vhodných učebnic nebo monografií. Takovéto studium nelze odkládat, musí se s ním začít hned na samém počátku celé práce. Co nejdříve je třeba se seznámit se základními matematickými pojmy a výsledky, ty jsou totiž nutným předpokladem hlubšího pochopení daného tématu. Poznamenejme, že historik matematiky nemusí studované problematice rozumět do všech detailů, nemusí (a mnohdy ani nemůže) znát důkazy matematických tvrzení, které spadají do oblastí, o nichž svou práci píše.⁶ Musí však chápat celkový smysl dané teorie, význam jejích výsledků, musí vnímat širší souvislosti, vztah k jiným disciplínám atd. Při hodnocení odborných aktivit zvolené osobnosti je nejtěžší partií právě část věnovaná jejím matematickým výsledkům.

Situace je velmi často značně komplikovaná tím, že matematika je dnes podstatně odlišná od matematiky doby více nebo méně vzdálené. Některé matematické disciplíny více či méně odumřely, dnes se již nepěstují, jiné se naopak bouřlivě rozvíjejí, mnohé oblasti matematiky se několikrát zcela zásadně modernizovaly, přetvořily a zobecnily, byly přeformulovány do moderní řeči, která se výrazně liší od té starší, v níž se musíme orientovat. Při sepisování statí o vývoji matematických výsledků a myšlenek je zcela nezbytné se vyrovnat s postupnými změnami a proměnami pojmů, termínů a symbolů,

⁵ V říjnu roku 2006 se v Praze a Hradci Králové konala velká konference u příležitosti 400. výročí narození Juana Caramuela z Lobkovic (1606–1682).

⁶ Nejkrávilavějšími příklady jsou zejména rozsáhlý důkaz Feitovy-Thompsonovy věty o řešitelnosti každé konečné grupy lichého řádu, důkaz Velké Fermatovy věty, důkaz tvrzení o čtyřech barvách, důkazy spadající do teorie popisu jednoduchých grup atd.

s překlady, interpretacemi a modernizacemi starších výsledků atd. (viz [2]). Matematické výsledky doby minulé je třeba pochopit v kontextu *tehdejší matematiky*, vyložit je v pojmech a symbolech *dnešní matematiky*, ukázat jejich původní i současný význam.

Vhodným počátkem k získávání potřebného matematického povědomí o daném tématu může být studium vybraných hesel v moderním matematickém slovníku nebo encyklopedii; pak lze přejít ke starším slovníkům a encyklopediím (pokud takové jsou) z doby vzniku výsledků, jimiž se zabýváme. Velmi užitečnou službu též poskytnou staré učebnice nebo monografie, které se danou problematikou zabývají.⁷ V nich se seznámíme s pojmy i tvrzeními, s nimiž se setkáváme při studiu původních prací. Současně je nezbytné seznámit se v hrubých rysech s vývojem příslušné oblasti, pokud je popsán v nějaké větší monografii z dějin matematiky. Po takovémto širším seznámení s tématem je vhodné vyhledat časopisecké články, které o vývoji této problematiky podrobněji pojednávají. Všechny tyto prameny jsou tzv. *sekundární*. Pro první seznámení s tématem jsou však užitečné. Musíme je studovat s porozuměním, i zde se vyplatí pečlivost a důslednost.

Po této přípravě je možno se pustit do vlastního studia souboru prací (ten tvoří tzv. *primární zdroje* neboli *primární prameny*), které jsou vlastním tématem naší práce. Úspěšně lze přitom využít referativní časopisy, resp. odpovídající elektronické databáze, v nichž jsou často stručně popsány hlavní výsledky a někdy též ukázány souvislosti s dalšími pracemi. Současně je třeba se seznámit se stavem studované disciplíny na počátku časového intervalu, kterým se budeme zabývat (výsledky předchůdců), neboť je nutno objevit, co nového přinesl soubor prací, kterým se zabýváme. Ve stejném smyslu je zapotřebí se věnovat pracím současníků i následovníků; je důležité ukázat, na které myšlenky a výsledky zkoumaného souboru prací bylo navazováno a v jakém smyslu, zda úspěšně či neúspěšně, které výsledky byly nosné a které nikoli. Ke zjišťování návaznosti jednotlivých prací je někdy možno vytěžít užitečné informace z jejich úvodů a závěrů, a zejména z citované literatury.⁸ Hovoříme o zařazení do celkového kontextu vývoje.

Souvislosti a návaznosti jednotlivých prací lze velmi dobře znázornit na tzv. *grafu*. Jednotlivé práce očíslováme, resp. označíme nějakými symboly a vyznačíme na papíře zhruba tak, aby starší práce byly (ve vrstvách) vždy nad novějšími. Šípkami lze naznačit, která práce na kterou navazuje, čárkovanými, resp. čerchovanými čarami, případně vlnovkami lze naznačovat jiné vztahy. Získaný graf lze postupně doplňovat o další práce a další souvislosti. Různými barvami lze znázorňovat články, učebnice, monografie apod.; barvy lze však úspěšně využívat i dalšími způsoby. Souvislé komponenty vytvořeného grafu budou představovat práce, které spolu nějak souvisejí, izolované body naopak práce, které jsou zcela singulární. Zpracování získaných informací v grafu je názorné a silně inspirující. Přemýšlení nad takovýmto grafem nás často motivuje k zajímavým úvahám o vývoji dané problematiky, přicházející nápady je nutno velmi pečlivě a zodpovědně prověřovat, abychom neprezentovali lehkomyšlné nepodložené fantazie, či přímo omyly. Je třeba se naučit klást rozumné otázky a pokoušet se hledat odpovědi.

Poznamenejme ještě, že základní myšlenky pracovní metody je možno vypořádat při studiu obdobně koncipovaných prací, při sledování práce zkušenějších kolegů; dotvořit si ji však musí každý sám podle své natury, podle svého pracovního naladění.

⁷ Četné zdroje pro naši práci jsou uvedeny v [1].

⁸ Ve starší literatuře bývala užitá literatura citována v poznámkách pod čarou, v ještě starší se většinou necitovalo vůbec nebo jen velmi málo, obvykle však nepřesně a neúplně.

Při sepisování pojednání o vývoji určité disciplíny, resp. podrobného hodnocení významu nějakého souboru prací je nezbytné zachovávat kritický přístup, získané informace pečlivě prověřovat a porovnávat (občas se setkáváme i se zcela protichůdnými informacemi), intenzivně dohledávat další a další hodnocení, odlišovat podstatné a nepodstatné, snažit se o nové pohledy, nalézat zajímavé souvislosti, objevovat návaznosti prací, výstižně popisovat vývoj pojmů a výsledků, zrod problémů a historii jejich řešení atd.

Poznamenejme, že kvalitní práce z jakéhokoli oboru, tedy i z dějin matematiky, musí obsahovat správné a netriviální původní výsledky, musí prokazovat značný intelektuální vklad, musí být napsána kultivovaně, musí být jasně vidět, že do ní bylo vloženo nezanedbatelné množství práce. Musí být doplněna odpovídajícím seznamem literatury, který obsahuje všechny tituly, jež byly při sepisování práce použity, a žádné jiné. Kvalita práce, poctivý a seriózní postup se velmi často pozná právě podle seznamu publikací – zda nechybí některé ze základních děl, která měla být využita, zda jsou citace kompletní, zda jsou řádně a správně v textu uvedeny všechny důležité odkazy.

4 Závěr

Historie matematiky je výrazně mezioborovou disciplínou. Práce v tomto oboru totiž vyžaduje jak dobré porozumění matematice a její historii, tak široké znalosti z obecné historie, z pomocných věd historických, z historie vyučování matematice, ale velmi často i z astronomie, fyziky apod. Kvalitní pojednání z historie matematiky umožňují nejen soustavné a hlubší poznávání vývoje matematiky, které je užitečné pro široké vidění vztahů a souvislostí, ale dávají i řadu podnětů pro vlastní matematické bádání. Myšlenky vynikajících matematiků doby minulé mohou být totiž dnes v novém kontextu znovu využity, mohou inspirovat současné tvůrčí matematiky k novým směrům výzkumu.

Dobrá znalost vývoje matematiky přináší též četné možnosti popularizace matematiky a poskytuje pestré a nápadité motivace pro výuku matematiky na středních i vysokých školách.

Literatura

- [1] Bečvář J., Bečvářová M.: *Práce historika matematiky*. 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008, Matfyzpress, Praha, 2008, 73–90.
- [2] Bečvář J.: *Interpretace matematických výsledků našich předků*. 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009, Matfyzpress, Praha, 2009, 59–86.
- [3] Bečvář J.: *Historie matematiky již potřicáté!* 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009, Matfyzpress, Praha, 2009, 9–17.
- [4] Bečvář J.: *Edice Dějiny matematiky*. Sjezdový sborník, Jednota českých matematiků a fyziků, Lázně Bohdaneč, 2010, 95–103.
- [5] Bečvářová M.: *Josef Smolík (1832–1915)*. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007, 254 stran, xxiii stran obrazových příloh.
- [6] Bečvářová M.: *Czech Project in History of Mathematics (Biographical Monographs. Evaluation of Scientific and Pedagogical Work)*. N. T. M. 12(2004), 40–48.

- [7] Bečvářová M.: *Biographical Monographs – Evaluation of Scientific and Pedagogical Work*. In Zigman P. (Hg.): *Die biographische Spur in der Kultur- und Wissenschaftsgeschichte*, Verlag IKS Garamond, Jena, 2006, 65–76.
- [8] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008, 355 stran.
- [9] Eco U.: *Jak napsat diplomovou práci*. Votobia, Olomouc, 1997, 276 stran.
- [10] Franců J. (ed.): *Miloš Zlámal. Zakladatel matematické teorie metody konečných prvků*. Vysoké učení technické v Brně, Nakladatelství VUTIUM, Brno, 2006, 125 stran.
- [11] Lukeš J., Netuka I., Veselý J. (ed.): *Professor Gustave Choquet. Doctor Universitatis Carolinae Honoris Causa Creatus*. Matfyzpress, Praha, 2002, 139 stran.
- [12] Malina J. (ed.): *Otakar Borůvka*. Nadace Universitas Masarykiana – Edice osobnosti, Nakladatelství Granos Plus, Brno, 1996, 240 stran.
- [13] Malina J., Novotný J. (ed.): *Kurt Gödel*. Nadace Universitas Masarykiana – Edice Osobnosti, Nakladatelství Georgetown, Brno, Nakladatelství a vydavatelství Nauma, Brno, 1996, 268 stran.
- [14] Novák B. (ed.): *Life and Work of Vojtěch Jarník. 1897–1970*. Society of Czech Mathematicians and Physicists, Prometheus, Prague, 1999, 199 stran.
- [15] Špelda D.: *Proměny historiografie vědy*. Filosofie, Praha, 2009, 343 stran.
- [16] Úlehla I.: *Vladimír Úlehla*. Nadace Universitas Masarykiana – Edice Osobnosti, Nakladatelství Albert, Boskovice, Nakladatelství Jota, Brno, Nakladatelství Svoboda, Praha, 1994, 222 stran.
- [17] Těšínská E., Dolejšek Z., Heyrovský M., Rotter M. (ed.): *Fyzik Václav Dolejšek (1895–1945)*. Matfyzpress, Praha, 2005, 288 stran.
- [18] *Otakar Borůvka. 10. 5. 1899 – 22. 7. 1995*. Společnost Otakara Borůvky, Brno, 1999, iii + 54 stran + 14 obrazových příloh.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR 409/08/0012 *Karel Zahradník (1848–1916)* a specifického vysokoškolského výzkumu *Doktorské studium oboru M8 – decentralizovaný rozvojový projekt řešení v roce 2010 na MFF UK*.

Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
 Katedra didaktiky matematiky
 Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
 Sokolovská 83
 186 75 Praha 8
 e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
 Ústav aplikované matematiky
 Fakulta dopravní, České vysoké učení technické
 Na Florenci 25
 110 00 Praha 1
 e-mail: nemcova@fd.cvut.cz

111 LET OD PŘÍCHODU KARLA ZAHRADNÍKA DO BRNA

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Abstract: The main aim of this paper is to inform the reader about Karel Zahradník and his work in mathematics and his contributions to other fields in the Czech lands, Moravia and Croatia. This paper is based on documents about Zahradník's life and work that are preserved in archives and libraries in Prague, Brno, Zámorsk and Litomyšl in the Czech Republic, as well as in Zagreb, Croatia. Some information was gathered from family memoirs and the memoirs of Zahradník's colleagues and friends.

1 Studium

Karel Zahradník se narodil 16. dubna 1848 v Litomyšli v rodině měšťana.¹ V letech 1860 až 1868 studoval na piaristickém gymnáziu v Litomyšli. Po maturitě odešel do Prahy; v letech 1868 až 1870 navštěvoval na pražské polytechnice především přednášky z matematiky a deskriptivní geometrie (F. J. Studnička, F. Tilšer). Roku 1870 přešel na pražskou univerzitu, kde se jeho zájem soustředil na matematiku, fyziku a astronomii (profesoři H. J. K. Durège, W. Matzka, E. Mach, F. Lippich, K. Hornstein). Studia ukončil v roce 1874, kdy získal doktorát z filozofie. Protože ho lákalo učitelské povolání, složil zkoušky učitelské způsobilosti, které ho opravňovaly k výuce matematiky a fyziky na středních školách. Ještě jako univerzitní student získal místo asistenta matematiky na české technice v Praze, které zastával až do roku 1875. V roce 1874 byl jmenován suplujícím profesorem matematiky na *I. reálném vyšším gymnasiu v Praze*; vyučoval zde až do roku 1876. Týdně míval 15 až 18 hodin; navíc spravoval fyzikální kabinet a sbírku fyzikálních pomůcek a přístrojů.

2 Chorvatské působení

Roku 1876 odešel do Záhřebu na *Mudroslovnij fakultet* nově zřízené univerzity Františka Josefa I. (založena 1874).² Až do roku 1890 zde byl jediným vysokoškolským profesorem matematiky, který učil chorvatsky algebru, diferenciální a integrální počet, analytickou, syntetickou a projektivní geometrii, teorii čísel, pravděpodobnost a komplexní analýzu.³ Týdně míval 5 až 8 hodin přednášek. Zaměřil se především na výchovu budoucích středoškolských učitelů.⁴ Po příchodu do Záhřebu sestavil první

¹ O jeho životním osudu a osudech členů jeho rodiny bylo referováno na 25. konferenci Historie matematiky, Velké Meziříčí 2004. Viz též [1], [3] až [6], [10].

² O vzniku a vývoji záhřebské univerzity viz např. *Sveučilište u Zagrebu. Spomenica prirodoslovno-matematičkog fakulteta 1874–1974. Prilikom stogodišnjice organiziranog znanstvenog i nastavnog rada iz prirodnih i matematičkih znanosti*. Matematički odjel sepsal M. Vučković, Izdao Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu uz pomoć Republičkog savjeta za naučni rad, Zagreb, 1974.

³ Teprve v roce 1891 byla výuka matematiky na záhřebské univerzitě personálně posílena. Od tohoto roku D. Segen (první Zahradníkův doktorand) začal přednášet geometrii a o čtyři roky později Zahradníkův žák V. Varičák začal přednášet matematickou analýzu.

⁴ Od roku 1892 byl členem státní zkušební komise pro kandidáty učitelství na středních školách s chorvatským vyučovacím jazykem.

matematická kurikula, pravidla pro dílčí i závěrečné zkoušky. Dohlížel na zkoušky učitelské způsobilosti pro všechny aprobace s matematikou na středních školách s chorvatským vyučovacím jazykem. Při všech těchto aktivitách byl inspirován prací svého učitele a přítele Františka Josefa Studničky, jehož považoval za svůj vzor. S určitým časovým zpožděním rozvíjel v Záhřebu obdobné aktivity jako F. J. Studnička v Praze.

V letech 1883/1884 a 1892/1893 byl děkanem filozofické fakulty, v letech 1896 až 1899 ředitelem univerzitního matematického ústavu. Od roku 1886 stál v čele „matematického semináře“, který zřídil pro talentované studenty; zde vznikaly první odborné práce chorvatských matematiků. V roce 1893 založil „matematickou sbírku“, která obsahovala nejružnější matematické pomůcky a modely. Během více než dvacetiletého působení v Záhřebu vchoval první generaci chorvatských středoškolských a vysokoškolských profesorů (např. D. Segen, V. Varićak), vedl první chorvatské doktorandy, sepsal první chorvatské učebnice matematiky a odborné práce,⁵ výrazně také ovlivnil chorvatskou terminologii v geometrii a algebře.

V sedmdesátých letech překládal své menší časopisecké práce do chorvatštiny, později v tomto jazyce uveřejňoval původní práce a sepisoval středoškolské i vysokoškolské učebnice. V roce 1878 vydal v Záhřebu malou knížечku nazvanou *O determinantih drugoga i trećega stupnja. Za porabu viših srednjih učilišta*,⁶ kterou o rok později přeložil do češtiny a vydal v Praze pod názvem *Prvé počátky nauky o determinantech. Pro vyšší střední školy*.⁷ Vznikla z jeho přednášek, jež měl ve školním roce 1876/1877 pro začínající univerzitní studenty. Pro české studenty sepsal učebnici *Analytická geometrie v rovině*, která však nebyla v Čechách kladně přijata a nedostalo se jí velkého rozšíření.⁸ Oblíbenou se naopak stala jeho sbírka úloh *Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta*, kterou sepsal v 90. letech 19. století s Davidem Segenem.⁹ Na konci 19. století ještě vyšly jeho chorvatské litografované vysokoškolské přednášky *O determinantima. Predavanja u zimskom semestru godine 1897/8*¹⁰ a *O plohama i o krivuljama u prostoru. Predavanja u ljetnom semestru godine 1898*.¹¹ Byly to jedny z prvních chorvatských vysokoškolských učebnic matematiky.

Pro studenty české brněnské techniky na počátku 20. století upravil a vydal své chorvatské přednášky z analytické geometrie, teorie determinantů a matematické analýzy.¹² Jeho zásluhou vyšly v chorvatštině *Kapesní logarithmické tabulky*

⁵ Více viz [3] a Kučan Ž.: *120 godina nastave prirodoslovja i matematike na Sveučilištu u Zagrebu*, 21. travnja 1876 – 21. travnja 1996, Spomenica PMF, Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 1996.

⁶ Zagreb, 1878, 39 stran.

⁷ Praha, 1879, 48 stran.

⁸ Praha, 1883, 142 stran.

⁹ *Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta. Svazek I., Planimetrija i stereometrija. Svazek II., Trigonometrija i analitična geometrija. Svazek I.*, Zagreb, 1896, 105 stran; 2. vydání, Zagreb, 1905, 119 stran; 3. vydání, Zagreb, 2003, 119 stran; Svazek II., Zagreb, 1899, 146 stran. V roce 1904 byla sbírka přeložena V. N. Ikonomovem do bulharštiny.

¹⁰ Zagreb, 1898, 112 stran.

¹¹ Zagreb, 1898, 152 stran.

¹² Nejprve byla publikována *Analytická geometrie v rovině. Přednášky z vyšší matematiky I. běh*, Brno, 1903–1904, 198 stran, pak byly otištěny učební texty *O determinantech. Přednášky z vyšší matematiky I. běh, část úvodní*, Brno, 1903–1904, 62 stran, *Přednášky o integraci diferenciálních rovnic obyčejných. Letní semestr 1904*, Brno, 1904, 174 stran, a nakonec *O plochách druhého stupně. Z přednášek v zimním pololetí 1910/1 na c. k. české vysoké škole technické v Brně*, Brno, 1911, 151 stran.

F. J. Studničky. Na konci sedmdesátých let 19. století začal do chorvatštiny překládat Studničkovu středoškolskou učebnici *Algebra pro vyšší třídy středních škol*,¹³ jejíž vydání však chorvatská vláda nepovolila.¹⁴

Karel Zahradník položil základy chorvatské matematiky a výrazně přispěl k rozvoji chorvatské matematické komunity. Aktivně se zapojil do práce matematicko-přírodovědecké sekce chorvatské akademie věd, v níž konal odborné i popularizační přednášky a publikoval práce. Zásadním způsobem ovlivnil i rozvoj matematické části časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu*.¹⁵ Zatímco v Chorvatsku je jeho práce dodnes oceňována a jeho jméno je stále živé,¹⁶ v Čechách je neprávem opomíjen, ačkoliv po celý život spolupracoval s *Jednotou českých matematiků*.¹⁷

3 Působení na c. k. české vysoké škole technické v Brně

V roce 1899 se Karel Zahradník vrátil do vlasti. Jeho návrat souvisel se vznikem nové *české techniky v Brně*, ale také s osobní životní krizí (v Záhřebu mu v průběhu několika málo let zemřela manželka i obě dospělé děti).¹⁸ V roce 1899 se stal prvním rektorem brněnské české techniky. Spolu s J. Sobotkou, J. J. Jahnem a H. Schwaigrem vytvořil první profesorský sbor této školy a nemalou měrou přispěl k jejímu zdárnému uvedení v život i k jejímu dalšímu rozvoji. V rektorském křesle stanul i v roce 1900/1901. V roce 1908 císař František Josef I. povolil české technice v Brně otevřít nový studijní obor nazvaný kulturní inženýrství, který zahájil výuku od školního roku 1909/1910. Ve školním roce 1910/1911 byl Karel Zahradník jeho děkanem a v následujícím roce proděkanem.¹⁹

Od prvních dnů se s nesmírným úsilím pustil do budování nejenom celé české techniky, ale také jejího prvního matematického ústavu, který byl založen roku 1899, organizace matematické knihovny, do tvorby nových učebních osnov a učebních textů. Kompletně musel změnit styl výuky, neboť již nepřipravoval budoucí učitele či odborné matematiky, ale budoucí inženýry. Po vzoru české techniky v Praze a německé techniky v Brně zavedl dvouletý cyklus základních matematických přednášek. Týdně míval 6 až 8

¹³ První vydání je z roku 1877, druhé z roku 1879. V letech 1878 a 1879 vydal F. J. Studnička i německé verze této učebnice.

¹⁴ Viz Zahradníkovy dopisy uložené ve fondu „F. J. Studnička“ v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze. Viz též Bečvářová-Němcová M.: *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998.

¹⁵ V letech 1878 až 1899 uveřejnil Karel Zahradník v *Radu* více než 25 rozsáhlých studií. Bez zajímavosti jistě není ani to, že do roku 1885 byl jediným autorem matematických prací otiskovaných v tomto periodiku. Z prvních 21 matematických prací uveřejněných v tomto časopisu je 20 z pera českého autora a ze 43 prací otištěných do roku 1898 jich 30 bylo napsáno českými autory. Jednalo se o rozsáhlé Zahradníkovy články a studie a o drobnější příspěvky českých autorů J. S. Vaněčka, A. Strnada, F. J. Studničky a E. Doležala, které K. Zahradník pro spolupráci získal, a jejichž práce doporučil k otištění.

¹⁶ Jeho portrét byl na diplomech, které udělovalo chorvatské ministerstvo kultury a sportu nejlepším řešitelům matematické olympiády v roce 2000.

¹⁷ O působení Karla Zahradníka v Záhřebu viz Bečvářová M.: *Czech Mathematicians and Their Role in the Development of National Mathematics in the Balkans*, str. 9–31. In Bečvářová M., Binder Ch. (eds.): *Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire*, Edition History of Mathematics, Volume 41, Matfyzpress, Prague, 2010.

¹⁸ Viz též [1], [3] až [5].

¹⁹ O vzniku a vývoji české techniky v Brně viz Franěk O.: *Dějiny České vysoké školy technické v Brně do roku 1945 (1. díl)*, Tiskárna Rudého práva, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 1965.

hodin přednášek a cvičení. Od školního roku 1904/1905 byl členem zkušební komise pro první státní zkoušky studentů stavebního a strojního inženýrství, od školního roku 1906/1907 členem obdobné komise pro zeměměřiče, od roku 1909/1910 členem obdobné komise pro studenty kulturního inženýrství a od následujícího školního roku zasedal u prvních státních zkoušek všech odborů kromě chemie. Měl možnost sledovat rozvoj české brněnské techniky v jejích prvních patnácti letech. Musel si jistě plně uvědomovat, že dílo, u jehož zrodu stál, se neobyčejně zdařilo, neboť v roce 1899 škola začínala s 53 studenty jednoho oboru v pronajatých prostorách a v roce 1916 v sedmi oborech studovalo více než 500 studentů v nových objektech techniky na Veverí. Váženým členem profesorského sboru zůstal až do smrti. Zemřel 23. dubna 1916 na zápal plic.

Pro své brněnské studenty uveřejnil dvě učebnice *O determinantech*²⁰ a *Analytická geometrie, I. díl, Geometrie bodu, přímky a kuželoseček*.²¹ Vzhledem k tomu, že je psal pro techniky, snažil se o jasný, stručný, názorný a maximálně srozumitelný styl výkladu.

4 Ocenění práce

Dne 7. února 1902 získal Karel Zahradník titul „dvorního rady“, což bylo uznávané ocenění udělované v rakousko-uherské monarchii osobnostem, jež se zasloužily o rozvoj školství, vědy, kultury apod.²² Roku 1906 byl za své zásluhy o rozvoj brněnského školství jmenován čestným občanem Králova Pole (dnes součást Brna). O dva roky později obdržel za zásluhy o rozvoj školství a vědy poměrně vysoké státní vyznamenání – řád Františka Josefa ve stupni komandér (neboli komtur).²³

5 Spolkové aktivity

Karel Zahradník stál při zrodu *Jednoty českých matematiků*; od roku 1868 byl totiž členem *Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky* a v roce 1869 se podílel na jeho přeměně v *Jednotu*.²⁴ Přispěl k tomu, že Jednota roku 1870 vydala tzv. *První zprávu*²⁵ a od roku 1872 začala vydávat své odborné periodikum *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*. Po návratu do vlasti se aktivně zapojil do budování brněnského odboru Jednoty, v jehož čele stál od roku 1913.²⁶

V době svého působení v Záhřebu značně přispěl k rozvoji chorvatské matematiky. Od roku 1879 začal jako mimořádný člen spolupracovat s *Jihoslovanskou akademií věd*

²⁰ J. Barvič, Brno, 1905, 50 stran.

²¹ A. Píša, Brno, 1907, 184 stran.

²² Karel Zahradník byl prvním profesorem české brněnské techniky, který obdržel toto ocenění.

²³ Řád byl založen dne 2. prosince 1849 císařem Františkem Josefem I. jako odměna za občanské zásluhy o stát a panovnický dům. S jeho udělením nebylo spojeno povýšení do šlechtického stavu. Původně měl tři základní stupně: velkokříž, komandér (neboli komtur) a rytíř. V roce 1869 byl přidán další stupeň nazvaný komandér s hvězdou (tj. komtur s hvězdou), který byl vřazen mezi stupně velkokříž a komandér, roku 1901 pak ještě stupeň důstojník, který byl vřazen mezi stupeň komandér a rytíř. Řád byl osmihranný, karmínově smaltovaný, vykrojený zlatý kříž ozdobený dvouhlavým orlem umístěným mezi rameny kříže a nesoucím v zobáku řetěz, mezi jehož články bylo heslo VIRIBUS UNITIS, na malém bílém štítku na líci nápis F. J. a na rubu letopočet 1849. Komandérský (komturský) kříž se nosil na červené náhrdelní stuze. Podrobnosti o udělování řádu lze najít na adrese <http://www.franzferdinand.cz/cz/Cisarske-a-kralovske-vojsko/Rady-a-dekorace>.

²⁴ Viz [2] a též Houdek V.: *Dějepis jednoty českých matematiků v Praze*, Praha, 1872.

²⁵ *První zpráva Jednoty českých matematiků*, Jednota českých matematiků, Praha, 1870, 87 stran. Spolueditorem zprávy byl M. Neumann.

²⁶ O Zahradníkových spolkových aktivitách viz [1] až [3], [5], [6] až [10].

a umění, jejímž řádným členem se stal roku 1882. Jeho zásluhou se nejlepší čeští matematici stali přespolečnými členy této společnosti, a tak byla navázána velmi úspěšná spolupráce. V letech 1891 až 1899 byl ředitelem matematicko-přírodovědecké sekce a velmi výrazně ovlivňoval publikační i přednáškové aktivity chorvatské akademie věd.²⁷

Díky svým odborným publikacím byl zvolen přespolečným členem *Královské české společnosti nauk v Praze*, dopisujícím členem *České akademie věd císaře Františka Josefa I. pro vědy, slovesnost a umění*, *Královské srbské akademie věd v Bělehradu*, *Circolo matematico di Palermo* a *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*. V letech 1900 až 1907 byl členem zemské školní rady pro markrabství Moravské.²⁸

Karel Zahradník kromě výuky, povinností s ní spojených a odborné práce vyvíjel řadu aktivit, které podporovaly chudé talentované studenty v Brně. Od roku 1899 byl předsedou a čestným členem *Spolku k podporování chudých studentů*. Zasloužil se o to, že „Cyrillo-Methodějská záložna“ v Brně spolku věnovala ročních 1000 korun a dalších 1000 korun na vyplacení pěti ročních stipendií. Byl také aktivním členem výboru *Podpůrného spolku Hlávka*, který v roce 1899 založil Josef Hlávka, český architekt a mecenáš vědy, umění a studentů. V následujícím roce byl jmenován čestným členem *Akademického čtenářského spolku Zora*; jeho činností se sice příliš neúčastnil, ale věnoval mnoho knih jeho čítárně. O osm let později se stal členem *Spolku Kaunicových studentských kolejí*. Když roku 1909 v Brně 35 jihoslovanských studentů založilo spolek *Akademsko udruženje Jugoslavija* sdružující Chorvaty, Srby a Slovince, byl Karel Zahradník spolu s profesorem Michalem Ursínym zvolen jeho čestným členem, neboť oba pomáhali Jihoslovánům při jejich studiu v Brně.

6 Publikační výsledky

Karel Zahradník je autorem téměř stovky odborných i popularizačních prací, vysokoškolských i středoškolských učebnic, které vycházely v německém, českém, chorvatském a francouzském jazyce.²⁹ Následující tabulka přehledně zachycuje jeho odborné publikační aktivity:

Jazyk	Počet prací	První práce
německý	39	1873
český	36	1872
chorvatský	20	1877
francouzský	1	1899

Jeho práce zasahují do algebry (determinanty, logaritmy), matematické analýzy (základy infinitezimálního počtu, diferenciální rovnice) a geometrie (analytická,

²⁷ *Ljetopis Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti* 2(1877–1887), Zagreb, 1887, a 3(1888) až 14(1899), Zagreb, 1888 až 1899.

²⁸ O Zahradníkových spolkových aktivitách viz [3] a [8].

²⁹ Sepsal 7 učebnic a monografií, 82 odborných článků a 14 metodicko-didaktických příspěvků. Přeložil monografii G. Bellavitis nazvanou *Methoda equipollencí čili rovnic geometrických* (Praha, JČM, 1874). Články uveřejňoval v časopisech: *Zprávy ze zasedání Královské české společnosti nauk*, *Archiv der Mathematik und Physik*, *Sitzungsberichte der kaiser. Akademie der Wissenschaften in Wien*, *Věstník Královské české společnosti nauk*, *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, *Archiv matematiky a fysiky*, *Rad Jugoslavanske akademije znanosti i umjetnosti*, *Nastavni vjestnik* a *Nouvelles annales de mathématiques*. První práci publikoval roku 1872, poslední roku 1912.

syntetická, projektivní a algebraická geometrie, problematika vyučování geometrie na středních školách).³⁰

Hlavním oborem jeho odborné práce byla analytická, algebraická a syntetická geometrie. V době svého působení v Praze a především pak v Záhřebu se věnoval zejména teorii racionálních křivek a algebraických křivek třetího a čtvrtého stupně, k jejichž studiu používal analytické metody založené na hledání nejjednoduššího parametrického vyjádření (křivky vyjadřoval například jako obálky přímek, které mají definovanu pevnou vzdálenost od počátku souřadnic a svírají pevný úhel s osou x). Studoval také speciální vlastnosti rovinných křivek, zejména jejich transformace a involuce, a vlastnosti kuželoseček a množin bodů daných vlastností odvozených z kuželoseček. Jeho velmi oblíbeným tématem byly vlastnosti speciálních křivek (kisoida, kardioda, strofoida, lemniskáta a Descartův list). V řadě článků popisoval tzv. *trojiny bodů*, tj. množiny bodů daných vlastností neboli speciální trojice bodů ležících na kuželosečkách nebo algebraických křivkách třetího a čtvrtého stupně a splňující předem zvolené netriviální podmínky. Dalšími oblastmi, které přitahovaly jeho pozornost, byly základy diferenciálního počtu a jejich jednoduché aplikace v analytické geometrii křivek a ploch a základy analytické a elementární geometrie (viz jeho práce věnované kvadraturám, základům trigonometrie, Pythagorově či Pappově větě).

V době svého působení v Brně sepsal více než patnáct článků, v nichž pojednal o svých oblíbených tématech – trojiny bodů a jejich vlastnosti, speciální křivky (cisoidála, fokála a Descartův list), algebraické křivky třetího a čtvrtého stupně, biracionální transformace kubik, diferenciální rovnice a elementární geometrie.³¹

7 Výchova talentů

Karel Zahradník měl i jako vysokoškolský profesor v Záhřebu zájem o kvalitní výuku matematiky na středních školách. Uvědomoval si, že talentované studenty je nutné podchytit již v mládí, jejich nadání podporovat a rozvíjet. Proto od počátku sedmdesátých let 19. století až do prvního dvacetiletí 20. století psal metodické, didaktické a popularizační práce věnované elementární, analytické a syntetické geometrii, trigonometrii a základům matematické analýzy. Jeho články obvykle obsahovaly různé zajímavé pohledy na elementární matematické poznatky, drobná vylepšení a zjednodušení důkazů, netradiční motivační příklady, různé aplikace determinantů a diferenciálního počtu v analytické geometrii. Sepisoval je pro talentované studenty a učitele, aby je motivoval k dalšímu studiu a především aby poukázal na neobvyklé souvislosti. Příspěvky mnohdy měly dvě i tři jazykové verze (českou a chorvatskou, českou a německou, resp. českou, německou a chorvatskou), které se od sebe většinou téměř nelišily. Je zajímavé, že texty psané pro studenty neobsahovaly úplná, detailní odvození či důkazy, ale jen předpoklady, náznaky postupu a výsledky. Odvození, důkazy, výpočty, konstrukce či náčrtky ponechávaly čtenářům. Byly proto náročnější než články jeho kolegů, neboť vyžadovaly nemalou samostatnou práci čtenáře.

Na ukázkou Zahradníkova postupu uveďme dva zajímavé články. Roku 1878 uveřejnil v *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky* krátký článek nazvaný

³⁰ Nejnovější seznam Zahradníkových prací je uveřejněn v [3].

³¹ Podrobnější hodnocení Zahradníkových odborných prací lze najít v publikacích [1], [3] a [8].

Príspevek k trigonometrii,³² který v témže roce vyšel v nezměněné německé verzi v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* v oddílu *Miscellen* pod názvem *Beitrag zur Trigonometrie*.³³ Elementárním způsobem dokázal tři základní věty rovinné trigonometrie (součet vnitřních úhlů v trojúhelníku, sinová věta a kosinová věta). Vyšel ze soustavy

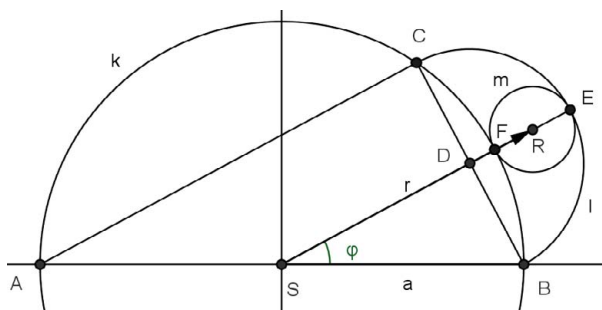
$$b \cos \gamma + c \cos \beta = a,$$

$$c \cos \alpha + a \cos \gamma = b,$$

$$a \cos \beta + b \cos \alpha = c,$$

kteou získal tak, že vyjádřil součet průmětů dvou stran trojúhelníku ABC do strany třetí. Nejprve ji chápal jako homogenní soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé a, b, c , tj. za neznámé považoval délky stran. Podmínku existence netriviálního řešení vyjádřil pomocí determinantu matice soustavy a užitím elementárních goniometrických úprav dokázal, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180° . Pak eliminoval jednu stranu a jí protilehlý úhel, eliminační podmínku napsal opět pomocí determinantu a jeho jednoduchou úpravou odvodil sinovou větu. V poslední části článku eliminací dvou úhlů obdržel vztah mezi zbývajícím úhlem a stranami, které jej svírají, tj. dokázal kosinovou větu.

Problémům z matematické analýzy věnoval Karel Zahradník pouze okrajovou pozornost, neboť se jeho zájem koncentroval spíše na syntetickou a algebraickou geometrii, zejména na geometrii křivek a ploch, ale přesto vytvořil několik pěkných příkladů. Roku 1876 uveřejnil v časopisu *Archiv für Mathematik und Physik* v oddílu *Miscellen* zajímavou a inspirativní úlohu nazvanou *Eine Quadratur*,³⁴ která měla toto znění: *In den Hippokrateschen Halbmond soll der grösste Kreis eingeschrieben werden. Welches ist der Ort seines Mittelpunktes, wenn sich der Scheitel des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks auf der Peripherie des ihm umgeschriebenen Kreises bewegt*.³⁵



³² ČPMF 7(1878), str. 245–248.

³³ AMP 62(1878), str. 330–332.

³⁴ AMP 59(1876), str. 448.

³⁵ Zadání úlohy lze přeložit takto: Do Hippokratova měsíčku má být vepsána největší kružnice. Jaké je geometrické místo jejích středů, když se vrchol daného pravouhlého trojúhelníku pohybuje po obvodu opsané kružnice.

V polárních souřadnicích uvedl rovnici průvodiče křivky, který popisoval polohu výše zmíněného středu

$$r = \frac{a}{2}(\cos \varphi + \sin \varphi + 1),$$

kde a je poloměr kružnice k opsané danému pravoúhlému trojúhelníku ABC . Odvození uvedené rovnice není náročné. Z výše uvedeného obrázku vyplývá, že průměr FE hledané kružnice m vepsané do Hippokratova měsíčku vypočteme takto:

$$SD + DE - SF = a \cos \varphi + a \sin \varphi - a.$$

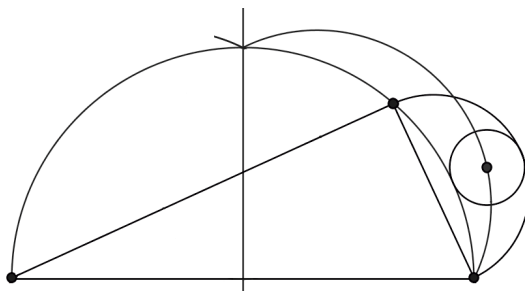
Poloměr kružnice m vepsané do Hippokratova měsíčku je

$$RF = \frac{a \cos \varphi + a \sin \varphi - a}{2},$$

a tudíž průvodič bodu R je

$$r = SF + FR = \frac{a}{2}(\cos \varphi + \sin \varphi + 1).$$

Čtvrtina hledané křivky je znázorněna na následujícím obrázku.



Poznamenejme, že odvození rovnice průvodiče je hezké a podnětné cvičení ze středoškolské matematiky a je dobře srozumitelné i pro studenty.

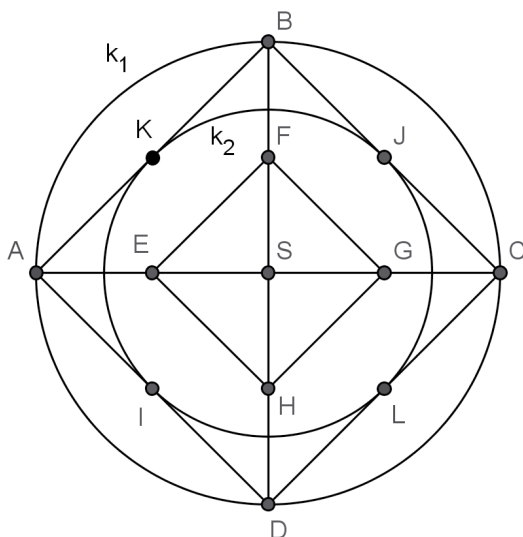
Ve druhé části článku podle známého Leibnizova vzorce

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

počítal Karel Zahradník obsah plochy ohraničené křivkou $r = f(\varphi)$ a průvodiči $r_1 = f(\varphi_1)$ a $r_2 = f(\varphi_2)$. Aniž by uvedl jednotlivé kroky výpočtu, zapsal výsledek integrace:

$$S = \frac{a}{2}(\pi + 5).$$

Ve třetí části článku napsal: *Die Fläche der Curve zerfällt in zwei Teile, in einen rationalen und einen irrationalen Teil. Schreiben wir in den festen Kreis ein Quadrat ein und dem Quadrat wieder ein Quadrat ein, dessen Seiten die Diagonalehälften des grösseren halbiren werden, und beschreiben aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte einen Kreis, dessen Radius gleich ist der Seite des kleineren Quadrats, so ist die Summe dieser drei Flächen gleich der Fläche der Curve.*³⁶



Z jeho popisu vyplývá, že měl na mysli situaci znázorněnou na výše uvedeném obrázku, tedy

$$S = \frac{a^2}{2}(\pi + 5) = \frac{4a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2},$$

neboli obsah útvaru omezeného výše popsanou křivkou je roven součtu obsahu čtverce $ABCD$ o straně $a\sqrt{2}$, obsahu čtverce $EFGH$ o straně $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ a obsahu kruhu k_2 o poloměru $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Literatura

- [1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

³⁶ Volný překlad zní: Obsah plochy ohraničené křivkou se rozpadne na dvě části, na racionální část a iracionální část. Vepíšeme-li do pevné kružnice čtverec a čtverci opět čtverec, jehož strany půlí diagonály většího čtverce, opišeme-li ze středu čtverce kružnici, jejíž poloměr je roven straně menšího čtverce, je součet obsahů těchto tří ploch roven obsahu plochy ohraničené křivkou.

- [2] Bečvářová M.: *Z historie Jednoty (1862–1869)*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 13, Prometheus, Praha, 1999.
- [3] Bečvářová M.: *Život i djelo Karela Zahradníka*, str. 9–36. In Mardešić S. (ed.): *Karel Zahradník (1848–1916)*, Hrvatska akademija znanosti i umjetnosti. Spomenica preminulim akademikima, svezak 134, Zagreb, 2007.
- [4] Bečvářová M.: *Život a dílo matematika Karla Zahradníka (1848–1916)*, str. 111–112. In *Proceedings of the 22nd World Congress of the Czechoslovak Society of Arts and Sciences*, Univerzita Palackého, Olomouc, 2004.
- [5] Bečvářová M.: *Life and Work of Karel Zahradník (1848–1916)*, str. 276–283. In Motlíček T., Rechcigl M. (eds.): *Proceedings of “Moravia from the World Perspective”*, 22nd World Congress of the Czechoslovak Society of Arts and Sciences, 2. díl, Repronis, Ostrava, 2006.
- [6] Havel V.: *Profesor dr. Karel Zahradník*. Glasnik matematiky 8(1973), str. 335–337.
- [7] Košťál R.: *Vznik a vývoj pobočky JČMF v Brně (K padesátiletému trvání)*. JČMF, Praha, 1968.
- [8] Lerch M.: *Karel Zahradník*. Almanach České akademie věd a umění 27(1917), str.132–142.
- [9] Nachtikal F.: *Slavnostní schůze brněnského odboru Jednoty českých matematiků a fysiků na počest památky prof. Dra. Karla Zahradníka*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 46(1917), str. 375–376.
- [10] Vojtěch J.: *Karel Zahradník*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 46(1917), str. 289–304.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR 409/08/0012 *Karel Zahradník (1848–1916)*.

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
 Ústav aplikované matematiky
 Fakulta dopravní ČVUT v Praze
 Na Florenci 25
 110 00 Praha 1
 e-mail: nemcova@fd.cvut.cz

AL-CHVÁRIZMÍHO ARITMETICKÝ A ALGEBRAICKÝ TRAKTÁT

MARIE BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ

Abstract: Al-Khwarizmi's books *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabal* (The Book of Aljabr and Almuqabala) and *Al-Kitab al-jam wa-t-tafriq bi-hisab al-Hind* (a source for *Dixit Algorizmi*) stand on the origin of mathematics of calculations, arithmetics and algebra. In 2009, there became the first Czech translation of this book with commentary by Petr Vopěnka. In the 2nd edition (2010), there are two new additional texts. The purpose of this contribution is an introduction to this sources books with pointing out origins of arabic mathematics of calculations and touch of Indian and Greek mathematics.

1 Aritmetický traktát

1.1 Úvod

Al-Chvárizmího Aritmetický traktát je arabským uvedením do světa indického počítání s čísly největšími, ale i nejmenšími, jak se uvádí v preambuli. Jde však o čísla, která, ač se zdají na první pohled do té doby dostupnými prostředky neuchopitelná, mohou se ukazovat ve všech svých plnostech. Cílem traktátu je ukázat, jak tato velká (nebo velmi malá) čísla pojmout a pracovat s nimi i v praktickém životě. Jedná se tedy o učebnici počítání ve dvou číselných soustavách – desítkové pro čísla kladná celá a šedesátkové pro zlomky (rozumějme indické), o učebnici aritmetického kalkulu. Užívá přitom číselných pozičních soustav, které byly v Mezopotámii (viz [4])¹ dlouho zakořeněné, přesto se při svém psaní odvolává výhradně na Indy. Vrcholem traktátu je počítání se zlomky o libovolném základě (nejspíše vlastní al-Chvárizmího práce).

Původní arabský text se nedochoval a není ani znám jeho vlastní název.² Vycházíme proto z latinského textu často označovaného jako *Algoritmi de numero Indorum* (*Kniha o indickém počítání*). Nejedná se však o přesný překlad, ale spíše o výklad al-Chvárizmího počínů soudobými prostředky (používání římských číslic, chybějící arabské figury i vlastní výpočty), proto je v druhém českém vydání al-Chvárizmího Aritmetického a algebraického traktátu zařazen i pokus o rekonstrukci původního arabského textu ([2]). V prvním vydání [3] tento text chybí, je zde jen český překlad pořízený z vydání [1]. Česká vydání jsou pořízena překladem z ruštiny [1]. Překlad z latiny do ruštiny vznikl na základě rukopisu uloženého v knihovně University of Cambridge. Srovnání navazujících pozdějších al-Chvárizmímu podobných traktátů *Algorithmi de numero indium* a *Liber Algorismi de pratica arismetrice*, vydaných souhrnně v Římě roku 1857, najdeme v [11].

Poznamenejme (a připomeňme), že Aritmetický traktát stojí na počátku historie algoritmu a vlastní slovo *algorithmus* pochází z latinizované podoby al-Chvárizmího jména *Algorizmi*. Úvodní pasáže traktátu latinského vydání totiž začínají slovy „Dixit

¹ Al-Chvárizmí pracoval na svých traktátech v Bagdádu v Domě moudrosti (Bajt al hikma) na dvoře chálifa al Mamúna – [15], str. 20, a [14], str. 156.

² Al-Chvárizmího arabsky psaný spis se patrně jmenoval *al-Kitab al-džam^c wa-l-tafrígh bi-hisáb al-Hind*, tj. kniha o sčítání a odčítání podle indického počtu.

Algorizmi“ – Algorizmi pravil. Aritmetický traktát je pramenným textem základů evropské vzdělanosti.

Metodicky jsou oba traktáty psány tak, aby téma bylo vyloženo nejprve velmi stručně v obecném pojednání. Následuje několik názorných příkladů, které se snaží postihnout všechny případy, které mohou nastat. Samy příklady vlastně popisují algoritmus, jak počítat. Vždy postupuje názorně, od jednoduššího ke složitějšímu. O metodě, kterou al-Chvárizmí otevírá nového svět matematiky kalkulací, se můžeme podrobněji dočíst v [12].

1.2 Obsah

Al-Chvárizmí nejprve představí východoarabskou i západoarabskou podobu číslic. Aby ale číslice nebyly pouhými symboly pro nic, hledá podstatu čísel, kterou opírá o číslo jedna. A podstatu jednotky velice pečlivě uchopuje, přesto pro něj ještě není plnohodnotným číslem.³ „Každé číslo je složené z jednotek. [...] Jednotka je základ každého čísla a leží vně čísel. [...] Ona určuje každé číslo. Vně čísel je proto, že je určena sama sebou. [...] Ostatní čísla se bez jednotky nemohou vykytovat. [...] Tedy číslo není nic jiného, než soubor jednotek.“⁴ Dodejme, že ohledně ustanovení jednotky se al-Chvárizmí odvolává na svůj dřívější Algebraický traktát, nicméně zde je s výkladem preciznější.

Čísla, která následují, jsou vyčíslována potenciálně do nekonečna. Ovšem zacházení s nimi pomocí poziční desítkové soustavy, převzaté od Indů, se jevílo v té době jako revoluční. Nula jako číslo není uvažována vůbec. Pro vyjádření nuly v pozičním systému užívá symbol kroužku. Postavení, které má jednotka, se nule ještě zdaleka nedostává. Z dnešního pohledu jsou nula i jednotka z hlediska aritmetiky velmi významnými entitami – jsou to konstanty algebraického kalkulu.⁵

Al-Chvárizmího převzatý zápis pozičně sledoval sémantiku čísel (kolik jednotek, desítek, tisíců, desítek tisíců, stovek tisíců, tisíců tisíců, ..., tisíců tisíců tisíců, ...). Při čtení latinského překladu psaného pomocí římských čísel nám připadá, že se směřuje psaní čísel s jejich výkladem. V původním textu nejspíš tyto (římské) číslice nebyly, protože se nejprve pojednává o zavedení pojmů jednotlivých čísel (sémantiku), a teprve poté jde o psaní čísel pomocí znaků (syntax). Římská čísla/čísllice jsou tedy často zkratkou pro slovní zápis čísel, jak mohl být v arabském originále. Al-Chvárizmí přebírá od Indů devět znaků pro jedničku až číslo devět, pro vyjádření prázdné pozice (řádu) má kroužek. Způsobem zápisu do poziční desítkové soustav, který se dodnes učí na začátku výuky matematiky, mohl uchopit velká čísla velmi rychle a snadno. Na rozdíl od dnešní zvyklosti čísla psal zprava doleva. Konkrétně zápis 325 je velmi efektivní zkratkou za vyjádření 5 jednotek, 2 desítek a 3 stovek (ve stejném smyslu jako 5 jablek, 2 hrušky a 3 švestky). Způsob zapisování čísel je uzavřen sémantikou řádů v příkladu zápisu čísla 1 180 703 051 492 863 ([5], str. 117–118). Tímto se dokládá, že záměrem al-Chvárizmího bylo uchopit a mít možnost pracovat s do té doby neuchopitelnými velkými čísly

³ Ačkoli dělá al-Chvárizmí velký rozdíl mezi podstatou jednotky a čísla, dovoluji si psát o jednotce jako o čísle, protože při zápisu pomocí číslic a vlastním počítání s ní jako s číslem pracuje. Al-Chvárizmí zastává pozici nastolenou řeckou matematikou, pro kterou číslo jedna ještě číslem není (viz Servítova poznámka v [13], str. 103, doprovázející výměry VII. knihy Eukleidových Základů). Ani pro Isidora ze Sevilly ještě jednička není číslem – viz [10], str. 283.

⁴ Srov. Eukleides: „Jednotka jest, dle níž každé věci se říká jedna. Číslo pak jest množství složené z jednotek.“ [13], str. 103.

⁵ Petr Vopěnka dokonce v [15], str. 65–76, uvádí popis arabského algebraického kalkulu (pouze s konstantou 1), který upravuje na indický (algebraický kalkul) přidáním konstant 0 a –1.

jako s čísly běžnými. Algoritmy, které následují, předznamenávají písemné počítání, které nejspíše Indové prováděli z paměti.

Následuje pojednání o tom, jak tato velká čísla sčítat a odčítat – dnešními slovy tedy písemně sčítat a odčítat. Výběr příkladů pro metodu je ale pozoruhodný: nejprve odečítá polovinu čísla, jehož všechny řády jsou sudé (dnešní symbolikou $6422 - 3211 = 3211$), což dokládá velký význam zacházení a práci s polovinou a fakt (dnešní symbolikou) $1 - 1/2 = 1/2$. Tato polovina je přitom ideální, dosažená však nikoliv konstrukcí, ale kalkulem. Druhý příklad dokládá, jak pozice v zápisu fungují (dnešní naší symbolikou $1144 - 144 = 1000$). Třetí příklad v latinském překladu chybí, jednalo se zřejmě o odčítání s přechodem přes desítku. Petr Vopěnka v komentáři uvádí $952 - 874 = 78$.

Pokračuje půlení a zdvojení čísla. Předpokládá se přitom znalost půlení sudého čísla (rozpůlení osmi, šesti, čtyř a dvou) a při půlení lichého čísla se jednotka půlí na 30/60 (30 minut). Text se přímo věnuje až půlení čísel větších než 10, přičemž dělení řádu řeší pomocí kroužku a čísla 5. Dvojnásobek čísla provádíme od vyššího řádu k nižšímu.

Po dvojnásobku následuje poučení o násobení libovolných čísel, čímž se rozšiřuje pojednání z Algebraického traktátu. Zde je však popsán postup, jak (písemně) násobit v desítkové poziční soustavě od vyšších řádů k nižším (příklad má $2326 \cdot 214 = 497764$). Pro doklad správnosti postupu (ne o pravdivosti názoru) se dodává devítková zkouška (srv. [15], str. 34, a [2], str. 124–125).

Al-Chvárizmí dodává i algoritmus pro dělení (v oboru kladných přirozených čísel). V českém překladu latinského vydání v [3] je však velmi ledabylé. V [2], str. 97–102, je dělení rozvedeno do algoritmické podoby, jakou dosud al-Chvárizmí používá. V [1], str. 165–167, je i další komentář.

Pokud se al-Chvárizmí věnuje zlomkům, je si sice vědom, že mohou mít různé základy, přesto z tradice mezopotamské začíná nejprve zlomky indickými, které jsou založeny na šedesáti. Je si zároveň vědom potenciálně nekonečného množství zlomků ve smyslu reciprocity potenciálně nekonečného množství čísel (kladných přirozených).

Se zlomky založenými na šedesáti zachází stejně elegantně jako s čísly kladnými přirozenými. Z dnešního pohledu s nimi zachází způsobem, jakým se vyučuje práce s úhlovou mírou. Používá pro to šedesátkovou soustavu zapisovanou pomocí čísel vyjádřených v desítkové poziční soustavě. Jednotlivé řády následující jednotky směrem k nižším pak jsou minuty, sekundy, tercie, kvarty, kvinty, sexty, atd.

Samotné počítání se zlomky představuje násobení a dělení. Nejprve násobí zlomky celým číslem (či stupni), pak následuje násobení zlomků (vlastních i nevlastních) mezi sebou. Podobně jako s velkými čísly je potřeba i zde dávat pozor na řády a pro prázdný řád užívat kroužek. Při dělení čísel, z nich jedno je necelé, je důležité umět převádět čísla do stejných řádů (až na úroveň toho nejnižšího).

Teprve až po násobení a dělení provádí sčítání, odčítání a zdvojení čísla (opět od nejvyššího řádu k nejnižšímu, jak běžně počítáme z paměti).

Aritmetický traktát je v českém vydání [2] i [3] uzavřen prací se zlomky o jiných základech. Slibované pojednání o odmocňování chybí. Možná ani součástí původního textu nebylo, protože bylo odvoditelné z algebry a almukabaly (obsažených v Algebraickém traktátu). Pozdější aritmetické traktáty ho ale běžně uváděly (srv. [8], str. 98–125), nikoli ve tvaru výpočtu či algoritmu, ale pouze se slovním popisem.

2 Algebraický traktát

2.1 Úvod

Algebraický traktát je text starší, Aritmetický traktát předurčuje, ale zároveň i doprovází. Můžeme se na něj dívat jako na praktickou příručku, jak s čísly zacházet „při dělení majetků, v záležitostech soudních, v obchodě, při uzavírání smluv a také při vyměřování půdy, vedení kanálů, ve stavitelství a při nejrůznějších jiných pracích”. ([2], str. 165). Zachoval se nám v arabštině jako Al-Kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala, v latinském překladu jako Liber algebrae et almucabalaе continens demonstrationes aequationum regularum Algebrae (Robert z Chesteru). Al-džabr znamená přenos odčítaných výrazů z jedné strany rovnice na druhou tak, abychom nahradili odčítání přičítáním. Al-muqábala je krácení. Pro Evropu se naukou algebry a almukabaly rozuměla nauka o (algebraických) rovnicích druhého i vyšších stupňů o jedné, ale i více neznámých.

V samotném Algebraickém traktátu se však setkáváme se studiem rovnic kvadratických s kladnými přirozenými koeficienty (místa na jejich místě i racionálními čísly), řešenými v oboru kladných celých čísel. Cílem bylo často získat kvadrát nikoli kořen. Kvadratické rovnice, na které se nejčastěji odkazuje, však nebyly jedinou součástí tohoto traktátu. To, že Algebraický traktát byl předstupněm pro Aritmetický traktát, svědčí praktické oddíly – o algebraickém násobení čísel a zvětšování a zmenšování. Stejně tak můžeme pohlížet i na hledání kořene jako na jednu z možností, jak ve speciálních případech odmocňovat.⁶

Poznamenejme, že podobně jako slovo algoritmus (algorithmus, argorismus, algorismus, alchorismus) má původ ve jménu arabského učenice (po způsobu Algorizmiho), pojem algebra značí způsob práce s rovnicemi, al-džabr a al-muqábala.

2.2 Obsah

Jak jsme se zmínili u Aritmetického traktátu Algebraický traktát jednotku rovněž řeší, ne však tak důkladně. Všechna čísla jsou sestavena z jednotek a jednotka je přítomna v každém čísle. Jednotky jsou čísla větší než jedna do deseti.

Čísla rozděluje do tří druhů: kořen (v dnešním smyslu x), kvadrát (dnes x^2) a číslo (dirhemu, dnes c , d , atd.), které se nevztahuje ani ke kořenu, ani ke kvadrátu. Al-Chvárizmí rozlišuje v šesti oddílech (vlastně šesti případech) úlohy vedoucí na řešení toho, čemu dnes říkáme kvadratické rovnice. K popisu práce s tímto matematickým jevem zde budeme užívat velkou zkratku – dnešní značení a dnešní pojmy rovnice, neznámé, koeficient, umocňování, odmocňování, atd., ale i zápis čísel v desítkové poziční soustavě, z důvodu snazšího porozumění.⁷

⁶ Odmocňování totiž v Aritmetickém traktátu je předznamenáno, ne však v nejstarších překladech-výkladech vysvětleno. Domníváme se tedy, že se al-Chvárizmí odvolával na Algebraický traktát.

⁷ Uveďme zde znění Prvního oddílu Algebraického traktátu v českém překladu ([5], str. 140), kde se pojem rovnice, natož kvadratické, nevyskytuje: „Co se týče kvadrátů rovných kořenům; to pokud například řekneš: Kvadrát je roven pěti svým kořenům, potom je kořen kvadrátu pět a kvadrát dvacet pět, což je rovno pěti jeho kořenům. Pokud řekneš: Třetina kvadrátu je rovna čtyřem kořenům, potom celý kvadrát je roven dvanácti kořenům, to znamená, že je roven sto čtyřiceti čtyřem a jeho kořen dvanácti. Pokud například řekneš: Pět kvadrátů je rovno deseti kořenům, pak jeden kvadrát je roven dvěma kořenům, kořen kvadrátu je dva a kvadrát čtyři. Tímto způsobem, ať je kvadrátů mnoho či málo, převede se vše na jeden kvadrát a stejně se pracuje s jím rovnými kořeny, které se převedou tak, jako se převedl kvadrát.“

1. oddíl řeší rovnice tvaru $ax^2 = bx$. Po úpravě $x^2 = (b/a)x$, a odtud $x = b/a$. Tyto úpravy jsou zcela vpořádku, nezapomeňme, že pracujeme v oboru kladných přirozených čísel. Jedná se tedy o krácení.
Příklady k tomu podává $x^2 = 5x$, $1/3x^2 = 4x$ a $5x^2 = 10x$.
2. oddíl se věnuje odmocňování $ax^2 = b$, kde b/a je ve tvaru druhé mocniny nějakého kladného přirozeného čísla. Doprovodné příklady: $x^2 = 9$, $5x^2 = 80$ a $1/2x^2 = 18$.
3. oddíl umocňuje: najít kvadrát kořenu rovnice $bx = c$.
Příklady: $x = 3$, $4x = 20$, $1/2x = 10$.
4. oddíl se zabývá rovnicí tvaru $x^2 + bx = c$ s řešením $x = \sqrt{((b/2)^2 + c)} - b/2$.
Doprovodné příklady: $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ (nejprve krátíme dvěma) a $1/2x^2 + 5x = 28$.
5. oddíl probírá rovnici tvaru $ax^2 + c = bx$. V příkladu $x^2 + 21 = 10x$ al-Chvárizmí neopomene si povšimnout, že vychází dva různé kladné přirozené kořeny $x_1 = 3$ a $x_2 = 7$. Rovněž zde provádí i rozbor počtu řešení kvadratické rovnice včetně případu, kdy rovnice nemá žádné, dvě či jedno řešení. Jedno řešení přitom ještě neznamená nutně zdvojený kořen, protože počítáme v oboru kladných přirozených čísel.
6. oddíl završuje rovnici typu $bx + c = ax^2$.

Příklad po tomto typ rovnice uvádí $3x + 4 = x^2$.

První tři oddíly jsou z hlediska arabského algebraického kalkulu zcela neproblematické, zbylé tři vyžadují důkaz. Ty jsou prováděny převodem na geometrii Eukleidových *Základů*. Poznamenejme, že téže době, kdy píše al-Chvárizmí svá pojednání, v Domě moudrosti působí první překladatel Eukleidových *Základů* Ibn Júsuf ibn Matar al-Hajjáj (al-Hadždžádž) a jejich komentátor al-Abbás ibn Sa'íd al-Džauhárí.⁸ O těchto pracech al-Chvárizmí téměř jistě věděl, ale v textu se na Eukleida přímo neodkazuje, *Základy* pouze ve svých důkazech užívá, obzvláště II. knihu. Úsečky či plošné útvary zde figurují jen jako pomůcka lepší názornosti. To, o co jde, jsou čísla. Vlastní algebraický důkaz ve smyslu propojení geometrie a algebry, jak známe od Descarta, to ještě ale není. Nicméně geometrie se ukazuje zde v úplně novém světle – jako užitá, aplikovaná matematika.

Po řešení kvadratických rovnic následuje oddíl o násobení – v naší matematice o úpravě algebraických výrazů typu $(a \pm x) \cdot (b \pm x)$. Významně zde přitom vystupuje číslo deset. Příklady (zapsané v naší dnešní notaci) $(10 + 1) \cdot (10 + 2)$, $(10 - 1) \cdot (10 - 1)$, $(10 + 2) \cdot (10 - 1)$ propojují algebru s aritmetikou. Následují příklady ryze algebraického typu $(10 - x) \cdot 10$, $(10 + x) \cdot (10 + x)$, $(10 - x) \cdot (10 - x)$. Velmi zajímavý je příklad se zlomky $(1 - 1/6) \cdot (1 - 1/6)$, který řeší algebraicky, ale i aritmeticky. Oddíl o násobení al-Chvárizmí zakončuje úpravou algebraických výrazů typu $(10 - x) \cdot (10 + x)$, $(10 - x) \cdot x$, $(10 + 1/2x) \cdot (1/2 - 5x)$ a $(10 + x) \cdot (x - 10) = (x + 10) \cdot (x - 10)$. Je zřejmé, že tato pasáž Algebraického traktátu podává návod na násobení dvouciferných čísel. Ten má oporu v řecké geometrii a svou povahou, ačkoli by měla spíše spadat pod Aritmetický traktát, má opodstatněné místo zde, nevyžaduje totiž užití desítkové poziční soustavy. Další postřeh, který je nutno zmínit, je ten, že nejspíše ještě v této době nebyla zřejmá komutativnost násobení a sčítání.

Oddíl o zvětšování a zmenšování se věnuje dvěma jevům – jednak počítání s odmocninami a jednak počítání s polynomy. Dokládají to tvrzení o úpravách výrazů s odmocninami:

⁸ Viz [14], str. 156, či [6], str. 40.

„kořen ze dvou set bez deseti přičtený ke dvaceti bez kořenu ze dvou set je deset“⁹, tj.
 $(\sqrt{(200)} - 10) + (20 - \sqrt{(200)}) = 10$;

„kořen ze dvou set bez deseti, odečtený od dvaceti bez kořenu ze dvou set je třicet bez dvou kořenů ze dvou set a dva kořeny ze dvou set je kořen z osmi set“¹⁰ tj.

$$(20 - \sqrt{(200)}) - (\sqrt{(200)} - 10) = 30 - 2\sqrt{(200)}, \text{ kde } 2\sqrt{(200)} = \sqrt{(800)}.$$

Následují dvě tvrzení o úpravách kvadratických polynomů:

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x$$

$$\text{a } (100 + x^2 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2) = 50 - 3x^2 - 30x.$$

K těmto tvrzením je později ve spise přiloženo vysvětlení podle obrázku, tedy pomocí Eukleidovy geometrie.

Dalšími početními úkony s odmocninami jsou násobení kořenu kvadrátu, polovina kořenu kvadrátu, podíl kořenů (podíl odmocnin), násobení kořenů mezi sebou (násobení odmocnin) a násobení různých násobků různých kořenů mezi sebou (např. $2\sqrt{9} \cdot 3\sqrt{4}$).

Oddíl o šesti úlohách doprovází typovými příklady s podrobným vysvětlením prvních šest oddílů, rozebírajících možnosti při řešení kvadratické rovnice v oboru kladných přirozených čísel. Oddíl o rozličných úlohách je již sbírkou řešených úloh ke stejné problematice. Některé z nich jsou i praktického rázu a dnešními slovy je můžeme označit za slovní úlohy na kvadratické rovnice.

Oddíl o obchodování se zabývá výkladem a počítáním s trojčlenkou (přímou a nepřímou úměrou): „Věz, že dělení se lidí o něco, stejně jako nákup i prodej, výměna i nájem a jiné mají co do činění se čtvero čísly, stanovenými tázajícím a to s mírou, cenou, množstvím a hodnotou. Číslo, odpovídající míře, stojí proti číslu odpovídajícímu hodnotě a číslo odpovídající ceně proti číslu odpovídajícímu množství. Z těchto čtyř čísel jsou vždy tři známé a jedno je neznámé a o něm hovořící říká „kolik“ a táže se tázající.“¹¹ Tento oddíl al-Chvárizmí doporučuje užívat v otázkách obchodování, výměny, objemu nebo váhy. U tohoto oddílu končí překlad Algebraického traktátu Robertem z Chesteru. V českém vydání [2] i [3] je ještě oddíl o měření, ve kterém se podle Donalda E. Knutha [12], str. 3-4 porovnává Mishnat ha-Middot, sepsaný židovským rabínem Nehemjanem, a al-Chvárizmího Algebraickým traktátem:

Oddíl o měření propojuje geometrii s algebrou a uvádí do arabského světa Archimедыovy výsledky z oblasti ploch rovinných i prostorových geometrických útvarů. Al-Chvárizmí nejprve zavádí plošné míry přes plochu čtverce. Jednotkovou plochu sice zavádí jako násobek stran obrazce se stejnými stranami a úhly (tj. obecně jako plochu pravidelného polygonu), uvažuje však o čtverci. Od plochy čtverce je naopak schopen odvodit délku strany jako kořen (odmocninu) plochy. Dále uvádí vztah pro obsah trojúhelníku pomocí výšky a poloviny základny, pro obsah kosočtverce pomocí součinu úhlopříček.

Vlastnosti kruhu a jeho částí jsou zde rozvedeny pečlivěji. Obvod kruhu řeší jako Archimedes přes $3 \frac{1}{7}$ násobek průměru (tj. pomocí násobku 3,142857), pro astronomy přes 62832 násobek průměru dělený 20000 (tj. z dnešního pohledu přesnějším násobkem 3,1416). Z obvodu dostane průměr obráceným postupem. Plochu kruhu počítá z průměru a obvodu. Rovněž se zabývá mírami kruhové výšeče pomocí míry oblouku a délky tětiny.

Následují tvrzení o objemu prostorových těles pomocí plochy podstavy a jejich výšky. Některá z nich al-Chvárizmí přebírá i od Eukleida.¹²

⁹ Viz [2], str. 128.

¹⁰ Viz [2], str. 128.

¹¹ Viz [2], str. 178.

¹² Tvrzení „Co se týče jehlanu trojúhelního, čtvercového a kruhového, mají tu vlastnost, že součin tětiny plochy jejich podstavy s výškou je objem.“ přebírá z XII. knihy Eukleidových *Základů*. Viz [2], str. 182.

Al-Chvárizmí uvádí Pythagorovu větu o rovnosti součtu čtverců sestrojených nad odvěsnami se čtvercem sestrojeným nad přeponou. Ovšem ve znění více algebraickém: „Každý pravoúhlý trojúhelník má tu vlastnost, jestliže vynásobíš obě kratší strany samy sebou, pak součet těchto součinů je roven součinu nejdelší strany samy se sebou.“¹³ Rovněž důkaz je jiný, než jaký známe od Eukleida.¹⁴

Dále rozlišuje pět čtyřúhelníků – čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník a obecný čtyřúhelník. Pro ně uvádí na názorných příkladech vztahy pro výpočet jejich plochy. „Co se týče ostatních čtyřúhelníků, definování jejich plochy se převádí na pravidla výpočtu ploch trojúhelníků s pomocí úhlopříček.“¹⁵

Rozdělení trojúhelníků a výpočtu jejich plochy věnuje dosti pozornosti. Rozlišuje trojúhelníky pravoúhlé, ostroúhlé a tupouhlé. Trojúhelníky mezi sebou porovnává podle jejich obsahu ve vztahu k Pythagorově větě (ostroúhlé trojúhelníky mají součet kvadrátů kratších stran větší než kvadrát nejdelší strany, u tupouhlých trojúhelníků je to naopak). U ostroúhlých trojúhelníků uvádí i vlastnosti pro rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník. Obsah tupouhlého trojúhelníka máme provádět pomocí výšky spuštěné na nejdelší stranu (aby pata výšky nebyla vně trojúhelníku).

V posledních závěrečných příkladech al-Chvárizmí řeší výpočet objemu komolého jehlanu se čtvercovou podstavou (s poznámkou pro kruhovou podstavu) a výpočet délky čtverce vepsaného do rovnoramenného trojúhelníku (výpočet velikosti pozemku).

3 Závěr

Al-Chvárizmího traktáty dokázaly přivést do Evropy novou aritmetiku, založenou na indické matematice kalkulací s velkými čísly, a algebru okořeněnou řeckou matematikou geometrického názoru. Jsou velmi důležitým svědectvím vývoje matematiky a přichází s naprosto novým přelomovým způsobem uvažování o matematice. Nová aritmetika představuje znalost indického aritmetického kalkulu, který dokáže velmi rychle předpovědět výsledek počítání s velkými čísly. Při znalosti algebraického kalkulu bylo možné pouhou kalkulací se znaky předpovědět řešení složité úlohy. K jejich vzájemnému plnohodnotnému propojení s geometrií, o kterou se algebraický kalkul opíral, dochází až s nástupem doby Reného Descarta.¹⁶ Díky algebře tak můžeme navrhnout geometrickou konstrukci a dále otevřít geometrii (algebraických) objektů, které antika nemohla uchopit.

Literatura

- [1] Al-Chorezmi M. Ibn M.: *Matematické traktáty*. Izdatel'stvo „FAN“ Uzbeckoj SSR, Taškent, 1983.
- [2] Al-Chvárizmí: *Aritmetický a algebraický traktát*. 2. vydání, OPS, Nymburk, 2009.
- [3] Al Chvárizmí: *Aritmetický a algebraický traktát*. 1. vydání, OPS, Nymburk, 2008.
- [4] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Dějiny matematiky 23, Prometheus, Praha, 2003.

¹³ „V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících.“ Srov. [13], str. 24, příp. [9], str. 79.

¹⁴ Viz [13], str. 24, [9], str. 79.

¹⁵ Viz [2], str. 185.

¹⁶ „Všechny úlohy geometrie lze snadno převést na takové termy, k jejich sestrojení stačí znát pouze délky některých úseček.“ – René Descartés: *La Géométrie*, Paris 1637. Citováno dle [2], str. 77.

- [5] Bečvář J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky 19, Prometheus, Praha, 2001.
- [6] Bečvářová M.: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*. Dějiny matematiky 20, Prometheus, Praha, 2002.
- [7] Benediktová Větrovcová M.: *Pokus o rekonstrukci obsahu původního arabského Aritmetického traktátu*. In: al-Chvárizmí: Aritmetický a algebraický traktát, OPS, Nymburk, 2009 (2. vydání), 7–83.
- [8] Cristannus de Prachaticz: *Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky*. Fontes Latini Bohemorum 3, OIKOYMENH, Praha, 1999.
- [9] Eukleides: *Základy I.–IV.* OPS Nymburk, 2008.
- [10] Isidor ze Sevilly: *Etymologiae I.–III. Etymologie I.–III.* OIKOYMENH, Praha, 2000.
- [11] Karpinski L. C.: *Two Twelfth Century Algorisms*. Isis 3(1921), 396–413.
- [12] Knuth D. E.: *Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science*. Report No. STAN-CS-80-786. Department of Computer Science, Stanford University, 1980.
- [13] Servít F.: *Eukleidovy Základy*. Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1907.
- [14] Šišma P.: *Arabská matematika*. In: Bečvář, J. et al. kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky 19, Prometheus, Praha, 2001.
- [15] Vopěnka P.: *Pojednání o prvních krocích matematiky kalkulací*. In: al-Chvárizmí: Aritmetický a algebraický traktát, OPS, Nymburk, 2009 (2. vydání), 85–109.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*.

Adresa

Mgr. Marie Benediktová Větrovcová
 Katedra filosofie
 Fakulta filozofická
 Západočeská univerzita v Plzni
 Sedláčkova 19
 306 14 Plzeň
 e-mail: marie.benediktova@gmail.com

DIELO KARLA ZAHRADNÍKA (GEOMETRICKÉ PRÁCE)

JÁN ČIŽMÁR

Abstract: This paper describes main topics and characteristic outline of the scientific work of Karel Zahradník, the founder of the Croatian university mathematical education and one of the first members of Czech geometrical school. His papers are devoted almost exclusively to the theory of plane algebraic curves, particularly to the theory of both conic sections and some classes of curves deduced from them.

1 Úvod

Vedecké dielo Karla Zahradníka (1848–1916), zakladateľa chorvátskeho univerzitného matematického vzdelávania a príslušníka prvej generácie českej geometrickej školy, je podstatnou časťou svojho objemu venované geometrickej tematike, a to téměř výlučne teórii rovinných algebrických kriviek, z veľkej časti teórii kužeľosečiek a teórii kriviek odvodených z kužeľosečiek, ako aj niektorým novým pohľadom na známe krivky antického obdobia a matematiky 16.–18. storočia a určitým zovšeobecneniam týchto kriviek. Začiatky Zahradníkovy publikačnej činnosti spadajú do obdobia, keď sa v strednej Európe, špeciálne v nemecky hovoriacich krajinách a v Čechách začala v geometrii viditeľne ustáľovať koncepcia tzv. novej geometrie (neuere Geometrie), čo z retrospektívy znamená projektívnu geometriu s výraznou prevahou syntetickej metódy v skúmaní objektov projektívneho priestoru reprezentovaného rozšíreným euklidovským priestorom ako téměř jediným a výlučným modelom. V českom prostredí k vytvoreniu tejto koncepcie zaiste výdatne prispelo aj pôsobenie Wilhelma Fiedlera (1832–1912) v rokoch 1864–1867 na nemeckej technike v Prahe. W. Fiedler bol vynikajúcim predstaviteľom a propagátorom tohto smeru projektívnej geometrie, pre ktorý výdatným zdrojom motivácie a nesmierne rozľahlou oblasťou aplikácie bola deskriptívna geometria s jej konjunktúrou tvorby zobrazovacích metód a štúdia hlavných geometrických objektov, ktorými boli teoreticky zaujímavé a aplikačne dôležité krivky a plochy. Toto zameranie si v stredoeurópskej a osobitne v rakúskej a českej deskriptívnej geometrii udržiavalo dominantné postavenie až do 30. rokov 20. storočia, čo je zreteľne zjavné z monografickej a učebnicovej tvorby tohto obdobia. Významnými reprezentantmi tohto spojenia deskriptívnej a projektívnej geometrie boli v českom prostredí o. i. Karel Pelz, Jan Sobotka a František Kadeřávek, ktorý s určitým historickým oneskorením fakticky uzatváral onú epochu.

Klasickou cestou sa spomedzi prvých tvorcov českej geometrickej školy vydal Emil Weyr (1848–1894), ktorý rozvíjal rýdzo projektívno-geometrickú líniu hlavne syntetickou metódou v duchu tradície rozpracovanej najmä J. Steinerom a M. Chaslesom. Nepodlieha pochybnosti, že tak ako K. Pelz aj Em. Weyr bol vo svojom vedeckom smerovaní silno ovplyvnený W. Fiedlerom. Vo Fiedlerovom celoživotnom diele sú pomerne vyvážené zastúpené a rozvíjané obe hlavné línie rozvoja projektívnej geometrie – línia syntetická i línia analyticko-geometrická. Pre druhú koncepciu mal v nemecky hovoriacom prostredí neoceniteľný význam Fiedlerov preklad a úprava monografie G. Salmona o analytickej

geometrii. K osobitostiam českej geometrickej školy patrí výrazná dominancia počtu prác opierajúcich sa o syntetickú metódu. Medzi nevelký počet tých autorov, ktorí väčšinu svojich vedeckých a odborných výsledkov dosahovali prevažne analytickou metódou, patrila K. Zahradník. Od začiatkov jeho publikačnej činnosti r. 1872 to bola hlavne teória rovinných algebrických kriviek, začínajúca sa analytickým spracúvaním špeciálnych typov racionálnych kriviek, ktorá cez riešenie početných problémov o objektoch zviazaných s kužeľosečkami až po niektoré drobnejšie problémy elementárnej povahy púťala Zahradníkovu pozornosť až do posledného obdobia jeho života. Jednotiacou črtou Zahradníkových vedeckých, odborných i metodických prác je zručné, obratné a vysoko produktívne používanie analytickej metódy vhodne doplnené menším rozsahom syntetických úvah v pasážach všeobecne prístupných a zrozumiteľných dobovému okruhu priemerne vysokoškolsky vzdelaných čitateľov-matematikov. Výber námetov i variabilita metód a prostriedkov Zahradníkových prác sú výrazne monotematické, čo výstižne charakterizoval už Matyáš Lerch ([1]).

2 Preliminária

Zo 114 položiek úplného zoznamu publikácií K. Zahradníka, vypracovaného M. Bečvářovou ([1]), 90 položiek zaznamenáva publikácie priamo späté s geometriou. Z toho počtu približne 67 možno označiť za pôvodné práce, hoci niekoľko z nich je v identickom alebo temer identickom znení publikovaných v dvoch a v niektorých prípadoch dokonca v troch jazykoch – v češtine, nemčine a chorvátčine. Taktiež originalita prác je rozdielna – kolíše od drobných doplnení a poznámok k známym vetám až po zovšeobecňujúce výsledky o niektorých triedach rovinných algebrických kriviek.

Pre orientáciu čitateľa je potrebné uviesť niekoľko poznámok o charaktere ambientnej roviny geometrických objektov skúmaných Zahradníkom, ako aj o metódach a prostriedkoch, pomocou ktorých toto skúmanie prebiehalo. Výlučným typom roviny, s ktorým K. Zahradník pracoval, bola reálna euklidovská rovina doplnená množinou *nevlastných bodov* všetkých priamok euklidovskej roviny; množina všetkých takých bodov tvorila *nevlastnú priamku*, ktorou doplnená euklidovská rovina sa nazývala *rozšírenou euklidovskou rovinou*. Incidenčná štruktúra tejto roviny bola izomorfná s incidenčnou štruktúrou projektívnej roviny a tento model projektívnej roviny bol po desaťročia temer výlučným reprezentantom projektívnej roviny. (Vysokoškolskí učitelia z radov absolventov učiteľského štúdia matematiky a deskriptívnej geometrie v I. (medzivojnovéj) Československej republike ho používali vo výučbe projektívnej geometrie ako hlavný model ešte v 60. rokoch 20. storočia.) Konfúznosť tohto modelu spočívala v tendencii využívať metrické vlastnosti jeho vlastnej časti (t. j. euklidovskej roviny) na štúdium projektívnych objektov, a v následnom zahmlenom chápaní vzťahu metrických a projektívnych vlastností a invariantov. Bez prehánania možno konštatovať, že K. Zahradník (ako väčšina jeho súčasníkov) neprekonal chápanie projektívnej roviny v koncepcii, v akej ju prezentoval napr. J. Steiner v rozsiahlej práci *Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises* [Konštrukcie realizované pomocou priamky a pevnej kružnice, 1833]. Pritom bola už dostatočne dlhý čas k dispozícii koncepcia projektívnej geometrie zbavená metriky a založená na rýdzo incidenčnom základe *harmonickosti*, predstavená Christianom von Staudtom (1798–1867) v jeho knihe *Geometrie der Lage* [Geometria polohy, 1847] ([2]).

V rozšírenej euklidovskej rovine sa spravidla používala pravouhlá alebo kosouhlá karteziánska sústava súradníc so všetkými jej možnosťami využiť nehomogénne súradnice na analytickú reprezentáciu metrických objektov a metrických vlastností vlastnej časti tejto roviny. To, samozrejme, zase vylučovalo možnosť rovnocenne formulovať projektívne

vlastnosti vlastných a nevlastných prvkov používaného modelu roviny. Prostriedkom, ktorý umožňoval zrovnoprávnenie vlastných a nevlastných prvkov, ako aj použitie duality medzi množinami všetkých bodov a všetkých priamok projektívnej roviny, bolo používanie *homogénnych súradníc*, exaktne prezentovaných napr. Juliusom Plückerom (1801–1868) v jeho diele *Theorie der algebraischen Curven* (Teória algebrických kriviek, 1839) ([2]). K. Zahradník používal homogénne súradnice ojedinele, i keď ich metódu nepochybne ovládal: na vyjadrovanie metrických a podobnostných vlastností – a hlavne o tie v Zahradníkových prácach ide – sú homogénne súradnice nevhodné.

Používanie nehomogénnych reálnych súradníc na charakterizáciu určitých množín daných alebo hľadaných bodov či priamok v niektorých situáciách, keď tieto množiny boli definované algebrickými rovnicami medzi súradnicami predmetných bodov alebo priamok, prinášalo vážne výsledky spôsobené faktom, že korene vyskytujúcich sa algebrických rovníc (s reálnymi koeficientmi) boli *imaginárne*. Dobové východisko spočívalo v deklarácii bodov alebo priamok s týmito súradnicami za *imaginárne* body, resp. priamky, jednoducho doplnené k existujúcim reálnym bodom, resp. priamkam (t. j. k bodom a priamkam, ktorých všetky súradnice boli reálne) rozšírenej euklidovskej roviny bez vyjasnenia zmeny štruktúry, ktorú akceptácia imaginárnych objektov prináša. (Všeobecne známym príkladom imaginárnych bodov sú *kružnicové body* (chybne nazývané *kruhovémi*) v rozšírenej euklidovskej rovine doplnenej imaginárnymi prvkami: sú to body doplnenej nevlastnej priamky, ktorých zodpovedajúce súradnice sú združené komplexné čísla formálne vyhovujúce rovnici každej kružnice euklidovskej roviny.) Zahradníkova doba nedospela k explicitnému pochopeniu zástoja algebrickej štruktúry, tvoriacej základňu analytickej definície ambientného priestoru, ani k pojmu aritmeticko-algebricko-geometrickej komplexifikácie tohto priestoru. (Tento proces sa nemohol uskutočniť z objektívnych historických príčin: teória algebrických štruktúr bola v štádiu zrodu a jej geometrické aspekty boli predmetom výskumu vo vzdialenej budúcnosti.) Ani Kleinov grupový princíp klasifikácie geometrií načrtnutý r. 1872 v Erlangenskom programe nemohol z rozličných – väčšinou objektívnych – príčin aktuálne vstúpiť do komplexného diania v geometrii vedeckého prostredia, v ktorom žil, pôsobil a vedecky pracoval K. Zahradník.

3 Geometrické práce K. Zahradníka

Zo 67 publikovaných geometrických prác, ktoré možno označiť za samostatné a v istej miere originálne, po vynechaní duplicitných článkov, prác menšieho významu a menšej originality, ako aj článkov výrazne metodického zamerania zostáva približne 45 – 48 prác, ktoré výstižne charakterizujú geometrické vedecko-odborné dielo K. Zahradníka. Podľa vecného tematického kritéria a detailnejšieho zamerania na partikulárne témy možno ich rozdeliť do týchto skupín:

1. Teória kužeľosečiek
 - a. Vlastnosti kužeľosečiek – 7 prác
 - b. Množiny bodov na kužeľosečkách a bodové korešpondencie – 6 prác
2. Krivky odvodené pomocou kužeľosečiek – 3 práce
3. Špeciálne krivky – 8 prác
4. Všeobecnejšia teória niektorých typov algebrických kriviek
 - a. Typy kriviek a ich vlastnosti – 11 prác
 - b. Korešpondencie v sústavách bodov na krivkách – 4 práce
 - c. Transformácie a všeobecnejšie korešpondencie – 2 práce
5. Rôzne – 6 prác

Úplný zoznam publikácií K. Zahradníka, podrobná analýza väčšiny prác uvedených piatich skupín a ich zhodnotenie budú okrem súvisiacej tematiky o živote a diele K. Zahradníka predmetom kompletnej monografie M. Bečvárovej ([1]). Tento príspevok, rešpektujúc zameranie letnej školy histórie matematiky a všeobecné pokyny organizátorov, sa orientuje na výber typických reprezentatívnych prác jednotlivých skupín, ich obsahový opis a stručnú charakteristiku. Základný obraz o obsahu a kvalitách Zahradníkovho vedecko-odborného diela bude možné touto prezentáciou nadobudnúť, pretože väčšina prác v určitej skupine má rovnakú alebo veľmi podobnú schému a rozdiely medzi prácami sú založené skôr na konkrétnej povahe sledovaných objektov a na rôznych modifikáciách globálnej témy.

3.1 Teória kuželosečiek

a) Vo väčšine prác tejto skupiny sa K. Zahradník zaoberá formulovaním a dokazovaním – s veľkou prevahou analytickou metódou – tých vlastností regulárnych kuželosečiek, ktoré sa neuvádzajú v prvoplánových kurzoch analytickej geometrie kuželosečiek. Napr. v práci *Prilog teoriji čunjosječica* [Príspevok k teórii kuželosečiek] (Rad Jugoslávanske akademije znanosti i umjetnosti 131(1897), 63–71), v jej českej verzii *Príspevek k teorii kuželoseček* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 28(1899), 37–45) a v nemeckej verzii *Zur Kegelschnittlehre* [K teórii kuželosečiek] (Archiv der Mathematik und Physik 17(1899), 89–96) ukazuje netriviálnu syntetickú konštrukciu dotýčníc regulárnej kuželosečky a správnosť konštrukcie potvrdzuje analytickým výpočtom. Predpísaním určitých projektívnych alebo metrických vlastností pre hľadané množiny bodov a vyhľadáním týchto množín analytickou metódou získava ďalšie krivky vyšších stupňov. Na odvodenie vlastností elipsy používa aj perspektívnu afinitu (bez tohto pomenovania) medzi kružnicou a elipsou.

Zahradníkove okruhy problematiky a metódy jej riešenia názorne a extrémne detailne demonštruje rozsiahla dvojdielna práca *Teorija parabole na temelju racionalnoga parametra* [Teória paraboly na základe racionálneho parametra] (Rad Jugoslávanske akademije znanosti i umjetnosti 64(1882), 105–152; 72(1885), 145–154). K. Zahradník v práci rozvíja tradičnú líniu projektívnej teórie paraboly s plným využívaním euklidovskej metriky vo vlastnej časti rozšírenej euklidovskej roviny, zaoberá sa metrickými vlastnosťami trojuholníkov opísaných parabole a vpísaných do paraboly, skúma vzťah kružnice a paraboly, vlastnosti štvoruholníka vpísaného do paraboly, harmonickosť a ekvianharmonickosť, oskulačné kružnice, normály, evolútu, trojuholník normál, úpätnicu, obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov súvisiacich nejakým spôsobom s parabolou, ďalšie objekty asociované s parabolou, bodové a dotýčnicové involúcie na parabole, kuželosečky a najmä paraboly odvodené rôznymi spôsobmi od paraboly. Záber siaha od elementárnogeometrického prístupu cez projektívno geometrické studium až po diferenciálnogeometrické skúmanie, pravda, bez exaktného diferenciálnogeometrického aparátu.

b) Päť zo šiestich prác tejto skupiny je venovaných jednej téme, a to bodovej (3, 3)-korešpondencii, ktorú na regulárnej kuželosečke v rozšírenej euklidovskej rovine tvoria tieto objekty: ľubovoľný bod ako spoločný bod troch oskulačných kružníc, ktoré majú tento bod za oskulačný, a trojica bodov, ktoré sú štvrtými spoločnými bodmi kuželosečky s uvedenými tromi oskulačnými kružnicami. Obrátene, každým vlastným bodom kuželosečky prechádzajú tri oskulačné kružnice, ktorých body oskulácie ležia separovane vždy s daným bodom na jednej kružnici z tejto trojice; tak je každému bodu kružnice priradená trojica oskulačných bodov kružnice. Pri voľbe bodu kuželosečky racionálnym parametrom sú parametre bodov priradenej trojice určené ako korene istej kubické rovnice. Toto priradenie trojice bodov

kuželosečky k jednému bodu, ku ktorému existuje v zmysle korešpondencie priradenie inverzné tej istej definičnej vlastnosti, nazýva Zahradník v duchu dobových kánonov *kubickou involúciou*. Opisuje ju v práci *Vlastnosti jistých trojin oskulačních na kuželosečce* (Archiv matematiky a fysiky 2(1878), 227–235), v jej mierne modifikovanom nemeckom preklade *Oskulationstripel am Kegelschnitte* [Oskulačné trojice na kuželosečke] (Archiv der Mathematik und Physik 69(1883), 419–426), v rozsiahlej dvojdielnej štúdii *Prilog k teoriji kubične involucije na čunjoseku* [Príspevok k teórii kubické involúcie na kuželosečke] (Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 92(1888), 73–101; 95(1889), 1–23) a vracia sa k nej v práci *Einige Eigenschaften der Oskulationstripel am Kegelschnitte* [Niektoré vlastnosti oskulačných trojíc na kuželosečke] (Věstník Královské české společnosti nauk V, 1910, 6 strán) a v jej českom preklade *Některé vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 41(1912), 519–523). V zmysle dnešného chápania pojmov a terminológie, keď sa involúciou nazýva cyklické projektívne *zobrazenie* stupňa 2, by sa opísané priradenie nazvalo 0-rozmernou algebrickou korešpondenciou stupňa (3, 3).

3.2 Krivky odvodené pomocou kuželosečiek

V práci *O místě bodu, jehož tětiva styku má pro danou kuželosečku stálou délku* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 6(1877), 139–142) K. Zahradník vyšetruje obálku všetkých priamok euklidovskej roviny, ktoré pretínajú danú kuželosečku v tetivách konštantnej dĺžky. Zisťuje, že obálkou je krivka 4. stupňa. Ďalej sa zaoberá vzťahom takýchto kriviek – jednoparametrickou sústavou, pre ktorú parametrom je dĺžka uvedenej tetivy.

V práci *O nekih krivuljah izvedenih iz sjeka čunja* [O niektorých krivkách odvodených od kuželosečky] (Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 40(1877), 166–171) a v jej českom preklade *O některých křivkách z kuželosečky odvozených* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 7(1878), 168–173) vyšetruje množinu všetkých bodov v rovine kuželosečky, ktoré s dotykovými bodmi dotyčníc prechádzajúcich daným bodom ku kuželosečke tvoria trojuholník konštantného obsahu. Hľadaná množina bodov je krivka 6. stupňa, pre ktorú sa ďalej hľadajú singularity a podmienky rozložiteľnosti.

3.3 Špeciálne krivky

Tri kratšie články z raného obdobia Zahradníckovej vedeckej tvorby (1877) sa zaoberajú drobnejšími problémami, ktoré sa v miernych obmenách vyskytujú v rôznych Zahradníkových prácach počas celého jeho aktívneho pôsobenia. Prvým problémom je hľadanie množiny všetkých bodov v euklidovskej rovine, ktoré s dotykovými bodmi dotyčníc prechádzajúcich bodom k cisoide tvoria trojuholníky konštantného obsahu. Hľadanou množinou je krivka 5. stupňa. Rovnako formulovaná úloha pre kardioidu vedie ku krivke 8. stupňa. Tretia úloha sa opäť týka kardioidy a spočíva v hľadaní množiny vrcholov dotykových trojuholníkov rôznych od dotykových bodov, keď ťažisko týchto trojuholníkov prebieha určitou krivkou. Ak je touto krivkou algebrická (rovinná) krivka stupňa n , hľadaná krivka je algebrickou rovinnou krivkou stupňa $4n$.

V článku *Geometrijske opazke* [Geometrické poznámky] (Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 75(1885), 211–220) sú vyšetrované niektoré konchoidy vytvárané pohybom bodu zviazaného s kružnicou pohybujúcou sa po pevnej kružnici. Podľa schémy

často opakujúcej sa aj v iných prácach sú predmetom výskumu aj metrické charakteristiky (dĺžka a obsah) niekoľkých sprievodných útvarov.

V práci *Contribution a la théorie des cubiques cuspidales* [Príspevok k teórii kuspídálnych kubík] (*Nouvelles annales de mathématiques*, 3. série, 181(1899), 381–407) K. Zahradník vyšetruje štandardným postupom analytickými metódami tematiku obvyklú pre racionálnu rovinnú krivku tretieho stupňa a tretej triedy biracionálne ekvivalentnú s priamkou. Osobitnú pozornosť venuje projektívnemu zobrazeniu dvoch sústav priamok asociovaných určitým spôsobom vzhľadom na krivku.

V článku *Einige Bemerkungen zu den zirkularen Zissoidalen als Fusspunktkurven* [Niekoľko poznámok k cirkulárnym cisoidálam ako úpätniciam] (*Věstník Královské české společnosti nauk* III, 1909, 8 strán) sa Zahradník zaoberá niekoľkými konštrukciami viazanými na racionálnu cirkulárnu kubiku, ktorú možno považovať za cisoidálu generovanú regulárnou kužeľosečkou a priamkou. Ukazuje, že tieto kubiky možno vytvoriť ako úpätnicové krivky paraboly. Uvádza podrobnú tabuľku, v ktorej je zachytené, ako od volby základných charakteristík paraboly závisí konštrukcia jej úpätnicovej krivky na jednej strane a konštrukcia týchto kriviek ako cisoidálnych kriviek na druhej strane.

Posledná práca tejto skupiny *Zur Theorie der Fokale* [K teórii fokály] (*Věstník České královské společnosti nauk* IV, 1911, 16 strán) je venovaná štandardnej metrickej a projektívnej problematike fokály ako rovinnej algebrickej krivky. (Fokála je množina všetkých ohnisk všetkých kužeľosečiek zväzku.)

3.4 Všeobecnejšia teória niektorých typov algebrických kriviek

Ústrednou témou temer všetkých prác tejto skupiny je teória racionálnych rovinných algebrických kriviek tretieho stupňa. Sú to unikurzálne kubiky s jedným dvojnásobným bodom, ktoré sú biracionálne ekvivalentné s priamkou, čo v tomto prípade znamená – keďže rozmer krivky sa rovná 1 – že okrem konečného počtu bodov existuje vyjadrenie súradníc každého bodu krivky pomocou racionálnych funkcií jedného reálneho parametra označujúceho nehomogénnu súradnicu určitého bodu priamky (to je zobrazenie priamky na kubiku), a obrátene, temer ku každému bodu krivky existuje racionálna funkcia nehomogénnych súradníc x, y bodu, ktorej hodnota ako reálny parameter je súradnicou určitého bodu priamky v lokálnej sústave súradníc na priamke. „Jednparametrickosť“ ireducibilnej kubiky s jedným dvojnásobným bodom vyplýva z faktov, že a) ireducibilná kubika nemôže mať viac singulárnych bodov než jeden dvojnásobný a b) každá priamka incidujúca s dvojnásobným bodom kubiky pretína kubiku – okrem konečného počtu prípadov – v jedinom ďalšom bode. Z týchto faktov s prihliadnutím na druh dvojnásobného bodu (či ide o uzlový bod alebo o bod vratu) vyplývajú podľa Plückerových vzorcov závery pre triedu krivky, čo je pre danú krivku maximálny možný počet jej dotyčníc incidujúcich s jedným bodom.

Touto tematikou sa K. Zahradník zaoberal od prvých rokov svojej vedeckej činnosti (prvá publikácia r. 1873) temer do posledných rokov svojich publikačných aktivít (posledná publikácia r. 1908). Okrem základných geometrických vlastností kriviek často skúmal také otázky, akými sú incidencia konečného počtu bodov kubiky s algebrickou krivkou stupňa n , oskulácia, vlastnosti normál a evolút, útvary odvodené od dotyčníc, otázky dĺžok a obsahov útvarov pridružených ku krivke, korešpondencia sústav bodov na krivke atď. Formuláciu problémov a riešenia mnohostranne približuje napr. trojdielna štúdia *Rationale ebene Curven*

der dritter Ordnung [Racionálne rovinné krivky tretieho rádu] (Archiv der Mathematik und Physik 56(1874), 134–152; 58(1876), 23–36; 61(1877), 1–18). Všeobecné metódy a teoretické výsledky sú neraz konkretizované na špeciálnych krivkách, akými sú napr. cisoida, strofoida, Descartov list. Zaujímavý zjednocujúci pohľad na niektoré známe krivky prináša obširny článok *Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen* [Jednotný výtvar známych racionálnych kriviek tretieho rádu ako cisoidál] (Věstník Královské české společnosti nauk XXX, 1906, 19 strán). Príklon k všeobecnejším projektívnym metódam prináša práca *Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung, respektive Klasse vermittle der kollinear incidenten Elemente* [Konštrukcie racionálnych kriviek tretieho a štvrtého rádu, resp. triedy, prostredníctvom kolineárne incidentných prvkov] (Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 117(1908), 1167–1190). Temer monografický charakter má rozsiahla dvojdielna práca *O krivuljah u ravnini* [O rovinných krivkách] (Rad Jugoslavske akademije znanosti i umjetnosti 64(1882), 1–65; 75(1885), 79–180), kde je syntézou diferenciálnogeometrických a v menšej miere projektívnych prostriedkov prezentovaná teória rovinných algebrických i transcendentných kriviek s množstvom detailne vypracovaných príkladov.

Práce v častiach b) a c) reprezentujú projektívno geometrické prístupy k tradičnej problematike projektívnej geometrie v oblasti rovinných algebrických kriviek.

3.5 Rôzne

Tematicky rozptýlené práce tejto skupiny sú väčšinou venované hlbšiemu skúmaniu elementárnogeometrických problémov s výsledkami, ktoré neboli v dobe vzniku známe a ani dnes nepatria do obsahu základnej teórie. Hodnotný je v niektorých smeroch ich metodický prínos.

Článok *Ein geometrischer Lehrsatz* [O istej geometrickej vete] (Archiv für Mathematik und Physik 56(1874), 11–15) opisuje situácie, pri ktorých isté viazané pohyby vrcholov trojuholníka majú za následok pohyb ťažiska trojuholníka po racionálnej krivke tretieho stupňa; za zovšeobecnených podmienok pohybu opisuje ťažisko krivku štvrtého stupňa. Časť základnej formulácie vety bola známa už Pappovi.

V práci *Ueber einige Winkel- und Längenrelationen am Dreiecke* [O istých vzťahoch uhlov a dĺžok v trojuholníku] (Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reihe, 6(1888), 415–423) K. Zahradník skúma dotykové konfigurácie dvoch kružníc a tetivy jednej z týchto kružníc, opisuje krivky, ktorými prebiehajú isté body pri určitých pohyboch základných útvarov a odvodzuje numericky pomerne komplikované vzťahy týkajúce sa veľkostí uhlov, dĺžok niektorých charakteristík vyskytujúcich sa trojuholníkov a obsahov týchto trojuholníkov v závislosti od lineárnych charakteristík. Článok je hlavne demonštráciou Zahradníkovho spoľahlivého ovládania analytickej metódy a vhladu do geometrických vzťahov.

Z hľadiska neskorších teoretických výskumov a výsledkov je zaujímavý článok *Cissoidalcurven* [Cisoidálne krivky] (Archiv für Mathematik und Physik 56(1874), 8–10), v ktorom je uvedená zovšeobecnená konštrukcia podľa vzoru konštrukcie Dioklovej cisoidy. Kružnica Dioklovej konštrukcie je nahradená ľubovoľnou regulárnou kužeľosečkou a dotyčnica kružnice ľubovoľnou priamkou. V článku sú zreteľné zárodky neskoršej rozvetvenej teórie cisoidálnych kriviek a racionálnych kriviek tretieho stupňa.

4 Záver

Geometrické práce Karla Zahradníka, ktoré tvoria podstatnú časť jeho vedeckého a odborného diela, zaujímajú osobitné postavenie v tvorbe prvej generácie českej geometrickej školy. V protiklade s prevládajúcou dominanciou syntetickej metódy ide u Zahradníka o jednoznačnú prevahu analytickej metódy, ktorou sa dosahovala jasnosť a presnosť výsledkov, nie vždy dosiahnuteľná pri používaní syntetických prostriedkov. Napriek povrchnému zdaniu, že voľba Zahradníkových tém a problémov nesiahala do náležitých výšok teórie, jeho prechod od jednoduchého zovšeobecnenia Dioklovej cisoidy cez cisoidálne krivky až po teoretické spracovanie racionálnych kriviek 3. stupňa zaradil K. Zahradníka k európskej vedeckej garnitúre slušnej úrovne a po zásluže mu mal zaistiť aj čestné miesto v zozname tvorcov českej geometrickej školy a českých matematikov 19. storočia. Ak sa tak doteraz nestalo v zaslúženej miere, je úlohou súčasnej historiografie matematiky tento dlh splatiť.

Literatúra

- [1] Bečvářová M.: *Karel Zahradník*. Matfyzpress, Praha, 2011. Pripravovaná monografia.
- [2] Kolmogorov A. N., Juškevič A. P.: *Matematika XIX veka*. Nauka, Moskva, 1981.

Adresa

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta
Trnavská univerzita
Priemyselná ul. č. 4
P.O. BOX 9
918 43 Trnava
Slovenská republika
e-mail: jan.cizmar@truni.sk, cizmar@fmph.uniba.sk

KDO JE AUTOREM AXIOMATIKY PODMÍNĚNÝCH PRAVDĚPODOBNOSTÍ?

FRANTIŠEK FABIAN

Abstract: The development of probability theory and mathematical statistics was enabled by introducing axioms of probability which are connected with the famous names such as A. N. Kolmogorov (1933). His approach was later enlarged to the concept of the axioms of conditional probability in some works by Alfred Rényi (1954, 1955, 1956). Nevertheless, a Czech author Otomar Pankraz published an article presenting the same conclusions as Rényi in 1939. We would like to remember this fact as an important confirmation of the high level of Czech probability theory before the second world war.

1 Úvod

Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika se během svého vývoje vypracovaly jak po teoretické tak aplikační stránce na přední místo pozornosti v rámci matematických oborů. Je tedy přirozené, že jejich postupnému rozvoji je věnována stále větší pozornost i z hlediska historického, a to nejen z přínosů autorů zahraničních (např. [1], [2]), ale i českých ([3], [5], [12], [13], [15]). Vysoce hodnotím zapojení pracovníků Katedry pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK v Praze do činností historické povahy, zejména připomínání osobností zahraničních v naší zemi ne zcela známých (např. [14], [17]) či domácích, které neprávem upadly v zapomenutí ([16]). Tento příspěvek inspirovaný uvedenými snahami si klade za cíl vzpomenout zásluh jednoho ze zapomenutých českých badatelů na poli teorie pravděpodobnosti. Otomar Pankraz byl stručně zmíněn v textu [3], nyní se na jeho osobu a přínos podíváme podrobněji.

2 Axiomatika teorie pravděpodobnosti

Výchozím pojmem teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky respektive dalších navazujících matematických disciplín je *pravděpodobnost*, která sama o sobě má i z historického hlediska svérázné postavení. V rámci matematiky získala špičkový význam formulováním axiomatiky spojované se jmény významných světových matematiků, zejména A. N. Kolmogorova (viz [4]).

Přestože Kolmogorovův přístup bezpochyby zahájil novou etapu ve vývoji teorie pravděpodobnosti, objevily se problémy, jejichž řešení nebylo možno beze zbytku zvládnout. Byla proto otevřena cesta k dalšímu rozšíření Kolmogorovovy teorie. Jako možné východisko se ukázala myšlenka formulovat axiomatický přístup pro tzv. podmíněnou pravděpodobnost jako základní výchozí pojem. Jestliže $0 \leq P(A) \leq 1$ je funkce definující pravděpodobnost nastání náhodného jevu A , symbolem $P(A|B)$ značíme *pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B* , jako funkci dvou náhodných jevů. Po matematické stránce je zpracování uvedené problematiky publikováno v učebnici teorie pravděpodobnosti A. Rényiho [9] z roku 1972. Autor se zabýval tímto přístupem již v padesátých letech ([6], [7], [8]). Zajímavá je také

Rényiho poznámka v tom smyslu, že idea takového rozšíření pochází od A. N. Kolmogorova, který však žádné práce v tomto směru nepublikoval.

3 Přínos O. Pankraze

Před řadou let zaujal moji pozornost rozsáhlý článek [10] otištěný v Rozpravách Jednoty pro vědy pojistné, jehož autorem byl doc. Dr. Otomar Pankraz. Připomeňme nejprve základní fakta o jeho životě a profesní kariéře. Narodil se 25. 3. 1903 v Nových Dvorech u Písku. V letech 1914–1918 studoval na klasickém gymnáziu v Písku, v letech 1919 až 1923 absolvoval vyšší státní průmyslovou školu v Praze a poté vystudoval formou mimořádného studia na Přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity matematiku a fyziku. V roce 1931 byl promován doktorem přírodních věd. Nad rámec rigorózních zkoušek složil na PřF UK zkoušku z pojistné matematiky a matematické statistiky, přičemž již předtím byl zaměstnán na pozici pojistného matematika ve Všeobecném penzijním ústavu v Praze. Aby mohl vědecky pracovat, nastupuje od května 1931 na místo asistenta na II. ústavu matematiky Vysoké školy strojního a elektrotechnického inženýrství ČVUT, kde setrval až do uzavření českých vysokých škol v roce 1939. V listopadu 1935 se habilitoval pro obor pojistná matematika a matematická statistika na Karlově univerzitě, v březnu 1938 se habilitoval pro obor matematika na ČVUT. Pedagogicky působil na UK v letech 1936 až 1939 a na ČVUT ve školním roce 1938/1939.

Ve své odborné práci se věnoval pojistné matematice a matematické statistice, později matematické analýze a logice. Publikoval řadu vědeckých článků, například v *Časopise pro pěstování matematiky a fyziky*, zmiňme [11], připravoval knihu *Matematická logika s použitím na fyzikální a hospodářské myšlení*, která ale nikdy nevyšla. Po uzavření českých vysokých škol odmítl ministerstvem školství nabízenou možnost zaměstnání středoškolského učitele. Svou pracovní situaci nevyřešil během celé války, několikrát neúspěšně žádal o přidělení k pražské Hospodářské správě vysokých škol, pro kterou byl nakonec pověřen inventarizací přístrojů a sbírek české techniky v Praze. Válka zásadně ovlivnila jeho osud, neboť za své postoje během ní byl v roce 1946 odsouzen k pěti letům těžkého žaláře. Zemřel v Praze 12. prosince 1976. Další údaje o jeho životní dráze lze najít v internetovém zdroji [18].

Při prvním setkání s článkem [10] jsem si závažnost jeho obsahu po historické stránce neuvědomoval. Teprve po seznámení s texty A. Rényiho jsem si uvědomil jeho dalekosáhlý význam jak po stránce obsahové tak především historické. O vysoké matematické úrovni přístupu O. Pankraze svědčí názvy některých kapitol jeho článku, které mají bezprostřední souvislost s naším tématem:

- *Některé teoreticko-množinové pojmy. Isomorfismus.*
- *Axiomy Kolmogorovovy a jejich kritika.*
- *Úplnější axiomatický systém počtu pravděpodobnosti.*

Oba autoři, O. Pankraz i A. Rényi, v podstatě řeší otázku, zda pravděpodobnost je definitoricky množinová funkce jednoho či dvou argumentů. Docházejí ke stejnému závěru, ovšem O. Pankraz o řadu let dříve. Je tedy zřejmé, komu patří priorita

uvedeného zaměření. Necitování ze strany A. Rényiho patrně souvisí s neznalostí existence české publikace nejen v oné době, ale v podstatě dodnes. Jde přitom o významné rozšíření axiomatiky pravděpodobnosti a je pro nás, Českou republiku, podstatné, že je zemí původu jeho autora. Mimo jiné uvedená priorita dokumentuje i vysokou úroveň teorie pravděpodobnosti jako přední disciplíny matematiky v té době na českém území.

Literatura

- [1] Hald A.: *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*. Wiley, New York, 1990.
- [2] Hald A.: *A History of Mathematical Statistics. From 1750 to 1930*. Wiley, New York, 1998.
- [3] Hykšová M.: *Příspěvek českých matematiků k teorii pravděpodobnosti*. Sborník 27. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2006, 30–31.
- [4] Kolmogorov N. A.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Julius Springer, Berlin, 1933.
- [5] Mačák K.: *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938*. Dějiny matematiky, svazek 26, Ústav pro soudobé dějiny AV ČR, Praha, 2005.
- [6] Rényi A.: *Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954, 7–15.
- [7] Rényi A.: *On a new axiomatic theory of probability*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6(1955), 285–335.
- [8] Rényi A.: *On conditional probability spaces generated by a dimensionally ordered set of measures*. Teor. Verojavn. Prim. 1(1956), 61–71.
- [9] Rényi A.: *Teorie pravděpodobnosti*. Academia, Praha, 1972.
- [10] Pankraz O.: *O axiomech počtu pravděpodobnosti*. Rozpravy Jednoty pro vědy pojištné 19(1939), 38–70.
- [11] Pankraz O.: *O pojmu pravděpodobnosti*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 69(1940), D73–81, D161–165.
- [12] Závodský P.: *Vývoj statistické teorie na území Československa do roku 1848*. Federální statistický úřad, Praha, 1992.
- [13] Zichová J.: *Daniel Bernoulli a metoda maximální věrohodnosti*. Informační bulletin České statistické společnosti 3(1992), 1–5.
- [14] Zichová J.: *Co možná nevíte o rodině Bernoulliů*. Informace Matematické vědecké sekce JČMF 38(1992), 41–44.
- [15] Zichová J.: *Teorie pravděpodobnosti a rukopisný spor*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 49(2004), 95–103.
- [16] Zichová J.: *Josef Erben a jeho přínos pro pražskou statistiku v 19. století*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 54(2009), 57–71.

[17] Zichová J.: *Thorvald Nicolai Thiele – dánský statistik a aktuár*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 55(2010), 30–42.

[18] Otomar Pankraz. www.math.muni.cz/~sisma/pankraz.pdf [cit. 28. 5. 2010]

Adresa

Prof. Ing. František Fabian, CSc.

V Olšínách 2012/126

100 00 Praha 10

BRUNO DE FINETTI (1906–1985) A FILOSOFIE PRAVDĚPODOBNOSTI

MAGDALENA HYKŠOVÁ

Abstract: The contribution commemorates the Italian mathematician and statistician Bruno de Finetti who died 25 years ago. The main stress is put on his philosophical conception of probability: Finetti promoted its subjective interpretation that identifies probability with the degree of personal belief in the occurrence of a given event. The asset of this approach to didactics of mathematics is stressed, too.

1 Bruno de Finetti

Bruno de Finetti se narodil 13. června 1906 v rakouském Innsbrucku. Otec Gualtiero byl inženýr původem z Terstu, který v Innsbrucku pracoval jako železniční konstruktér. Po jeho náhlé smrti v roce 1912 se rodina přestěhovala do rodného města Brunovy matky, italského Trenta. Zde Bruno navštěvoval základní školu a gymnázium. Protože měl pokračovat v rodinné inženýrské tradici, nastoupil v roce 1923 na polytechniku v Miláně. Ve třetím ročníku však přestoupil na nově založenou milánskou univerzitu, na níž bylo možné studovat matematiku; studia zakončil v roce 1927 úspěšnou obhajobou disertační práce z oblasti afinní geometrie. Po absolutoriu Finetti nastoupil do statistického úřadu Istituto Centrale di Statistica (ISTAT) v Římě, v roce 1930 se navíc habilitoval pro matematickou analýzu na římské univerzitě, kde pak přednášel jako soukromý docent. V roce 1931 odešel do Terstu, kde do roku 1946 pracoval jako pojistný matematik pro pojišťovnu Generali. Kromě toho učil matematickou analýzu, finanční a pojistnou matematiku a počet pravděpodobnosti na univerzitě v Terstu a dva roky také v Padově. V roce 1946 byl jmenován řádným profesorem finanční matematiky a statistiky na univerzitě v Terstu, v roce 1954 získal profesuru na univerzitě v Římě, kde působil až do svého odchodu na odpočinek v roce 1976. Bruno de Finetti zemřel 20. července 1985 v Římě.

Vědecky byl Finetti aktivní v celé řadě oborů: v matematické analýze, ekonomii, teorii rozhodování, hodnocení rizika, výpočetní technice a finanční a pojistné matematice. Nejvýznamnější jsou však jeho práce z oblasti teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky; z nich se v tomto příspěvku zaměříme na práce týkající se samotných základů pravděpodobnosti.

2 Filosofie pravděpodobnosti

Finetti poukazoval na problémy různých přístupů k pravděpodobnosti a jediné východisko viděl v důsledném subjektivismu. Jak sám později uvedl ve svých přednáškách [5], na tuto myšlenku jej přivedla četba Czuberovy knihy [1], která začíná diskusí různých přístupů k pravděpodobnosti. Své nové základy pravděpodobnosti Finetti popsal v přednášce na Mezinárodním sjezdu matematiků v Bologni v roce 1928, která byla publikována o čtyři roky později [4], a dále pak například v pojednáních [2] a [3]. Z dalších prací¹ zde uvedme již jen posmrtně vydanou knihu [5], která zachycuje, jak Finetti pohlížel na

Práce vznikla za podpory grantu GAČR 401/09/1850.

¹ Úplný seznam publikací týkajících se filosofie pravděpodobnosti lze nalézt například v [7].

teorii pravděpodobnosti ke konci svého života. Dnes je Finetti všeobecně uznáván jako jeden ze zakladatelů subjektivní interpretace, která pravděpodobnost ztotožňuje s mírou osobního přesvědčení o výskytu určitého jevu či o platnosti určité hypotézy. Druhým uznávaným zakladatelem je Frank Plumpton Ramsey (1903–1930), jehož pojednání [8] vyšlo posmrtně v roce 1930. Finetti a Ramsey své práce vytvořili nezávisle na sobě, bohužel však také nezávisle na pojednáních [10] a [11] Václava Šimerky (1819–1887), v nichž je podrobně rozebírána myšlenka využití počtu pravděpodobnosti k vyjádření různých stupňů přesvědčení. Na druhou stranu je třeba dodat, že Finetti nechápal svou teorii jako *interpretaci* pravděpodobnosti, ale jako její jedinou smysluplnou *definici*.

2.1 Kritika jiných než subjektivních přístupů k teorii pravděpodobnosti

Klasickou definici, podle níž je pravděpodobnost určitého jevu podílem počtu příznivých a všech možných, „stejně pravděpodobných“ případů, Finetti kritizuje ze stejného důvodu jako řada matematiků před ním i po něm: jedná se o definici kruhem, která je založená na pojmu „stejně pravděpodobný“ nebo „stejně možný“, jehož nezávislá definice není nikde dána. Finetti kritizuje i četnostní definici, podle níž je pravděpodobnost limitou relativní četnosti výskytu daného jevu v opakovaných pokusech splňujících určité podmínky. Myšlenku nekonečné posloupnosti pokusů Finetti považuje za nesmyslnou: vynecháme-li v posloupnosti libovolný konečný počet členů, její limita se nezmění. My jsme však opakováním pokusu schopni zjistit právě jen tyto „zbytečné“ členy, protože náš život i celý vesmír trvá jen konečně dlouho. Navíc nás často zajímá pravděpodobnost nějakého konkrétního neopakovatelného jevu. V pozdějších pracích Finetti kritizuje mimo jiné také Kolmogorovovu axiomatickou definici [6]. Uvažuje například větu: *Kolega, jehož očekávám, pravděpodobně přijde*. Jak ji přeložit do jazyka teorie množin? Máme hovořit o „množině všech možných světů“ a rozlišovat světy, v nichž kolega dorazí, od těch, ve kterých nedorazí? Něco podobného Finetti považuje za absurdní komplikaci.

2.2 Subjektivismus

Finetti byl přesvědčen, že nemá smysl se ptát, jaká je pravděpodobnost určitého jevu sama o sobě – pravděpodobnost má podle něj pouze subjektivní význam a vždy závisí na osobě, která ji udává, a na jejích znalostech. Ve svých pracích používá následující terminologii. *Jevem* rozumí kategorické tvrzení, které lze ověřit, ale o němž zatím nevíme, zda je pravdivé nebo nepravdivé (například skutečnost, že dnešní expres z Milána dorazí se zpožděním mezi 30 a 35 minutami, nikoli tvrzení obecné, týkající se například všech tratí nebo všech dnů). Pro názornost Finetti rovněž používá vyjádření, že daný jev „nastal“ či „nenastal“. Pro jevy E' , E'' uvažuje obvyklé logické operace; jevy E' , E'' nazývá neslučitelnými právě tehdy, když je jev $E' \wedge E''$ nemožný. $|E|$ značí pravdivostní hodnotu jevu E , tj. $|E| = 1$, resp. $|E| = 0$, je-li jev E pravdivý, resp. nepravdivý.

2.3 Koherentní sázky

Ke stanovení pravděpodobnosti $P(E) = p$, kterou daná osoba přiřazuje jevu E , Finetti ve svých prvních pracích navrhl využít princip spravedlivé sázky: osoba je postavena do pozice bookmakera a je vyzvána, aby stanovila kurz sázky p jako částku, kterou musí sázející zaplatit, aby v případě, že nastane jev E , dostal 1 Kč. Je však upozorněna na to, že musí přijmout jakoukoli sázku S , a to kladnou i zápornou (sama tedy může být postavena do role sázejícího). Jestliže jev E nenastane, bude zisk sázejícího $Z(-E) = -pS$, jestliže nastane, získá $Z(E) = (1 - p)S$. Celkem lze psát: $Z = (|E| - p)S$. Pro n jevů $E_1, E_2, \dots, E_n$ je zisk lineární kombinací $Z = (|E_1| - p_1)S_1 + (|E_2| - p_2)S_2 + \dots + (|E_n| - p_n)S_n$. V pojed-

nání [2] se poprvé objevuje požadavek, aby přiřazení pravděpodobností bylo *koherentní*: nesmí se stát, že by byl zisk Z vždy kladný, bez ohledu na to, jaký jev nastane. Kdyby tomu tak bylo, měl by sázející zajištěnou výhru, ať se stane cokoli. Důsledky této koherence jsou mimořádně zajímavé z hlediska didaktiky matematiky; kromě toho, že je pro danou osobu nejvýhodnější stanovit p zcela upřímně, z koherence plynou základní axiomy teorie pravděpodobnosti.

1. Pro každý jev E musí být $P(E)$ jediné reálné číslo splňující $0 \leq P(E) \leq 1$.

Kdyby bylo $p < 0$ (resp. $p > 1$), byl by pro libovolné $S > 0$ (resp. $S < 0$) zisk sázejícího v každém případě kladný. Kdyby byly pro jeden jev stanoveny dvě různé hodnoty $p' > p''$, pak by sázející mohl uzavřít dvě sázky, $(|E| - p')S'$ a $(|E| - p'')S''$, s celkovým ziskem $Z(E) = (1 - p')S' + (1 - p'')S'' = -p'S' - p''S'' + S' + S''$, $Z(\sim E) = -p'S' - p''S''$. Pro $S'' > 0$, $S' = -S'' < 0$ by pak platilo: $Z(E) = (p' - p'')S'' > 0$, $Z(\sim E) = (p' - p'')S'' > 0$, což opět odporuje požadavku koherence.

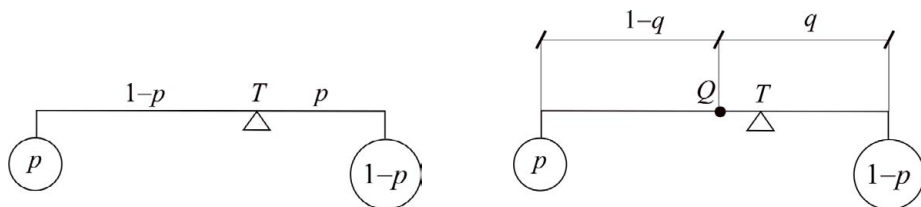
2. Pro jistý jev E platí $P(E) = 1$, pro nemožný jev je $P(E) = 0$.

Pro jistý jev je $Z = (|E| - p)S = (1 - p)S$. Pro $p < 1$ by stačilo zvolit libovolné $S > 0$ a zisk by byl vždy kladný, což odporuje koherenci. Pro nemožný jev je $Z = -pS$; pro $p > 0$ by stačilo zvolit libovolné $S < 0$ a zisk by byl opět vždy kladný.

3. Aditivita: pro libovolné neslučitelné jevy E_1, E_2 platí: $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Označme $P(E_1) = p$, $P(E_2) = q$, $P(E_1 \vee E_2) = r$ a uvažujme tři sázky s celkovým ziskem $Z = (|E_1| - p)S + (|E_2| - q)S + (|\bar{E}_1 \vee \bar{E}_2| - (1 - r)S)$. Zisk v jednotlivých možných případech je po úpravě roven $Z(E_1 \wedge \sim E_2) = Z(\sim E_1 \wedge E_2) = Z(\sim E_1 \wedge \sim E_2) = (r - p - q)S$. Pro $p + q < r$ (resp. $p + q > r$) by sázející volbou $S > 0$ (resp. $S < 0$) docílil za každé situace kladného zisku, proto musí být $p + q = r$.

V pojednání [2] Finetti rovněž uvažoval alternativní definici pravděpodobnosti, založenou na kvalitativní relaci „pravděpodobný alespoň jako“. V 60. a 70. letech 20. století se pak přiklonil k definici založené na penalizaci: dotyčné osoby se zeptáme, jakou pravděpodobnost p přisuzuje jevu E , přičemž ji upozorníme, že jí budou uděleny určité trestné body závislé na uvedené odpovědi a na tom, zda jev E nastane či nikoli. Nejjednodušší je tzv. *Brierovo skóre*, které se používá k hodnocení úspěšnosti předpovědi počasí a které stanoví penalizaci $(p - |E|)^2$. V knize [5] Finetti objasňuje pomocí jednoduché mechanické představy, proč je dotázaná osoba nucena udat hodnotu pravděpodobnosti p , kterou si skutečně myslí: Uvažujme dvě kuličky o hmotnostech p a $1 - p$, zavěšené na opačných koncích tyče konstantní hustoty. Střední hodnota penalizace je v případě, že daná osoba udá pravděpodobnost q , rovna $p(q - 1)^2 + (1 - p)q^2$; v mechanickém modelu tento výraz vyjadřuje moment setrvačnosti soustavy vzhledem k bodu Q .



Minimalizace očekávané penalizace tedy odpovídá nalezení bodu, vzhledem k němuž je moment setrvačnosti soustavy minimální. Jak je známo ze Steinerovy věty, jedná se právě o těžiště; jinde je moment setrvačnosti větší o $(p - q)^2$. Stejný výsledek lze odvodit i algebraicky, uvedená fyzikální představa je však velmi názorná a jednoduchá.

3 Závěr

Pojednání, která Finetti publikoval ve třicátých letech, bohužel zůstala dlouho téměř nepovšimnutá; do širšího povědomí se dostala až díky knize [9] L. J. Savage a později také díky překladům do angličtiny. Cílem tohoto příspěvku bylo stručně naznačit základní myšlenky subjektivismu, který Finetti považoval za jediný akceptovatelný přístup k pravděpodobnosti. Zájemci o celou tuto teorii mohou nahlédnout například do knihy [5].

Literatura

- [1] Czuber E.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*. Teubner, Leipzig, 1903 [3. vyd. 1914].
- [2] Finetti de B.: *Sul significato soggettivo della probabilità*. *Fundamenta Mathematicae* 17(1931), 298–329 [anglický překlad: *On the Subjective Meaning of Probability*. In: Monari P., Cocchi D. (eds.): Bruno de Finetti: Probabilità e induzione (Induction and Probability). CLUEB, Bologna, 1992, 291–321].
- [3] Finetti de B.: *Probabilismo. Saggio critico sulla teoria della probabilità e sul valore della scienza*. Logos, Napoli, 1931 [anglický překlad: *Probabilism. A Critical Essay on the Theory of Probability and on the Value of Science*. *Erkenntnis* 31(1989), 169–223].
- [4] Finetti de B.: *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*. In: Zanichelli N. (ed.): *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna 6*, Bologna, 1932, 179–190.
- [5] Finetti de B. (Mura A., ed.): *Philosophical Lectures on Probability*. Synthese Library 340, Springer, 2008 [přepřacovaná anglická verze knihy *Filosofia della probabilità*. Il Saggiatore, Milano, 1995; anglický překlad: H. Hosni].
- [6] Kolmogorov A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1933.
- [7] Plato von J.: *Creating Modern Probability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [8] Ramsey F. P.: *Truth and Probability*. In: Braithwaite R. (ed.): *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Kegan Paul, London, 1931, 156–198.
- [9] Savage L. J.: *The Foundations of Statistics*. Wiley, New York, 1954.
- [10] Šimerka V.: *Síla přesvědčení*. *ČPMF* 11(1882), 75–111.
- [11] Šimerka V.: *Die Kraft der Überzeugung*. In: *Sitzungsberichte der Philos.-Historischen Classe der Kaiserlichen Akad. der Wiss.* 104(1883), 511–571.

Adresa

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
 Ústav aplikované matematiky
 Fakulta dopravní ČVUT
 Na Florenci 25
 110 00 Praha 1
 e-mail: hyksova@fd.cvut.cz

MÉNĚ ZNÁMÍ UČITELÉ DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

VLASTA CHMELÍKOVÁ

Abstract: The aim of this article is to point out some descriptive geometry teachers at secondary schools who are not known for writing textbooks on descriptive geometry or teaching at polytechnic schools or universities but they contributed to the progress of descriptive geometry by teaching it and they are authors of interesting original treatises in this area which were published in the annual reports of secondary schools.

1 Úvod

1.1 Osobnosti české deskriptivní geometrie

Deskriptivní geometrie zaznamenala v našich zemích ve druhé polovině devatenáctého století velký rozvoj, který přetrvával ještě v první polovině století dvacátého. Zasloužila se o to řada osobností, jejichž jména jsou často více či méně spjata s pražskou polytechnikou.¹ Za všechny jmenujme například Rudolfa Skuherského,² Františka Tilšera,³ Vincence Jarolímků,⁴ Bedřicha Procházku,⁵ Karla Pelze,⁶ Jana Sobotku,⁷ Josefa Kounovského,⁸ Josefa Klímu⁹ nebo Františka Kadeřávka¹⁰. Známe je jako významné profesory a autory rozšířených středoškolských a vysokoškolských

¹ Pražská polytechnika měla v jednotlivých obdobích různé názvy; v letech 1806 až 1840 se tato škola jmenovala *Královské České Stavovské Učiliště Technické v Praze*, v letech 1840 až 1847 *Technické České Stavovské Učiliště v Praze*, v letech 1847 až 1848 *České Stavovské Polytechnické Učiliště v Praze*, v letech 1848 až 1861 *Český Stavovský Polytechnický Ústav v Praze*, v letech 1861 až 1864 *Královský Český Polytechnický Zemský Ústav v Praze*, v letech 1864 až 1869 *Polytechnický Ústav Království Českého*, v letech 1869 až 1875 *Český Polytechnický Ústav Království Českého*, v letech 1875 až 1879 *C. k. Český Polytechnický Ústav Království Českého*, v letech 1879 až 1918 *C. k. Česká Vysoká Škola Technická v Praze*, v letech 1918 až 1920 *Česká Vysoká Škola Technická*, od roku 1920 do současnosti nese název *České Vysoké Učení Technické (ČVUT)*. V roce 1869 došlo navíc k rozdělení pražské polytechniky na českou a německou (viz [2], str. 27).

² Rudolf Skuherský (23. 4. 1828 – 9. 10. 1863), první profesor deskriptivní geometrie na pražské polytechnice.

³ František Tilšer (12. 7. 1825 – 5. 2. 1913), nástupce prof. Skuherského na pražské polytechnice (později české technice v Praze).

⁴ Vincenc (Čeněk) Jarolímek (25. 6. 1846 – 14. 12. 1921), nejprve učitel, ředitel reálky, později profesor deskriptivní geometrie na české technice v Praze.

⁵ Bedřich Procházka (4. 7. 1855 – 3. 1. 1934), nejprve učitel reálky, později profesor deskriptivní geometrie na české technice v Brně a na české technice v Praze (později ČVUT).

⁶ Karel Pelz (2. 10. 1845 – 16. 6. 1908), asistent na německé technice v Praze, profesor deskriptivní geometrie na technice ve Štýrském Hradci, později na české technice v Praze.

⁷ Jan Sobotka (2. 9. 1862 – 10. 5. 1931), profesor deskriptivní geometrie na technice ve Vídni, první profesor deskriptivní geometrie na české technice v Brně, profesor matematiky na Filosofické fakultě Karlo-Ferdinandovy univerzity, později na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy.

⁸ Josef Kounovský (25. 8. 1878 – 22. 12. 1949), učitel české reálky v Praze na Novém Městě, později profesor deskriptivní geometrie na ČVUT.

⁹ Josef Klíma (8. 3. 1887 – 30. 9. 1943), asistent prof. Procházky na české technice v Praze, učitel reálky, profesor deskriptivní geometrie na české technice v Brně.

¹⁰ František Kadeřávek (26. 6. 1885 – 9. 2. 1961), profesor deskriptivní geometrie na české technice v Praze (později ČVUT).

učebnic. Vedle nich však působili mnozí další, jejichž jména se citují podstatně méně nebo v jiných souvislostech než s deskriptivní geometrií.

Českou deskriptivní geometrii výrazně obohatili mnozí učitelé středních škol, především reálek, na kterých se deskriptiva vyučovala ve velké míře. Tito učitelé měli ve svém oboru úctyhodné znalosti. Vedle pedagogické činnosti sepsovali odborné statě, které publikovali zpravidla ve výročních zprávách středních škol, někteří i v dalších periodikách (jako byl např. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*,¹¹ *Archiv matematiky a fyziky*,¹² *Zprávy Královské české Společnosti nauk aj.*) a mnohdy cizojazyčně.

1.2 Historie reálek¹³

Za první reálnou školu na území habsburské monarchie (jejíž součástí byly i Čechy a Morava) lze považovat reálnou obchodní akademii (Real-Handlung-Akademie) ve Vídni zřízenou již roku 1770, tedy za vlády Marie Terezie. K dalšímu rozvoji reálného školství došlo za vlády Františka I, měl na něm nemalou zásluhu František Josef Gerstner.¹⁴ Reálky v té době hrály roli obchodních škol nebo sloužily jako přípravné kursy ke studiu polytechniky. První takovou reálkou u nás byla reálka v Brně (zřízena roku 1811).

Výrazným zlomem ve vývoji reálného školství v našich zemích byla Exner-Bonitzova reforma (1849), v jejímž rámci vyšel *Nástin organisace gymnasií a reálek v Rakousku* (*Entwurf der Organization der Gymnasien und Realschulen in Oesterreich*). Reálky byly ustanoveny jako zestileté střední školy (nižší reálka – 3 roky, vyšší reálka – 3 roky). První reálkou tohoto typu byla reálka pražská (s českým jazykem vyučovacím¹⁵).

Povinná maturitní zkouška byla na reálkách zavedena roku 1869. Současně došlo k rozšíření reálek na školy sedmitřídní (nižší reálka – 4 roky, vyšší reálka – 3 roky). V roce 1875 byla ministerským výnosem schválena učebná osnova pro české reálky. Dle ní má *reálka poskytovat žactvu vyšší obecné vzdělání zvláště na základě nauk matematicko-přírodovědeckých a připravovat je pro vyšší odborné ústavy (techniku, lesnickou, horní akademii aj.)* (viz [13], str. 139).

Poslední větší úpravou středních škol před vznikem Československé republiky byla Marchetova reforma (1908), v jejímž rámci byla uzákoněna reformní reálná gymnázia a současně se reálná gymnázia vznikající již od šedesátých let 19. století mohla stát státními.

Výnosem ministra kultu a vyučování Lva Thuna ze dne 16. září 1849 bylo ředitelům rakouských středních škol uloženo, aby na konci každého školního roku podávali zemské školní radě podrobnou výroční zprávu o vnějším i vnitřním stavu školy a redigovali

¹¹ Vydávala Jednota českých matematiků od roku 1872.

¹² Vydávala Jednota českých matematiků od roku 1875, vyšly však pouze dva svazky, v roce 1878 bylo vydávání zastaveno.

¹³ Více o vzniku a historii reálek viz [5], [12], [13].

¹⁴ František Josef Gerstner (23. 2. 1756 – 25. 6. 1832), profesor vyšší matematiky na Karlo-Ferdinandově universitě, profesor hydrauliky a mechaniky na Královském českém stavovském učilišti technickém v Praze.

¹⁵ Některé předměty byly vyučovány v češtině, některé zpočátku ještě v němčině. Až roku 1866 byl vydán zemský zákon, podle kterého byly reálky v Praze, Kutné Hoře, Písku, Litomyšli, Plzni a Pardubicích ustanoveny jako školy výhradně české.

tištěnou zprávu výroční, skládající se vždy z vědecké rozpravy, některým členem sboru učitelského sepsané, a ze zpráv školních (viz [3], str. 5). Právě tyto vědecké rozpravy byly příležitostí pro vyučující středních škol k publikaci jejich odborné práce.

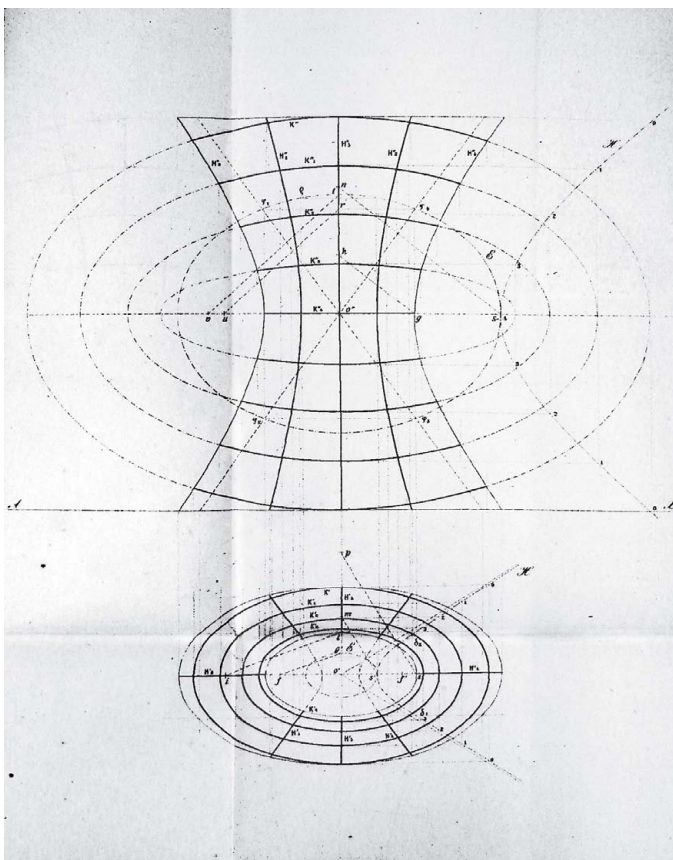
2 Reálka Karlín¹⁶

2.1 Vojtěch Smolík

Vojtěch Smolík se narodil 13. dubna 1849 ve Studené (plzeňský kraj). Navštěvoval hlavní školu v Praze na Starém Městě, poté zde dva roky pokračoval ve studiu na nižší reálce, třetí rok dokončil na c. k. německé reálce v Praze, kde pokračoval ve studiích na reálce vyšší. V letech 1860 až 1864 studoval na polytechnice v Praze. Po celou dobu byl výborným studentem.

Po studiích spolupracoval dva roky na tvorbě stavebních plánů pro dráhu císaře Františka Josefa. Od 1. května 1866 působil ve školství, nejprve učil na německé vyšší reálce v Praze, od roku 1874 na reálce v Karlíně, kde se roku 1876 stal skutečným učitelem.

Zemřel 9. června 1899 v Praze na následky zápalu plic.¹⁷

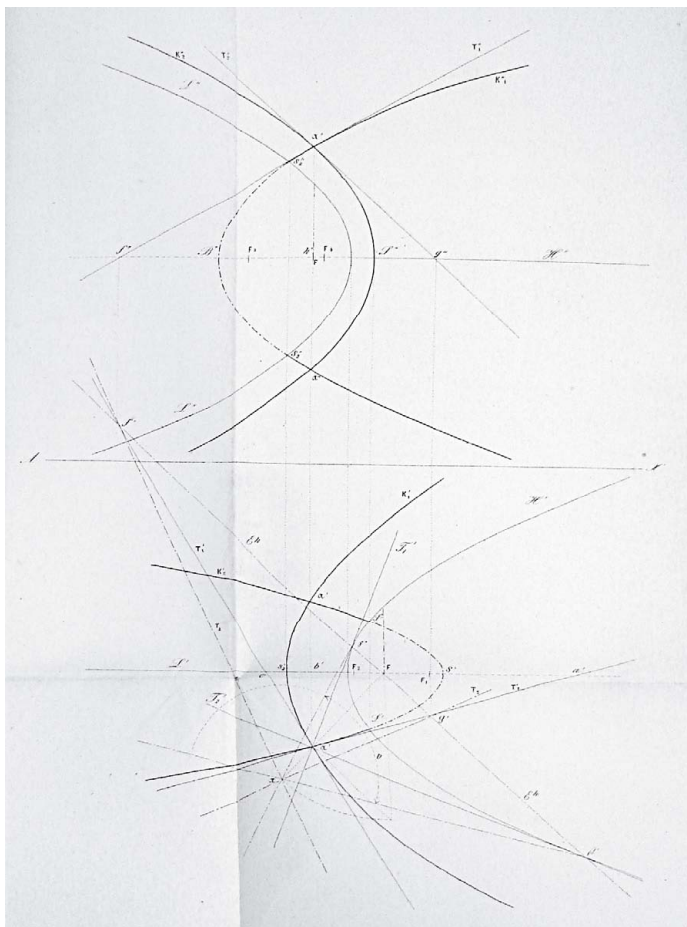


Obr. 1: Průměty čar křivosti na hyperboloidu

¹⁶ Reálka v Karlíně byla založena roku 1874 nejprve jako soukromá čtyřletá (nižší) reálka. Prvním ředitelem byl zvolen Bartoloměj Pavlíček (1938–1918). V roce 1876 bylo ministerstvem povoleno reálku postupně rozšířit na sedmiletou. Status „státní“ získala roku 1883, obec Karlín však nadále spravovala budovu a přispívala na pomůcky a vybavení školy [7]. Reálku navštěvovali studenti z velkého okolí, jejich počet do přelomu 19. a 20. století neustále stoupal (podle [12] měla v roce 1900 téměř 500 studentů), teprve na počátku 20. století se počet studentů snížil v důsledku otevření dalších reálék v blízkém okolí (Praha Vinohrady, Praha Žižkov). Ze známých geometrů na této reálce působili například Josef Pithardt (1874–1955), František Šanda (1831–1893), Vincenc (Čeněk) Jarolímeček nebo Bedřich Procházka.

¹⁷ Více o životě Vojtěcha Smolíka viz [4].

V roce 1877 vyšla ve výroční zprávě karlínské reálky Smolíkova práce *O čarách křivosti na hyperboloidu o jednom povrchu a hyperbolickém paraboloidu* [10] (obr. 1, 2). Autor v ní přináší zajímavé řešení, jak sestavit kolmé průměty (půdorys a nárys) jednodílného trojosého hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu. Jeho řešení je založeno na větě Dupinově.¹⁸ Dále volí vhodné plochy, které sečou hyperboloid (resp. hyperbolický paraboloid) a metodami analytické geometrie vypočítává průsečné křivky a jejich kolmé průměty do půdorysny a nárysny. Pro hyperboloid tak odvodí, že kolmými průměty čar křivosti do půdorysny jsou elipsy a části hyperbol, do nárysny části elipsy a části hyperbol. U hyperbolického paraboloidu získává v obou případech paraboly. V závěru článku se V. Smolík zmiňuje o práci C. F. A. Leroye,¹⁹ který se zabýval stejným problémem, avšak jeho postupy jsou (oproti Smolíkovým) značně složitější.



Obr. 2: Průměty čar křivosti na hyperbolickém paraboloidu

¹⁸ Charles Dupin (1784–1873), francouzský matematik a inženýr. Znění Dupinovy věty: *Mají-li tři soustavy ploch takovou vlastnost, že plochy soustavy jedné plochy dvou ostatních pravouhelně sekou, jest každá průsečná čára čarou křivosti ploch, kterýmž přináležejí* (viz [10], str. 3).

¹⁹ *Traité de géométrie descriptive* (Paris, 1834); autor Charles Francois Antoine Leroy (1780–1854).

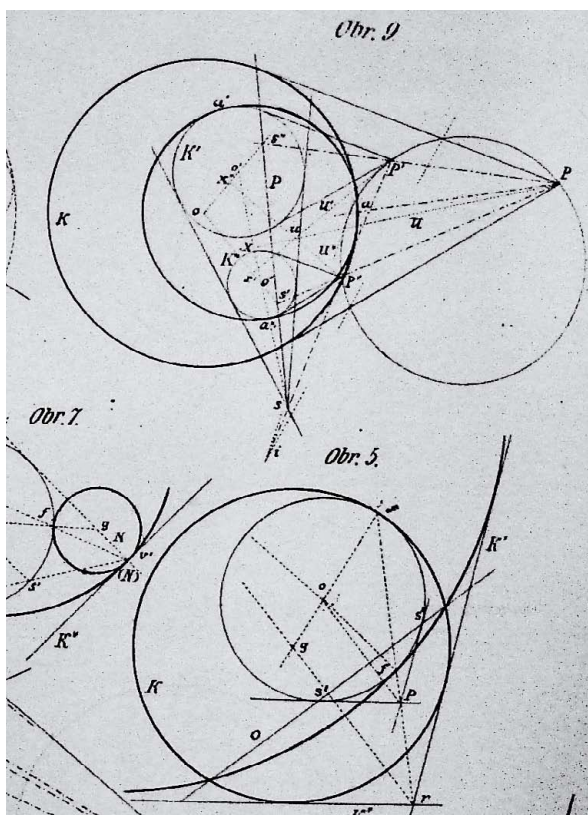
2.2 František Machovec

František Machovec se narodil 24. prosince 1855 ve Lnářích (okres Blatno). Ve svém rodišti navštěvoval obecnou školu, od roku 1866 studoval reálku v Písku, kde koncem školního roku 1871/1872 maturoval s vyznamenáním. Poté pokračoval ve studiích na české polytechnice v Praze.

Ve školním roce 1875/1876 působil jako asistent geometrie na vyšší reálce v Kutné Hoře, další rok jako pomocný učitel na reálném a vyšším gymnáziu v Klatovech, kde roku 1877 složil zkoušku učitelské způsobilosti z matematiky a deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné s prospěchem výborným. Od roku 1878 působil na reálce v Karlíně, nejprve jako provizorní, o rok později již jako skutečný učitel.

Kolegy i studenty byl hodnocen jako člověk umírněný, vážný a přísný, avšak laskavý. Během svého pedagogického působení psal posudky na učebnice, *uváděl zkušební kandidáty do praxe* (za tuto činnost získal od ministerstva kultu a vyučování pochvalný dekret) a v neposlední řadě se věnoval vědecké činnosti. Dnes je znám především jako autor středoškolských učebnic matematiky.²⁰ Ve školním roce 1885/1886 získal dovolenou pro studijní pobyt na univerzitě ve Štrasburku, kde navštěvoval přednášky prof. Dr. Theodora Reye²¹ věnované novější geometrii. Tento pobyt ovlivnil zaměření Machovcovy vědecké práce v oblasti geometrie; po návratu se věnoval především přímkové geometrii.

Ve školním roce 1891/1892 F. Machovec suploval přednášky z deskriptivní geometrie na české technice v Praze za nemocného profesora Františka Tilšera. Měl je suplovat i v dalším školním roce, avšak onemocněl zánětem srdečních blan (endokarditidou) a na následky nemoci 8. října 1892 zemřel.²²



Obr. 3: Část obrazové tabule k práci „O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii“

²⁰ *Algebra pro vyšší třídy škol středních* (1886, zvlášť vydání pro reálky a pro gymnázia), *Aritmetika pro nižší třídy gymnasií* (1886, spoluautor Václav Starý).

²¹ C. T. Reye (1838–1919), německý fyzik a geometr, autor klasického díla *Geometrie der Lage* (Hannover, 1866–1868).

²² Více o životě Františka Machovce viz [17].

František Machovec byl publikačně velmi činný. Vedle již zmíněných učebnic publikoval téměř 40 prací, většinu z nich v *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky*, dále v *Archivu matematiky a fyziky*, ve výročních zprávách středních škol, ve *Zprávách Královské české Společnosti nauk*, v *Rozpravách České akademie* a v časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Většinou se zabýval vlastnostmi ploch a kuželoseček. Je také autorem publikace *Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové metody* (1883); základní myšlenkou jeho „nové metody“ je řešení planimetrických úloh pomocí deskriptivní geometrie. Tato idea sice v jeho době zcela nová nebyla, avšak F. Machovec, jak sám v předmluvě k této knize uvádí, použil některé zcela nové postupy.

Roku 1879 F. Machovec publikoval ve výroční zprávě karlínské reálky práci *O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii* [6] (obr. 3). Metodami deskriptivní geometrie v ní řeší jednu z Apolloniových úloh, konkrétně úlohu „sestojit kružnici, která se dotýká tří daných kružnic“. Stejným problémem se dříve zabývala celá řada osobností, F. Machovec však uvádí, že jeho postupy (a jsou hned tři) jsou zcela nové. Všechna jeho řešení se zakládají na převedení této rovinné úlohy do prostoru. První dva postupy vycházejí z myšlenky považovat tři dané kružnice k, k', k'' za řídící křivky tří shodných přímých kuželových ploch K, K', K'' . Hledá se čtvrtá kuželová plocha, která má s každou z ploch K, K', K'' společnou právě jednu přímku. Třetí způsob využívá kulové plochy, na jejímž povrchu jsou kružnice shodné s kružnicemi k, k', k'' , a stereografické projekce.

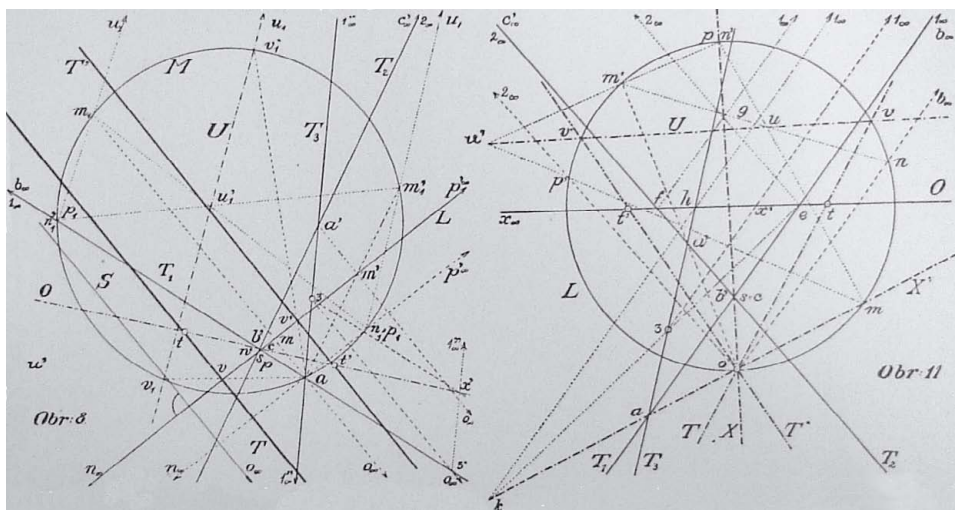
2.3 Václav Tluchoř

Václav Tluchoř se narodil 22. září 1858 v Pardubicích. V letech 1870 až 1876 zde vystudoval reálku a pokračoval ve studiích na c. k. vysoké škole technické ve Vídni, kde se připravoval na dráhu středoškolského učitele. Aproboval z matematiky a deskriptivní geometrie s vyučovací řečí českou. Jako asistent nebo suplent působil v letech 1885 až 1897 na reálkách v Pardubicích, Jičíně, Karlíně a Plzni, na reálném gymnáziu v Kolíně a na státní průmyslové škole v Praze. Od července 1897 zastával funkci ředitele reálky v Kostelci nad Orlicí. Od 1. září 1909 působil jako ředitel reálky v Karlíně, vedle toho od roku 1910 převzal vedení pokračovací školy průmyslové tamtéž. Zemřel 15. prosince 1914.²³

V. Tluchoř byl výborným ředitelem i učitelem, přitom si našel čas i na vědeckou činnost; dokladem je jeho devět odborných studií, které vyšly ve výročních zprávách středních škol (Kolín, Plzeň, Kostelec nad Orlicí, Karlín) nebo v *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky*. Jeho práce se věnují, stejně jako Machovcovy, kuželosečkám a plochám, především pak plochám druhého stupně.

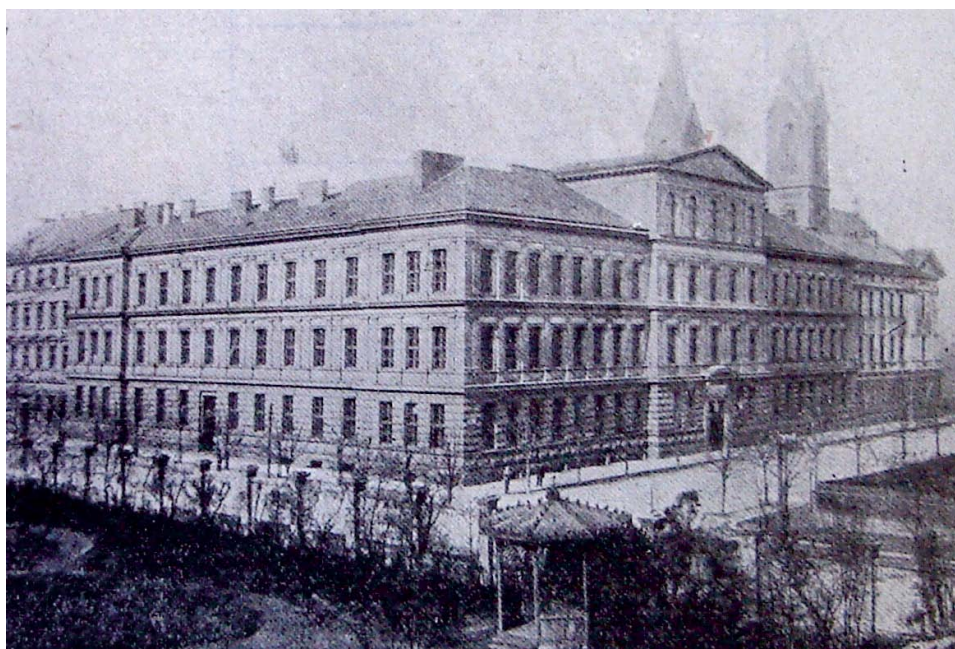
V roce 1914 uveřejnil V. Tluchoř ve výroční zprávě karlínské reálky práci *Sestrojení tečen bodem ke kuželosečce a průsečíků přímký s kuželosečkou* [14] (obr. 4). Obě konstrukce řeší metodami projektivní geometrie. Vychází z toho, že libovolnou kuželosečku lze zadat lineárními podmínkami a následně ji převést na kuželosečku určenou dvěma tečnami s body dotyku a další tečnou (nebo bodem). Při dalších

²³ Více o životě Václava Tluchoře viz [16].



Obr. 4: Část obrazové tabule k práci „Sestrojení tečen bodem ke kuželosečce a průsečíků přímky s kuželosečkou“

konstrukcích využívá Pascalovu větu.²⁴ Úlohu „sestrojit tečnu z bodu ke kuželosečce“ popisuje jak pro případ vlastního bodu, tak pro případ bodu nevlastního (tedy konstrukce tečny v daném směru).

Obr. 5: *Reálka Karlín*

²⁴ Průsečíky tří dvojic protějších stran šestiúhelníka vepsaného kuželosečce leží v jedné přímce.

3 Reálka Pardubice²⁵

3.1 Antonín Barborka

Antonín Barborka se narodil 7. ledna 1835 v Horažďovicích. V letech 1850 až 1855 studoval českou reálku na Novém Městě v Praze, poté pražskou polytechniku. Od roku 1860 učil na téže reálce v Praze, na které studoval, a od roku 1863 na reálce v Pardubicích, kde byl i členem městského zastupitelstva. Je také autorem regulačního plánu Pardubic.²⁶ Zemřel 14. dubna 1891 tamtéž [9].

Ve výroční zprávě pardubické reálky za školní rok 1866/1867 je zveřejněn Barborkův článek *Perspektiva, její vývoj historický a nynější stanovisko* [1], který stručně nastiňuje historický vývoj perspektivy od dob starověkého Řecka a Říma přes období rozkvětu perspektivy v dobách renesance až po současnost. Vývoj perspektivy přičítá A. Barborka přirozenému pudu umělců. V článku vyjmenovává jednotlivé osobnosti a upozorňuje na spisy věnované perspektivě. Rovněž projevuje lítost nad nedostatkem česky psané literatury v tomto oboru, svou krátkou statí se snaží tuto mezeru alespoň částečně zaplnit. Zmiňuje, že snad první, byť stručně podané zprávy o perspektivě v českém jazyce jsou v učebnici *Zobrazující měřictví pro vyšší reální školy* (1862/3) Dominika Ryšavého. Z našich autorů dále vyzdvihuje spis Františka Tilšera *System der technischmalerischen Perspektive* (1865–1867).



Obr. 6: Reálka Pardubice

²⁵ Vyšší reálka byla v Pardubicích otevřena v roce 1863 (předtím zde byla již od roku 1854 reálka nižší). Jejím prvním ředitelem byl Jan Chmelík (1821–1895). Pod státní správu přešla v roce 1879. Ze známých matematiků a geometrů vyučujících na této reálce můžeme jmenovat například Bedřicha Procházku, Josefa Smolíka (1832–1915) nebo Václava Lavičku (1846–1911). Pardubická reálka patřila k větším školám svého druhu, již v roce 1870 ji navštěvovalo přes 300 studentů a jejich počet nadále stoupal – v roce 1910 přesáhl již 450 (podle [12]). Více o historii pardubické reálky viz [9].

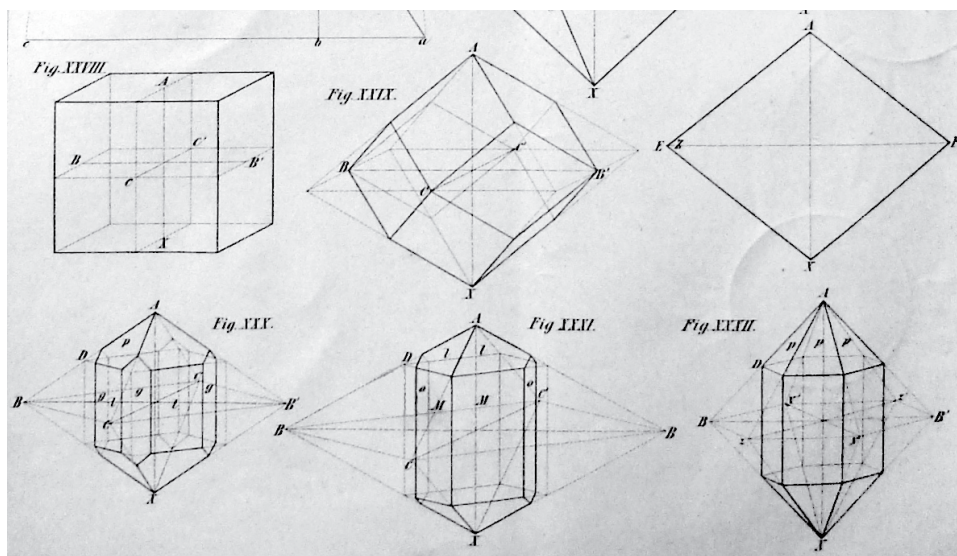
²⁶ Podle tohoto regulačního plánu vypracovaného roku 1882 vznikla výstavba části Pardubic, více viz [15].

4 Česká reálka v Praze na Novém Městě²⁷

4.1 Dominik Ryšavý

Dominik Ryšavý se narodil 12. října 1830 v Bítovanech na Chrudimsku. Od roku 1842 navštěvoval německou hlavní školu v Poličce, roku 1845 přešel do Prahy na hlavní školu malostranskou, kde zůstal další dva roky. V letech 1847 až 1851 studoval na pražské polytechnice. Od roku 1853 působil na české reálce v Praze na Novém Městě, kde se roku 1860 stal řádným učitelem a setrval zde (vyjma let 1869 až 1883, kdy pracoval ve funkci dozorce obecných škol) až do smrti. Zemřel 26. září 1890 v Praze.²⁸

K jeho zásluhám patří velký podíl na počátcích české výuky deskriptivní geometrie a tvorbě české terminologie. Vedle učebnic rýsování pro 1. a 2. třídu nižší reálky²⁹ je autorem první česky psané středoškolské učebnice deskriptivní geometrie nazvané *Zobrazující měřictví pro vyšší reální školy* (1862–1863).



Obr. 7: Část obrazové tabule k práci „O rejsování krystalů“

Ve výroční zprávě české reálky pražské z roku 1858 je zveřejněn Ryšavého článek *O rejsování krystalů* [8] (obr. 7). Autor se v něm snaží podat názorný návod ke zhotovení

²⁷ Česká reálka v Praze na Novém Městě byla založena již v roce 1849 (byla to tehdy první česká reálka vůbec). Je známá také jako „reálka v Ječné“, školní budova v Ječné ulici však byla postavena až v letech 1873 až 1875. Do té doby reálka sídlila v Panské ulici. Jejím prvním ředitelem byl jmenován Josef Wenzig (1807–1875). Ze známých geometrů, kteří zde vyučovali, můžeme uvést například Vincence (Čeňka) Jarolímka, Antonína Suchardu (1854–1907) nebo Josefa Kounovského. Reálka patřila k největším v našich zemích, v letech 1870 až 1910 počet jejích studentů neklesl pod 500 a počátkem 20. století dokonce přesáhl 600 (podle [12]). Více o historii české reálky v Praze na Novém Městě viz [11].

²⁸ Více o životě Dominika Ryšavého viz [18].

²⁹ *Základové měřictví a kreslení pro 1. třídu nižších reálních škol* (1867), *Měřictví a rýsování pro 2. třídu nižších reálních škol* (1868).

rysů různých krystalů založený na zákonech zobrazujícího měřictví (deskriptivní geometrie), které studenti ze střední školy znají. Popisuje v podstatě jen konstrukce os krystalů, protože po správném sestavení os je již jejich dorýsování snadné. Uvádí čtyři odlišné situace, které mohou pro osy krystalů nastat, a sice: tři osy krystalu jsou navzájem kolmé; dvě osy jsou na sebe kolmé a třetí je k jedné z nich šikmá; tři osy jsou k sobě navzájem nakloněné; tři osy leží v průměrech šestiúhelníka a čtvrtá je na ně kolmá. Tomuto rozložení os skutečně odpovídají jednotlivé soustavy krystalů vyskytujících se v přírodě. Autor článek rozdělil do dvou částí, v první popisuje způsob, jak zobrazit průměty os v kolmém promítání. Postup údajně uvádí podle jistého Neumanna.³⁰ Ve druhé části ukazuje jiný, vlastní přístup, a sice zobrazení os v kosoúhlém promítání. Tento postup se jeví výrazně snadnější a názornější, než zobrazení pravoúhlé.



Obr. 8: *Reálka v Praze Ječné ulici*

5 Závěr

5.1 Přínos učitelů reálék

Učitelé působící na českých reálkách se podíleli na rozvoji české vědy, v tomto případě deskriptivní geometrie. Osobnosti zde vybrané jsou jen malým zlomkem všech

³⁰ Celé jméno autora ani název spisu není v Ryšavého práci citován.

českých pedagogů působících na reálkách ve druhé polovině devatenáctého století a na počátku století dvacátého. Ve výročních zprávách vyšlo nespočet odborných prací, které prokazují vysokou úroveň jejich autorů. Svým obsahem zpravidla výrazně převyšují úroveň učiva na střední škole, často reflektují nové poznatky a nezřídka (jako je tomu třeba v pracích Františka Machovce) také nové poznatky přinášejí.

Literatura

- [1] Barborka A.: *Perspektiva, její vývoj historický a nynější stanovisko*. Roční zpráva veřejné městské české vyšší školy realné v Pardubicích pro rok 1866–67, Nákladem vlastním, Pardubice, 1867, 1–2.
- [2] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.
- [3] Hlaváček A.: *Výroční zprávy středních škol 1820–1950*. Literární archiv Památníku národního písemnictví, Praha, 1971.
- [4] Hofman A.: *Za zesnulým professorem Vojtěchem Smolíkem*. Dvacátá pátá roční zpráva c. k. české vyšší realky Karlínské za školní rok 1898–99, M. Knapp, Praha-Karlín, 1899, 100–103.
- [5] Kádner O.: *Vývoj a dnešní soustava školství. I., II. díl*. Sfinx, Praha, 1929, 1931.
- [6] Machovec F.: *O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii*. Pátá roční zpráva obecní vyšší realní školy české v Karlíně za školní rok 1879, Nákladem vlastním, Karlín, 1879, 3–20, 1 obrazová tabule.
- [7] Nedoma J.: *Karlínská reálka za prvních 25 let svého trvání*. Dvacátá pátá roční zpráva c. k. české vyšší realky Karlínské za školní rok 1898–99, M. Knapp, Praha-Karlín, 1899, 3–47.
- [8] Ryšavý D.: *O rejsování krystalů*. Sedmá roční zpráva c. k. české vyšší reálné školy v Praze za školní rok 1858, C. k. školní knihtiskárny v Praze, Praha, 1858, 12–20, 3 obrazové tabule.
- [9] Sakař J.: *Dějiny pardubských škol*. Jubilejní výroční zpráva c. k. státní realky v Pardubicích, 1863–1913, J. Otto & Růžička, Pardubice, 1913.
- [10] Smolík V.: *O čárách křivosti na hyperboloidu o jednom povrchu a hyperbolickém paraboloidu*. Třetí roční zpráva obecní vyšší realní školy české v Karlíně za školní rok 1877, Nákladem vlastním, Karlín, 1877, 3–9, 3 obrazové tabule.
- [11] Vávra J.: *Dějiny první české realky pražské, 1. část*. Výroční zpráva c. k. české realky na Novém Městě (v Ječné ulici) za školní rok 1901–1902, B. Stýblo, Praha, 1902, 3–11.
- [12] Šafránek J.: *Školy české. Obraz jejich vývoje a osudů. II*. Matice česká, Praha, 1918.
- [13] Šafránek J.: *Za českou osvětu*. J. Otto, Praha, 1898.

- [14] Tluchoř V.: *Sestrojení tečen bodem ke kuželosečce a průsečíků přímky s kuželosečkou*. Patnáctá výroční zpráva c. k. české vyšší reálky v Karlíně za školní rok 1913–14, M. Knapp, Karlín, 1914, 3–10, 1 obrazová tabule.
- [15] Tomáš M.: *Vývoj a současné problémy vnitřní prostorové struktury města Pardubice*. Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 2008.
- [16] Vosyka V.: *Za zesnulým ředitelem Václavem Tluchořem*. Šestnáctá výroční zpráva c. k. české vyšší reálky v Karlíně za školní rok 1914–1915, Al. Brož, Praha, 1915, 3–7.
- [17] *Zemřel profesor František Machovec (nekrolog)*. Devatenáctá výroční zpráva c. k. české vyšší realky Karlínské za školní rok 1893, M. Knapp, Karlín, 1893, 30–34.
- [18] *Zemřel profesor Dominik Ryšavý (nekrolog)*. Výroční zpráva c. k. české realky pražské za školní rok 1891, B. Stýblo, Praha, 1891, 25–28.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a v rámci projektu *Specifického vysokoškolského výzkumu* 2010-261 315.

Adresa

Mgr. Vlasta Chmelíková
 Katedra didaktiky matematiky
 Matematicko-fyzikální fakulta
 Univerzita Karlova v Praze
 Sokolovská 83
 186 75 Praha 8
 e-mail: vlasta.chmelikova@mff.cuni.cz

MATEMATICKÉ APLIKACE V DÍLE WILHELMA MATZKY

MICHAELA CHOCHOLOVÁ

Abstract: W. Matzka (1798–1891) was an important mathematician and university professor in the Czech countries in the middle of the 19th century. His main interest was algebra, analysis and elementary geometry; however he paid attention to many applications of mathematics as well. In this article, there are presented especially his works on chronology, astronomy and geodesy to demonstrate the broad-spectrum of his interests.

1 Životní dráha Wilhelma Matzky

Wilhelm Matzka se narodil dne 4. listopadu 1798 v Litobratřicích na jižní Moravě, studoval na gymnáziu v Chomutově (1809–1817) a na filozofické fakultě v Praze (1817–1819). Poté vstoupil do rakouské armády, kde sloužil nejprve jako bombardýr, poté jako (vrchní) ohněstrůjce a nakonec jako poručík vídeňského sboru bombardýrů, bezmála osmnáct let (až do roku 1837).

Roku 1837 byl jmenován řádným profesorem elementární matematiky na filozofické škole v Tarnově, kde působil až do roku 1849. Roku 1843 složil na univerzitě v Olomouci rigorózní zkoušky z obecné historie a obecné filozofie a stal se doktorem svobodných umění a filozofie.

Roku 1849 se vrátil do Prahy, kde byl jmenován řádným profesorem elementární matematiky a praktické geometrie na polytechnice. Již o rok později byl povolán jako řádný profesor matematiky s německou vyučovací řečí na pražskou univerzitu, kde přednášel až do roku 1871.

Jako univerzitní profesor byl členem zkušební komise gymnaziálního učitelského úřadu pro předmět matematika a opakovaně byl děkanem a proděkanem profesorského sboru filozofické fakulty. Roku 1850 se stal řádným členem *Královské české společnosti nauk*. V témže roce byl císařem Františkem Josefem I. vyznamenán zlatou medailí *Literis et artibus* (Vědy a umění). Jako ocenění dlouholetých pedagogických a vědeckých aktivit mu byl udělen čestný titul císařského rady (*der Ehrentitel eines kaiserlichen Rathes*, 1869) a později i čestný titul vládního rady (*der Ehrentitel eines Regierungsrathes*, 1873).

W. Matzka zemřel dne 9. června 1891 v úctyhodném věku nedožitých 93 let; byl pochován na Olšanském hřbitově.¹

¹ Podrobné informace o životě W. Matzky, jeho pedagogickém působení a vědecké činnosti viz Chocholová M.: *Wilhelm Matzka and his Position in the Austro-Hungarian Mathematics*, in Bečvářová M., Binder Ch. (eds.): *Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire, History of Mathematics*, volume 41, Matfyzpress, Prague, 2010, str. 81–92, a Chocholová M.: *Prague University Professor Wilhelm Matzka*, in Šafránková J., Pavlů J. (ed.): *WDS 07 Proceedings of Contributed Papers, Part I*, Matfyzpress, Praha, 2008, str. 241–245.

2 Vědecké zájmy

Během více než šedesátileté vědecké činnosti uveřejnil W. Matzka 69 prací. Vydal je německy jako pojednání v odborných časopisech nebo samostatně jako monografie, učebnice, historické, metodické a popularizační práce.²

Velkou část prací věnoval matematice a fyzice. V matematice se zabýval zejména otázkami základů geometrie a trigonometrie. Zlákala ho však i moderní témata: komplexní čísla, determinanty a logaritmy.³ Jeho práce se vyznačují srozumitelným zpracováním matematických témat, prohloubením a rozšířením výkladu a zavedením originálních aplikací. Ve své době byly známy ostatním matematikům a pro řadu z nich se staly inspirací. Citace, hodnocení a ocenění některých jeho děl nacházíme v odborné literatuře do dnešní doby.

Kromě matematických a fyzikálních prací se Matzkův zájem upínal k řadě dalších témat. Publikoval také odborná pojednání o chronologii, astronomii, geodézii či hudbě. Jeho záměrem bylo zmíněné vědy, obecně nebo v některých speciálních částech, vyložit na matematickém základě.

Bei den Bestimmungen von Ereignissen und Handlungen wird die Angabe der Zeit und des Ortes gefordert, wann und wo sie entweder bereits geschehen sind, oder gegenwärtig geschehen oder erst noch geschehen sollen. Darum werden die Chronologie und Geographie, als Zeit- und Erdkunde, schon längst treffend die beiden Augen der Weltgeschichte genannt. Andererseits dient allen Wissenschaften, deren Objecte Größe besitzen, die Mathematik, als Größen- und Zahlenlehre, nicht blos zur Begründung, sondern auch zur Ausbildung und Vervollkommenung. Daher dürfte es wohl nicht unvordienstlich sein, auch die Chronologie, als eine der nützlichsten und schwierigsten Hilfswissenschaften der Weltgeschichte und Urkundenlehre (Diplomatik), so weit als möglich, durch die Lehren der höheren Arithmetik (théorie des nombres) zu begründen und zu vereinfachen. ([16], str. V)

² Matzkovy práce jsou otištěny v časopisech: *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Annalen der Physik und Chemie, Annalen der Wiener Sternwarte, Archiv für Mathematik und Physik, Astronomische Nachrichten, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*. Z jeho činnosti se dochovalo rovněž 7 rukopisů uložených v Národní knihovně České republiky a v knihovně vídeňské univerzity (Universitätsbibliothek Wien).

³ Podrobný rozbor a hodnocení Matzkových prací o komplexních číslech a determinantech viz Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) and his Algebraical Works*, in Barbin E., Stehlíková N., Tzanakis C. (ed.): *History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the 5th European Summer University*, Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, str. 845–853, a Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) a historie komplexních čísel*, in Doležalová J. (ed.): *Sborník 17. ročníku semináře Moderní matematické metody v inženýrství* (3μ 2008), Ediční středisko Vysoké školy báňské – Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2008, str. 79–83. O logaritmech publikoval W. Matzka tři odborná pojednání, *Beiträge zur höheren Lehre von den Logarithmen*, *Archiv der Mathematik und Physik* 15(1850), 121–196 + 1 tabulka, *Ein kritischer Nachtrag zur Geschichte der Erfindung der Logarithmen*, *Archiv der Mathematik und Physik* 34(1860), 341–354 + 1 tabulka, *Ein Beitrag zur systemmässigen Abhandlung der natürlichen Logarithmen in der Algebra*, in *Geiste Nepper's und Euler's*, *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* 1878, 206–235, a obsáhlou učebnici nazvanou *Elementarlehre von den Logarithmen auf einen neuen, verständlicheren und umfassenderen Begriff vieler Hilfszahlen gegründet, blos die Kenntniß der gewöhnlichsten Zifferrechnungen voraussetzend, ohne Algebra gemeinfaßlich zergliedert*. Vorzugsweise bestimmt zur Verbreitung dieser im Zifferrechnen so vielseitig nützlichen Lehre im Kreise der praktischen Rechner, in *Untergymnasien, Gewerbs- und Bürgerschulen* (Prag, 1850, 128 stran), určenou zejména pro studenty nižších gymnázií a nižších reálných škol.

3 Chronologie

3.1 Krátký úvod do chronologie

Dějiny lidské společnosti se odehrávají v prostoru a čase. Již od nejstarších dob se lidé pokoušejí čas pochopit, filozofové vysvětlit a přírodovědci podat jeho obecnou definici. Komplikovanost celé záležitosti vystihuje výpověď sv. Augustina (ca. 354 až 430): *Vím, co je to čas, ale když se mne někdo zeptá, nedovedu mu to říci.*

Představy o čase, jeho pojetí a dělení se v různých kulturách, epochách, náboženstvích i společenských vrstvách odlišovaly. V průběhu dějin se jako samostatná vědecká disciplína rozvinula chronologie – nauka o čase.⁴ V různých obdobích se chronologie orientovala na řešení rozličných problémů. Mezi nejvýznačnější patřily stanovení přesného data křesťanských (pohyblivých) svátků (zvláště Velikonoc), snahy o opravu kalendáře (vyvrcholily roku 1582 gregoriánskou reformou), synchronizace dat událostí nejstarších období dějin, nalezení obecných metod k převádění dat mezi různými kalendáři apod.

Ve snaze po objektivním poznání času nezávislém na jeho morálním a náboženském významu zasáhli do chronologie rovněž matematikové. Jmenujme např. Isaaca Newtona (1643–1727), Carla Friedricha Gausse (1777–1855) [3] či Augusta De Morgana (1806–1871), kteří svým zájmem inspirovali i některé další matematiky; z nich zejména W. Matzka přispěl do chronologie původními výsledky.

Den Impuls zur höheren arithmetischen Behandlung der Zeitrechnung gab der geniale deutsche Mathematiker Herr Hofrath Gauß durch seine ... Berechnung des Datums des christlichen und jüdischen Osterfestes [3]. Sie veranlaßte mehrere, zum Theil berühmte Mathematiker, wie Delambre, Cisa de Crésy, Cavaliere de Ciccolini, Tittel u. a., entweder die Gaußischen Rechnung zu beweisen, oder Fragen der Zeitrechnung ähnlich zu bearbeiten. ([16], str. VI)

3.2 Chronologie v Matzkově díle

První z Matzkových odborných pojednání vyšlo pod názvem **Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie** [14] v roce 1828 v časopise *Journal für die reine und angewandte Mathematik* a bylo věnováno chronologii. W. Matzka v něm předložil řešení tří praktických úloh inspirovaných juliánským a gregoriánským kalendářem. Aby ukázal matematickou podstatu chronologie, užil algebraické vzorce, objasnil jejich význam, odvodil různé souvislosti a získané výsledky aplikoval na řešení konkrétních příkladů, čímž zdůraznil praktickou použitelnost vyloženého tématu a srozumitelně naznačil způsob jeho využití v praxi.

Pro lepší představu o obsahu pojednání [14] a jako ukázkou algebraického způsobu řešení chronologických úloh prezentujeme jeden z Matzkových příkladů:

⁴ Spolu s paleografií (nauka o písmu), diplomatikou (nauka o úředních písemnostech), heraldikou (nauka o znacích, vyznamenáních a řádech), numismatikou (nauka o platidlech) apod. tvoří chronologie komplex tzv. pomocných věd historických. Chronologie je nauka o měření času, jeho způsobech a prostředcích k tomu používaných ... Matematická (astronomická) chronologie využívá poznatků astronomie a jiných příbuzných věd, sleduje pohyby nebeských těles, ... a stanoví na jejich základě objektivní jednotky měření času. Technická (historická) chronologie studuje způsoby měření času a jejich vývoj u různých národů, respektive v jednotlivých kulturních okruzích. ([2], str. 24) Více o vývoji chronologie, jejích metodách a významných osobnostech viz [2].

Die katholische Kirche feiert das Schutzengelfest stets an demjenigen Sonntage, welcher der nächste an dem 1. September ist; man fragt nun: in welchen Jahren unseres Jahrhunderts fällt dieses Fest auf den 1. September selbst? ([14], str. 341)

Roky, v nichž měl katolický svátek Sv. Andělů strážných (Schutzengelfest) v 19. století připadnout na neděli 1. září, je možno určit z následujícího vzorce:

$$N = 100S + 28\vartheta + 4 \cdot \left(\frac{3h + 4L + 4b}{7} \right)_r + b,$$

kde N představuje daný rok nějaké éry, S je počet celých stovek obsažených v N a pro h v gregoriánském kalendáři platí:

$$h = \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{S}{4} \right)_r + 1}{7} \right)_r.$$

V obecném vyjádření daný svátek odpovídá neděli

$$28 + \left(\frac{L+5}{7} \right)_R \text{ září nebo } \left(\frac{L+5}{7} \right)_R - 3 \text{ srpna.}$$

Má-li připadnout právě na 1. září, pak $L = 6$. Pro L rovněž obecně platí:

$$L = \left(\frac{h + 2 \cdot \left(\frac{n}{4} \right)_r + 4 \cdot \left(\frac{n}{7} \right)_r}{7} \right)_R, \text{ kde } n = \left(\frac{N}{100} \right)_r.$$

Přičemž výraz $\left(\frac{A}{m} \right)_r$ představuje zbytek po dělení a speciálně, je-li $\left(\frac{A}{m} \right)_r = 0$, je pak $\left(\frac{A}{m} \right)_R = m$. Za b , ϑ se vezmou postupně hodnoty 0, 1, 2 a 3.

Jsou tedy $N = 18^{**}$, $S = 18$, $L = 6$ a h po dosazení do příslušného vzorce:

$$h = \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{18}{4} \right)_r + 1}{7} \right)_r = \left(\frac{2 \cdot 2 + 1}{7} \right)_r = \left(\frac{5}{7} \right)_r = 5.$$

Následně pro konkrétně zvolené hodnoty $b = 3$, $\vartheta = 2$ získáme:

$$N = 100 \cdot 18 + 28 \cdot 2 + 4 \cdot \left(\frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3}{7} \right)_r + 3 = 1859 + 4 \cdot \left(\frac{51}{7} \right)_r = 1867.$$

Postupným dosazením hodnot 0, 1, 2 a 3 za b a ϑ dostaneme (po vyloučení let 20. století) řadu čtrnácti let, 1805, 1811, 1816, 1822, 1833, 1839, 1844, 1850, 1861, 1867, 1872, 1878, 1889, 1895, ve kterých svátek Sv. Andělů strážných odpovídá přesně neděli 1. září.⁵

Vrcholem Matzkovy odborné činnosti v oblasti chronologie je obsáhlá (543 stran) monografie *Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung; durch höhere Arithmetik begründet und erläutert* [16], kterou publikoval v roce 1844 ve Vídni.⁶

V úvodní části nazvané *Vorbegriffe zur Chronologie* (téměř 60 stran) vyložil základní pojmy a věty vyšší aritmetiky (kongruence a dělitelnost v plné obecnosti, funkce, řady apod.), jež v chronologii nacházejí četná uplatnění. Tento přehled sepsal tak obecně a podrobně, že mohl být používán rovněž jako dodatek k učebnicím vyšší algebry.

Hlavní téma historické chronologie rozdělil W. Matzka do dvou částí. V části *Allgemeine Chronologie* důkladně vysvětlil předmět chronologie, zavedl odborné pojmy, objasnil věty a používané metody. Vypracoval zásady pro vyrovnání občanského roku se středním astronomickým a uvedl převody dat. V části *Besondere Chronologie* velmi podrobně pojednal o křesťanském datování, přičemž věnoval zvláštní pozornost stanovení přesných dat křesťanských (pohyblivých) svátků. Vše podložil a zdůvodnil pomocí matematických vzorců vyvozených v úvodu a tím ukázal, že vyšší matematika je základem chronologie. Poté v podobném duchu popsal ještě římský, egyptský, babylónský, řecký, židovský, arabský, perský a francouzský republikánský „letopočet“, tj. dataci, kalendář a měření času.

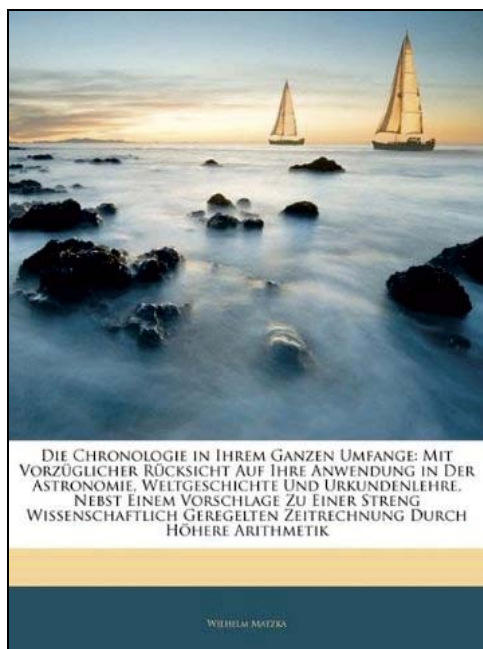
Ve zvláštním dodatku podal návrh na úpravu našeho kalendáře. Vyložené metody (s matematickým základem) měly pomoci především práci historiků a astronomů. V závěru monografie [16] uvedl pomocné tabulky, aritmetická schémata a vzorce umožňující přesné a rychlé určení dat křesťanských svátků.

Rozsah Matzkovy *Chronologie* [16] a především její přísně logické zpracování na základě teorie čísel byly a do dnešního dne jsou bezpochyby obdivuhodné. Náročnost díla, množství matematiky a logických operací, jež však učinily pro historiky příliš náročným a obtížně srozumitelným. V tomto smyslu se o něm vyjadřuje též [2] (str. 41) a [25].

Die Arbeiten von Gauss über die Osterberechnung regten mehrfach die Mathematiker zur Beschäftigung auch mit der technischen Chronologie an; das bedeutendste der einschlagenden Werke ist das von W. Matzka, Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, Wien 1844. So gelehrt und geistreich indessen auch dieses Buch ist, so wird die Mehrzahl der Historiker doch vorziehen, die erforderlichen Berechnungen auf einfachere und bequomere, wenn auch weniger wissenschaftliche Weise auszuführen. ([25], str. 4)

⁵ Ze zadání a řešení příkladu je evidentní, že byl katolický svátek Sv. Andělů strážných (Schutzengelfest) v 19. století pohyblivým svátkem, který připadal na první neděli po 1. září. V dnešní době ho katolická církev slaví pravidelně 2. října.

⁶ W. Matzka tuto práci věnoval svému bývalému univerzitnímu učiteli Franzu Ignaci Cassianovi Hallaschkovi (1780–1874). *Dem hochwürdigsten Herrn Fr. Ser. Cassian Hallaschka, ... in tiefster Ehrerbietung und mit der Pietät eines ehemaligen Schülers.* ([16], str. III)



Poznamenejme, že na počátku roku 2010 byla po více než 160 letech Matzkova rozsáhlá monografie [16] opětovně vydána, což jednoznačně dokazuje její význam a úroveň.

Uved'me nyní pro dokreslení Matzkova matematického přístupu k chronologii úryvek z dodatku monografie [16], který uvádí přepočet mezi „historickým“ a křesťanským letopočtem ([16], str. 505–506).

12.

Vergleichung der historischen Zeitrechnung mit der christlichen.

Soll der d^{te} Tag des Jahres a , oder der n^{te} Tag der historischen Äre, welche um $g = 1748295$ Tage nach der byzantinischen anfängt, mit dem d^{ten} Tage gregorianischen Styles des Jahres a' oder mit dem n^{ten} Tage der Äre nach Chr. Geb., welche um $g' = 2011919$ Tage nach der byzantinischen beginnt, zusammen fallen, und mit Rücksicht auf die bestehende Ausnahme

$$k = \frac{a'}{4} - \frac{a'-100}{4} - 2$$

die Voreilung des gregorianischen Styles vor dem julianischen seit dem Jahre $a' = 1582$ n. Chr. vorstellen, vor diesem Zeitpunkte aber Null sein, (§. 47, II); so hat man die Gleichungen

$$n = 365(a-1) + \frac{a-1 - \frac{a-3}{4}}{4} + d$$

$$n' = 365(a'-1) + \frac{a'-1}{4} + d' - k$$

$$n + g = n' + g'.$$

Hieraus folgt

$$n - n' = g' - g = 263624 = 365 \cdot 722 + 94$$

$$= 365(a-a') + \frac{a-1 - \frac{a-3}{4}}{4} - \frac{a'-1}{4} + d - d' + k,$$

mithin ist für die Reduction der christlichen Zeitrechnung auf die historische

$$a = a' + 722 - \alpha$$

$$d = \frac{a'-1}{4} - \frac{a-1 - \frac{a-3}{4}}{4} + d' - k + 94 + 365\alpha$$

und für die Reduction der historischen Zeitrechnung auf die christliche

$$a' = a - 722 + \alpha$$

$$d' = \frac{a-1 - \frac{a-3}{4}}{4} - \frac{a'-1}{4} + d + k - 94 - 365\alpha;$$

wobei $\alpha = 0$ oder 1 anzunehmen ist, damit d oder d' weder negativ noch zu groß ausfalle.

Zájem o aritmetické zkoumání otázek křesťanského kalendáře si W. Matzka zachoval i v pozdějším věku. Počátkem osmdesátých let 19. století navázal na výsledky obsáhlé monografie [16] prací *Zur christlichen Zeitrechnung und für deren Verbesserung* [21] vydanou v *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* (75 stran).

V její první části se pokusil o zjednodušení výpočtu významných dat křesťanského roku (např. stanovení data Velikonoc). Ve druhé části nazvané *Erforschung, Entwurf und Vorschlag einer universellen rationalen Zeitrechnung* vyšel z „obecných“ a astronomických znalostí ročního cyklu a podal návrh na vylepšené uspořádání občanského roku (řízeného podle gregoriánského kalendáře). Matzkovy úvahy hodnotí [27] z dnešního pohledu takto:

Der böhmische Mathematiker Wilhelm Matzka schlug 1880 [21], also lange nach der Gregorianischen Reform, einen Kalender mit einer Zyklus-Dauer von 62 Jahren vor. Darin sind 15 Schalttage enthalten. Nach 7 oder 6 olympischen Schalt-Perioden á 4 Jahre wird erst nach dem 5. Jahr erneut geschaltet. Dann folgt der zweite Teil des Zyklus mit 6 oder 7 olympischen Schalt-Perioden und erneuter Schalt-Verzögerung bis zum Ende des Zyklus'. Das Matzka-Jahr ist 365,241936 Tage lang, ist also ein zu kurzes Kalender-Jahr. Man müsste nach ca. 3.795 Jahren einen zusätzlichen Schalt-Tag einfügen. ([27], str. 11)

Dnes až na výjimky celosvětově používaný gregoriánský kalendář, zavedený v roce 1582 papežem Řehořem XIII., zajistil (téměř dokonale) soulad kalendářního roku s astronomickou skutečností. Již od dob jeho zavedení se příležitostně objevovaly návrhy na další vylepšení. Většinou se však zabývaly detaily, jež v celkovém pohledu nedosahovaly požadované obecnosti a přesnosti.

Matzkův cyklus se neujal, přestože z úvodu a závěru jeho práce [21] je zřejmé jeho přesvědčení o uplatnění předložených výsledků. Připomeňme, že poskytoval tu výhodu, že by počátek jara připadal pravidelně (dlouhou dobu) na stejný březnový den v týdnu. Neřešil však dostatečně problém rozdělení přestupných let.⁷

3.3 Chronologie v díle Matzkových současníků

W. Matzka byl prvním autorem, který v časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* uveřejnil odborný článek o chronologii (viz [14]). V následujících letech se v časopisu objevilo několik dalších statí pojednávajících o tomto tématu, jež se odkazovaly na práce C. F. Gausse [3], W. Matzky či výsledky některých (známých) astronomů a historiků. Uveďme například práce G. H. F. Nesselmanna *Beiträge zur Chronologie* [22] a F. Pipera *Zur Kirchenrechnung* [24], které popisovaly základní chronologické úlohy (stanovení data Velikonoc, stanovení počátku arabského či židovského letopočtu a jejich vztah ke křesťanskému letopočtu apod.). Z velké části využívaly metody a výsledky jiných autorů; zavedením pomocných tabulek a použitím jednoduchých matematických vzorců (bez jejich odvození) se snažily o zjednodušení a zpřístupnění tématu.

V průběhu devatenáctého století vycházely četné práce vztahující se k chronologii, které byly více či méně provázány s matematikou. Odlišovaly se nejen rozsahem, ale i zaměřením a způsobem zpracování. Velká část z nich byla psána zejména pro potřeby historiků; ať už se záměrem podat souhrnný pohled na dějiny lidstva, nebo podrobně popsat konkrétní historické období. Jiná se pokoušela chronologii vystavět na vědeckém základě nebo ji naopak populárně zprostředkovat a ukázat její užití v běžném občanském životě. Vedle dvoudílného, velmi hodnotného díla L. Idelera *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie* [11] zmíníme ještě podnětné práce F. J. D. Aragoa *Astronomie populaire* (4. díl) [1], J. F. Kulika *Der tausendjährige*

⁷ Reformou gregoriánského kalendáře se ve stejné době jako W. Matzka (viz [21]) zabýval též německý astronom Johann Heinrich von Mädler (1794–1874) v článku *Die Kalender-Reform* (*Deutsche Naturforscher*, 40(1865), str. 81). Podrobné zhodnocení a analýza Mädlerových myšlenek viz [27].

Kalender [12], F. Rühla *Chronologie des Mittelalters und der Neuzeit* [25] nebo B. M. Lerscha *Einleitung in die Chronologie oder Zeitrechnung verschiedener Völker und Zeiten* [13].

4 Astronomie

4.1 Krátký úvod do astronomie

Astronomie, jedna z nejstarších věd, byla již od svých počátků velmi úzce spjata s praktickými potřebami. Astronomické poznatky měly vždy velký význam, ať se jednalo o problémy spojené se zemědělstvím, určováním času či s navigací, zámořskými plavbami a objevy.

V prvních obdobích vývoje astronomie nešlo ještě o vědu v dnešním slova smyslu, nýbrž spíše o neuspřádané dílčí poznatky získávané pozorováním oblohy, tedy pohybů Slunce, Měsíce a hvězd. Počátky vědecké astronomie lze klást do období starého Řecka. Řeční astronomové se nespokojovali jen s pouhým zaznamenáváním a předpovídáním periodicky se opakujících astronomických jevů, ale snažili se je vysvětlit. Z vrcholných prací připomeňme Aristarchovo (asi 320 až 250 př. n. l.) dílo *O velikosti a vzdálenosti Slunce a Měsíce*, Archimédův (asi 287 až 212 př. n. l.) spis *O počtu pískovém* či Ptolemaiovo (asi 85 až 165) stěžejní dílo *Almagest*.

Byli to pak významní vědci 16. a 17. století, Mikuláš Koperník (1473–1543), Tycho Brahe (1546–1601), Galileo Galilei (1564–1642) a Johannes Kepler (1571–1630), kteří vytvořili moderní pohled na sluneční soustavu a položili základy dnešní vědecké astronomii. Po řadu století byla astronomie velkou výzvou též pro matematiky a fyziky, neboť v ní mohli aplikovat a zúročit své odborné znalosti. Jmenujme např. Isaaca Newtona (1643–1727), Leonharda Eulera (1707–1783) a Carla Friedricha Gausse (1777–1855).

V dnešní době se astronomie definuje jako věda o vesmíru, zabývající se vznikem, vývojem, stavbou, rozložením, pohybem a vzájemným působením vesmírných těles a jejich soustav. Zahrnuje celou řadu speciálních témat, problémů, oborů a objektů zájmu, využívá poznatky příbuzných přírodních věd (zejména matematiky a fyziky).⁸

4.2 Astronomie v Matzkově díle

Matzkův zájem o astronomickou problematiku dokládají dva kratší odborné články [17] a [20] a jeden dochovaný rukopis [18].

Rukopis nadepsaný *Tafel der Zeitgleichungen oder der Zeit-Intervalle zwischen wahren und mittleren Mittage für den Wiener Meridian* [18] je datován rokem 1828.⁹ Ve čtyřech dvoustránkových tabulkách W. Matzka uvedl koeficienty časové rovnice pro každý den roku v rozmezí let 1828 až 1872 (tabulky se opakují ve čtyřletém cyklu, podle přestupného roku). Tyto koeficienty slouží k vyrovnání rozdílu mezi pravým (tj. astronomickým) a středním (tj. civilním) slunečním časem, který vyvolává oběh Země

⁸ O historii a vývoji astronomie podrobně viz [23] a [26].

⁹ Rukopis je uložen v knihovně vídeňské univerzity (Universitätsbibliothek Wien).

po eliptické dráze a její sklon vzhledem k rovníku.¹⁰ Použití tabulek W. Matzka vysvětlil na řešených příkladech.

Uvedme na ukázkou jeden z řešených příkladů včetně příslušné tabulky. Steht jedoch vor der Zeitgleichung das Zeichen –, so muß man die nebenstehende Zahl von Minuten und Sekunden von dem, was die Sonnenuhr zeigt, abziehen, oder um eben so viel geht die Sonnenuhr in Hinsicht auf die mittlere Uhr zu früh. So z.B. am 10. November 1830 also nach Tafel III ist die Zeitgleichung $-15^M 54^S$, gibt nun die Sonnenuhr 10 Uhr, 45 Min. so ziehe ich hiervon 15 Min. 54 Sek. ab, und erhalte 10 Uhr, 29^M 6^S, oder eine richtige Räderuhr soll 10 Uhr 29 Minuten zeigen; weiset jedoch eine Uhr zu eben dieser Zeit statt 10 ... 26 ... so wird sie, um 3 Minuten zu früh gehen.

Tafel III.

Zeitgleichungen von 2 bis 31 Tagen nach einem bestimmten Jahr, als 1830, 1834, 1838, 1842, 1846, 1850, 1854, 1858, 1862, 1866, 1870.

Tag	Juli		August		September		Oktober		November		December	
	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.
1	+ 3	17	+ 5	58	-	1	- 10	13	- 16	14	- 10	19
2	2	38	5	55	.	23	10	32	16	15	10	26
3	2	40	5	57	.	22	10	37	15	16	10	2
4	3	57	5	46	1	7	11	9	16	15	9	38
5	4	2	5	41	1	20	11	24	15	14	9	12
6	4	12	5	35	1	30	11	44	16	17	8	18
7	4	22	5	28	2	.	12	2	16	8	8	22
8	4	32	5	21	2	20	12	18	16	5	7	56
9	4	42	5	14	2	40	12	35	16	.	7	30
10	4	51	5	6	3	1	12	57	16	54	7	2
11	4	59	4	57	3	21	12	6	16	40	6	38
12	5	7	4	47	3	42	12	21	15	47	6	7
13	5	15	4	37	4	2	12	36	15	32	5	29
14	5	22	4	27	4	24	12	50	15	24	5	10
15	5	29	4	16	4	45	14	4	15	15	4	42
16	5	35	4	4	5	6	14	17	15	4	4	13
17	5	40	3	52	5	27	14	39	14	53	3	42
18	5	45	3	39	5	49	14	41	14	47	3	14
19	5	50	3	26	6	10	14	52	14	37	2	44
20	5	54	3	12	6	21	15	2	14	14	2	14
21	5	57	2	58	6	32	15	12	12	39	1	44
22	6	.	2	43	7	13	15	22	12	43	1	14
23	6	2	2	38	7	24	15	21	12	37	.	44
24	6	7	2	12	7	34	15	38	12	10	-	14
25	6	5	1	57	8	15	15	46	12	52	+	16
26	6	6	1	41	8	35	15	52	12	33	.	46
27	6	6	1	24	8	55	15	58	12	14	1	16
28	6	6	1	7	9	15	15	2	11	32	1	46
29	6	5	.	50	9	35	16	7	11	32	2	16
30	6	3	.	32	- 9	54	16	10	- 11	11	2	44
31	+ 6	1	+	14	.	.	- 16	13	.	.	+ 3	13

¹⁰ Měření pravého slunečního času je možno provádět slunečními hodinami. O konstrukci slunečních hodin viz Příhoda P.: *Sluneční hodiny*, Štefánikova hvězdárna hl. m. Prahy, Praha, 1970, Schumacher H.: *Sonnenuhren, Eine Anleitung für Handwerk und Liebhaber*, Gestaltung, Konstruktion, Ausführung, D. W. Callwey, München, 1973.

V pojednání *Über die Bestimmung jener Punkte der Erdoberfläche, welche eine gegebene Mondesfinsterniss sehen* [20] uveřejněném v roce 1829 v časopisu *Annalen der k. k. Sternwarte in Wien* se W. Matzka zabýval stanovením částí zemského povrchu, na nichž je pozorovatelné probíhající zatmění Měsíce.¹¹ Důvtipným zavedením vhodných proměnných pro astronomické veličiny podal matematické řešení tohoto problému, doplnil jej slovním výkladem a aplikoval na reálnou situaci zatmění Měsíce dne 12. září 1829. Výsledky zobrazil do přehledné tabulky a (při představě glóbu) výčtem konkrétních míst na pevnině znázornil hraniční linie pro začátek a konec zatmění plným stínem a polostínem.

V roce 1846 W. Matzka publikoval v časopisu *Astronomische Nachrichten* kratší článek pod názvem *Einige Gedanken über Sonnenuhren* [17]. Nejprve vysvětlil konstrukci slunečních hodin a princip jejich fungování, pak vyzdvihl některé jejich vlastnosti a poukázal na možnosti jejich užití.¹²

4.3 Astronomie v díle Matzkových současníků

V první polovině 19. století se systematickému astronomickému výzkumu věnoval jen malý okruh lidí, jenž byl obvykle úzce spjatý s hvězdárnou, a tak zaměření práce značně záviselo na vedoucí osobnosti. Příležitostně se astronomickými problémy zabývali i někteří další odborníci, mezi nimi také profesori příbuzných oborů na univerzitách, technikách a středních školách.

V kontextu Matzkovy práce je vhodné připomenout příspěvky Johanna Augusta Grunerta (1797–1872), profesora matematiky na univerzitě v Greifswaldu a vydavatele časopisu *Archiv der Mathematik und Physik, Ueber Aristarch's Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen* [8], v němž v moderní matematické symbolice zprostředkoval a dále rozvinul Aristarchovu metodu určení vzdálenosti Slunce a Země, a *Ueber die Berechnung der Parallaxen* [10], ve kterém pojednal o způsobech měření paralaxy.¹³

5 Geodézie

5.1 Krátký úvod do geodézie

Geodézie je vědní obor zabývající se zkoumáním tvaru, rozměru a fyzikálních vlastností zemského povrchu a jeho částí. Její historický původ je spojen s potřebou rozdělovat, definovat a dokumentovat hranice území států, měst či majetku soukromých osob. V průběhu času kartografie a navigace kladly stále vyšší nároky na přesnost měřicích i zobrazovacích postupů. Zejména užití matematických, geometrických a fyzikálních metod měření a výpočtů poskytuje geodézii přesné a spolehlivé výsledky.¹⁴

¹¹ Zatmění Měsíce je astronomický jev, při kterém je Měsíc zastíněn planetou Zemí. Dochází k němu při úplňku, pokud se Slunce, Země a Měsíc ocitnou v jedné přímce, což nastává přibližně dvakrát až třikrát do roka.

¹² Sluneční hodiny udávají pravý sluneční čas a jsou nejrozšířenějším typem tzv. elementárních časoměrných přístrojů. Sluncem ozařovaný předmět vrhá stín, podle jehož aktuální pozice lze určit čas. Astronomicky a matematicky je určování času odvozeno z rotace Země kolem své osy a rotace Země kolem Slunce.

¹³ Parallaxa označuje úhel, který svírají přímky vedené ze dvou různých míst v prostoru k pozorovanému bodu. V astronomii se měření paralaxy používá zejména pro stanovení vzdáleností vesmírných těles.

¹⁴ O historii geodézie více viz Pudr J.: *Dějiny geodézie a kartografie*, SNTL, Praha, 1959.

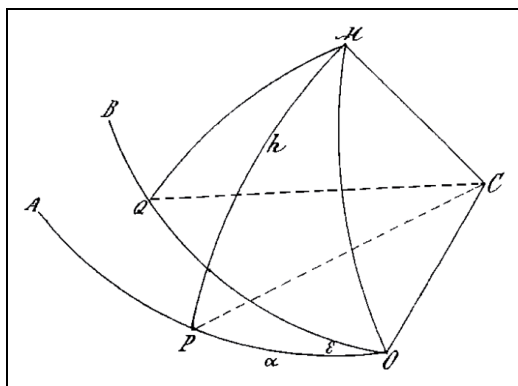
W. Matzka se zajímal především o tzv. nižší geodézii, která se zabývá podrobným polohopisným a výškopisným měřením, měřickými metodami, konstrukcí a popisem užívaných měřicích přístrojů a pomůcek; obecně tedy způsoby měření, počítání a zobrazování naměřených hodnot.

5.2 Geodézie v Matzkově díle

V roce 1849 otiskl časopis *Archiv der Mathematik und Physik* dvě Matzkova pojednání [15] a [19] týkající se nižší geodézie.

V práci *Berechnung der Fehler der Horizontalwinkel bei geneigter Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises am Winkelmesser* [15] se W. Matzka zabýval stanovením velikosti chyby horizontálního úhlu, resp. nejvyšší možné chyby způsobené odchýlením roviny měřického stolu od horizontální roviny.

Nejprve definoval základní veličiny (odchylku ε , horizontální úhel α , chybu horizontálního úhlu $\Delta\alpha$, výškový úhel h atd.) a poté diskutoval podmínky pro parametry ε , h , α v závislosti na $\Delta\alpha$.



Dále ukázal několik způsobů výpočtu chyby horizontálního úhlu $\Delta\alpha$. A to pomocí vzorců

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{u \cos \alpha}{1 + u \sin \alpha}, \quad u = \sin \varepsilon \operatorname{tg} h - \sin v \varepsilon \sin \alpha,$$

nebo

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = (v+1) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} h, \quad v = \frac{\sqrt{1+8n^2}+1}{2}, \quad n = \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin h},$$

nebo využitím rozvoje řad. Uvedené metody aplikoval na řešení několika praktických příkladů, a tak problematiku ještě důkladněji vysvětlil.

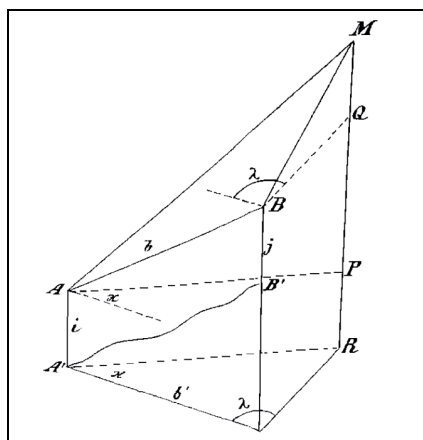
Na závěr uvedl v přehledné tabulce hodnoty udávající pro zadanou odchylku měřického stolu ε a výškový úhel h , velikost horizontálního úhlu α a největší možnou chybu horizontálního úhlu $\Delta\alpha$, což urychlovalo výpočty v řadě speciálních měření a zejména jejich dalším zpracování.

W. Matzka se cítil pobouřen skutečností, že mnozí zeměměřiči při geodetickém zkoumání používali zastaralé nástroje, způsoby měření a výpočtů a nekriticky důvěřovali takto získaným nepřesným výsledkům. Bez váhání své rozhořčení vepsal do úvodu druhé práce o geodézii ***Ueber trigonometrische Höhenmessung*** [19] a předsevzal si přispět k jejímu rozvoji moderním matematickým aparátem (zejména užitím logaritmů, goniometrických funkcí a rozvoju řad).

... Denn es kann einen besonnenen Mathematiker nur zum Lächeln bewegen, wenn er die Lobpreisungen der Uebereinstimmung mancher barometrischen Höhenmessung mit einer oft noch alten und mittels mangelhafter Instrumente oder Methoden ausgeführten trigonometrischen liest, nachdem man doch, unbekümmert um das Wieweitsicher des Endergebnisses, beiderlei Formeln durch allerhand Weglassungen von sogenannten unmerklich kleinen Grössen zu beliebten Filigranformeln zugeschnitten hat, um auch wissenschaftlichen Dilettanten, wie wenig sie auch von Logarithmen und Goniometrie verstehen mögen, das Vergnügen zu verschaffen, derlei Höhenberechnungen vornehmen und mit ihren Resultaten prunken zu können. Viel Schuld an der Sucht, diese Höhenformeln so zuzustutzen, hat das Vorurtheil der meisten praktischen Mathematiker, die gesuchte Grösse selbst aus einem einzigen geschlossenen Ausdrucke sämtlicher Rechnungsangaben zu berechnen ... ([19], str. 1–2)

Ve dvou částech práce [19] pojednal o trigonometrickém měření výšek na krátkých a dlouhých vzdálenostech. Uvedl nejen základní pojmy (základna, výškový rozdíl, odchylka horizontu atd.), obecně platné věty a vztahy, ale diskutoval také řadu speciálních případů v závislosti na poloze základny a ukázal možnosti jejich řešení. Vše podložil odvozenými matematickými vzorci a doplnil grafickými schématy. Odkázal rovněž na některé práce a výsledky jiných matematiků.¹⁵

Předved'me nyní řešení jedné z uvedených úloh ([19], str. 9–10, tab. I., obr. 7).



¹⁵ V pojednání [19] se W. Matzka odkazuje především na následující díla: Netto F. W.: *Handbuch der gesammten Vermessungskunde, die neuesten Erfindungen und Entdeckungen in derselben zugleich enthaltend; oder vollständige Anleitung zur Mekunst, für Offiziere, Forstbediente, Bergleute und Feldmesser*, Berlin, 1825, Crelle A. L.: *Handbuch des Feldmessens und Nivellements in den gewöhnlichen Fällen*, Berlin, 1826. Cituje také Gaussovy, Laplaceovy a Delambreovy výsledky.

1. Hat man die Horizontalwinkel π und λ gemessen, so ist im horizontalen Dreiecke $A'B''R$

$$RA'B'' = \pi, \quad RB''A' = \lambda;$$

daher

$$\text{die Horizontaldistanz } A'R = AP = b' \frac{\sin \lambda}{\sin(\pi + \lambda)},$$

$$\text{„ „ } B''R = BQ = b' \frac{\sin \pi}{\sin(\pi + \lambda)};$$

daher findet man (gemäss a):

$$\text{den Höhenunterschied } (M-A) = AP \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = b' \frac{\sin \lambda}{\sin(\pi + \lambda)} \operatorname{tg} \varepsilon,$$

$$\text{„ „ } (M-B) = BQ \cdot \operatorname{tg} \eta = b' \frac{\sin \pi}{\sin(\pi + \lambda)} \operatorname{tg} \eta.$$

2. Hat man dagegen die geneigten Winkel α und β gemessen, so ist im geneigten Dreiecke ABM

$$\text{die Distanz } AM = b \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$\text{„ „ } BM = b \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)};$$

daher findet man (gemäss b, α)

$$\text{den Höhenunterschied } (M-A) = AM \cdot \sin \varepsilon = b \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \varepsilon,$$

$$\text{„ „ } (M-B) = BM \cdot \sin \eta = b \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \eta.$$

Jedenfalls gilt wie vorhin die Controlgleichung

$$(M-A) - (M-B) = (B-A) = g.$$

5.3 Geodézie v díle Matzkových současníků

Matematické zpracování geodetických úloh zaujímal v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* ve čtyřicátých a padesátých letech 19. století vedle aritmetiky, geometrie, astronomie a fyziky stálé místo. Kromě výše popsaných Matzkových prací ([15] a [19]) byly otištěny četné příspěvky J. A. Grunerta (např. [7] a [9]) a Christiana Ludwiga Gerlinga (1788–1864), profesora matematiky na univerzitě v Marburgu (např. [4], [5] a [6]), které přinášely matematická řešení speciálních a aktuálních geodetických problémů, nabýzely postupy vedoucí ke zpřesnění výpočtů a kompenzaci chyb naměřených hodnot.

6 Závěr

Wilhelm Matzka plodně využil matematické znalosti v chronologii, astronomii a geodézii. Vhodnými aplikacemi řešil praktické a speciální úlohy těchto oborů. Budoval je na matematických tvrzeních, zpřesňoval používané metody, rozšiřoval jejich teoretické základy a vnášel kritický pohled na získané výsledky.

Literatura

- [1] Arago F. J. D.: *Astronomie populaire*. Tome quatrième, Paris, 1857, 854 stran.
- [2] Bláhová M.: *Historická chronologie*. Libri, Praha, 2001, 948 stran.
- [3] Gauss C. F.: *Berechnung des Osterfestes*. Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmls-Kunde 2, August 1800, 121–130.
- [4] Gerling Ch. L.: *Lehrsätze und Formeln aus der analytischen Geometrie und mathematischen Geographie, welche in der practischen Geometrie zur Anwendung kommen*. Archiv der Mathematik und Physik 5(1844), 58–77 + 1 tabulka.
- [5] Gerling Ch. L.: *Nachträge zur Ausgleichungs-Rechnung*. Archiv der Mathematik und Physik 6(1845), 141–146.
- [6] Gerling Ch. L.: *Ueber die Genauigkeit der Ketten-Messungen*. Archiv der Mathematik und Physik 6(1845), 375–379.
- [7] Grunert J. A.: *Das Pothenot'sche Problem, in erweiterter Gestalt; nebst Bemerkungen über seine Anwendung in der Geodäsie*. Archiv der Mathematik und Physik 1(1841), 238–248.
- [8] Grunert J. A.: *Ueber Aristarch's Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen*. Archiv der Mathematik und Physik 5(1844), 401–412.
- [9] Grunert J. A.: *Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte*. Archiv der Mathematik und Physik 13(1849), 345–364 + 1 tabulka.
- [10] Grunert J. A.: *Ueber die Berechnung der Parallaxen*. Archiv der Mathematik und Physik 3(1843), 337–382.
- [11] Ideler L.: *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie*. Erster und zweiter Band, Berlin, 1825 und 1826, 583 stran + 668 stran.
- [12] Kulik J. P.: *Der tausendjährige Kalender, Ein nützliches Handbuch für Historiographen, Diplomaten, Archivare, Richter, Advokaten, Landgeistliche, und überhaupt für jene, welche die in den alten Manuskripten, Geschichtbüchern, und Urkunden vorkommenden chronologischen Daten zu bestimmen haben*. Prag, 1831, 217 stran.
- [13] Lersch B. M.: *Einleitung in die Chronologie oder Zeitrechnung verschiedener Völker und Zeiten nebst christlichem und jüdischem Festkalender*. Aachen, 1889, 179 stran.
- [14] Matzka W.: *Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Callendarographie*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 3(1828), 337–346.
- [15] Matzka W.: *Berechnung der Fehler der Horizontalwinkel bei geneigter Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises am Winkelmesser*. Archiv der Mathematik und Physik 13(1849), 113–137 + 1 tabulka.

- [16] Matzka W.: *Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung; durch höhere Arithmetik begründet und erläutert.* Fr. Bech'schen Universitäts-Buchhandlung, Wien, 1844, VIII + 543 stran; 2. vydání, Nabu Press, 2010.
- [17] Matzka W.: *Einige Gedanken über Sonnenuhren.* Astronomische Nachrichten 23(1846), sloupec 153–158.
- [18] Matzka W.: *Tafeln der Zeitgleichung oder der Zeit-Intervalle zwischen dem wahren und mittleren Mittage für den Wiener Meridian.* Wien, 1828, 15 stran (rukopis).
- [19] Matzka W.: *Ueber trigonometrische Höhenmessung.* Archiv der Mathematik und Physik 12(1849), 1–39 + 1 tabulka.
- [20] Matzka W.: *Über die Bestimmung jener Punkte der Erdoberfläche, welche eine gegebene Mondesfinsterniss sehen.* Annalen der k. k. Sternwarte in Wien 9(1829), 22–24.
- [21] Matzka W.: *Zur christlichen Zeitrechnung und für deren Verbesserung.* Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, VI. Folge, 10(1879–1880), Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 5, 75 stran.
- [22] Nesselmann G. H. F.: *Beiträge zur Chronologie.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 26(1843), 32–80.
- [23] Pannekoek A.: *A History of Astronomy.* New York, Dover Publications, 1989, 498 stran.
- [24] Piper F.: *Zur Kirchenrechnung, Formel und Tafeln.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 22(1841), 97–104.
- [25] Rühl F.: *Chronologie des Mittelalters und der Neuzeit.* Berlin, 1897, 312 stran.
- [26] Štekl V., Krtička J.: *Historie astronomie.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2008, 143 stran.
- [27] Wetzel S.: *Alternativen zum Gregorianischen Kalender.* Deutsche Gesellschaft für Chronometrie – Mitteilung Nr. 114, 2008, 10–16.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a v rámci projektu *Specifického vysokoškolského výzkumu* 2010-261 315.

Adresa

Mgr. Michaela Chocholová
 Katedra didaktiky matematiky
 Matematicko-fyzikální fakulta UK
 Sokolovská 83
 186 75 Praha 8
 e-mail: chochol@karlin.mff.cuni.cz

ZOBECNĚNÍ BUFFONOVY ÚLOHY O JEHLE

ANNA KALOUSOVÁ

Abstract: The Buffon needle problem is one of the best-known problems of the geometric probability. We show some generalizations of this problem made by Buffon and Laplace.

1 Úvod

Úloha o jehle, kterou formuloval a vyřešil Georges-Louis Leclerc (1707–1788), pozdější hrabě de Buffon, je základní úlohou geometrické pravděpodobnosti. Poprvé se objevila v roce 1733 v pojednání *Solutions de problèmes sur le jeu du franc-carreau* (záznam o čtení tohoto pojednání ve francouzské Akademii věd najdeme v [3]). Rozšíření z roku 1736 se sice nezachovalo, ale v roce 1777 bylo spolu s dalšími matematickými texty zahrnuto do [2]. Buffon zde navíc řešil úlohu, kde je jehla házena na čtvercovou síť, nevyřešil ji ale správně. V roce 1812 uvedl v [6] úlohu o jehle Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), aniž by zmínil jejího autora. Udělal další zobecnění, místo čtvercové uvažoval obdélníkovou síť a úlohu správně vyřešil.

Další zobecnění se týkala tvaru předmětu, který byl házen na síť rovnoběžek. V roce 1857 byla publikována učebnice integrálního počtu [7] Isaaca Todhuntera (1820–1884). Najdeme zde úlohu, kde je na síť rovnoběžek házena elipsa nebo čtverec, ve 2. vydání z roku 1862 pak libovolná uzavřená konvexní křivka bez singulárních bodů. Podobný výsledek zveřejnil v roce 1860 také Joseph-Émile Barbier (1839–1889) v článku [1]. Více o tomto tématu je v [4] a [5]. V [7] je také úloha, ve které je na síť ekvidistantních rovnoběžek házena tyčka, jejíž délka je r -násobkem vzdálenosti mezi rovnoběžkami a hledá se pravděpodobnost, že protne r rovnoběžek. To je poprvé, kdy obrazec mohl protnout více než jednu rovnoběžku.

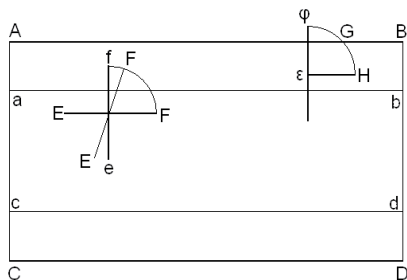
2 Úloha o jehle

2.1 Základní úloha

Připomeňme nejprve základní úlohu, jak je formulována v [1]: Předpokládám, že v místnosti, jejíž podlaha je jednoduše rozdělena rovnoběžnými spárami, je do vzduchu hozena tyčka & že jeden z hráčů sází, že tyčka neprotne žádnou rovnoběžku na podlaze, & že druhý naproti tomu sází, že tyčka některé z nich protne; ptáme se na šance těchto dvou hráčů. *Hru je možné hrát na šachovnici s jehlou na šití nebo se špendlíkem bez hlavičky.*¹ Nejsou zde uvedeny další předpoklady, totiž že vzdálenost mezi spárami je stejná a délka tyčky je nejvýše rovna této vzdálenosti. Buffon hledá poměr mezi délkou tyčky a vzdáleností spár (šířkou prken), aby hra byla spravedlivá, tedy aby šance obou hráčů byly stejné. To se trochu liší od toho, jak bývá úloha formulována dnes, kdy se hledá pravděpodobnost, že tyčka protne nějakou spáru.

¹ Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune de ces parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.*

Uvedeme zde původní Buffonovo řešení, protože je dále využívá i při řešení úlohy o jehle na čtvercové síti. Situace je znázorněna na obrázku, který je kopií obrázku z [2]. Buffon nejprve zvolí na dvou sousedních rovnoběžkách body **A,B** a **C,D** tak, aby tvořily obdélník. Jedna strana obdélníka je rovna vzdálenosti rovnoběžek (označí ji $2a$), druhou označí f . Délka tyčky je označena $2b$ a v obdélníku **ABDC** jsou vedeny ve vzdálenosti b rovnoběžky se stranami **AB** a **CD**. Symbolem c je označena čtvrtina kružnice s poloměrem b , tedy $c=b \cdot \pi/2$. Buffon uvažuje jen

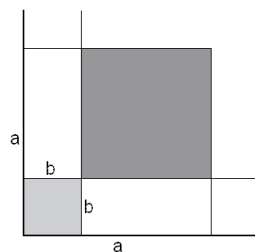


(horní) polovinu obdélníka **ABDC**, v dolní polovině je situace (díky symetrii) stejná. Je zřejmé, že pokud střed tyčky padne do obdélníka **abdc**, nemůže tyčka protnout žádnou rovnoběžku. Tomu odpovídá hodnota $f(a-b) \cdot c$. Pokud střed tyčky padne do zbylé části, může tyčka rovnoběžku protnout a také neprotnout. Například když střed tyčky padne do bodu ϵ , odpovídá oblouk ϕG těm případům, kdy tyčka protne

přímku **AB** a oblouk ϕG případům, kdy tyčka přímku neprotne. Potom Buffon označí symbolem y oblouk ϕG . Označíme-li x vzdálenost bodu ϵ od přímky **AB, je vlastně $y = b \cdot \arccos \frac{x}{b}$. Případům, kdy jehla protne přímku **AB**, potom odpovídá $f \cdot \int y dx$, případům, kdy přímku **AB** neprotne, odpovídá $f \cdot (bc - \int y dx)$. Integrační meze Buffon neuvádí, je ale zřejmé, že dolní mez je 0 a horní je b . Přičteme-li dříve vypočtenou hodnotu $f(a-b) \cdot c$, získáme pro případy, kdy tyčka neprotne žádnou přímku, hodnotu $f \cdot (a-b) \cdot c + f \cdot (bc - \int y dx) = f(ac - \int y dx)$. Mají-li být šance hráčů stejné, musí platit $f \cdot \int y dx = f(ac - \int y dx)$, neboli $\int y dx = ac - \int y dx$ a tedy $ac = 2 \int y dx$. Protože $\int y dx = b^2$, dospívá Buffon k závěru, že má-li být hra spravedlivá, musí být tyčka o něco delší než $\frac{3}{4}$ vzdálenosti mezi rovnoběžkami (přesný výsledek je $b = \frac{\pi}{4} \cdot a$).**

2.2 Buffonovo rozšíření na čtvercovou síť

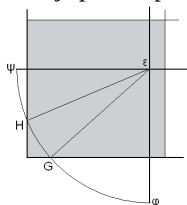
V další části Buffon tuto úlohu rozšiřuje. Tyčka je házena na podlahu, která je vydlážděna čtvercovými dlaždicemi. Máme tedy dva na sebe kolmé systémy ekvidistantních rovnoběžek, jejich vzdálenost je opět označena $2a$. Délka tyčky je $2b$ a c je čtvrtina kružnice o poloměru b .



Uvažujme jednu takovou dlaždici. Vepíšeme do ní čtverec, jehož strany jsou od stran dlaždice vzdáleny o b . Buffon vyšetřuje jen jednu čtvrtinu dlaždice (čtverce). Je opět zřejmé, že to (díky symetrii) stačí. Pokud střed tyčky padne do tmavě vybarvené části čtverce, tyčka žádnou rovnoběžku neprotne. Tomu odpovídá hodnota $c(a-b)^2$. Pokud střed tyčky padne do zbylé části, jejíž obsah je $b(2a-b)$, tyčka některou rovnoběžku protnout může, ale také nemusí. Buffon počítá hodnotu, která odpovídá případům, kdy tyčka protne některou rovnoběžku,

stejně jako v předchozí úloze; vyjde mu $(2a-b)\int y dx$. Tato hodnota ovšem není správná.

Lze ji použít pouze v případech, kdy střed tyčky padne do bílých částí a může protnout pouze svislou nebo pouze vodorovnou přímkou. Ve světle šedém čtverci ale může tyčka protnout přímkou vodorovnou i svislou. Určité poloze středu tyčky (na obrázku bod ϵ) tak mohou odpovídat dva oblouky (na obrázku ϕG a ψH), případně celá čtvrtkružnice. Podobně jako v předchozí úloze pak Buffon porovnává šance obou hráčů a dospěje k závěru, že hra je spravedlivá, když délka tyčky je přibližně rovna polovině vzdálenosti mezi rovnoběžkami.



2.3 Laplaceovo rozšíření na obdélníkovou síť

Pierre-Simon de Laplace představuje úlohu o jehle i její zobecnění ve tvaru, který používáme v dnešní době, a také přesně formuluje všechny předpoklady. V základní úloze uvažuje rovinu rozdělenou ekvidistantními rovnoběžkami ve vzdálenosti a , na niž

je házen velmi úzký válec délky $2r \leq a$. Příznivé jevy mají míru $2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \phi d\phi = 8r$,

všechny jevy pak $a \cdot 2\pi$. Pravděpodobnost, že válec protne nějakou rovnoběžku, je $\frac{8r}{2a\pi} = \frac{4r}{a\pi}$. V zobecnění Laplace uvažuje dva systémy na sebe kolmých ekvidistantních

rovnoběžek; vzdálenost vodorovných je a , svislých b , obě hodnoty jsou větší nebo rovny

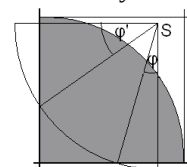
délce úzkého válce označené $2r$. Uvažujme jeden takový obdélník a narýsujme uvnitř něho rovnoběžky s jeho stranami ve vzdálenosti r . Tím vznikne menší obdélník se stranami $(a-2r)$ a $(b-2r)$, dva malé obdélníky se stranami $(a-2r)$ a r , další dva se stranami $(b-2r)$ a r a čtyři čtverce se stranou r . Jestliže padne střed válce do menšího obdélníka (bílý), nemůže válec protnout žádnou rovnoběžku. Když střed padne do jednoho z malých (světle šedých) obdélníků, dá se míra příznivých jevů spočítat podobně jako v základní úloze, je rovna

$2 \cdot (a-2r) \cdot 4r = 8r(a-2r)$, příp. $2 \cdot (b-2r) \cdot 4r = 8r(b-2r)$. Zbývají čtyři malé čtverce.

V nich máme tmavě šedě vybarvené čtvrtiny kruhů o poloměru r . Pokud střed válce padne do tohoto čtvrtkruhu, válec musí protnout aspoň jednu (vodorovnou nebo svislou)

přímkou. V jednom čtverci mají tyto jevy míru $\frac{\pi r^2}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi^2 r^2}{2}$. Pokud střed válce padne

do zbylé (nevybarvené) části tohoto čtverce, válec může protnout jednu přímkou (svislou nebo vodorovnou), ale také žádnou přímkou protnout nemusí. Označme S místo dopadu středu válce, x jeho vzdálenost od svislé rovnoběžky a y jeho vzdálenost od vodorovné rovnoběžky. Otáčejme válcem kolem jeho středu a označme ϕ , resp. ϕ' maximální



odchylku od svislého, příp. vodorovného směru, pro kterou válec protne vodorovnou, příp. svislou přímkou. Příznivé jevy pak mají míru $4 \int (\phi + \phi') dx dy$, kde x nabývá hodnot od 0 do r a y od $\sqrt{r^2 - x^2}$ do r .

Protože je $x = r \cdot \cos \phi'$ a $y = r \cdot \cos \phi$, dostaneme po substituci

$4r^2 \iint (\phi + \phi') d\phi d\phi' \sin \phi \sin \phi'$ (Laplace). Úhel ϕ nabývá hodnot od 0

do $\pi/2$, úhel φ' hodnot od 0 do $(\pi/2 - \varphi)$, po integraci dostaneme $\frac{1}{2}r^2(12 - \pi^2)$. V celém čtverci tedy mají příznivé jevy míru $\frac{1}{2}r^2(12 - \pi^2) + \frac{\pi^2 r^2}{2} = 6r^2$ a v celém obdélníku míru $8r(a - 2r + b - 2r) + 4 \cdot 6r^2 = 8(a + b)r - 8r^2$. Možných jevů je $2\pi \cdot ab$, pravděpodobnost, že váleček protne některou přímkou, je $\frac{8(a + b)r - 8r^2}{2\pi ab} = \frac{4(a + b)r - 4r^2}{ab\pi}$. Uvedený Laplaceův



postup je poněkud komplikovaný. Mnohem jednodušší způsob výpočtu je uveden v [8]. Označme a vzdálenost mezi vodorovnými a b mezi svislými rovnoběžkami, $2r$ délku tyčky, která je menší než a i b . Necht' tyčka svírá se svislými přímkami úhel θ . Potom tyčka neprotne žádnou přímkou právě tehdy, když její střed padne do šedě vybarveného obdélníku se stranami $b - 2r \sin \theta$ a $a - 2r \cos \theta$. Aby tyčka protнула některou rovnoběžku, musí její střed padnout do oblasti vně šedého obdélníku, která má plochu $ab - (a - 2r \cos \theta)(b - 2r \sin \theta)$, tedy $2r(a \sin \theta + b \cos \theta) - 4r^2 \sin \theta \cos \theta$. Pravděpodobnost, že tyčka nějakou rovnoběžku protne, je $\frac{\int (2r(a \sin \theta + b \cos \theta) - 4r^2 \sin \theta \cos \theta) d\theta}{\int ab d\theta} = \frac{4r(a + b) - 4r^2}{ab\pi}$.

Literatura

- [1] Barbier J.-É.: *Note sur problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*. Journal de mathématiques pures et appliquées 5(1860), 273–287.
- [2] Buffon G.-L. Leclerc de: *Essai d'arithmétique morale*. Histoire naturelle, générale et particulière, servant de suite à l'Histoire naturelle de l'Homme, Supplément, tome IV., Imprimerie Royale, Paris, 1777, 46–148.
- [3] Fontenelle B. le B. de: *Histoire de l'Académie royale des sciences, en 1733*. Imprimerie Royale, Paris, 1735, 43–45.
- [4] Kalousová A.: *Joseph-Émile Barbier a stereologie v 19. století*. Inf. Bull. České stat. spol. 1(2009), 10–18.
- [5] Kalousová A. *The origins of the geometric probability in England*. In Šafránková J., Pavlů J. (ed.): WDS 2008 – Proceedings of Contributed Papers, part I, Matfyzpress, Praha, 2008, 7–12.
- [6] Laplace P.-S. de: *Théorie analytique des probabilités*. Imprimerie Royale, Paris, 1812.
- [7] Todhunter I.: *Treatise on the integral calculus and its applications with numerous examples*. MacMilan and Co., Cambridge and London, 1857.
- [8] Todhunter I.: *History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Lagrange*. MacMilan and Co., Cambridge and London, 1865.

Adresa

RNDr. Anna Kalousová.
Katedra matematiky FEL ČVUT, Technická 2, 166 27 Praha 6
e-mail: kalous@math.feld.cvut.cz

PROBLÉMY DIRACOVY ROVNICE 1928–1933

JAN KOTŮLEK

Abstract: Dirac's electron theory is considered to be one of the highlights of inter-war mathematical physics. The historical depiction of its genesis is often distorted by taking a starry-eyed point of view of much later recollections. The idealized picture of heroic Dirac achievements are closely inspected and history of problems with negative energies and its interpretation by hole theory is put straight.

Ve většině studií o Diracově rovnici je historický obraz zkeslen pohledem přes růžové brýle mnohem pozdějších vzpomínek a rozhovorů.¹ Dobové prameny však jasně ukazují, že Dirac musel za svou relativistickou teorii elektronu tvrdě bojovat. Související problém negativních energií se mu nedařilo vyřešit téměř dva roky a i poté navrženou teorii elektronových děr musel vzhledem k ostré kritice upravit. Nejpalčivější problémy se však na přelomu let 1932–33 vyjasnily a Diracovi byla udělena Nobelova cena. Punc jednoho z největších úspěchů meziválečné matematické fyziky získala jeho teorie až v poslední době.

1 Prameny a literatura

Pro studium rané historie Diracovy rovnice máme k dispozici celou řadu pramenů, zejména Diracovy články,² korespondenci,³ přednášky, vzpomínky, např. [9], [10], [11], nebo rozhovory, např. [1], [2]. Tyto prameny jsou ale v drtivé většině sekundární. Ani Diracovy práce nelze považovat za primární pramen a citovat je bez kritiky a souvislosti.⁴

Téma Diracovy rovnice nepatří v literatuře mezi opomíjené. Existují dvě velmi obsáhlé Diracovy biografie,⁵ několik tematických studií⁶ a také řada článků v „oslavných“ Diracových sbornících.⁷

Historický obraz je bohužel velmi často kontaminován nekritickým citováním vzpomínek ze 60.–70. let.⁸ Tyto práce jsou tak více či méně popisem heroických výkonů

¹ Zejména Mehra nebo Pais, viz níže poznámky 7, 9 a 11, ale místy i jinak výborné monografie [12], [15].

² Především [5], [6] a [8]. Kompletní edici Diracových prací z daného období do roku 1948 je [3].

³ Diracova korespondence je uložena v *The Paul A. M. Dirac Collection*, Florida State University, USA. Průvodce fondem je dostupný online: <http://www.lib.fsu.edu/find/dlc/findingaids/FTaSUdirach.html>. Dále je velmi důležitá edice korespondence Wolfganga Pauliho, Diracova největšího vědeckého oponenta, viz [4].

⁴ „Relying on the end product will only distort the historical reconstruction towards an inductivist and too logical pattern,“ [14], s. 53.

⁵ Kragh [15] se soustředí na vědeckou část Diracova života, kdežto Farnelova práce [12] se zabývá spíše jeho soukromým a „vnitřním“ životem, leží na pomezí mezi historickou studií a psychologickým románem.

⁶ Mezi nimi vynikají [14], šíří svého záběru a důrazem na kritiku, a [16] psaná z pohledu dnešního stavu bádání v kvantové teorii.

⁷ *Aspects of Quantum Theory* (1972) a *The Physicist's Conception of Nature* (1973) k jeho sedmdesátinám; *Reminiscences about a great physicist: Paul Adrien Maurice Dirac* (1987) plánovaný k osmdesátinám, ale vydaný až posmrtně; *Tributes to Paul Dirac* (1987) s přednáškami ze vzpomínkové slavnosti v roce 1985; *Paul Dirac, the man and his work* (1998) ze slavnosti k umístění Diracovy pamětní plakety ve Westminster Abbey v roce 1995; *Proceedings of the Dirac Centennial Symposium* (2002) ke stému výročí Diracova narození.

⁸ Viz rozhovory vedené T. Kuhnem a kol. na začátku 60. let [1], [2]. Digitalizovaný transkript rozhovoru s Diracem je v [1]. Vzpomínky tvoří velkou část jeho pozdější publikační činnosti, srov. bibliografii v [3].

hlavního hrdiny, Paula Diraca.⁹ Pokud je v jeho vzpomínkách nějaká nesrovnalost, dá se podle těchto autorů většinou nějak vysvětlit nebo alespoň omluvit. Kragh sice upozorňuje, že „recollections of events forty years back in time are likely to contain distortions and inaccuracies,“ [14], s. 53, ale problém leží hlouběji. Vzpomínky se také liší podle záměru, se kterým jsou vyprávěny. V Diracových přednáškách věnovaných historii kvantové mechaniky (převážně ze 70. let) lze tyto záměry často dešifrovat. Tím se jejich spolehlivost dostává do zcela jiného světla, než jak k nim bylo ve studovaném případě přistupováno.¹⁰

Dirac měl zřejmě neobyčejné charisma, neboť vzpomínky jeho kolegů podstatně přispěly k růstu Diracova mýtu.¹¹ Ten se utvářel postupně, nejpozději od druhé světové války, ale možná již od 30. let. Dnes je Dirac považován za jednoho z největších fyziků a Diracova rovnice za jeden z vrcholů fyziky 20. století. Ve své době to však byl jen jeden z mnoha objevů, současníci na něm většinou neviděli nic úžasného ani neodolatelného.¹² Oč jsou dobové reakce střizlivější a kritičtější, o to pompéznější jsou pozdější komentáře. Výrazy jako magie, sen, či zázrak se objevují až od 60. let.¹³

2 Diracova kariéra

Diracovo dětství a mládí bylo, zdá se, poznamenáno přísnou otcovskou výchovou. Psychologicky citlivý rozbor podal nedávno Farmelo [12], který ale sám dodává, že si líčením nemůžeme být zcela jisti.¹⁴ Na druhou stranu by to vysvětlovalo nejen mnohé z Diracovy povahy a chování, ale také jeho způsob práce.

V letech 1918–21 vystudoval v Bristolu elektrotechniku (jako nejlepší ve třídě), za další dva roky vystudoval matematiku na Bristolské universitě a v srpnu 1923 byl přijat k doktorskému studiu v Cambridge. Na rozdíl od Wernera Heisenberga, jen o necelý rok staršího, neprokázal svou genialitu již během doktorského studia: „His contributions were interesting, but not remarkably so, and not of striking originality,“ [15], s. 12. Pomalejší začátek Diracovy kariéry by se snad dal připsat malé sebedůvěře zapříčiněné tvrdou výchovou bez pochval a odměn. Diracova doba však měla teprve přijít, byl ve správnou dobu na správném místě: doktorát dokončoval v roce 1925, kdy začala ‚kvantová revoluce‘, jeden ze tří největších mezníků ve fyzice 20. století.¹⁵

Po doktorské promoci v červnu 1926 strávil Dirac rok v Kodani a Göttingen a po návratu do Cambridge v listopadu 1927 byl zvolen členem St. John's College. Formulace relativistické rovnice pro jeden volný elektron na přelomu let 1927–28 mu pak přinesla

⁹ Zejména Pais A.: *Playing with equations, the Dirac way*. In Kursunoglu B. N., Wigner E. P. (ed.): *Reminiscences about a great physicist: Paul Adrien Maurice Dirac*, CUP, Cambridge, 1987, 93–116. Pais navíc přebírá Diracovy vzpomínky bez jakékoliv kritiky. Tzv. heroické pojetí historie kvantové teorie kritizoval již Forman v [13], obecněji a úplněji k heroickému pojetí vědy viz Applebyová J., Huntová L., Jacobová M.: *Jak říkat pravdu o dějinách*. CDK, Brno, 2002.

¹⁰ Lehkovázňý přístup ke vzpomínkám kritizoval (ovšem v jiných souvislostech) např. Forman, viz [13].

¹¹ „These works, written by scientists who knew Dirac personally, express physicists' homage to a great colleague,“ [15], s. ix. Tím trpí také rozsáhlý šestidílný výtvar Mehra J., Rechenberg H.: *The Historical Development of Quantum Theory*. Springer, 1982. K Diracovi viz zejména díl 4. Srov. kritickou recenzi [13].

¹² Je třeba si uvědomit, že v roce 1928 ještě všichni prožívali opravdovou ‚kvantovou revoluci‘ odstartovanou roku 1925 Wernerem Heisenbergem.

¹³ Viz například [2], citováno zde v poznámce 24 níže.

¹⁴ Můžeme se totiž opřít jen o Diracovy vzpomínky, jimž ale dobové prameny neposkytují oporu.

¹⁵ Tento zvrat v Diracově životě podrobně popsal Kragh, [15], kapitola 2, *Discovery of Quantum Mechanics*.

opravdovou slávu.¹⁶ Roku 1930 napsal a vydal jednu z prvních a vůbec nejvlivnějších učebnic kvantové mechaniky, *The Principles of Quantum Mechanics* [7] a byl zvolen členem Royal Society of London (v 28 letech). Roku 1932 se stal Lukasiánským profesorem matematiky a natrvalo se usídlil v Cambridge. O rok později, v 31 letech, získal Nobelovu cenu.

3 Diracova rovnice

The Quantum Theory of the Electron [5] je Diracův pravděpodobně nejlepší, jistě však nejslavnější článek. Jelikož elegantní odvození Diracovy rovnice ze základních principů kvantové mechaniky a speciální teorie relativity je notoricky známé,¹⁷ věnujeme se zde pouze otázce Diracových motivací a následným komplikacím, zejména problému negativních energií a jeho řešení.

3.1 Motivace

Dodnes nepanuje shoda v tom, jaké byly vlastně Diracovy záměry. On sám se o tom vyjádřil několikrát, jednotlivé verze si však odporují. Jeho příhoda se váže ke konverzaci s Nielsem Bohrem. Na jeho otázku, na čem zrovna pracuje, odpověděl Dirac, že se snaží nalézt uspokojivou relativistickou elektronu. Bohr se prý podivil, protože podle něj tento problém již vyřešili Klein a Gordon. Dále se jednotlivé verze podstatně liší:

1963: „I remember it disturbed me quite a lot that Bohr was so satisfied with it because of the negative probabilities that it led to.“¹⁸

1974: „I was quite taken aback. It rather surprised me that such an eminent physicist as Bohr should be satisfied with the Klein–Gordon equation and I started to explain why I was not satisfied with it. But just then the lecture started and I was never able to finish it.“ [10], s. XXXII-8.

1977: „I didn’t have time to explain my objections fully to Bohr on that occasion, but I could see where his opinions lay, and that was the opinion of most physicists of that time, perhaps all of them.“¹⁹

1978: „It rather opened my eyes to the fact that so many physicists were quite complacent with a theory which involved a radical departure from the basic laws of QM, and they did not feel the necessity of keeping to these basic laws.“²⁰

Příběh je další z Diracových pozdních historek. Má jej ukázat jako proroka, který předvídá vývoj kvantové teorie dokonce lépe než samotný Bohr. Kragh historku přijímá za pravdivou, přestože přiznává, že „Dirac’s accounts of the event are not entirely consistent.“²¹ Kloním se k názoru, že Dirac chtěl formulovat relativistickou rovnici pro

¹⁶ Jeho první velké objevy (zavedení Poissonových závorek, teorie poruch a tzv. Fermiho–Diracova statistika) byly publikovány pouhý měsíc po konkurentech (Born–Jordan–Heisenberg, Heisenberg a Fermi). To může být také jeden z důvodů proč nejraději pracoval sám a hlavně proč se nechtěl dělit o své know-how.

¹⁷ Diracovo původní odvození je minimalistické, viz [5], ale podrobnější verzi obsahuje každá dobrá učebnice relativistické kvantové mechaniky. Výbornou moderní monografii napsal Thaller B.: *The Dirac equation*. Springer, Berlin–Heidelberg, 1992. Ryze historický komentář viz [14], kapitola 6.

¹⁸ [1]. Kragh však ukázal, že problém negativního rozdělení pravděpodobnosti se objevuje až mnohem později, viz [14], s. 64.

¹⁹ [11], s. 10. Mimochodem, Dirac dobře věděl, že si i jiní fyzikové snažili vylepšit nebo nahradit Kleinovu–Gordonovu rovnici, srov. např. dopis J. Kudara Diracovi z 21. 12. 1926, citovaný v [15], s. 54.

²⁰ Dirac P. A. M.: *Directions in Physics: lectures delivered during a visit to Australia and New Zealand August/September 1975*. Wiley, New York, 1978. Citováno podle [15], s. 57.

²¹ [15], pozn. 23 ke s. 56. Kupodivu mu nejvíce vadí rozpor mezi [1], kde tvrdí, že se rozhovor udál u Bohra v Kodani a pozdějším tvrzením, že to bylo na Solvayské konferenci v Bruselu.

kvantovou částici. Zahnutí spinu bylo cílem druhotným, který byl přidán do programu až při řešení sestavených podmínek.

Z Diracovy relativisticky invariantní rovnice vyplývá správný magnetický moment elektronu, vysvětluje tedy původ spinu. Rychle se ukázalo, že také správně reprodukuje jemnou strukturu vodíkového spektra. Jeden problém původní Kleinovy–Gordonovy teorie však zůstal nevyřešen, každému jejímu řešení totiž přísluší ještě další řešení s negativní energií. Nakonec, Dirac to sám přiznal.²²

3.2 Reakce na Diracovu teorii: prvotní uznání a následná kritika

Z dobové korespondence lze vyčíst velmi kladné bezprostřední přijetí Diracovy práce.²³ Pozdější vzpomínky na reakce jsou však až nekriticky oslavné. V roce 1928 to bylo prosté kolegiální uznání, kdežto od 60. let šlo o vzdání holdu legendě kvantové fyziky.²⁴ Dirac později zlehčoval svůj úspěch tvrzením, že na řešení přišel „by playing around with mathematics,”²⁵ ale Pais to povýšil na Diracův obecný způsob práce, viz. poznámka 9.

V polovině roku 1928 se situace obrátila. V červnu Dirac přednášel na Heisenbergovo pozvání o své teorii v Lipsku (18.–23. června 1928). Nepodařilo se mu však rychle vyřešit problém negativních energií, což jeho hostitele velmi zklamalo.²⁶ Dirac si byl problému vědom již při psaní článku [5], ale odsunul jeho řešení na později. Nejdříve jej totiž ve srovnání s úspěchem své teorie nepovažoval za natolik závažný.²⁷

Na konci roku 1928 se situace ještě zhoršila. Oskar Klein ukázal, že i v jednoduchém případě pohybu elektronu proti potenciálové bariéře dává Diracova rovnice absurdní výsledky, známé jako Kleinův paradox.

3.3 Hole theory – teorie elektronových děr

Dirac se s problémem negativních energií dlouho trápil. Většinou se nezdurazňuje, že mu trvalo téměř dva roky, než v prosinci 1929 přišel s pokusem o řešení bohužel jen formou fyzikální interpretace.²⁸ Je zjevné, že to bylo východisko z nouze, ale k formulaci chytré použil Pauliho vylučovací princip, tedy teorii svého největšího kritika a oponenta.²⁹

²² „One gets over the difficulty on the classical theory by arbitrarily excluding those solutions that have a negative [energy] W . One cannot do this on the quantum theory,...“ [5], s. 612.

²³ „Dirac has got a new system of wave equations which does the whole spinning electron correctly, Thomas correction, relativity and all,“ Darwin Paulimu, 11. 1. 1928, [4], díl I., s. 424; „I admire your last work about the spin in the highest degree,“ Heisenberg Diracovi, 13. 2. 1928, citováno podle [15], s. 62.

²⁴ Např. Leon Rosenfeld se roku 1963 vyjádřil, že odvození spinu „was regarded as a miracle. [...] It was regarded really as an absolute wonder,“ [2].

²⁵ Jde o další průpovídku pozdějšího data, poprvé se objevuje v roce 1963, viz [1].

²⁶ „I am much more unhappy about the question of the relativistic formulation and about the inconsistency of the Dirac theory. Dirac was here and gave a very fine lecture about his ingenious theory. But he has no more of an idea than we do about how to get rid of the difficulty $e \rightarrow -e$,“ Heisenberg Bohrovi, 23.7. 1928, citovaný podle [15], s. 66.

²⁷ „The resulting theory is therefore still only an approximation, but it appears to be good enough,“ [5], s. 612.

²⁸ „...all the states of negative energy are occupied except perhaps a few of small velocity. [...] Only the small departures from exact uniformity, brought about by some of the negative-energy states being unoccupied, can we hope to observe. The holes in the distribution of negative-energy electrons are the protons,“ [6], §2. Na šesti stranách práce jsou pouhé 4 rovnice, jde tedy o řešení spíše filozofické než matematické.

²⁹ Zprostředkovanou informaci: „Was ich höre klingt hoffnungsvoll,“ Pauli Jordanovi, 30. 11. 1929, [4], díl I., s. 526, ale na základě studia Diracovy práce přehodnotil, „Ich glaube jetzt gar nicht mehr daran!“ Pauli Kleinovi, 10. 2. 1930, [4], díl II., s. 4. (Důraz je původní, Pauliho.)

Pro Diraca byla teorie velmi atraktivní tím, že postuluje existenci pouze jedné částice – elektronu. Dirac ale dodává, že teorie nevysvětluje nesymetrii mezi protonem a elektronem, zejména rozdíl v jejich hmotnosti.

Reakce na teorii elektronových děr byly spíše skeptické,³⁰ neoficiálně byla považována dokonce za holý nesmysl.³¹ Ztotožnění elektronové díry s protonem přestalo být udržitelné, Dirac proto musel svou teorii v létě 1931 opravit. Nezbylo mu nic jiného než postulovat nové částice, anti-elektron³² a také anti-proton. Objev positronu Andersonem v USA a později jeho potvrzení Blackettem a Occhialinim přímo v Cambridge na podzim 1932 zpětně prokázal opodstatněnost Diracovy hole theory.³³ I když tím byla teorie v očích mnoha fyziků rehabilitována, opozice slábla pomalu.³⁴

4 Nobelova cena

Koncem roku 1933 se rozhodovalo o udělení Nobelových cen za léta 1932 a 1933. Přestože zpráva, kterou pro výbor akademie pro Nobelovu cenu vypracoval Carl Wilhelm Oseen, je vzhledem k dnešnímu hodnocení Diraca velmi kritická³⁵ a přestože dostal jen dvě nominace (Bragg a Bialobrzeski),³⁶ rozhodlo na doporučení výboru plenární zasedání akademie o rozdělení ceny za rok 1933 mezi Schrödingera a Diraca, který se tak stal jejím nejmladším laureátem-teoretikem.³⁷

Oseen také ve své zprávě píše, že Dirac může svých nejlepších výsledků teprve dosáhnout. Dirac dále publikoval několik důležitých prací v jiných oblastech fyziky, ale zdánlivě dosažitelné upřesnění své teorie již nepřinesl a některé interpretační problémy tak přetrvávaly dodnes. Později se Dirac postavil proti vývoji v kvantové elektrodynamice, zejména kvůli tzv. teorii renormalizace (1948), a tím se dostal mimo hlavní proud teoretické fyziky. Jeho sláva však přesto rostla a jeho myšlenky byly postupně přijaty.

Diracova rovnice byla, je a také zůstane fenomenálním úspěchem. Zejména způsob, jakým ji Dirac odvodil – na základě obecných principů, ne empiricky – byl do té doby nevídaný a stal se později standardní metodou matematické fyziky. Problémům, které rovnice přinesla nepřikládal Dirac prvořadou důležitost. Navrhnutá řešení také nebyla okamžitě kladně přijata. Přestože se hodnota jeho myšlenek ukázala až s odstupem času, bylo by chybou nevidět Diracovu teorii v dobových souvislostech.

³⁰ „It is certainly a great progress. [...] But I cannot see yet, how the ratio of the masses etc. will come out,“ Heisenberg Diracovi, 7. 12. 1930. Bohrovi se o teorii vyjádřil otevřeně skepticky (dopis z 20. 12. 1929).

³¹ Krom Fermiho a Pauliho se tak vyjádřil i Lev Landau, který prý Diracovu přednášku na kongresu BAAS v Bristolu zhodnotil jediným slovem: „Quatsch.“ (Přeloženo v [12] jako rubbish, v [15] jako nonsense.)

³² „a new kind of particle unknown to experimental physics, having the same mass and opposite charge to an electron,“ [8], s. 61.

³³ Dirac přesto váhal se ztotožněním svého anti-elektronu s Andersonovým positronem. Bohr, Heisenberg a Pauli šli ještě dál: „I do not believe on your perception of ‘holes’, even if the existence of the ‘antielectron’ is proved.“ Pauli Diracovi, 1. 5. 1933, [4], díl II, s. 159.

³⁴ Pauli utlumil svou kritiku hole theory koncem června 1933: „ich bin also nicht abgeneigt, an eine Art reformierte Löchertheorie zu glauben,“ Pauli Heisenbergovi, 14. 7. 1933, [4], díl II, s. 187. Jeho nepřátelství vůči Diracovi líčí Kragh, [15], s. 112–114, asi trochu přehnaně a Farmelo [12] z něj přímo dělá hlavní zápornou postavu svého ‚románu‘: Diracova úhlavního nepřítele.

³⁵ „[Dirac’s] work is not fundamental in the same sense as Heisenberg’s. [...] He is independent... but a successor in relation to Heisenberg. If one asks if Dirac is a scientific pioneer of the same dimension as Planck, Einstein or Bohr, the answer must for the present be, I think, definite no. ...so far it has not left him the time for really great innovative work... It is noteworthy that Dirac’s most original papers stem from the last years,“ Nobel archive, citováno podle [15], s. 115–116.

³⁶ Schrödinger jich měl 11 (mj. od Bohra a Einsteina). Také všichni ostatní nominovaní: Sommerfeld, Bridgman, Davisson a Paschen jich měli více než Dirac, viz [15], s. 116.

³⁷ Cenu za rok 1932 získal Werner Heisenberg.

Literatura

- [1] Oral histories at Niels Bohr Library & Archives: *Interview of Dr. P. A. M. Dirac by Thomas S. Kuhn on May 7, 1963* [online, cit. 30. 5. 2010].
http://www.aip.org/history/ohilist/4575_3.html
- [2] Oral histories at Niels Bohr Library & Archives: *Interview of Dr. Leon Rosenfeld by T. S. Kuhn and J. L. Heilbron at Carlsberg on July 1, 1963* [online, cit. 30. 5. 2010].
http://www.aip.org/history/ohilist/4847_1.html
- [3] Dalitz R. H.: *The collected works of P. A. M. Dirac, 1924–1948*. CUP, Cambridge, 1995.
- [4] Hermann A., von Meyenn K., Weisskopf V. F.: *Wolfgang Pauli Wissenschaftlicher Briefwechsel. Band I: 1920–1929*. Springer, New York, 1979; *Band II: 1930–1939*. Springer, Berlin, 1985.
- [5] Dirac P. A. M.: *The Quantum Theory of the Electron, Part I*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A 117(1928), 610–624; *Part II*. Ibidem 118(1928), 351–361.
- [6] Dirac P. A. M.: *A theory of electrons and protons*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A 126(1930), 360–365.
- [7] Dirac P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1930, 1935₂, 1947₃, 1958₄.
- [8] Dirac P. A. M.: *Quantised singularities in the electromagnetic field*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A 133(1931), 60–72.
- [9] Dirac P. A. M.: *Theory of electrons and positrons*. In Nobel Lectures in Physics (1922–1941). Elsevier, Amsterdam, 1965, 320–325.
- [10] Dirac P. A. M.: *An historical perspective on spin*. In Roberts J.B. (ed.), Proc. Summer Studies of High-Energy Physics with Polarized Beams, July 22–26, 1974, Argonne National Laboratory, Rep. ANL/HEP 75-02, XXXII-1–14.
- [11] Dirac P. A. M.: *The Relativistic electron Wave Equation*. Proc. European Conf. on Particle Physics, July 4–9, 1977, Budapest, Preprint KFKI-1977-62, 1–18.
- [12] Farmelo G.: *The Strangest Man: The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius*. Faber and faber, London, 2009.
- [13] Forman P.: *A Venture in Writing History*. Science 220(1983), 824–827.
- [14] Kragh H. S.: *The genesis of Dirac's relativistic theory of electrons*. Archive for the History of Exact Sciences 24(1981), 31–67.
- [15] Kragh H. S.: *Dirac – A Scientific Biography*. CUP, Cambridge, 1990.
- [16] Wilczek F.: *The Dirac Equation*. In Baer H., Belyaev A. (ed.): Proceedings of the Dirac Centennial Symposium, Florida State University, Tallahassee, 2002, 45–74.

Adresa

RNDr. Jan Kotůlek
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
VŠB – TU v Ostravě
17. listopadu 15
708 33 Ostrava-Poruba
e-mail: Jan.Kotulek@vsb.cz

ZAPOMENUTÉ PRÁCE OTAKARA BORŮVKY

MILAN KRÁPEK

Abstract: The article contains description of some not very known texts of O. Borůvka and F. Herčík, which concern on the four-dimensional space and ideas if this space can exist without our realising. The next part concerns on the extension of this idea to the existence of the four-dimensional organisms.

1 Úvod

Profesor Otakar Borůvka, byl velmi významným matematikem. Celý svůj život strávil rozvojem matematiky zejména v Brně a také v Bratislavě. Jeho studenti, mezi které se dá zařadit většina absolventů matematiky v Brně jej popisují jako skvělého učitele a organizátora vědeckého života. Rozsah oborů kterými se zabýval je ohromující, patří mezi ně klasická matematická analýza, diferenciální geometrie, algebra, teorie grafů a obyčejné diferenciální rovnice. Každý z těchto oborů obohatil novými znalostmi. Jeho práce v uvedených okruzích jsou jistě velmi zajímavé, ale většina čtenářů, kteří mají hlubší přehled o vědecké práci našich významných matematiků je zná.

V tomto článku bych chtěl přiblížit několik prací, které se nezabývají ani jedním z výše zmiňovaných témat a také nejsou moc známé a rozšířené.

Na presentovaném spolupracoval s profesorem Ferdinandem Herčíkem, který byl výborným biologem. Po druhé světové válce se podílel na obnově a rozvoji lékařské fakulty v Brně m.j. vybudoval pracoviště zabývající se studiem biofyziky a vlivem radiace na organismy. Tento význačný člověk velmi pomohl českému lékařství hlavně ve výzkumu bakteriofágů a radiobiologie.

Oba jmenovaní, kteří ve svých oborech patřili k našim nejlepším vědcům, společně ve 40. letech napsali několik článků, v nichž kombinovali matematiku, biologii, a filozofii.

2 Čtyřrozměrný prostor

První článek s touto tematikou napsal Otakar Borůvka sám. Zabýval se myšlenkou jak by vypadal a fungoval svět, pokud by nebyl trojrozměrný, což je takový jak jej vnímáme my, ale místo toho by byl čtyřrozměrný. Článek vyšel v časopise Věda a Život VIII v roce 1941 pod názvem *O čtyřrozměrném prostoru*. Tento článek byl ovšem zaměřený spíše matematicky a obsahoval pouze nejasnou představu o tom, jak by mohl takový svět vypadat a fungovat.

V následujícím textu uvedu alespoň některé zajímavé části tohoto článku. V úvodu autor popisuje motivaci která jej vedla k napsání tohoto pojednání.

Základem všeho přírodovědeckého poznání jest zkušenost, jak nám ji podávají naše smysly. Jimi chápeme, že předměty tohoto světa mají tři rozměry: délku, šířku a výšku. Každý cítí, co se tím rozumí; ale popis obsahu slova „rozměr“ jest nesnadný a vyžaduje hlubších úvah.

Poznání pojmu čtyřrozměrného prostoru a obecněji vícerozměrného prostoru znamenalo v matematice pokrok neobyčejně významný.

Proslulý rumunský matematik G. Tzitzéica napsal: „Studujeme vícerozměrné prostory proto, abychom našli odpověď na otázky, vztahující se k našemu prostoru, podobně jako studujeme organizaci cizích zemí, abychom přinesli užitek zemi vlastní.“

Z tohoto je vidět, že považoval studium čtyř a více rozměrných prostorů za důležité, z důvodu hledání obecnějších vztahů platných pro trojrozměrný prostor. Rozsáhlou část článku věnoval otázce, „zda je možná, existence více rozměrů aniž bychom si je sami uvědomovali.

Abychom na tuto otázku odpověděli, uvažme především, z čeho by bytosti dvojrozměrné, které si můžeme představit jako stíny na př. v rovině stolu, mohly souditi na existenci třetího rozměru, který chápeme my. Dvojrozměrné bytosti svými předpokládánými dvojrozměrnými smyslovými orgány mohly by patrně vnímati jenom takové děje, které se odehrávají v jejich světě, tedy v rovině stolu. Jim by se na př. čtverec jevil tak, že by neviděli do té části roviny, kterou nazýváme vnitřkem čtverce. Aby se do té části dostaly, musely by projítí otvorem v některé straně čtverce, podobně, jako my nevidíme skrze stěny dovnitř domu a chceme-li se tam dostat, musíme projítí otvorem ve stěně. Pro nás, trojrozměrné, jest však zcela pochopitelné, že by se dvojrozměrná bytost mohla dostat z vnějšku čtverce do jeho vnitřku, aniž by prošla otvorem v jeho straně. Prostě tak, že by se vně čtverce zvedla do třetího rozměru nad rovinu svého světa a uvnitř čtverce se zase do této roviny spustila. Pro každou dvojrozměrnou bytost, chápající jenom děje, odehrávající se v té rovině a nechápající existenci třetího rozměru, vypadala by ovšem taková věc zázračně a to jako zmizení bytosti ze světa vně čtverce anebo – řekněme - vně jejího příbytku a opětné náhlé objevení bytosti uvnitř příbytku.

Kdyby se na našem světě vyskytovaly děje jako zmizení a opětné objevení předmětů a lidí, změny podobné jako přeměna levé rukavice v pravou ... apod., mohli bychom k vysvětlení těchto jevů předpokládati existenci čtvrtého rozměru.

První společný článek profesorů Borůvky a Herčíka vyšel v časopise Sborník Lékařský v roce 1943 a jmenoval se Prostorový model života. Tato práce využívá a částečně obsahuje předcházející úvahy a dále tuto jistě zajímavou myšlenku rozvíjí

Po úvodu je v článku popsán čtyřrozměrný prostor. Z této části nemusím mnoho popisovat, neboť jistě každý ze čtenářů čtyřrozměrný prostor a jeho definici zná. Proto teď uvedu jen některé pojmy důležité pro další popis. Prostory A_2 , A_3 , A_4 jsou číselnými modely prostorů, čímž rozumíme prostory v matematickém smyslu, t.j. množiny n -tic reálných čísel a pravidla jak s těmito n -ticemi operovat. Oproti tomu R_2 a R_3 jsou reálné prostory (dvojrozměrný a trojrozměrný), takové jaké je vnímáme svými smysly, a prostor R_4 je uvažovaný čtyřrozměrný prostor. Víme, že prostory A_2 a A_3 nám popisují prostory R_2 a R_3 , jen pro jednoznačnost tohoto popisu je nutné zvolit měřítko pro jedničku. Autoři pak předpokládají, že prostor R_4 je číselným prostorem A_4 popsán stejně, jako to platí pro prostory R_3 a A_3 a také pro R_2 a A_2 . Tedy že mezi těmito prostory existuje bijekce (prostě zobrazení množiny na množinu). Důsledkem toho se čtyřrozměrný prostor chová stejně jako prostory, které známe a vnímáme svými smysly, tedy platí v něm i stejná pravidla, která se týkají bodů, přímek, rovin a nadrovin, určování vzdáleností, průniků a podobně. Velmi důležitý pro další výklad bude následující poznatek který z výše uvedeného vyplývá.

Můžeme tedy říci, že prostor R_3 rozděluje prostor R_4 na dvě části, na část + a na část -. Tento poznatek byl hlavním cílem předcházejících úvah a má pro náš další výklad základní význam.

3 Čtyřrozměrné organismy

Pravděpodobně díky profesoru Herčíkovi se tento článek posunuje ještě dále a to k předpokladu, že ne jen svět ale i organismy jsou čtyřrozměrné.

Na počátku biologických úvah, k nimž nyní můžeme přistoupiti, stojí dva základní předpoklady:

1. Organismy jsou čtyřrozměrné útvary v prostoru R_4 , které zasahují do našeho trojrozměrného prostoru R_3 , a jakýmsi difusním dějem prostorem R_3 pronikají.
2. Trojrozměrné organismy v našem prostoru R_3 , jsou průniky těchto čtyřrozměrných organismů s prostorem R_3 .

Představujeme si, že nějaký čtyřrozměrný organismus v prostoru R_4 zasahuje do našeho prostoru R_3 a proniká jaksí difusním dějem např. z části + prostoru R_4 do části -. Při tom vytváří v místě průniku s prostorem R_3 stopu, kterou my chápeme jako trojrozměrný organismus. Podle této představy vznikají tedy živé organismy našeho prostoru R_3 průnikem čtyřrozměrných organismů s atomy a molekulami našeho prostoru R_3 . při této difusi dochází podle našeho názoru ku vzájemnému působení mezi prostorem R_3 a pronikajícím organismem. Vedle toho se zdá přirozené, že na sebe působí korelativně i části čtyřrozměrného organismu, takže může docházeti ku změnám, které se projevují sekundárně v trojrozměrném organismu, jež si však nedovedeme vysvětliti na podkladě našich vědomostí o prostoru R_3 , a to proto, že se tyto změny zčásti odehrávají v prostoru R_4 , který nevnímáme.

Tento popis existence čtyřrozměrných organismů je pro nás velmi neobvyklý. A to i v dnešní době kdy se s podobnými myšlenkami dost často setkáváme ve filmech či knihách. Proto nás tyto úvahy již tolik nepřekvapují.

V našem předpokladu o difusním pronikání čtyřrozměrných organismů prostorem R_3 jest jistá libovůle a nezastíráme, že by bylo možno navrhnouti i jiná řešení, která by svou povahou zapadala do předcházejícího rámce.

Jestliže se omezujeme na hořejší předpoklad, činíme tak proto, že nám dobře vyjadřuje časový příznak živých organismů. Podle naší představy jest doba difusního děje totožná s dobou trvání trojrozměrného organismu jest jen určitou fází tohoto děje. Organismus se mění s časem. Tyto změny mohou býti způsobeny jednak podmínkami v prostoru R_3 , ale stejně dobře též tím, že čtyřrozměrný pronikající organismus není morfologicky stejně utvářený, takže jeho trojrozměrné průřezy by byly v každém okamžiku od sebe odlišné. Tento neustálý sled změn se skládá v souvislý „žijící“ trojrozměrný organismus, podobně jako se skládají obrazy v kinematografu v pohyb.

Jaký jest časový příznak čtyřrozměrného organismu? Podle našich představ organismus „žije“ v prostoru R_4 a v jisté fázi svého „života“ difunduje naším prostorem R_3 .

Pojmy zrození a smrt nejsou potom něčím podobným jako začátek a konec věty, nýbrž jsou spíše jenom jistými okamžiky jakéhosi koloběhu organismů, jehož vlastnosti počínáme teprve tušiti.

Dle těchto úvah žije čtyřrozměrný organismus déle než jen po dobu prolínání naším prostorem R_3 . Tyto myšlenky již velmi překračují matematiku i biologii a zasahují filosofii a náboženství. To jistě nebyl prvoplánový cíl této práce a podle slov autorů bylo smyslem nastínit pouze možnost jak hledat hypotézy.

Úkolem tohoto článku bylo upozorniti na možnosti plynoucí z aplikace pojmu čtyřrozměrného prostoru v biologii. Nechceme ovšem tvrditi, a ostatně jsme to již

dříve naznačili, že naše úvahy popisují skutečný stav věcí, a v tom smyslu mluvíme v nadpisu našeho článku jenom o modelu života.

Článek obsahuje také několik příkladů, které mají dokládat možnost existence čtyřrozměrného prostoru. Hlavně se zaměřují na vlastnost, že organismy které jsou v trojrozměrném prostoru daleko od sebe, se mohou ve čtyřrozměrném prostoru dotýkat. Čímž vysvětlují mimořádný čichový smysl zvířat a také některé parapsychické jevy.

Poslední citát, který uvedu, opět upozorňuje, že se jedná pouze o myšlenku, která nemusí mít vůbec žádný reálný základ, ale také obsahuje zajímavý příklad, který by mohl naznačovat, že lidé mohou čtyřrozměrný prostor (pokud existuje) odhalit a někteří jej postupně odhalují.

Ostatně podle některých autorů není pojem čtyřrozměrného prostoru tak vzdálený našemu smyslovému vnímání, jak by se mohlo míti za to. Tak na př. Hinton (R. Weitzenböck, l.c.p. 107) připomíná, že některé staroegyptské sochy mají dva rozměry správně, kdežto třetí jest skreslený. Jestliže tedy tehdejší sochaři vnímali trojrozměrný prostor méně "prostorově" než my, není vyloučeno, že vývoj pokračuje k chápání dalšího rozměru.

Je pravděpodobné, že zvažované „chybné vnímání“ třetího rozměru nemusí být způsobeno jiným viděním trojrozměrného světa, ale pouze mohlo jít o jiný styl zobrazování. Ovšem v případě, že by tento vývoj byl reálný, pak bychom mohli závidět našim potomkům, že možná jednou odhalí zda a jak moc měli profesori Borůvka a Herčík pravdu a nebo zda se zcela mýlili.

Literatura

- [1] Borůvka O.: *O čtyřrozměrném prostoru*. Věda a život VI, 1941, 142–146.
- [2] Borůvka O., Herčík F.: *Prostorový model života*. Sborník lékařský XLV, 1943, 164–175.
- [3] Borůvka O., Herčík F.: *Čtyřrozměrný model života*. Věda a život, 1944, 481–484.
- [4] Třešňák Z., Šarmanová P., Půža B.: *Otakara Borůvka*. Edice osobnosti, Universitas Masarykiana, Brno, 1996.

Adresa

Mgr. Milan Krápek
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova Univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: 51886@mail.muni.cz

EDUARD ČECH (1893–1960) A JEHO STŘEDOŠKOLSKÉ UČEBNICE

MARTIN MELCER

Abstract: This article is devoted to the outstanding Czech mathematician – Eduard Čech, whose semi-centennial death is commemorated this year. The first part describes important moments of his life, above all his contribution to mathematics during the twenties and thirties of the 20th century (mainly Differential Geometry and Topology). The second part deals with his textbooks *Arithmetic* in the period of the Bohemian and Moravian Protectorate and their amended reprints at the beginning of the fifties with a focus on financial mathematics text problems.

1 Stručně ze života Eduarda Čecha

Eduard Čech se narodil 29. června 1893 ve Stračově. Po absolvování gymnázia v Hradci Králové v roce 1912, na které přestoupil z reálného a vyššího gymnázia v Novém Bydžově, začal studovat matematiku na české Filozofické fakultě Karlo-Ferdinandovy univerzity v Praze. V roce 1915 byl povolán do armády¹ a studia tak dokončil až po válce v roce 1919, kdy složil poslední zkoušky. Absolvoval také zkoušku učitelské způsobilosti a získal aprobaci pro výuku matematiky a deskriptivní geometrie (krátce učil na střední škole v Praze Podskalí a na Novém Městě, na reálkách v Ječné ulici a v Praze-Holešovicích). Následující rok předložil na Filozofické fakultě Univerzity Karlovy v Praze pojednání *O křivkovém a plošném elementu třetího řádu* a po úspěšném řízení se stal doktorem filozofie. O další dva roky později se na Univerzitě Karlově habilitoval pro projektivní geometrii a roku 1923 byl jmenován mimořádným profesorem matematiky na Masarykově univerzitě v Brně. Řádnou profesuru získal roku 1928.



Od třicátých let se Eduard Čech začal intenzivně věnovat topologii, zúčastnil se konference o kombinatorické topologii v Moskvě (1931). V roce 1935 byl pozván k přednáškovému pobytu do matematického střediska *Institute for Advanced Study* v *Princetonu*. Po návratu z USA založil roku 1936 v Brně topologický seminář, který byl činný i po uzavření vysokých škol až do roku 1941.² Po válce přešel na Přírodovědeckou fakultu Univerzity Karlovy. V roce 1947 se stal prvním ředitelem Ústavu pro matematiku při České akademii věd. V roce 1952 byl jmenován členem ČSAV a pověřen vedením Matematického ústavu. V roce 1954 přešel na Matematicko-fyzikální fakultu UK

¹ Za války si výrazně prohloubil znalosti němčiny a naučil se italsky.

² O Čechově topologickém semináři viz např. A. Lukášová: *Eduard Čech*, str. 216–220, *Bedřich Pospíšil*, str. 221–223, in E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků IV*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007.

a vybudoval zde Matematický ústav Univerzity Karlovy. Eduard Čech zemřel v Praze dne 15. března 1960.

Jeho vědecké práce zasahují především do diferenciální geometrie a topologie. Během svého života publikoval 94 vědeckých prací a 10 monografií. Od konce třicátých let věnoval také velkou pozornost výuce matematiky na nižším stupni středních škol, didaktice a metodice na vyšším stupni. Byl autorem řady středoškolských učebnic, které sepsával ve válečných i poválečných letech. Usiloval o zlepšení výuky na českých středních školách a důkladnější přípravu budoucích učitelů. Již od předválečných let organizoval pro středoškolské učitele semináře a přednášky o středoškolské a elementární matematice.

Eduard Čech je považován za významného českého matematika a ve světě je znám především svými příspěvky k diferenciální geometrii, algebraické topologii, o homologii a kohomologii v obecných topologických prostorech a zavedením pojmu „Čechovy homologické a kohomologické grupy“.³

2 Témata odborných prací

Matematice se Eduard Čech intenzivně věnoval od studií na Filozofické fakultě pražské univerzity až do prvních let druhé světové války. V poválečném období byl výrazně zaneprázdněn pedagogickými a organizačními aktivitami, které byly spojeny s rozvojem vysokých škol a budováním matematických ústavů a výzkumných pracovišť. Hlavními oblastmi jeho zájmu byly diferenciální geometrie a topologie.

2.1 Diferenciální geometrie

Diferenciální geometrie se zabývá zkoumáním křivek, ploch a variet vyšších dimenzí pomocí metod diferenciálního počtu. Klasickými objekty, které studuje, jsou křivky a plochy v trojrozměrném euklidovském prostoru. Při analýze geometrických útvarů se soustřeďuje na vlastnosti, které nezávisí na volbě systému souřadnic. Její kořeny můžeme vystopovat v pracích významných matematiků konce 17. století (G. W. Leibniz (1646–1716), I. Newton (1643–1727)).

2.1.1 Čechova práce v oblasti diferenciální geometrie

Diferenciální geometrií se E. Čech zabýval od konce první světové války až do konce dvacátých let dvacátého století. Ve školním roce 1921/1922 pobýval na univerzitě v Turíně a spolupracoval s italským matematikem Guidem Fubiniem (1879–1943), který

³ O životě a díle Eduarda Čecha viz například: M. Katětov, J. Novák, A. Švec: *Akademik Eduard Čech*, Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), str. 447–491; Z. Frolík: *Osobnost Eduarda Čecha. Zamyšlení k nedožitým 80. narozeninám*, Časopis pro pěstování matematiky 18(1973), str. 237–247; J. Vyšín: *Čechovy podněty k vyučování matematice*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 24(1979), str. 313–317; I. Kolář: *Zamyšlení nad diferenciálně geometrickým dílem Eduarda Čecha*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 25(1980), str. 306–312; A. Lukášová: *Eduard Čech*, str. 216–220, in E. Fuchs (ed.): *Matematika v proměnách věků IV*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007; M. Katětov a P. Simon (eds.): *The Mathematical Legacy of Eduard Čech*, 1st edition, Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin, 1993, 441 stran; B. Balcar, V. Koutník and P. Simon: *Eduard Čech 1893–1960*, Mathematica Slovaca 43 (3) (1993), str. 381–392; V. Koutník: *Eduard Čech, 1893–1960*, European Mathematical Society Newsletter 8(1993), str. 5–7; J. J. Gray: *Eduard Čech*, The Mathematical Intelligencer 16 (4) (1994), str. 48–49.

byl znám tzv. Fubiniovou větou charakterizující jednu z vlastností vícerozměrného integrálu. Sepsali spolu dvě významné monografie o projektivní diferenciální geometrii, které poprvé vyšly až v letech 1926 a 1927 pod názvy *Geometria proiettiva differenziale*⁴ a *Introduction á la géometrie projective différentielle des surfaces*.⁵ Tyto práce získaly světový ohlas a bezesporu přispěly k Čechovu jmenování řádným profesorem Masarykovy univerzity v Brně.

Násilné přerušení další odborné spolupráce způsobila druhá světová válka. G. Fubini byl donucen emigrovat z fašistické Itálie do Spojených států amerických. E. Čech se k diferenciální geometrii vzhledem k uzavření českých vysokých škol německými okupanty, omezení vědecké práce i mezinárodních kontaktů mohl plně vrátit až v poválečných letech. Věnoval se jí pak až do konce svého života.

2.2 Topologie

Topologie se zabývá obecným výkladem a zkoumáním pojmu prostor, resp. topologický prostor, tj. matematická struktura umožňující formalizovat a zobecňovat zejména pojmy konvergence, kompaktnost a spojitost. Studuje vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při oboustranně spojitých transformacích, jež nevytvářejí „trhliny“ ani ostré skoky, jedná se o rozšíření pojmu spojitě funkce. V topologii nezáleží na běžných geometrických vlastnostech, jako je vzdálenost či křivost. Hlavními výsledky jsou kompaktnost každého uzavřeného intervalu či spojitého obrazu kompaktního prostoru. Podle studijních metod rozlišujeme algebraickou (kombinatorickou) a množinovou topologii.

Podobně jako diferenciální geometrie vznikla topologie při hledání řešení některých geometrických problémů. Známá úloha o sedmi mostech v Königsbergu vyřešená švýcarským matematikem Leonardem Eulerem (1707–1783) je považována za první topologický výsledek. Současná topologie využívá vedle geometrie především teorii množin Georga Cantora (1845–1918).

2.2.1 Čechova práce v oblasti topologie

Spojovacím článkem mezi diferenciální geometrií a topologií byla pro Eduarda Čecha algebraická geometrie, která na rozhraní algebry a geometrie používá metody komutativní algebry pro řešení geometricky formulovaných problémů. Algebraická geometrie patří mezi stále se rozvíjející oblasti moderní matematiky a je úzce spjata mimo jiné oblasti (např. teorie čísel) právě s topologií.

Objektem Čechova zájmu byla nejen obecná topologie, ale také algebraická. Sepsal 12 prací z obecné topologie (první vyšla v roce 1930). V roce 1932 publikoval článek *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*,⁶ v němž vybudoval první ucelenou obecnou teorii homologie a uvedl první nekombinatorickou definici homologie,⁷ dodnes nesoucí jeho jméno. V jeho topologických pracích se poprvé objevují

⁴ Vyšlo v Bologni u vydavatele Nicola Zanichelliho, Vol. II, 1927, 406 stran.

⁵ Dnes známé především z upraveného vydání Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1931, vii + 291 stran.

⁶ *Fundamenta Mathematicae* 12 (1932), str. 149–183.

⁷ V algebraické topologii je Čechova kohomologie založena na průniku vlastností otevřených pokrytí topologických prostorů. Jeho myšlenka spočívá ve vhodném výběru pokrytí složeném z dostatečně malých spojených otevřených množin nutných k vytvoření kombinatorického modelu prostoru.

postupy projektivního vytváření.⁸ V článku *Höherdimensionale Homotopie-gruppen*⁹ zavedl a definoval pojem vyšších homotopických grup v prostoru.¹⁰ Od roku 1934 se začal zabývat problematikou lokální homologie. Jeho nejznámější česká kniha o základech topologie vyšla roku 1936 a nesla název *Bodové množiny*.¹¹ Na sklonku života v roce 1959 shrnul své poznatky v knize *Topologické prostory*,¹² na jejíž koncepci začal pracovat již v době druhé světové války.

3 Protektorát Čechy a Morava a česká věda

Roku 1939 po zřízení Protektorátu byla sestavena protektorátní česká vláda. Jedinou politickou stranou se stalo Národní souručenství. Rozhodující moc v protektorátu však drželi představitelé nacistického Německa a brzy vytvořili orgány a instituce okupační správy.

Česká věda procházela obdobím hluboké stagnace. Po násilném uzavření vysokých škol nacisty v roce 1939 se zastavila příprava mladé české inteligence. Brzy byla omezena i činnost dalších českých vědeckých institucí. Čeští profesori byli posláni na „dovolenou“ s malou penzí, docenti a ostatní vědecktí pracovníci museli hledat nová zaměstnání nebo byli nasazeni do válečné výroby. Omezený prostor zbyl v některých výzkumných ústavech převážně průmyslových podniků, které sloužily válečným potřebám, na lékařských pracovištích, v knihovnách a archívech. Eduard Čech v této době začal psát středoškolské učebnice matematiky. Naše školství však bylo dále výrazně podřizováno jednotným osnovám, které směřovaly ke germanizaci a úplné likvidaci české vzdělanosti. Po vysokých školách se okupanti zaměřili na omezování středního školství. Postupně zrušili řadu gymnázií, reálků a odborných škol, snižovali počty přijímaných studentů a také absolventů, perzekvovali židovské studenty a učitele apod.

4 Válečné učebnice aritmetiky pro střední školy

Čechovy *Aritmetiky pro střední školy* [1], [2], [3] vydané v edici *Učebnice a pomocné knihy* Jednotou českých matematiků a fyziků v roce 1943 se staly nejrozšířenějšími učebnicemi na našich středních školách v období Protektorátu. Byly však dosti obtížné a náročné jak pro žáky, tak pro samotné učitele, neboť uváděly správné a úplné znění

⁸ Pod pojmem projektivní vytváření rozumíme způsob vytvoření geometrického objektu (např. projektivní vytváření kuželoseček). Projektivní vytváření patří do teorie kategorie, která zobecňuje pohled na matematické struktury a vztahy mezi nimi. Poprvé se kategorie začaly objevovat ve čtyřicátých letech právě v souvislosti s algebraickou topologií.

⁹ In *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongress, Zürich, Band 2, 1932*, page 194. Walter Saxer, Zürich, 1932, 203 pages. Reprint, Kraus, Nendeln, Liechtenstein, 1967.

¹⁰ Homotopie umožňuje postihnout některé topologické vlastnosti topologických prostorů a naznačuje představu spojitě deformace prostorů a zobrazení. Homotopická grupa zachycuje pojem jednoduché souvislosti a „měří“ homotopickou stejnost.

¹¹ Čechova kniha *Bodové množiny* (první vydání, Prometheus, Praha, 1936, xi + 280 stran) vyšla s dodatkem *O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné*, který sepsal Vojtěch Jarník (1897–1970).

¹² Kniha s dodatky *Konstrukce určitých důležitých topologických prostorů* (Josef Novák (1905–1999)) a *Zcela normální prostory* (Miroslav Katětov (1918–1995)) vyšla v nakladatelství Československé akademie věd (1. vydání, Praha, 1959, 524 stran); byla významně doplněna o výsledky, jichž dosáhl brněnský topologický seminář.

i obtížnějších vět a jejich důkazy, nezanedbávaly předpoklady, důsledně užívaly kvantifikátory a jako ilustrační příklady i náročnější úlohy. Ačkoli byly dobře didakticky promyšlené a zpracované, nepatřily ve své době mezi nejoblíbenější.

Poznamenejme pro úplnost, že E. Čech sepsal také řadu učebnic nazvanou *Geometrie pro střední školy*.¹³

5 Poválečné učebnice aritmetiky pro střední školy

V prvních poválečných letech se matematika na našich školách vyučovala převážně podle upravených učebnic, které vyšly ještě před válkou nebo v jejím průběhu. Čechovy učebnice aritmetiky z roku 1943 se dočkaly neobvykle velkého množství dotisků:

- pro první třídu: 1945, 1946, 1947, 1948, 1949;
- pro druhou třídu: 1945, 1946, 1947, 1948, 1949;
- pro třetí třídu: 1946, 1947.

Jednalo se o dotisky částečně pozměněných učebnic, v nichž byla především upravena zadání slovních úloh, aby lépe odrážela politický a hospodářský vývoj v naší zemi.

Na tvorbu nových učebnic matematiky soustředila pozornost řada zkušených vysokoškolských i středoškolských učitelů.¹⁴ Do roku 1953 vyšlo několik desítek nových učebnic a sbírek. Zaměříme se jen na učebnice, na nichž pracoval či spolupracoval Eduard Čech.

V roce 1951 kolektiv autorů (Jan Bílek, Eduard Čech, Karel Hruša, Vítězslav Jozífek, Karel Prášil, Karel Rakušan, Václav Krauman) z Výzkumného ústavu pedagogického Jana Amose Komenského¹⁵ vedený Eduardem Čechem vydal ve Státním nakladatelství v Praze čtyřdílnou řadu učebnic *Aritmetika pro střední školy* [4], [5], [6], [7].

Druhý kolektiv autorů (Eduard Čech, Alfons Fišer, Vítězslav Jozífek, Karel Komínek, Jan Vyšín, Rudolf Zelinka) pod Čechovým vedením v téže době vydal čtyřdílnou řadu učebnic *Geometrie pro střední školy*.

6 Finanční matematika v Čechových učebnicích

Ve „válečných“ učebnicích byly základy finanční matematiky obsaženy v *Aritmetice pro II. třídu středních škol* [2]. Kapitola *Úrok* v rozsahu 12 stran poskytovala žákům

¹³ Jednalo se o řadu učebnic paralelních k učebnicím *Aritmetika*. První a druhé poválečné vydání napsal Eduard Čech sám; vyšla v letech 1949 a 1950. Čerpal ze svých starších vydání z válečných let. Další vydání (třetí až páté) vydával níže zmíněný kolektiv autorů pod Čechovým vedením v letech 1951 až 1953.

¹⁴ O vývoji českých učebnic matematiky v letech 1900 až 1945 viz Potůček J.: *Vývoj vyučování matematice na českých školách v období 1900–1945*, Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň, 1993. Analýza učebnic matematiky vydaných po roce 1948 je obsažena v článku Hrubý D.: *Postavení matematiky na gymnáziích*, str. 47–70, in Bečvářová M. (ed.): *O škole a vzdělávání*, Matfyzpress, Praha, 2007.

¹⁵ Výzkumný ústav pedagogický Jana Amose Komenského se sídlem v Praze byl zřízen dekretem prezidenta republiky ze dne 27. října 1945. Jeho hlavním úkolem byla vědecko-výzkumná práce v oboru výchovy a vyučování a příprava účelného využití jejích výsledků ve školství.

první seznámení s touto tematikou. Tomu odpovídala také náročnost příkladů. Úlohy byly stručné, jasné a „nezáludné“. Byly přiměřené věku a schopnostem žáků.

Úloha 1

Vypočítejte úrok z jistiny 4758 K za 7 měsíců při úrokové míře 5% %. ([2], str. 70)

Celá kapitola obsahovala 7 řešených příkladů s velmi podrobnými přehlednými komentáři a poměrně velké množství (celkem 52) úloh k procvičení, jejichž znění nepřesahovalo délku jednoho řádku. Hlavním cílem bylo zautomatizování základních výpočtů při jednoduchém úrokování, aby žákům při dalším studiu nečinily výraznější problémy. Náročnost numerických výpočtů od prvních úloh postupně narůstala od celočíselných s „malými“ čísly až po poměrně velká čísla s nutností použití desetinných čísel či zlomků. Odpovědi si žáci mohli zkontrolovat v samostatném oddíle *Výsledky* na konci učebnice. Žáka tedy nerozptylovaly a neovlivňovaly výsledky předem.

V poválečné učebnici *Aritmetiky pro druhou třídu středních škol* [5] zůstal původní rozsah učiva z finanční matematiky zachován. Kapitola doznala jen minimum změn, které souvisely se změnami politické situace v naší zemi a se změnou způsobu označení členění učební látky.¹⁶

Větší rozsah finanční matematiky byl v učebnicích pro gymnázia. *Matematika pro třetí ročník gymnasií* [8]. Celou řadu sepsal kolektiv pod vedením Eduarda Čecha ve složení František Balada, Eduard Čech, Josef Holubář, Karel Hruška, Marta Chytilová, Vanda Janová, Bedřich König, Emil Mastný, Karel Rössler, Antonín Srb, Josef Šimek, Antonín Tuláček a Rudolf Zelinka. Učebnice obsahovala jako součást kapitoly *Posloupnosti* (22 stran) podkapitulu *Užití geometrických posloupností* (6 stran), do níž autoři zařadili také peněžní úlohy. Vyzdvihli aplikace aritmetické posloupnosti při jednoduchém úrokování a geometrické posloupnosti při složeném úrokování. Podkapitola nebyla věnována jen finanční matematice, ale ukazovala ji jako jednu z důležitých aplikací posloupností. Počet úloh s finanční tematikou byl přes celkově velmi malý rozsah vyložené látky uspokojivý.¹⁷

Úloha 2

Kolik musím ukládati počátkem každého roku po 10 let, chci-li mít koncem 10. roku nastřádáno 10 000 Kč při 2 % složeném úrokování? ([8], str. 21)

Porovnáme-li učební texty pro nižší ročníky středních škol (např. [1], [2], [3]) s touto učebnicí pro gymnázia, zřetelně vidíme nárůst nároků kladených na studenty. Zásadní rozdíl byl především v délce a tématech slovních úloh a pojetí výkladu. Průměrná délka textu slovních úloh se pohybovala kolem pěti řádků, výjimkou nebyly úlohy s textem nad deset řádků. Vždy byla podrobně popsána převážně praktická situace, na niž měl student aplikovat

¹⁶ Poválečná učebnice na rozdíl od předcházející neobsahovala například slovní úlohu o splácení dluhu Německa za škody způsobené v první světové válce, v teoretické části nebyla uvedena srovnávací tabulka přiřazení pojmů *věřitel*, *dlužník*, *jistina*, *úrok* termínům *domácí*, *nájemník*, *byt*, *činže*. Velkou změnu zaznamenalo také značení kapitol a podkapitol. Dřívější učebnice byla rozdělena na šest paragrafů a číslování podčástí bylo od jedničky v prvním paragrafu až po osmatřicítku v šestém paragrafu. Novější učebnice značila kapitoly římskými číslicemi a jejich části arabskými číslicemi vždy od jedné.

¹⁷ O změnách výuky finanční matematiky na našich středních školách viz např. [9], [10], [11].

své znalosti. „Umělé“ úlohy byly zřetelně v menšině. Ve výkladových částech s řadou komentovaných řešených příkladů se pracovalo s obecným vyjádřením neznámé ze vzorce bez předešlého dosazení čísel. Číselné hodnoty se dosazovaly až v závěru. Výsledky úloh na procvičení si studenti mohli ověřit v závěrečném oddíle *Výsledky*. U slovních úloh byla důsledně vyžadována odpověď celou větou.

7 Závěr

Přínos Eduarda Čecha k rozvoji matematiky překročil hranice našeho státu. Jeho odborné práce ovlivnily vývoj diferenciální geometrie a topologie, jeho učebnice zanechaly podnětné didaktické myšlenky pro další autory, jeho popularizační publikace přitáhly pozornost veřejnosti.¹⁸ Jeho příspěvek československé a světové matematice i jejímu vyučování nelze ani dnes opomíjet.¹⁹

Literatura

- [1] Čech E.: *Aritmetika pro I. třídu středních škol*. 1. vydání, Knihotiskárny Prometheus, Praha, 1943, 114 stran.
- [2] Čech E.: *Aritmetika pro II. třídu středních škol*. 1. vydání, Knihotiskárny Prometheus, Praha, 1943, 86 stran.
- [3] Čech E.: *Aritmetika pro III. třídu středních škol*. 1. vydání, Knihotiskárny Prometheus, Praha, 1943, 91 stran.
- [4] Čech E. a kol.: *Aritmetika pro první třídu středních škol*. 2. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 145 stran.
- [5] Čech E. a kol.: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol*. 2. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 132 stran.
- [6] Čech E. a kol.: *Aritmetika pro třetí třídu středních škol*. 3. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 125 stran.
- [7] Čech E. a kol.: *Aritmetika pro čtvrtou třídu středních škol*. 3. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 162 stran.
- [8] Čech E. a kol.: *Matematika pro třetí třídu gymnasií*. 1. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 178 stran.
- [9] Melcer M.: *Financial Mathematics in Czech Education Systems in the 20th Century*, pp. 43–48, in J. Šafránková and J. Pavlů (editors): WDS'08, Proceedings of Contributed Papers, Part I: Mathematics and Computer Sciences, Matfyzpress, Praha, 2008, 245 pages.

¹⁸ *Co je a nač je vyšší matematika?*, Cesty k vědění, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 20. svazek, 1. vydání, 1942, 126 stran, 26 obrázků.

¹⁹ Jméno Eduarda Čecha se nachází například v rozsáhlé webové databázi *Mathematics Genealogy Project*, která zaznamenává posloupnosti školitelů, doktorandů a žáků, obhájených doktorských prací a základní údaje z profesní kariéry nejvýznamnějších matematiků. V roce 1997 celosvětový projekt založil Harry B. Coonce (nar. 1938), bývalý profesor matematiky na Minnesotské státní univerzitě v Mankatě. Čechovo jméno nalezneme pod identifikačním číslem 13698. Viz <http://www.genealogy.ams.org/>.

- [10] Melcer M.: *Poválečná devastace finanční matematiky*, str. 151–155, in J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, Matfyzpress, Praha, 2009, 244 stran.
- [11] Melcer M.: *Postwar Devastation of Financial Mathematics*, pp. 188–192, in J. Šafránková and J. Pavlů (editors): WDS'09, Proceedings of Contributed Papers, Part I: Mathematics and Computer Sciences, Matfyzpress, Praha, 2009, 210 pages.
- [12] Wikipedie (Otevřená encyklopedie): <http://cs.wikipedia.org/wiki>.
- [13] Wikipedia (The free encyclopedia): <http://en.wikipedia.org/wiki>.
- [14] Elektronický katalog Národní knihovny ČR: <http://sigma.nkp.cz/cze/nkp>.

Adresa

Mgr. Martin Melcer
 Ústav jazykové a odborné přípravy
 Univerzita Karlova v Praze
 Středisko Poděbrady
 Jiřího náměstí 1/I
 290 36 Poděbrady
 e-mail: martin.melcer@ujop.cuni.cz

JAKUB FILIP KULIK V OLOMOUCI, ŠTÝRSKÉM HRADCI A PRAZE

LUBOŠ MORAVEC

Abstract: The main aim of the article is to map the life and teaching activities of Jakub Filip Kulik (1793–1863) in Olomouc, Graz and Prague. He came from Lviv, but since his 21 years he lived subsequently in these three cities and worked there as a university professor of mathematics, physics or astronomy.

1 Připomenutí osobnosti J. F. Kulika

Jakub Filip Kulik se narodil 1. května 1793 v haličském Lvově, kde vystudoval gymnázium a filosofickou fakultu tamní univerzity. Působil jako profesor matematiky, fyziky, resp. astronomie na vysokých školách v Olomouci, Štýrském Hradci a Praze.

Kromě pedagogické činnosti je znám rozsáhlou prací v teorii čísel, především sestavováním rozličných tabulek prvočísel a dělitelů. Jeho největším dílem z této oblasti je nedokončený osmismazkový rukopis tabulek nejmenších dělitelů čísel od 3 033 001 do 100 330 201.¹

Věnoval se také aplikované matematice; mezi jeho všeobecně známá díla patří i tisícileté kalendáře a matematické tabulky pro technickou praxi. Sepsal vysokoškolské učebnice matematiky, resp. fyziky a práce s matematickou a fyzikální tematikou publikoval v dobových odborných časopisech (např. *Zeitschrift für Physik und Mathematik* nebo *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*).²

2 Olomouc

Univerzita v Olomouci³ byla založena jako jezuitská kolej v roce 1566. Promoční právo získala roku 1573, výuka na filosofické fakultě⁴ začala roku 1576. Škola pokračovala v činnosti i po zrušení jezuitského řádu, avšak pouze do roku 1778, kdy byla přeložena do Brna. Po pěti letech byla navrátna do Olomouce, ovšem byla omezena na lyceum⁵ bez možnosti udělovat hodnost magistra. Jako řádná a plnohodnotná univerzita byla obnovena až roku 1827.

¹ Rukopis *Magnus Canon divisorum pro omnibus numeris per 2, 3 et 5 non divisibilibus et numerorum primorum interjacentium ad milies centena milia* je uložen v Archivu Akademie věd ve Vídni. Více viz [6, 11].

² Podrobněji o Kulikově životě a díle viz [7, 8].

³ Současná Univerzita Palackého v Olomouci. Základní informace o historii samotné univerzity a podrobný popis výuky matematiky lze najít v [9].

⁴ Matematika byla vyučována právě na filosofických fakultách; studium na nich bylo chápáno jako příprava pro postup na další fakulty. Součástí povinné výuky byl obvykle kurz elementární matematiky.

⁵ Císař Josef II. v rámci reformy univerzitního školství ponechal v monarchii jen tři univerzity – ve Vídni, v Praze a ve Lvově.

Na počátku 19. století vyučoval v Olomouci matematiku Franz Konrad Bartl,⁶ který na tamní univerzitě působil až do své smrti roku 1813. Po roce 1805 přednášel latinsky v prvním ročníku elementární a aplikovanou matematiku (9 hodin týdně), ve druhém pak pouze aplikovanou matematiku (4 hodiny týdně). Jako základní studijní literaturu doporučoval Wolffovy učebnice⁷ a své vlastní spisy. Po jeho smrti byla výuka matematiky dva roky suplována.

Roku 1814 byl vypsán konkurz na místo profesora elementární matematiky v Olomouci. Jakub Filip Kulik tehdy na přání otce studoval práva ve Lvově. Jeho velkou zálibou však byla matematika a na tento konkurz se bez vědomí otce přihlásil. I přes svůj velmi nízký věk projevil nejlepší kvalifikaci a konkurz vyhrál. Dne 14. listopadu 1814 byl ustanoven řádným profesorem elementární matematiky. Studium práv proto nedokončil.

Přednášet začal až v akademickém roce 1815/1816. Vedl latinské přednášky z elementární matematiky v rozsahu 7 hodin týdně; doporučoval Appeltauerovu učebnici⁸ a své vlastní poznámky. Kromě tohoto povinného kurzu plánoval také tříletý kurz volných přednášek z vyšší a aplikované matematiky, jehož součástí měla být vyšší analýza, aplikace matematiky v mechanice nebo astronomii a historie matematiky. Vzhledem k tomu, že působil v Olomouci pouze jeden rok, byl z něj realizován pravděpodobně jen první ročník v rozsahu šesti hodin týdně. V letním semestru se J. F. Kulik podílel také na výuce užívání praktických geometrických nástrojů při astronomickém pozorování.

Kromě výuky se věnoval i dalším aktivitám včetně takových, které neměly žádnou přímou souvislost s matematikou. Vytvořil například systematický soupis lastur vlastněných filosofickou fakultou.⁹

Po jediném roce výuky J. F. Kulik Olomouc opustil a odešel na lyceum do Štýrského Hradce. Jeho nástupcem se po krátkém suplování stal Joannes Fuchs.¹⁰ Důvody jeho krátkého olomouckého pobytu nejsou zatím z dochovaných archívních materiálů dobře rekonstruovatelné.

⁶ Franz Konrad Bartl (1750–1813) byl pražský matematik a fyzik, autor několika učebnic matematiky a fyziky. V letech 1779 až 1782 působil jako mimořádný profesor elementární matematiky na pražské univerzitě, poté odešel do Olomouce, kde na postu profesora elementární a aplikované matematiky setrval až do své smrti. Více viz http://cs.wikipedia.org/wiki/Franz_Konrad_Bartl.

⁷ Wolff Ch.: *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*. Frankfurt und Leipzig, 1750. Christian Wolff (1679–1754) byl slavný německý filosof. Působil jako soukromý docent na univerzitě v Lipsku (1703 až 1706) a jako profesor matematiky a přírodní filosofie na univerzitách v Halle (1706 až 1723, 1743 až 1754) a v Marburgu (1723 až 1743). Více viz [http://de.wikipedia.org/wiki/Christian_Wolff_\(Universalgelehrter\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Christian_Wolff_(Universalgelehrter)).

⁸ Appeltauer I.: *Elementorum matheseos pureo*. Vindobona et Trieste, 1814–1817, 344 + 414 stran. Ignaz Appeltauer, též uváděný jako Appeltaner, (1769–1829) byl profesorem matematiky na vídeňské univerzitě. Více viz Poggendorff J. C.: *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*. Band I, Leipzig, 1863, str. 53.

⁹ Kulik J. Ph.: *Die Conchylien-Sammlung der philosophischen Facultaet an dem k. k. Lyceum in Olmütz in einem systematischen Verzeichnisse*. Olmütz, 1816.

¹⁰ Joannes Fuchs, též uváděný jako Johann Fux, (1785–1848) byl rakouský piarista, který působil nejprve jako středoškolský učitel. Před příchodem do Olomouce, kde setrval až do své smrti, byl profesorem filosofie na univerzitě v Černovicích (1815 až 1818). Mimo jiné přeložil Appeltauerovu učebnici *Elementorum matheseos pureo* (Appeltauer I.: *Elementar-Mathematik*. Wien und Triest, 1825). Více viz [9].

3 Štýrský Hradec

Univerzita ve Štýrském Hradci¹¹ byla založena roku 1585 rakouským arcivévodou Karlem II. V roce 1782 byla stejně jako olomoucká univerzita transformována na pouhé lyceum. Status řádné univerzity jí byl navrácen až roku 1827 císařem Františkem I.

Fyziku a aplikovanou matematiku na zdejší filosofické fakultě od roku 1806 vyučoval Johann Philipp Neumann,¹² který přednášky vedl podle vlastní učebnice.¹³ Po jeho odchodu přišel na místo profesora fyziky a aplikované matematiky J. F. Kulik.

První přednášky vedl v akademickém roce 1816/1817; jako literaturu k nim doporučoval Döttlerovu učebnici.¹⁴ Po dobu jeho výuky patrně nedocházelo k větším změnám, a tak výše uvedenou knihu používal téměř do konce svého působení na štýrsko-hradeckém lyceu, pouze ji postupně doplňoval vlastními poznámkami. V posledním roce své výuky (1825/1826) však v seznamu přednášek¹⁵ uvedl nově vydanou třídílnou Baumgartnerovu knihu nazvanou *Naturlehre*.¹⁶

Od roku 1817/1818 J. F. Kulik přednášel astronomii také na štýrskohradeckém Joanneu.¹⁷ Na této technické škole byl nejspíše jejím prvním vyučujícím. Kurzy vedl podle Bohnenbergerovy *Astronomie*.¹⁸

J. F. Kulik ve Štýrském Hradci v roce 1822 předložil disertační práci *De phaenomenis Iridis* – čistě fyzikální pojednání věnované problematice duhy. Toto téma bylo časté ve vědeckých pracích vzniklých na jezuitských univerzitách v 17. a 18. století.¹⁹ Je pravděpodobné, že na ně J. F. Kulik navazoval. Za práci získal doktorát filosofie. Plně se mu tak otevřel prostor k další akademické kariéře, neboť již v následujícím akademickém roce 1822/23 byl zvolen rektorem filosofické fakulty lycea.

¹¹ Současná Karl-Franzens-Universität Graz, více o historii viz http://de.wikipedia.org/wiki/Universität_Graz a <http://www.uni-graz.at/>.

¹² Johann Philipp Neumann (1774–1849) byl rakouský fyzik a básník narozený v Třebíči. Ze Štýrského Hradce odešel na vídeňskou polytechniku, kde působil jako profesor (1815 až 1845) a knihovník (1816 až 1843). Více viz http://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Philipp_Neumann.

¹³ Neumann J. Ph.: *Compendiaria Physicae Institutio*. Graecii, 1808.

¹⁴ Döttler R.: *Elementa Physicae mathematico-experimentalis in usum auditorum suorum conscripta*. Vindobona, 1815, 529 stran. Remigius Döttler (1748–1812) byl rakouský piarista, působil jako profesor fyziky na vídeňské univerzitě. Více viz Poggendorff J. C.: *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*. Band I., Leipzig, 1863, str. 586.

¹⁵ Seznam přednášek a další informace o historii výuky matematiky a fyziky viz [15].

¹⁶ Baumgartner A.: *Die Naturlehre nach ihrem gegenwärtigen Zustande, mit Rücksicht auf mathematische Begründung*. Wien, 1824. Andreas von Baumgartner (1793–1865) byl rakouský fyzik a politik. V letech 1817 až 1823 působil jako profesor fyziky na lyceu v Olomouci, od roku 1823 učil fyziku a aplikovanou matematiku na univerzitě ve Vídni. Po roce 1833 se musel kvůli onemocnění krku univerzitní výuky vzdát a pracoval na ředitelských postech v několika podnicích. Roku 1848 byl jmenován ministrem hornictví a veřejných prací, čímž byla nastartována jeho politická kariéra. Více viz http://de.wikipedia.org/wiki/Andreas_von_Baumgartner.

¹⁷ Dnešní Technische Universität Graz byla založena jako technická škola roku 1811 arcivévodou Johannem. Výuka zpočátku zahrnovala fyziku, chemii, astronomii, mineralogii, botaniku a technologii. Postupně byly přidávány další obory. Více viz http://de.wikipedia.org/wiki/Technische_Universität_Graz#Geschichte.

¹⁸ Bohnenberger J.: *Astronomie*. Tübingen, 1811, 710 stran. Johann Gottlieb Friedrich von Bohnenberger (1765–1831) byl v letech 1798 až 1831 profesorem matematiky a astronomie na univerzitě v Tübingenu. Více viz http://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Gottlieb_Friedrich_von_Bohnenberger.

¹⁹ Tématu se věnovali například Baltasar Conradus nebo Jan Nepomuk Polanský. Podrobněji o historii optiky na jezuitských školách viz http://www.jcmf.cz/lib/i_hopto.html#kap211b.

Iridis definitio atque species.

Iris phenomenon dicitur, quo conspicitur arcus in caelo versicolor, in nube rosida obversa depictus. Obtinet illud communiter *sole* a tergo spectatoris fulgente: licet etiam non desit *Iris lunaris* raro quidem, luna plena oriente vel occidente observata.

Iris solaris duplex apparet: *primaria* seu *interna*, coloribus prismaticis refulgens eo ordine, ut limbus illius superior rubrum colorem præseferat, inferior vero violaceus sit, inter quos se succedant reliqui arcus colorati juxta ordinem refrangibilitatis colorum: *secundaria* seu *externa* coloribus et languidioribus tincta est, ac illa, et inverso ordine positis: cernitur enim limbus illius superior violaceus, inferior ruber.

Si tertia comparet *Iris*, ea languidissima est, at colorum ordo idem, uti in *primaria* observatur.

Iris lunaris vix alios præter rubrum et flavum colores exhibet.

Iris artificialis.

Repræsentari autem potest *Iris* etiam arte, jaciendo aquam in sublimem, quæ in guttulas dispersa in modum pluvie decadat: tum enim solis radii in hujusmodi guttulas incidentes semper arcum exhibent spectatori apta positione inter solem et pluviam collocato: quemadmodum id in fontibus sa-

lontibus quibus celebriores horti ornantur observatu facillimum est.

Cum in nube rosida similes guttæ pluvie concipi possint, iridem a radiis solis in eas incidentibus effici, plus quam verisimile est.

Phænomena binæ refractionis et unius reflexionis in gutta pluvie.

Quo autem clarius intelligatur, quemadmodum arcus cælestis efficiatur, consideretur motus luminis post ingressum in pluvie guttam. Representet itaque globus *ABD* (fig. 1.) centro *C* semidiametro *AC* descriptus pluvie guttam, et *SA* unum ex radiis solis incidentem in globum istam ad *A*, refringatur juxta notam refractionis legem ad *B* ita, ut sit

$$\frac{\sin \angle SAC}{\sin \angle i} : \frac{\sin \angle CAB}{\sin \angle r} = n : 1$$

unde $\sin i = n \sin r$ deducitur.

Jam vero in *B* solis radius vel exibat e globo refractus, vel reflectetur ad *D*: cum prior casus ad *Iridis* phenomenon producendum nil faciat, alterum prosequemur; alioquin nulla refractione absque reflexione obtinet, ita, ut semper quantitas aliqua luminis ad *D* reflectatur, necesse sit. Ubi lux punctum *D* in globo accesserit, iterum vel exibat refracta juxta *DE* vel reflectetur ad *F*: in primo casu accidit bina illa lucis refractione intermedia una reflexione, cujus phænomena penitus modo indagabuntur.

Obr. 1: Ukázka z Kulikovy disertační práce

Během svého pobytu ve Štýrském Hradci se J. F. Kulik stal velmi oblíbeným učitelem a začal zde také publikovat své první práce,²⁰ přesto roku 1826 odešel do Prahy. Jeho nástupcem na lyceu byl jmenován Ferdinand Hessler,²¹ který zde nejprve působil jako suplent, později jako řádný profesor.

4 Praha – první období (1826 až 1849)

Pražskou univerzitu není nutné představovat. Její filosofická fakulta měla na počátku 19. století dvě matematické stolice – stolicí elementární matematiky a stolicí vyšší matematiky. Stolice elementární matematiky zajišťovala výuku základního kurzu, který byl povinný pro všechny studenty. Jeho cílem bylo doplnění, prohloubení, upevnění a rozšíření středoškolských znalostí studentů. Úkolem stolice vyšší matematiky bylo vypisovat volné (nepovinné) přednášky z pokročilejších partií matematiky, které sloužily k rozšíření znalostí studentů a jako příprava pro studium mechaniky, astronomie apod.

Stolicí elementární matematiky vedl od roku 1805 profesor Josef Ladislav Jandera.²² Na stolicí vyšší matematiky působil František Josef Gerstner.²³ Jeho

²⁰ V letech 1817 až 1826 publikoval šest monografií (především rozličné matematické tabulky) a dva odborné články pojednávající o fyzikální problémech v hodinářství a v kávovnictví.

²¹ Ferdinand Hessler (1803–1865) byl v letech 1826 až 1835 profesorem fyziky a aplikované matematiky na štýrskohradeckém lyceu, v letech 1835 až 1844 na univerzitě v Praze a roku 1844 se stal profesorem fyziky na vídeňské polytechnice, kde působil až do své smrti. Více viz [10].

²² Josef Ladislav Jandera (1776–1857) byl český matematik a kněz (příslušník premonstrátského řádu). Bývá oceňován především pro svou dlouholetou pedagogickou činnost na pražské univerzitě (v letech 1803 až 1805

přednášky tvořily tříletý kurz, v němž byla probírána vyšší analýza, mechanika i hydraulika. Jeho obdobu chtěl J. F. Kulík realizovat již při svém působení v Olomouci. Po Gerstnerově odchodu, který zapříčinil jeho zhoršující se zdravotní stav, tuto stoličku od roku 1823 nejprve suplovali Franz Kržíč a Franz Xaver Moth,²⁴ roku 1826 na ni nastoupil J. F. Kulík.

J. F. Kulík začal na pražské univerzitě učit od akademického roku 1826/1827. Kurz vyšší matematiky omezil na dvouletý; pro oba ročníky přednášel německy tři hodiny týdně²⁵ v zimním i letním semestru. Tuto podobu lekcí zachoval až do roku 1848/1849. Výuka na univerzitách byla tehdy totiž svázána přísnými předpisy, a tak J. F. Kulík nemohl provádět zásadnější změny bez souhlasu z Vídně. V průběhu let alespoň postupně inovoval doporučovanou literaturu. Nejprve v seznamech přednášek [12,13] uváděl Ettingshausenovu dvoudílnou učebnici²⁶ – první díl pro první ročník, druhý díl pro druhý ročník. Tato kniha mu zřejmě příliš nevyhovovala, protože již roku 1831 vydal první vydání své učebnice *Lehrbuch der höheren Analysis* [5]. Oficiálně doporučenou pro první ročník se tato kniha stala až od akademického roku 1839/1840 (asi vlivem dlouhého schvalování ve Vídni). Je však pravděpodobné, že ji doporučoval studentům již dříve.

Tato téměř pětisetstránková učebnice, rozdělená na čtyři základní kapitoly (*Metoda neurčitých koeficientů, Diferenciální a integrální počet, Křivky jednoduché křivosti, Křivky a plochy dvojí křivosti*) však byla po oficiálním schválení doporučena pouze čtyři roky.

V roce 1839/1840 se v seznamu přednášek objevila nová učebnice pro druhý ročník přednášek z vyšší matematiky. Jednalo se o druhý díl Poissonovy knihy *Lehrbuch der Mechanik*,²⁷ i ona byla používána jen následující čtyři roky.

K další změně v doporučované literatuře došlo v akademickém roce 1843/1844, v jehož průběhu vyšly dvě Kulikovy knihy – druhé vydání vyšší analýzy [5] a nová učebnice vyšší mechaniky [4]. Již v tomto akademickém roce byly obě uvedeny v seznamu přednášek jako základní literatura.

suplent, v letech 1805 až 1857 profesor elementární matematiky). Více viz Otavová M.: *Ladislav Jandera – současník Bernarda Bolzana*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2009, str. 164–166.

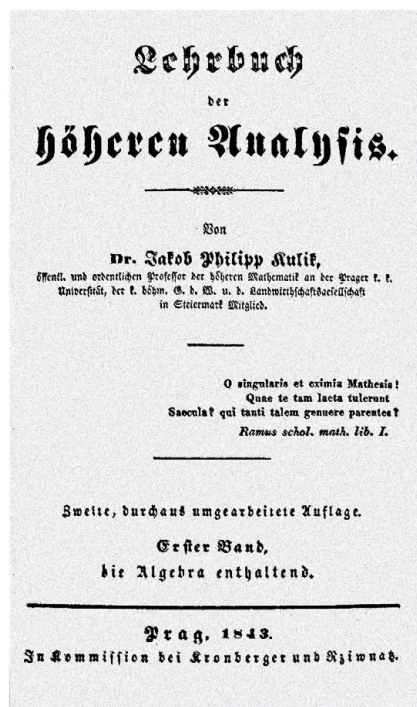
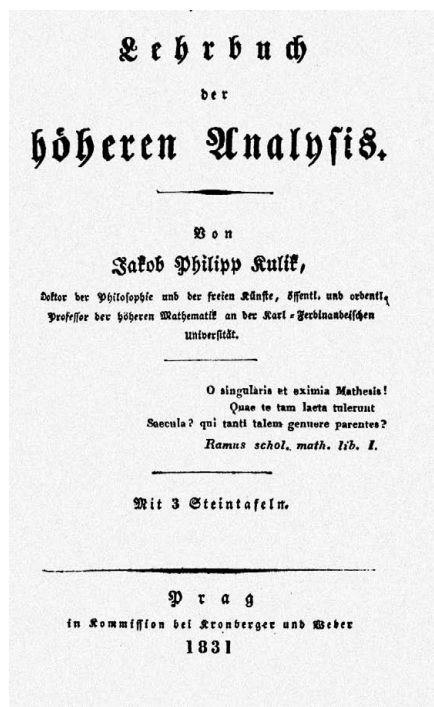
²³ František Josef Gerstner (1756–1832) byl český matematik a fyzik. Působil jako profesor vyšší matematiky na pražské univerzitě (1787 až 1822) a na polytechnickém ústavu v Praze (1806 až 1832), jehož byl ředitelem a zároveň na něm přednášel mechaniku a hydrauliku. Na počátku 19. století se podílel na reorganizaci rakouského technického školství. Více viz [10] a http://cs.wikipedia.org/wiki/František_Josef_Gerstner.

²⁴ Franz Xaver Moth (1802–1879) pracoval jako středoškolský profesor v Dolním Rakousku, v letech 1849 až 1879 byl profesorem elementární matematiky na univerzitě ve Vídni. Věnoval se především diferenciálnímu počtu. Více viz [10].

²⁵ Výjimku tvořily roky 1827/1828 a 1828/1829, kdy byla přednáška pro první ročník dotována čtyřmi hodinami týdně.

²⁶ Ettingshausen A.: *Vorlesungen über die höhere Mathematik*. Wien, 1827, 443 + 240. Andreas von Ettingshausen (1796–1878) byl profesorem fyziky na univerzitě v Innsbrucku a později přednášel vyšší matematiku na vídeňské univerzitě. Více viz Würzbach C.: *Biographisches Lexikon des Kaiserthums Oesterreich*. Band IV, Wien, 1858, str. 109–110.

²⁷ Poisson S. D.: *Lehrbuch der Mechanik*. II. Theil, Berlin, 1836, 603 stran. Siméon Denis Poisson (1781–1840) byl významný francouzský matematik, fyzik a geometr. Od roku 1802 působil jako suplent na École Polytechnique; roku 1806 se zde stal profesorem – nástupcem Jeana Baptiste Josepha Fouriera (1768–1830), kterého Napoleon Bonaparte odeslal do Grenoblu. Více viz http://en.wikipedia.org/wiki/Siméon_Denis_Poisson.

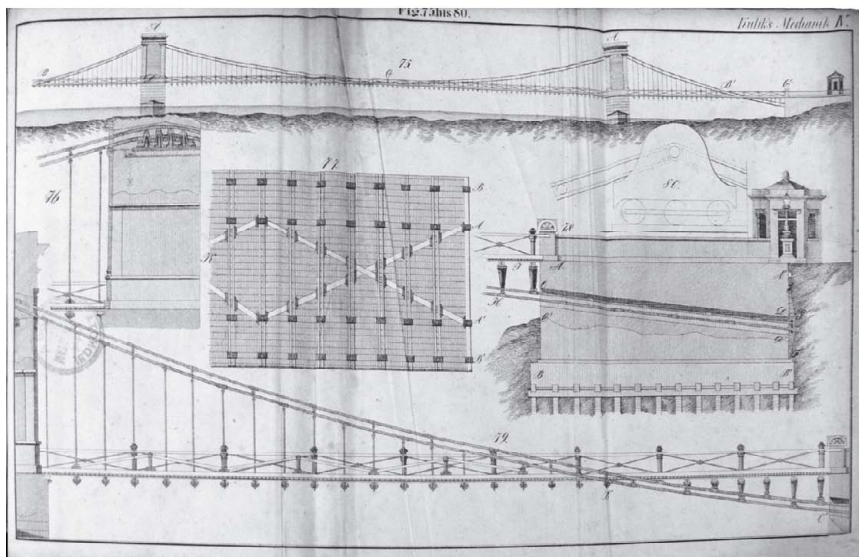
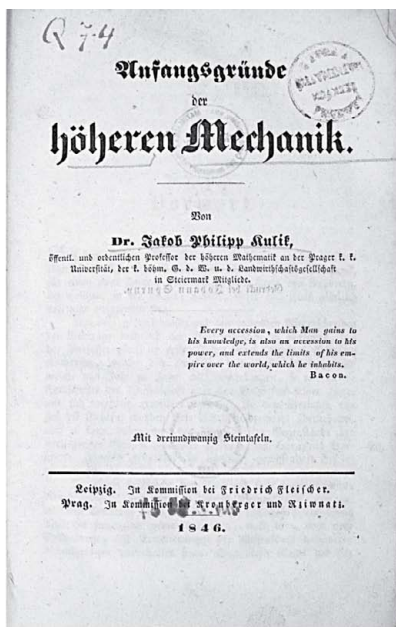


Obr. 2: Titulní listy obou vydání Kulikovy analýzy

Druhé vydání analýzy J. F. Kulik značně rozšířil – učebnici rozdělil do dvou téměř čtyřsetstránkových svazků (*Lehrbuch der höheren Arithmetik und Algebra* a *Die Integralrechnung und die analytische Geometrie*). První svazek obsahoval tři základní kapitoly. V první – *Aritmetika* – připomněl základy aritmetiky, vyložil dělitelnost, řetězové zlomky, mocniny a odmocniny, binomickou větu a logaritmy. Druhou kapitolu pojmenoval *Algebra* a zmínil v ní práci s polynomy, Fermatovu větu, primitivní kořeny polynomů, řešení rovnic (včetně rovnic vyšších řádů) a aritmetické i geometrické posloupnosti. Poslední kapitolu prvního svazku nazvanou *Algebraická analýza* věnoval funkcím – vyložil zde metodu neurčitých koeficientů, goniometrické funkce, diferenciální počet, Taylorovu větu a numerické metody řešení rovnic.

Druhý svazek rozdělil také na tři základní kapitoly. První z nich, která je celkově označována jako čtvrtá, je nazvána *Integrální počet*. Byl v ní výklad od elementárních integrálů až k integrování diferenciálních rovnic. Následující kapitola *Rovinná geometrie* obsahovala kromě úplných základů (např. určování tečen) také problematiku křivek druhých i vyšších stupňů (kardioda, konchoida, logaritmická spirála, epicykloida atd.). Poslední kapitola dvousvazkového díla nazvaná *Geometrie v prostoru* pojednávala o sférické trigonometrii včetně jejího použití v astronomii či geografii, o plochách prvního a druhého stupně, o křivkách dvojí křivosti, o objemech těles a variačním počtu.

J. F. Kulík v předmluvě předdeslal, že učebnice má sloužit především k přípravě na další studium matematiky. Jejím cílem tedy nebylo ani pečlivě vyložit nejnovější poznatky, ani předvést důslednou výstavbu matematiky, proto zůstala na úrovni Eulerových kompendií. Nové poznatky zařazovala nesystematicky a zřídka, mnohdy navíc nepřiliš přesně. I přesto lze podle počtu doposud zachovaných výtisků soudit, že se jednalo o poměrně rozšířenou a mezi studenty oblíbenou knihu.



Obr. 3: Kulikova učebnice vyšší mechaniky

Ve vyšší mechanice [4] shrnul své poznatky a zkušenosti z téměř dvaceti let univerzitních přednášek. Vyložil statiku pevných těles, dynamiku, hydrostatiku, hydrodynamiku a hydrauliku. Jednotlivá témata doplnil aplikacemi a ukázkami z praxe.

V letech 1837/1838, 1838/1839 a 1845/1846 J. F. Kulik suploval na univerzitě také výuku teoretické a praktické astronomie. Její časová dotace byla nejprve čtyři hodiny týdně, v roce 1845/46 už jen dvě hodiny týdně. Přednášel podle třídní Schubertovy učebnice.²⁸ Kromě výuky působil na univerzitě také v akademických funkcích, například roku 1829 byl děkanem filosofické fakulty.

J. F. Kulik se nevěnoval jen výuce a odborné práci, velké změny se udály v jeho osobním životě. Dne 4. listopadu 1828 se ve Lvově oženil s dcerou zámožného lvovského občana Kateřinou Deglovou (1809–1883). V roce 1837 se mu narodil syn Justin, který se později stal významným pražským právníkem. O čtyři roky později přišla na svět i dcera Angela, jež se později provdala za rytíře Antonína Randu, známého profesora občanského práva na pražské univerzitě (více viz [3]). Díky jeho rodině byla zachována část Kulikovy korespondence [16].

V době pražského působení se J. F. Kulik věnoval samozřejmě i vědecké práci. Publikoval několik knih a odborných článků²⁹ a aktivně pracoval také v *Královské české společnosti nauk*. Roku 1831 se stal jejím mimořádným a o rok později řádným členem. Při zasedáních matematické sekce přednesl několik příspěvků na téma teorie čísel. Zastával v ní také různé funkce – v letech 1833 až 1840 byl knihovníkem, roku 1837 direktorem a v letech 1840 až 1841 jednatelem matematického odboru.

5 Praha – druhé období (1849 až 1863)

Reforma školství z let 1848 až 1849 změnila poměry i na pražské univerzitě (více viz [1]). Rozšíření výuky matematiky na středních školách umožnilo zrušit univerzitní kurz elementární matematiky. Filosofická fakulta tak získala dvě rovnocenné stolice matematiky. Profesor J. L. Jandera nově vypisoval výběrové přednášky na nejruznější témata (i přesto, že byl již v penzi). Po roce 1850 přišel na Janderovu stolicí nový profesor Wilhelm Matzka.³⁰ Nové předpisy přinesly svobodu v přednášení; výuka matematiky se značně rozšířila, a to jak z hlediska časové dotace, tak okruhem a náplní probíraných témat.

J. F. Kulik vedl matematicky a fyzikálně zaměřené přednášky v celkovém rozsahu 4 až 10 hodin týdně. V každém semestru vypisoval kurzy zaměřené na

²⁸ Schubert F. T.: *Theoretische Astronomie*. Petersburg, 1798. Friedrich Theodor von Schubert (1758–1825) byl od roku 1785 astronomem na Akademii věd v Petrohradě. Napsal řadu spisů o astronomii. Více viz http://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Theodor_von_Schubert.

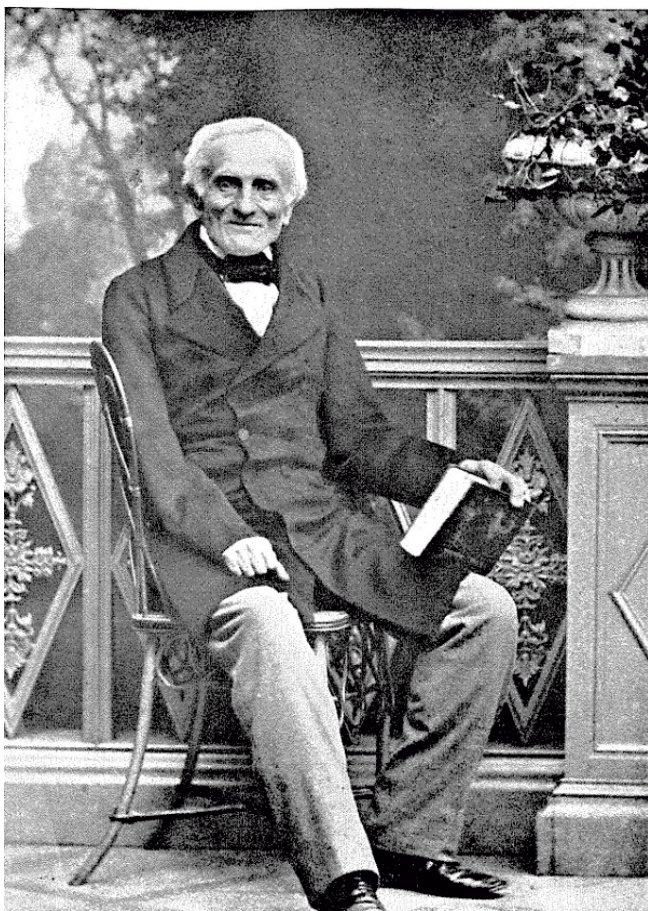
²⁹ V letech 1827 až 1849 publikoval sedm matematických, resp. fyzikálních monografií a devět odborných článků pojednávajících většinou o teorii čísel nebo vyšší geometrii.

³⁰ Wilhelm Matzka (1798–1891) byl dělostřelcem rakouské armády a profesorem matematiky na sborové škole ve Vídni, na lyceu v Tarnovu, na pražské technice a nakonec na pražské univerzitě. Více viz Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) a jeho práce z teorie determinantů*. In: Bečvářová M. (ed.): 28. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2007, str. 41–44.

několik různých témat. Jeho záběr byl široký – diferenciální a integrální počet, vyšší analýza, vyšší geometrie, teorie rovnic vyšších stupňů, vyšší mechanika a hydrodynamika včetně aplikací, astronomie, ale také chronologie či témata související s historií matematiky.

V seznamech přednášek pražské filosofické fakulty nalezneme v daném období několik zajímavostí. Například v akademickém roce 1851/1852 J. F. Kulík vedl praktické cvičení z astronomie – pozorování hvězd na noční obloze. Přestože v Praze po celou dobu svého působení přednášel německy, v akademickém roce 1853/1854 měl dva kurzy vyučované v latině. Zvláštní byl i rok 1855/1856, kdy ze zatím nezjištěných příčin vůbec neučil v letním semestru. V zimním semestru roku 1862/63 měl vypsánu pouze jedinou tříhodinovou přednášku z vyšší analýzy. Tentokrát bylo pravděpodobným důvodem onemocnění, neboť dne 28. února 1863 ve věku 69 let J. F. Kulík zemřel. Zda a v jakém rozsahu zimní semestr odučil, zůstává zatím otázkou. Stolicí vyšší matematiky po jeho úmrtí převzal Karl Hornstein.³¹

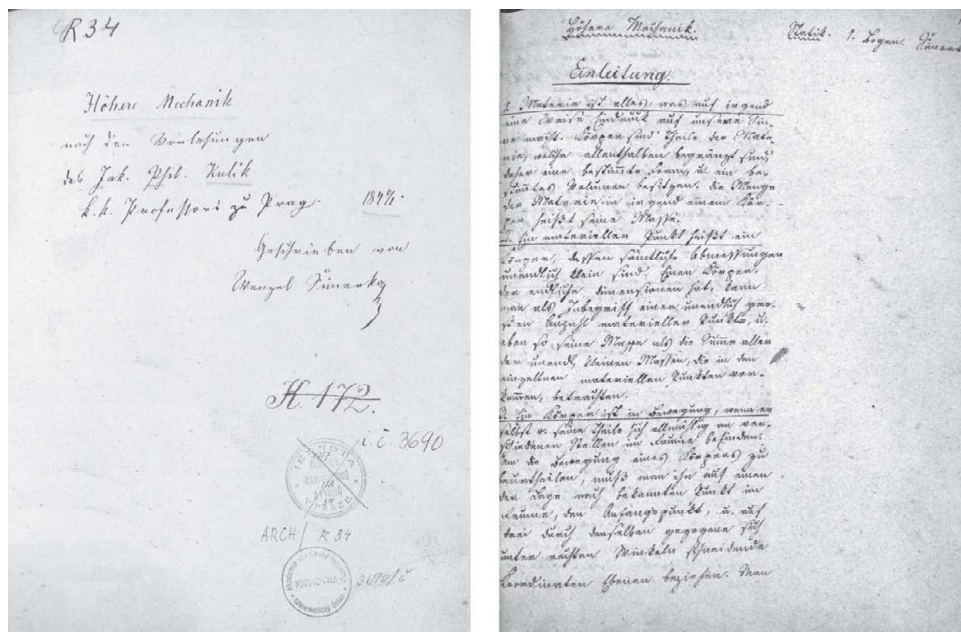
I po roce 1849 se J. F. Kulík nevěnoval pouze pedagogické činnosti. Nadále se angažoval v *Královské české společnosti nauk*, a to nejen jako řadový člen. Roku 1860 byl opět директором a v letech 1861 až 1863 pokladníkem. Stal se také velkým podporovatelem studentského *Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky*, z něhož roku 1869 vznikla *Jednota českých matematiků*. Těsně před smrtí mu



Obr. 4: Jakub Filip Kulík ve vyšším věku. Z rodinného archivu

³¹ Karl Hornstein (1824–1882) byl astronom a pedagog. Působil na hvězdárnách ve Vídni a v Krakově, vyučoval na gymnáziu ve Vídni a později se stal profesorem matematiky nejprve ve Štýrském Hradci a následně na pražské univerzitě, kde přednášel především astronomii. Od roku 1867 byl ředitelem hvězdárny v Klementinu. Více viz [10].

odkázal většinu své soukromé odborné knihovny. Jednalo se o téměř 800 svazků a jeho knihovna se tak stala dobrým základem budoucí knihovny Jednoty. V současnosti jsou Kulikovy knihy součástí fondu *Knihovny Matematického ústavu Akademie věd České republiky*. V něm lze nalézt také záznam Kulikových přednášek z mechaniky vedených v akademickém roce 1840/1841, které zapsal Václav Šimerka.³²



Obr. 5: Šimerkův zápis Kulikovy vyšší mechaniky

6 Závěr

I přesto, že je všeobecně známa jen Kulikova práce z teorie čísel, výše uvedené informace ukazují, že byl i významným pedagogem, který ovlivnil mnoho studentů-matematiků i nematematiků na školách ve Štýrském Hradci a v Praze. Patřil ke vstřícným a oblíbeným učitelům, na něž studenti rádi vzpomínali. Uveďme vzpomínku profesora Gabriela Blažka [14]:³³

Jakub Filip Kulik byl v té době již staříčkým pánem, hubené, kostnaté postavy a nápadně zapadlých lící. Přednášel třikrát týdně obden po dvou hodinách, od 9–11

³² Václav Šimerka (1819–1887) byl český katolický kněz a učitel matematiky, který v letech 1853 až 1862 vyučoval na gymnáziu v Českých Budějovicích a později působil jako farář na různých místech v Čechách. Sepsal několik učebnic a odborných prací. Více viz [10].

³³ Gabriel Blažek (1842–1910) byl český matematik a politik. V roce 1864 se stal asistentem profesora Andrease von Ettingshausena; od roku 1866 byl mimořádným a v letech 1871 až 1907 řádným profesorem matematiky na pražské polytechnice. Patřil k zakladatelům *Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky*. Více viz [1, 2] a http://cs.wikipedia.org/wiki/Gabriel_Blažek.

hodin dopoledne, a sice od 9–10 hodiny úvod do vyšší analýzy a do počtu diferenciálního a integrálního, od 10–11 hodiny některou partii vyšší mechaniky na základě vyšší analýzy. Vykládal doslovně podle svých knih, jež s nevšední liberálností daroval každému ze svých posluchačů, ovšem i leckterému, jenž toho nebyl valně hoden, neboť u antikvářů Kulikových knih se jen hemžilo. Přednášel velmi rychle, což seznati lze již z toho, že týdně 3hodinnou přednáškou vyčerpá celý počet diferenciální a integrální za zimní semestr. Řídil se dle staré školy, nenáviděl diferenciální poměry a tvořil raději diferenciály. Kulik mluvil polským přízvukem, vyslovuje k a q velmi tvrdě a ostře. Nullu jmenoval pravidelně záro. Co typická postava pražská zamyšleně kráčel obden k desáté hodině z Vodičkovy ulice Husovou třídou ku Klementinu, pojíždaje půl housky po cestě; druhou polovici požíval v přestávce mezi první a druhou svou přednáškou. Byl v literatuře matematické velmi obeznalý, ve styku s posluchači velmi vlídný a zdvořilý, ač těchto styků nevyhledával. Jeho výklady netěšily se té pozornosti, jíž by byly zasluhovaly, poněvadž Kulik zkušebním komisařem nebyl.

Velmi mile byl spolek překvapen, když spolku neočekávaně daroval velkou část své knihovny. Když záhy po tomto velkomyslném daru Kulik zemřel, všichni jsme byli přesvědčeni, že toliko v předtuše blížícího se konce rozloučil se s milými družkami svých studií. Vděčně jsme nesli jeho tělesné pozůstatky z bytu ve Vodičkově ulici skrz Klementinum přes Karlův most až k Újezdské bráně.

Literatura

- [1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. Dějiny matematiky 34, Matfyzpress, Praha, 2008.
- [2] Bečvářová M.: *Z historie Jednoty 1862–1869*. Dějiny matematiky 13, Prometheus, Praha 1999.
- [3] Klika J.: *Rod JUDr. Antonína rytíře Randy a Dr. mont. h. c. Otokara rytíře Kruliše-Randy*. I. Rodopisná galerie, Příloha časopisu Rodové společnosti v Praze, Praha, 1940, str. 23–24.
- [4] Kulik J. Ph.: *Anfangsgründe der höheren Mechanik*. Friedrich Fleischer und Kronberger und Rziwnass, Leipzig und Prag, 1844–1846, 751 stran.
- [5] Kulik J. Ph.: *Lehrbuch der höheren Analysis*. Kronberger und Weber, Prag, 1831, 470 stran. 2. rozšířené vydání, Kronberger und Rziwnass, Prag, 1843, 390 + 399 stran.
- [6] Moravec L.: *Jakub Filip Kulik a jeho tabulky*. Sborník z 18. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava, 2009, str. 156–160.
- [7] Moravec L.: *Jakub Filip Kulik – Life and Work*. In Šafránková J., Pavlů J. (ed.), WDS'09, Prag, 2009, Part I, str. 182–187.
- [8] Moravec L.: *Seznámení s Jakubem Filipem Kulikem*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2009, str. 156–163.

- [9] Navaříková L.: *Historie matematiky na olomoucké univerzitě*. [online] <http://navarikp.sweb.cz>.
- [10] Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do 19. století*. ČSAV, Praha, 1961.
- [11] Nový L.: *On Kulik's Tables of Divisors*. Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Special Issue 16, Praha, 1981, str. 327–343.
- [12] *Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Universität zu Prag*. Prag, 1850, ..., 1863.
- [13] *Personalstandt der k. k. Universität zu Prag*. Prag, 1827, ..., 1852.
- [14] Posejpal V.: *Dějepis Jednoty Českých matematiků*. Praha, 1912.
- [15] Rumpf K. K. M.: *Von Naturbeobachtungen zur Nanophysik*. Publikationen aus dem Archiv der Universität Graz, Akademische Druck- u. Verlagsanstalt, Graz, 2003.
- [16] Škába K.: *Odborná pozůstalost a korespondence prof. Dra Antonína Randy a korespondence jeho rodiny*. Grafika, Plzeň, 1934.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a v rámci projektu *Specifického vysokoškolského výzkumu* 2010-261 315.

Adresa

Mgr. Luboš Moravec
 Katedra didaktiky matematiky
 Matematicko-fyzikální fakulta
 Univerzita Karlova v Praze
 Sokolovská 83
 186 75 Praha 8
 e-mail: moravec@karlin.mff.cuni.cz

LADISLAV JANDERA A PĚSTOVÁNÍ POČETNÍ ZDATNOSTI NA PRAŽSKÉ UNIVERSITĚ

MIROSLAVA OTAVOVÁ

Abstract: L. Jandera, the definitive professor at the Prague University in years 1805 – 1857, follower of Stanislav Vydra and head of the department of elementary mathematics. The Latin textbook *Prima calculi exponentialis elementa*, published in 1812, illustrates his accent to computational algorithms and precision explanation with exact definition of mathematical concepts.

1 Výuka matematiky na pražské universitě v 1. polovině 19. století

Nejvýznamnější matematik, který působil v Čechách v první polovině 19. století, je bezesporu Bernard Bolzano (1781–1848). Jeho dílo však vešlo do povědomí evropské odborné veřejnosti až s velkým zpožděním a ani v Čechách mimo úzký okruh Bolzanových soukromých žáků nebylo příliš známé. Určující vliv na šíření matematického vzdělání měla samozřejmě universita, kde byla matematika zařazena do povinného programu 1. ročníku studia na filosofické fakultě. Osobností, která reprezentuje výuku matematiky v tomto období, je Ladislav Josef Jandera.

Pokud je dnes při studiu matematiky jeho jméno vůbec zmíněno, pak v jediné souvislosti – Jandera je ten, jemuž při obsazování Vydrovou smrtí uvolněné katedry matematiky byla dána přednost před Bolzanem. Už tato samotná informace nestaví Janderu do příznivého světla a může být při neznalosti dobového kontextu vykládána jako jedna z mnoha křivd způsobených Bolzanovi během jeho universitního působení. I když zvláště z našeho časového horizontu je srovnání Janderova a Bolzanova přínosu pro rozvoj matematiky mimo diskusi, je na místě zaujmout stanovisko oproštěné od apriorních klišé.

Josef Jandera, vrstevník a přítel Bolzanův, se narodil roku 1776 v Hořicích v Podkrkonoší. Po absolvování gymnasia v Hradci Králové studoval filosofii a teologii na pražské universitě. Velký vliv na něj měl jeho i Bolzanův učitel matematiky Stanislav Vydra. V roce 1800 Jandera vstoupil do premonstrátského kláštera na Strahově (od té doby užívá řeholní jméno Ladislav) a krátce na to přijal kněžské svěcení. Premonstrátský řád v celé své historii klade důraz na intelektuální aktivity, vědeckou činnost a výuku na školách. Svým členům přitom zajišťuje nejen materiální zajištění, ale i záštitu instituce. Jandera proto i nadále pokračoval ve studiu matematiky a po složení rigorosa se r. 1804 stal doktorem filosofie. Po Vydrově smrti si oba přátelé podali žádost o katedru matematiky, Bolzano se navíc hlásil i na nově ustavenou stolicí teologie určenou pro výuku náboženství studentů filosofické fakulty. (Katedra pro pokročilé studium na teologické fakultě samozřejmě existovala na universitě už od jejího založení.) Na tomto místě je vhodné připomenout, že od poslední třetiny 18. století byly na pražské universitě dvě katedry matematiky – elementární a vyšší. Katedru vyšší matematiky v letech 1788 až 1823 držel F. J. Gerstner, jeho přednášky v té době zapisovalo kolem 10 posluchačů ročně, menší část tvořili studenti university, většinou se jednalo o zájemce z polytech-

niky. Úkolem držitele katedry elementární matematiky byla výuka matematiky v 1. ročníku filosofického studia (tzv. logika). Jednalo se tedy o přednášku masovou, která představovala pro učitele značné časové zatížení. V letech 1772 až 1804 zde působil Stanislav Vydra. Právě na tuto katedru se hlásili Jandera s Bolzanem. Komise hodnotila oba uchazeče jako způsobilé, řádným profesorem matematiky byl jmenován díky předchozí pedagogické praxi 29letý Jandera, o 5 let mladší Bolzano získal katedru náboženství.

2 Janderovo učitelské působení

Vzhledem k určení katedry elementární matematiky, jejíž přednášky zapisovalo ročně v průměru 300 studentů (absolvování kursu bylo povinné i pro posluchače, kteří plánovali studium na právnické, lékařské nebo teologické fakultě), obsahová náplň nepřesahovala oblast současné středoškolské matematiky, ve srovnání s dneškem je výrazný akcent na zvládnutí složitých početních algoritmů, které v současné době ustoupily do pozadí a jsou věcí výpočetní techniky (aproximace odmocnin, práce s logaritmy etc.).

Tabulae hae pertinent ad §. 34 de elevandis numeris ad potentias, pag. 88.

	Tabula I ^{ma} .	Tabula II ^{da} .	Tabula III ^{da} .	Tabula IV ^{ta} .
Ter- mi- nus	$(a+b)^n =$	Tabula haec continet productum e po- tentia $(a+b)^n$ ducta in a , sive terminos tabulae I ^{ma} multiplicatos per a .	Tabula haec continet productum e po- tentia $(a+b)^n$ ducta in b , sive terminos ta- bulae I ^{ma} multiplicatos per b .	Tabula haec continet summam productio- rum in tabula secunda et tertia obvio- rum, sive potentiam $(a+b)^{n+1}$.
1 ^{ma}	$+ a^n$	$+ a^{n+1}$		$+ a^{n+1}$
2 ^{da}	$+ \frac{n}{1} a^{n-1} \times b$	$+ \frac{n}{1} a^n \times b$	$+ a^n \times b$	$+ (n+1) a^n \times b$
3 ^{tia}	$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \times b^2$	$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} \times b^2$	$+ \frac{n}{1} a^{n-1} \times b^2$	$+ \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} a^{n-1} \times b^2$
4 ^{ta}	$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} \times b^3$	$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} \times b^3$	$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \times b^3$	$+ \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} \times b^3$
5 ^{ta}	$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} \times b^4$	$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-3} \times b^4$	$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} \times b^4$	$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-3} \times b^4$
6 ^{ta}	$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} \times b^5$	$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-4} \times b^5$	$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} \times b^5$	$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-4} \times b^5$
7 ^a	etc.	etc.	etc.	etc.
8 ^a	etc.	etc.	etc.	etc.
9 ^a	etc.	etc.	etc.	etc.
p	$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)(n-14)(n-15)(n-16)(n-17)(n-18)(n-19)(n-20)(n-21)(n-22)(n-23)(n-24)(n-25)(n-26)(n-27)(n-28)(n-29)(n-30)(n-31)(n-32)(n-33)(n-34)(n-35)(n-36)(n-37)(n-38)(n-39)(n-40)(n-41)(n-42)(n-43)(n-44)(n-45)(n-46)(n-47)(n-48)(n-49)(n-50)(n-51)(n-52)(n-53)(n-54)(n-55)(n-56)(n-57)(n-58)(n-59)(n-60)(n-61)(n-62)(n-63)(n-64)(n-65)(n-66)(n-67)(n-68)(n-69)(n-70)(n-71)(n-72)(n-73)(n-74)(n-75)(n-76)(n-77)(n-78)(n-79)(n-80)(n-81)(n-82)(n-83)(n-84)(n-85)(n-86)(n-87)(n-88)(n-89)(n-90)(n-91)(n-92)(n-93)(n-94)(n-95)(n-96)(n-97)(n-98)(n-99)(n-100)(n-101)(n-102)(n-103)(n-104)(n-105)(n-106)(n-107)(n-108)(n-109)(n-110)(n-111)(n-112)(n-113)(n-114)(n-115)(n-116)(n-117)(n-118)(n-119)(n-120)(n-121)(n-122)(n-123)(n-124)(n-125)(n-126)(n-127)(n-128)(n-129)(n-130)(n-131)(n-132)(n-133)(n-134)(n-135)(n-136)(n-137)(n-138)(n-139)(n-140)(n-141)(n-142)(n-143)(n-144)(n-145)(n-146)(n-147)(n-148)(n-149)(n-150)(n-151)(n-152)(n-153)(n-154)(n-155)(n-156)(n-157)(n-158)(n-159)(n-160)(n-161)(n-162)(n-163)(n-164)(n-165)(n-166)(n-167)(n-168)(n-169)(n-170)(n-171)(n-172)(n-173)(n-174)(n-175)(n-176)(n-177)(n-178)(n-179)(n-180)(n-181)(n-182)(n-183)(n-184)(n-185)(n-186)(n-187)(n-188)(n-189)(n-190)(n-191)(n-192)(n-193)(n-194)(n-195)(n-196)(n-197)(n-198)(n-199)(n-200)(n-201)(n-202)(n-203)(n-204)(n-205)(n-206)(n-207)(n-208)(n-209)(n-210)(n-211)(n-212)(n-213)(n-214)(n-215)(n-216)(n-217)(n-218)(n-219)(n-220)(n-221)(n-222)(n-223)(n-224)(n-225)(n-226)(n-227)(n-228)(n-229)(n-230)(n-231)(n-232)(n-233)(n-234)(n-235)(n-236)(n-237)(n-238)(n-239)(n-240)(n-241)(n-242)(n-243)(n-244)(n-245)(n-246)(n-247)(n-248)(n-249)(n-250)(n-251)(n-252)(n-253)(n-254)(n-255)(n-256)(n-257)(n-258)(n-259)(n-260)(n-261)(n-262)(n-263)(n-264)(n-265)(n-266)(n-267)(n-268)(n-269)(n-270)(n-271)(n-272)(n-273)(n-274)(n-275)(n-276)(n-277)(n-278)(n-279)(n-280)(n-281)(n-282)(n-283)(n-284)(n-285)(n-286)(n-287)(n-288)(n-289)(n-290)(n-291)(n-292)(n-293)(n-294)(n-295)(n-296)(n-297)(n-298)(n-299)(n-300)(n-301)(n-302)(n-303)(n-304)(n-305)(n-306)(n-307)(n-308)(n-309)(n-310)(n-311)(n-312)(n-313)(n-314)(n-315)(n-316)(n-317)(n-318)(n-319)(n-320)(n-321)(n-322)(n-323)(n-324)(n-325)(n-326)(n-327)(n-328)(n-329)(n-330)(n-331)(n-332)(n-333)(n-334)(n-335)(n-336)(n-337)(n-338)(n-339)(n-340)(n-341)(n-342)(n-343)(n-344)(n-345)(n-346)(n-347)(n-348)(n-349)(n-350)(n-351)(n-352)(n-353)(n-354)(n-355)(n-356)(n-357)(n-358)(n-359)(n-360)(n-361)(n-362)(n-363)(n-364)(n-365)(n-366)(n-367)(n-368)(n-369)(n-370)(n-371)(n-372)(n-373)(n-374)(n-375)(n-376)(n-377)(n-378)(n-379)(n-380)(n-381)(n-382)(n-383)(n-384)(n-385)(n-386)(n-387)(n-388)(n-389)(n-390)(n-391)(n-392)(n-393)(n-394)(n-395)(n-396)(n-397)(n-398)(n-399)(n-400)(n-401)(n-402)(n-403)(n-404)(n-405)(n-406)(n-407)(n-408)(n-409)(n-410)(n-411)(n-412)(n-413)(n-414)(n-415)(n-416)(n-417)(n-418)(n-419)(n-420)(n-421)(n-422)(n-423)(n-424)(n-425)(n-426)(n-427)(n-428)(n-429)(n-430)(n-431)(n-432)(n-433)(n-434)(n-435)(n-436)(n-437)(n-438)(n-439)(n-440)(n-441)(n-442)(n-443)(n-444)(n-445)(n-446)(n-447)(n-448)(n-449)(n-450)(n-451)(n-452)(n-453)(n-454)(n-455)(n-456)(n-457)(n-458)(n-459)(n-460)(n-461)(n-462)(n-463)(n-464)(n-465)(n-466)(n-467)(n-468)(n-469)(n-470)(n-471)(n-472)(n-473)(n-474)(n-475)(n-476)(n-477)(n-478)(n-479)(n-480)(n-481)(n-482)(n-483)(n-484)(n-485)(n-486)(n-487)(n-488)(n-489)(n-490)(n-491)(n-492)(n-493)(n-494)(n-495)(n-496)(n-497)(n-498)(n-499)(n-500)(n-501)(n-502)(n-503)(n-504)(n-505)(n-506)(n-507)(n-508)(n-509)(n-510)(n-511)(n-512)(n-513)(n-514)(n-515)(n-516)(n-517)(n-518)(n-519)(n-520)(n-521)(n-522)(n-523)(n-524)(n-525)(n-526)(n-527)(n-528)(n-529)(n-530)(n-531)(n-532)(n-533)(n-534)(n-535)(n-536)(n-537)(n-538)(n-539)(n-540)(n-541)(n-542)(n-543)(n-544)(n-545)(n-546)(n-547)(n-548)(n-549)(n-550)(n-551)(n-552)(n-553)(n-554)(n-555)(n-556)(n-557)(n-558)(n-559)(n-560)(n-561)(n-562)(n-563)(n-564)(n-565)(n-566)(n-567)(n-568)(n-569)(n-570)(n-571)(n-572)(n-573)(n-574)(n-575)(n-576)(n-577)(n-578)(n-579)(n-580)(n-581)(n-582)(n-583)(n-584)(n-585)(n-586)(n-587)(n-588)(n-589)(n-590)(n-591)(n-592)(n-593)(n-594)(n-595)(n-596)(n-597)(n-598)(n-599)(n-600)(n-601)(n-602)(n-603)(n-604)(n-605)(n-606)(n-607)(n-608)(n-609)(n-610)(n-611)(n-612)(n-613)(n-614)(n-615)(n-616)(n-617)(n-618)(n-619)(n-620)(n-621)(n-622)(n-623)(n-624)(n-625)(n-626)(n-627)(n-628)(n-629)(n-630)(n-631)(n-632)(n-633)(n-634)(n-635)(n-636)(n-637)(n-638)(n-639)(n-640)(n-641)(n-642)(n-643)(n-644)(n-645)(n-646)(n-647)(n-648)(n-649)(n-650)(n-651)(n-652)(n-653)(n-654)(n-655)(n-656)(n-657)(n-658)(n-659)(n-660)(n-661)(n-662)(n-663)(n-664)(n-665)(n-666)(n-667)(n-668)(n-669)(n-670)(n-671)(n-672)(n-673)(n-674)(n-675)(n-676)(n-677)(n-678)(n-679)(n-680)(n-681)(n-682)(n-683)(n-684)(n-685)(n-686)(n-687)(n-688)(n-689)(n-690)(n-691)(n-692)(n-693)(n-694)(n-695)(n-696)(n-697)(n-698)(n-699)(n-700)(n-701)(n-702)(n-703)(n-704)(n-705)(n-706)(n-707)(n-708)(n-709)(n-710)(n-711)(n-712)(n-713)(n-714)(n-715)(n-716)(n-717)(n-718)(n-719)(n-720)(n-721)(n-722)(n-723)(n-724)(n-725)(n-726)(n-727)(n-728)(n-729)(n-730)(n-731)(n-732)(n-733)(n-734)(n-735)(n-736)(n-737)(n-738)(n-739)(n-740)(n-741)(n-742)(n-743)(n-744)(n-745)(n-746)(n-747)(n-748)(n-749)(n-750)(n-751)(n-752)(n-753)(n-754)(n-755)(n-756)(n-757)(n-758)(n-759)(n-760)(n-761)(n-762)(n-763)(n-764)(n-765)(n-766)(n-767)(n-768)(n-769)(n-770)(n-771)(n-772)(n-773)(n-774)(n-775)(n-776)(n-777)(n-778)(n-779)(n-780)(n-781)(n-782)(n-783)(n-784)(n-785)(n-786)(n-787)(n-788)(n-789)(n-790)(n-791)(n-792)(n-793)(n-794)(n-795)(n-796)(n-797)(n-798)(n-799)(n-800)(n-801)(n-802)(n-803)(n-804)(n-805)(n-806)(n-807)(n-808)(n-809)(n-810)(n-811)(n-812)(n-813)(n-814)(n-815)(n-816)(n-817)(n-818)(n-819)(n-820)(n-821)(n-822)(n-823)(n-824)(n-825)(n-826)(n-827)(n-828)(n-829)(n-830)(n-831)(n-832)(n-833)(n-834)(n-835)(n-836)(n-837)(n-838)(n-839)(n-840)(n-841)(n-842)(n-843)(n-844)(n-845)(n-846)(n-847)(n-848)(n-849)(n-850)(n-851)(n-852)(n-853)(n-854)(n-855)(n-856)(n-857)(n-858)(n-859)(n-860)(n-861)(n-862)(n-863)(n-864)(n-865)(n-866)(n-867)(n-868)(n-869)(n-870)(n-871)(n-872)(n-873)(n-874)(n-875)(n-876)(n-877)(n-878)(n-879)(n-880)(n-881)(n-882)(n-883)(n-884)(n-885)(n-886)(n-887)(n-888)(n-889)(n-890)(n-891)(n-892)(n-893)(n-894)(n-895)(n-896)(n-897)(n-898)(n-899)(n-900)(n-901)(n-902)(n-903)(n-904)(n-905)(n-906)(n-907)(n-908)(n-909)(n-910)(n-911)(n-912)(n-913)(n-914)(n-915)(n-916)(n-917)(n-918)(n-919)(n-920)(n-921)(n-922)(n-923)(n-924)(n-925)(n-926)(n-927)(n-928)(n-929)(n-930)(n-931)(n-932)(n-933)(n-934)(n-935)(n-936)(n-937)(n-938)(n-939)(n-940)(n-941)(n-942)(n-943)(n-944)(n-945)(n-946)(n-947)(n-948)(n-949)(n-950)(n-951)(n-952)(n-953)(n-954)(n-955)(n-956)(n-957)(n-958)(n-959)(n-960)(n-961)(n-962)(n-963)(n-964)(n-965)(n-966)(n-967)(n-968)(n-969)(n-970)(n-971)(n-972)(n-973)(n-974)(n-975)(n-976)(n-977)(n-978)(n-979)(n-980)(n-981)(n-982)(n-983)(n-984)(n-985)(n-986)(n-987)(n-988)(n-989)(n-990)(n-991)(n-992)(n-993)(n-994)(n-995)(n-996)(n-997)(n-998)(n-999)(n-1000)(n-1001)(n-1002)(n-1003)(n-1004)(n-1005)(n-1006)(n-1007)(n-1008)(n-1009)(n-1010)(n-1011)(n-1012)(n-1013)(n-1014)(n-1015)(n-1016)(n-1017)(n-1018)(n-1019)(n-1020)(n-1021)(n-1022)(n-1023)(n-1024)(n-1025)(n-1026)(n-1027)(n-1028)(n-1029)(n-1030)(n-1031)(n-1032)(n-1033)(n-1034)(n-1035)(n-1036)(n-1037)(n-1038)(n-1039)(n-1040)(n-1041)(n-1042)(n-1043)(n-1044)(n-1045)(n-1046)(n-1047)(n-1048)(n-1049)(n-1050)(n-1051)(n-1052)(n-1053)(n-1054)(n-1055)(n-1056)(n-1057)(n-1058)(n-1059)(n-1060)(n-1061)(n-1062)(n-1063)(n-1064)(n-1065)(n-1066)(n-1067)(n-1068)(n-1069)(n-1070)(n-1071)(n-1072)(n-1073)(n-1074)(n-1075)(n-1076)(n-1077)(n-1078)(n-1079)(n-1080)(n-1081)(n-1082)(n-1083)(n-1084)(n-1085)(n-1086)(n-1087)(n-1088)(n-1089)(n-1090)(n-1091)(n-1092)(n-1093)(n-1094)(n-1095)(n-1096)(n-1097)(n-1098)(n-1099)(n-1100)(n-1101)(n-1102)(n-1103)(n-1104)(n-1105)(n-1106)(n-1107)(n-1108)(n-1109)(n-1110)(n-1111)(n-1112)(n-1113)(n-1114)(n-1115)(n-1116)(n-1117)(n-1118)(n-1119)(n-1120)(n-1121)(n-1122)(n-1123)(n-1124)(n-1125)(n-1126)(n-1127)(n-1128)(n-1129)(n-1130)(n-1131)(n-1132)(n-1133)(n-1134)(n-1135)(n-1136)(n-1137)(n-1138)(n-1139)(n-1140)(n-1141)(n-1142)(n-1143)(n-1144)(n-1145)(n-1146)(n-1147)(n-1148)(n-1149)(n-1150)(n-1151)(n-1152)(n-1153)(n-1154)(n-1155)(n-1156)(n-1157)(n-1158)(n-1159)(n-1160)(n-1161)(n-1162)(n-1163)(n-1164)(n-1165)(n-1166)(n-1167)(n-1168)(n-1169)(n-1170)(n-1171)(n-1172)(n-1173)(n-1174)(n-1175)(n-1176)(n-1177)(n-1178)(n-1179)(n-1180)(n-1181)(n-1182)(n-1183)(n-1184)(n-1185)(n-1186)(n-1187)(n-1188)(n-1189)(n-1190)(n-1191)(n-1192)(n-1193)(n-1194)(n-1195)(n-1196)(n-1197)(n-1198)(n-1199)(n-1200)(n-1201)(n-1202)(n-1203)(n-1204)(n-1205)(n-1206)(n-1207)(n-1208)(n-1209)(n-1210)(n-1211)(n-1212)(n-1213)(n-1214)(n-1215)(n-1216)(n-1217)(n-1218)(n-1219)(n-1220)(n-1221)(n-1222)(n-1223)(n-1224)(n-1225)(n-1226)(n-1227)(n-1228)(n-1229)(n-1230)(n-1231)(n-1232)(n-1233)(n-1234)(n-1235)(n-1236)(n-1237)(n-1238)(n-1239)(n-1240)(n-1241)(n-1242)(n-1243)(n-1244)(n-1245)(n-1246)(n-1247)(n-1248)(n-1249)(n-1250)(n-1251)(n-1252)(n-1253)(n-1254)(n-1255)(n-1256)(n-1257)(n-1258)(n-1259)(n-1260)(n-1261)(n-1262)(n-1263)(n-1264)(n-1265)(n-1266)(n-1267)(n-1268)(n-1269)(n-1270)(n-1271)(n-1272)(n-1273)(n-1274)(n-1275)(n-1276)(n-1277)(n-1278)(n-1279)(n-1280)(n-1281)(n-1282)(n-1283)(n-1284)(n-1285)(n-1286)(n-1287)(n-1288)(n-1289)(n-1290)(n-1291)(n-1292)(n-1293)(n-1294)(n-1295)(n-1296)(n-1297)(n-1298)(n-1299)(n-1300)(n-1301)(n-1302)(n-1303)(n-1304)(n-1305)(n-1306)(n-1307)(n-1308)(n-1309)(n-1310)(n-1311)(n-1312)(n-1313)(n-1314)(n-1315)(n-1316)(n-1317)(n-1318)(n-1319)(n-1320)(n-1321)(n-1322)(n-1323)(n-1324)(n-1325)(n-1326)(n-1327)(n-1328)(n-1329)(n-1330)(n-1331)(n-1332)(n-1333)(n-1334)(n-1335)(n-1336)(n-1337)(n-1338)(n-1339)(n-1340)(n-1341)(n-1342)(n-1343)(n-1344)(n-1345)(n-1346)(n-1347)(n-1348)(n-1349)(n-1350)(n-1351)(n-1352)(n-1353)(n-1354)(n-1355)(n-1356)(n-1357)(n-1358)(n-1359)(n-1360)(n-1361)(n-1362)(n-1363)(n-1364)(n-1365)(n-1366)(n-1367)(n-1368)(n-1369)(n-1370)(n-1371)(n-1372)(n-1373)(n-1374)(n-1375)(n-1376)(n-1377)(n-1378)(n-1379)(n-1380)(n-1381)(n-1382)(n-1383)(n-1384)(n-1385)(n-1386)(n-1387)(n-1388)(n-1389)(n-1390)(n-1391)(n-1392)(n-1393)(n-1394)(n-1395)(n-1396)(n-1397)(n-1398)(n-1399)(n-1400)(n-1401)(n-1402)(n-1403)(n-1404)(n-1405)(n-1406)(n-1407)(n-1408)(n-1409)(n-1410)(n-1411)(n-1412)(n-1413)(n-1414)(n-1415)(n-1416)(n-1417)(n-1418)(n-1419)(n-1420)(n-1421)(n-1422)(n-1423)(n-1424)(n-1425)(n-1426)(n-1427)(n-1428)(n-1429)(n-1430)(n-1431)(n-1432)(n-1433)(n-1434)(n-1435)(n-1436)(n-1437)(n-1438)(n-1439)(n-1440)(n-1441)(n-1442)(n-1443)(n-1444)(n-1445)(n-1446)(n-1447)(n-1448)(n-1449)(n-1450)(n-1451)(n-1452)(n-1453)(n-1454)(n-1455)(n-1456)(n-1457)(n-1458)(n-1459)(n-1460)(n-1461)(n-1462)(n-1463)(n-1464)(n-1465)(n-1466)(n-1467)(n-1468)(n-1469)(n-1470)(n-1471)(n-1472)(n-1473)(n-1474)(n-1475)(n-1476)(n-1477)(n-1478)(n-1479)(n-1480)(n-1481)(n-1482)(n-1483)(n-1484)(n-1485)(n-1486)(n-1487)(n-1488)(n-1489)(n-1490)(n-1491)(n-1492)(n-1493)(n-1494)(n-1495)(n-1496)(n-1497)(n-1498)(n-1499)(n-1500)(n-1501)(n-1502)(n-1503)(n-1504)(n-1505)(n-1506)(n-1507)(n-1508)(n-1509)(n-1510)(n-1511)(n-1512)(n-1513)(n-1514)(n-1515)(n-1516)(n-1517)(n-1518)(n-1519)(n-1520)(n-1521)(n-1522)(n-1523)(n-1524)(n-1525)(n-1526)(n-1527)(n-1528)(n-1529)(n-1530)(n-1531)(n-1532)(n-1533)(n-1534)(n-1535)(n-1536)(n-1537)(n-1538)(n-1539)(n-1540)(n-1541)(n-1542)(n-1543)(n-1544)(n-1545)(n-1546)(n-1547)(n-1548)(n-1549)(n-1550)(n-1551)(n-1552)(n-1553)(n-1554)(n-1555)(n-1556)(n-1557)(n-1558)(n-1559)(n-1560)(n-1561)(n-1562)(n-1563)(n-1564)(n-1565)(n-1566)(n-1567)(n-1568)(n-1569)(n-1570)(n-1571)(n-1572)(n-1573)(n-1574)(n-1575)(n-1576)(n-1577)(n-1578)(n-1579)(n-1580)(n-1581)(n-1582)(n-1583)(n-1584)(n-1585)(n-1586)(n-1587)(n-1588)(n-1589)(n-1590)(n-1591)(n-1592)(n-1593)(n-1594)(n-1595)(n-1596)(n-1597)(n-1598)(n-1599)(n-1600)(n-1601)(n-1602)(n-1603)(n-1604)(n-1605)(n-1606)(n-1607)(n-1608)(n-1609)(n-1610)(n-1611)(n-1612)(n-1613)(n-1614)(n-1615)(n-1616)(n-1617)(n-1618)(n-1619)(n-1620)(n-1621)(n-1622)(n-1623)(n-1624)(n-1625)(n-1626)(n-1627)(n-1628)(n-1629)(n-1630)(n-1631)(n-1632)(n-1633)(n-1634)(n-1635)(n-1636)(n-1637)(n-1638)(n-1639)(n-1640)(n-1641)(n-1642)(n-1643)(n-1644)(n-1645)(n-1646)(n-1647)(n-1648)(n-1649)(n-1650)(n-1651)(n-1652)(n-1653)(n-1654)(n-1655)(n-1656)(n-1657)(n-1658)(n-1659)(n-1660)(n-1661)(n-1662)(n-1663)(n-1664)(n-1665)(n-16666$			

i v sesazení Bolzanově v roce 1819. Stačí připomenout lavinu udání, když Bolzano odmítal přednášet bez úprav podle schválené Frintovy učebnice náboženství, která obsahovala chyby. Přátelský vztah Jandery a Bolzana možná dokresluje následující skutečnost: Od roku 1808 byl direktorem filosofických studií na pražské universitě strahovský opat Milo Grun, tedy Janderův řeholní představený, který Bolzana hájil a povolil mu přednášet podle osobního přesvědčení. Po Grunově smrti 1816 však jeho nástupce prohlásil Bolzanovy výklady za zhoubné a netrvalo dlouho a Bolzano byl penzionován.

Pro Janderův kurs byla doporučenou literaturou učebnice Ignáce Appeltauera. Jandera ji respektuje tematicky, ale uvědomuje si její nedostatky. U Appeltauera chybí jednoznačné vymezení matematických pojmů, u obtížnějších partií je patrné, že je autor přejímá odjinud bez hlubšího pochopení. Janderovou devizou během celého půlstoletého působení je podle svědectví jeho žáků (např. J. Durdík) jasnost a srozumitelnost přednášek. Preciznost výkladu ilustruje Janderova vlastní latinsky psaná učebnice *Prima calculi exponentialis elementa nova partim methodo in usum auditorum suorum proposita* [1] z roku 1812. Pod hlavičkou „exponenciálního kalkulu“ se skrývá středoškolská algebra, ovšem důkladně vybudovaná ve stylu definice – věta – důkaz s akribií připomínající výklady Jarníkovy. Jandera nejdříve mapuje vlastnosti přirozených čísel, studuje prvočísla, upozorňuje na specifika zápisu čísel v dekadické soustavě.

Tabula haec pertinet ad §. 87. de elevandis numeris ad potentias⁸, pag. 96.

$$\begin{aligned}
 (a+b+c+d+\dots)^n &= a^n \pm n \cdot a^{n-1} \times b \pm \frac{n \cdot (n-1)}{1, 2} a^{n-2} \times b^2 \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1, 2, 3} a^{n-3} \times b^3 \pm \dots \\
 &\pm n(a+b)^{n-1} \times c \pm \frac{n(n-1)}{1, 2} (a+b)^{n-2} \times c^2 \pm \frac{n(n-1) \cdot (n-2)}{1, 2, 3} (a+b)^{n-3} \times c^3 \pm \dots \\
 &\pm n(a+b+c)^{n-1} \times d \pm \frac{n(n-1)}{1, 2} (a+b+c)^{n-2} \times d^2 \pm \frac{n(n-1) \cdot (n-2)}{1, 2, 3} (a+b+c)^{n-3} \times d^3 \pm \dots \\
 &\text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Obr. 2: Ukázka odvození n -té mocniny mnohočlenu v [1]

Těžištěm kapitoly *De numeris exponentialibus* je exaktní zavedení mocniny čísla nejprve jako označení pro součin konečného počtu stejných činitelů v případě přirozeného exponentu, poté zobecnění pro záporný celý exponent. Případ s exponentem ve tvaru převrácené hodnoty přirozeného čísla n , tj. n -tou odmocninu, definuje jako kořen příslušné rovnice, tedy *radix gradus n-ti ex A*, a proto na rozdíl od současných zvyklostí doporučuje značení r , „signum r e litera r raptim scripta“, tj. písmenem „ r “ chvatně psaným. Při této příležitosti vyloží též rozdíl mezi čísly racionálními a iracionálními. V kapitole *De logarithmis* využije připravenou teorii k definici logaritmu čísla při libovolném přípustném základu jako exponentu a tvrzení pro logaritmy pak získá jako důsledek formulí z předchozí kapitoly. Půvabná je Janderova zmínka o etymologii slova logarithmus z řeckého *logón arithmos* (volně přeloženo „číslo dávající smysl“). Kapitola *De elevatione numerorum ad potentias* rozvíjí předchozí myšlenky směrem k početnímu kalkulu a odvozování algebraických formulí. Je důkladně dokázána binomická věta (indukcí – viz obr. 1), poté zobecněna postupně pro celý záporný exponent (zde je komentován nekonečný počet členů rozvoje a náznakově zmíněna konvergence této řady). Jiné zobecnění binomické věty se týká n -té mocniny mnohočlenu o libovolném konečném počtu sčítanců. I toto tvrzení je dokázáno indukcí, tentokrát přes počet sčítanců (viz obr. 2). Tyto formule umožňují v kapitole *De extractione radicum* vybudovat

algoritmy, jejichž význam byl dnes potlačen užíváním výpočetní techniky. Právě z věty o n -té mocnině mnohočlenu odvozuje Jandera numerický postup aproximace n -té odmocniny libovolného zadaného čísla. Početní příklady uvedené v textu se pohybují od druhé do šesté odmocniny, odmocněnec bývá někdy i číslo devíticiferné.

Dokladem, že tyto partie učebního textu se výrazně uplatňovaly i při výuce, svědčí vlastní rukopisy Janderových přednášek [2] z roku 1853, kdy vedl pokročilý kurs z diferenciálního a integrálního počtu. Při výpočtu integrálu z převrácené hodnoty odmocniny dvojčlenu krom přímé integrace upozorňuje na možnost aproximovat integrand s využitím zobecněného binomického rozvoje z [1].

Když v 90. letech minulého století klášterní knihovna restituovala pozůstalosti příslušníků strahovské kanonie, ve fondu Literárního archivu PNP v Praze zůstaly Janderovy materiály v rozsahu sedmi kantonů. Podle popisu [4] provedeného v 70. letech Pavlem Křivským obsahují další universitní přednášky, matematické spisy a zejména Sbírku úloh z matematiky [3]. Tato Sbírka však ve skutečnosti není cvičebnicí, jak by naznačovalo Křivského označení, ale souborem více než 1600 volných lístků osmerkového formátu se zadáním příkladů, které byly patrně užívány při zkouškách. Soubor zjevně pokrývá celou dobu Jandera působení, zadání jsou zpočátku v latině, později v němčině. Počet úloh kolísá mezi 4 a 5. Tematicky se pohybují v oblasti současné středoškolské matematiky, náročnost početních příkladů je však výrazně vyšší. Na rozdíl od současné doby se testuje schopnost provádět numerické postupy, kterým je věnována tak velká pozornost v [1] (aproximace odmocnin, práce s logaritmy etc.). Velmi často jsou zadávány soustavy 2 lineárních, resp kvadratických i iracionálních rovnic o 2 neznámých v závislosti na 2 nebo 3 parametrech. Vyskytují se příklady na geometrickou posloupnost, binomickou formuli i požadavek dokázat algebraické tvrzení. I to je důkazem nezanedbatelné míry matematického vzdělání typického absolventa university té doby bez ohledu na obor studia, byť pouze v oblasti početní zdatnosti.

Literatura

- [1] Jandera L. J.: *Prima calculi exponentialis elementa nova partim methodo in usum auditorum suorum proposita*. Pragae, 1812.
- [2] Jandera L. J.: *Vorlesungen uber Mathematik in Sommersemester 1853*. [Rukopis je v majetku Královské kanonie premonstrátů na Strahově.]
- [3] Jandera L. J.: *Sbírka úloh z matematiky*. [Rukopis je v majetku Literárního archivu PNP v Praze.]
- [4] Křivský P.: *Písemná pozůstalost – Ladislav Jandera (1776–1857)*. Literární archiv PNP v Praze, Praha, 1976.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky VŠE
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: otavova@vse.cz

TŘI ROKY VĚZÍM V DĚLITELNOSTI

KAREL PAZOUŘEK

Abstract: Divisibility of numbers and polynomials can be found to be an uncomplicated part of secondary education of mathematics. However it faces some didactical problems. We show especially a problem of existence of integer factorization and termination of Euclidean algorithm.

1 Úvod

Dělitelnost je obvykle prezentována jako jednoduchá a základní partie středoškolské matematiky. Po tříletém studiu dělitelnosti jsem dospěl k názoru, že toto tvrzení je pravdivé pouze částečně. V následujícím textu si představíme několik bodů, ve kterých se střetává didaktická a teoretická stránka dělitelnosti.

2 Induktivní charakter dělitelnosti a jiné nesnáze

2.1 Dva přístupy k dělitelnosti

Dělitelnost (přirozených) čísel je v českých středoškolských učebnicích vystavěna vesměs následovně: Začíná se s pojmem dělitelnosti, dělitele a násobku. Poté se dokazují základní tvrzení (např. o dělitelnosti součtu a rozdílu). Zavádí se pojmy prvočíslo, složené číslo, společný násobek, společný dělitel, soudělná a nesoudělná čísla. Další možný postup je dvojí. Buď je uveden prvočíselný rozklad, nebo Eukleidův algoritmus.

Použití prvočíselného rozkladu se zdá být názornější. Dělitele a násobky sestavujeme z příslušných činitelů pomocí násobení. Snadno se i ověří vztah

$$NSD(a;b) \cdot NSN(a;b) = ab, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Rovněž můžeme snadno popsat počet dělitelů daného čísla.

Oproti tomu Eukleidův algoritmus vychází z dělení, tedy základního procesu dělitelnosti. Dělení tak lze prostřednictvím Eukleidova algoritmu opakovat a upevňovat. Eukleidův algoritmus pro polynomy umožňuje procvičovat dělení polynomů. Pokud počítáme příklady, ve kterých volíme vhodné celočíselné násobky dělenců a dělitelů v různých krocích algoritmu, ukazujeme na rozdíl mezi dělitelností přirozených čísel a polynomů – nejednoznačnost největšího společného dělitele. Zobecníme-li dále algoritmus i pro délku úseček (jak naznačil Hora [3]), dospějeme se k nesoudělnosti (a odtud i k iracionálním a racionálním číslům; tento směr však v učebnicích není ani naznačen).

2.2 Induktivní charakter pojmů dělitelnosti

V učebnicích vydaných do první poloviny 20. století jsou často prezentovány oba postupy. Je však třeba si uvědomit, že je tak činěno s úmyslným zamlčením induktivní povahy obou postupů: indukce (popř. dobré uspořádání přirozených čísel) u Eukleidova algoritmu zaručuje konečnost algoritmu, u prvočíselného rozkladu jeho existenci.

Konečnost Eukleidova algoritmu komentuje například Šimerka [4]: *Dělení takové musí se jednou ukončiti; poněvadž každý zbytek menší jest než dělitel jemu náležící, tak že čísla ta stále klesají a zápornými státi se nemohou.* (str. 56)

Hora [3] nastínil konečnost algoritmu takto: ... *jest patrné, že při takovémto dělení některý zbytek musí se rovnati nulle, poněvadž jest zbytek pokaždé číslo celistvé a nejméně o 1 menší nežli dělitel, jenž byl zbytkem předešlým.* (str. 46)

Existence prvočíselného rozkladu plyne z existence prvočíselného dělitele libovolného čísla a jeho opakovaném hledání. A právě v tomto opakování je indukce schována. Stejně jako Šimerka uvedl u Eukleidova algoritmu, můžeme konstatovat, že opakované hledání prvočíselného dělitele se zastaví, protože tento dělitel je vždy (až na poslední krok, kdy hledáme prvočíselný dělitel prvočísla) menší než samo číslo a dělitel záporný být nemůže. Jiné zdůvodnění se může opírat o dobré uspořádání přirozených čísel, ostatně poznámky v tomto smyslu se v některých algebrách vyskytují. Například Hora [3] napsal: *Každé složené číslo možná rozvésti aspoň na dva činitele; jsou-li to čísla složená, lze je opět rozvésti na činitele, kteřížto jsou buď již prvočísla aneb opět čísla složená; pokračujeme-li v posledním případě v rozvádění, musíme posléz obdržeti pouhé prvočinitele. Kdyby bylo jinak, muselo by dané číslo se skládati z nekonečného množství činitelů vesměs větších nežli 1, muselo by tedy samo býti nekonečné, což se neshoduje s podmínkou.* (str. 43–44).

2.3 Dělitelnost polynomů dvou proměnných

Dělitelnost polynomů byla běžně probírána v učebnicích pro vyšší oddělení gymnázií, reálných gymnázií a reálků v 19. století a na začátku 20. století. Postupně však ustupovala do pozadí. Přitom dělení polynomů a některé metody řešení algebraických rovnic lze pomocí dělitelnosti názorně dokreslit.

Zajímavé příklady k Eukleidovu algoritmu z teoretického a didaktického hlediska nalezneme ve Fleischerově algebře [2]. Hledá se zde největší společný dělitel polynomů dvou proměnných, např. $x^3 - ax^2 + 3a^2x - 3a^3$ a $x^2 - 5ax + 4a^2$. Z teorie ale víme, že obecně v oboru polynomů dvou proměnných nemusí Eukleidův algoritmus pro dva dané polynomy vést k nalezení jejich největšího společného dělitele.

2.4 Dělitelnost z paměti

V učebnicích pro nižší oddělení středních škol se vyskytují příklady na počítání z paměti. V Mukově učebnici [4] se hledají například nejmenší společné násobky dvojic (např. 5 a 12, 5 a 15, ale i 32 a 48, 20 a 45), trojic (např. 2, 3 a 7; 9, 18, a 54; 8, 12 a 18), čtveřic, pětic, šestic (např. 2, 3, 4, 6 a 8), a dokonce jedné sedmice (např. 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15). Z paměti se zde zkoumá soudělnost dvojic, trojic i čtveřic (např. 35, 49, 70, 84) čísel, největší společný dělitel dvojic a trojic čísel (např. 18, 45, 63).

V některých učebnicích není výslovně značeno, že se mají dané úlohy řešit z paměti, lze však o nich tak soudit z jejich umístění mezi prvními cvičeními a použitím malých čísel. V učebnicích určených pro vyšší oddělení škol se počítání z paměti v dělitelnosti neobjevuje.

2.5 Možný kompromis mezi teorií a praxí

Zajímavý přístup k otázce, zda vykládat dělitelnost více prakticky než teoreticky, je zvolen v učebnici [1]. Ve výkladu prvočíselného rozkladu je konstatováno: *Je patrné, že*

tak můžeme rozložit každé číslo na prvočinitele. Dá se dokázat, že dojdeme vždy k témuž výsledku, i když rozklad provádíme různými způsoby (viz o tom čl. 7). (str. 17) Tedy existence rozkladu je pokládána za samozřejmou.

Článek 7. *Jednoznačnost rozkladu na prvočinitele* v závěru kapitoly o dělitelnosti je glosován poznámkou pod čarou: *V tomto článku dokážeme jednoznačnost rozkladu na prvočinitele. Je určen pro ty žáky, které zajímá přesné matematické usuzování, a může být při vyučování vynechán. (str. 35)* Po čtyřech tvrzeních o násobcích a společných násobcích jsou zde vyslovena a dokázána tři tvrzení o prvočíslech:

Jestliže ani číslo a , ani číslo b není násobkem prvočísla p , potom také součin ab není násobkem prvočísla p . (str. 37)

Jestliže žádné z čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ není násobkem prvočísla p , potom také součin všech čísel ... není násobkem prvočísla p . (str. 38)

Žádné číslo se nedá dvěma různými způsoby rozložit na prvočinitele, jestliže ovšem rozklady, které se liší pouze pořádkem činitelů, např.

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 60 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2,$$

považujeme za dva stejné rozklady. (str. 38)

Tvrzení v této učebnici jsou nazývána *poučky*.

3 Závěr

Mlčení o matematické indukci má zjevně didaktický důvod: Je to idea příliš složitá pro žáky úvodních ročníků, ať už nižšího nebo vyššího gymnázia, ve kterých se dělitelnost probírá. Stejně tak se bere jako samozřejmost dobré uspořádání přirozených čísel.

Rovněž hlavní význam dělitelnosti (a teorie čísel vůbec) ve středoškolské matematice je viděn v podpoře dalších oblastí – především práce se zlomky a lomenými výrazy. Protože je toto téma pro žáky relativně snadno přístupné, používají se poznatky dělitelnosti k demonstraci důkazových metod – paradoxně se základní kámen dělitelnosti, prvočíselný rozklad, vykládá bez důkazu existence.

Dělitelnost považujeme často za nezajímavé téma, ale s odstupem a nadhledem se mohou díky ní před námi vynořit znepokojivé didaktické otázky. Můj odstup a nadhled si vyžádal tři roky.

Literatura

- [1] Bílek J. a kol.: *Aritmetika pro čtvrtou třídu středních škol*. SPN, Praha, 1949.
- [2] Fleischer J.: *Mathematika. První díl. Algebra*. K. Winiker, Brno, 1862.
- [3] Hora F. A.: *Dra Frant. Ryt. Močníka aritmetika i algebra pro vyšší třídy škol středních*. B. Tempský, Praha, 1875.

- [4] Muk J.: *Doplňek k aritmetice pro nižší třídy středních škol*, k 4. vyd. dílu 1. Profesorské nakladatelství a knihkupectví, Praha 1934.
- [5] Šimerka V.: *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia a realné školy*. E. Grégr, Praha, 1868.

Poděkování

Práce vznikla v rámci projektu *Specifického vysokoškolského výzkumu* 2010-261 315.

Adresa

Mgr. Karel Pazourek
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: pazourek@karlin.mff.cuni.cz

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ: UNIVERZÁLNÍ ŘEČ

DAVID PELIKÁN

Abstract: This article reports about Leibniz's attemption to create new language that would be easy, popular and that contains syntactic method how to verify the true sentences. Leibniz created sufficient theory how to make the language, but it was too difficult to use it. In spite of that difficulty we can show some great ideas in his attemption.

1 Historické pozadí

1.1 Leibnizova univerzální řeč

Leibniz se narodil v roce 1646, v době zvýšeného zájmu vzdělců o jazyk, avšak rovněž v době, kdy se jiní velcí učenci¹ snažili vytvořit jazyk umělý. Také u Leibnize je patrný zájem o vytvoření nové řeči. Text [1], ze kterého v tomto článku budu vycházet, sepsal Leibniz v roce 1678, i když však později tuto myšlenku opustil, i nadále se snažil vytvořit univerzální řeč na jiném základu.

1.2 Gödelovo číslování

Když v roce 1931 v [2] Kurt Gödel zavedl číslování formulí aritmetiky přirozenými čísly, jednalo se o významnou část jeho důkazu *vět o neúplnosti*. Dnes podobné kódování používáme například pro kódování konečných posloupností přirozených čísel. Jak si však ukážeme později, podobné myšlenky byly k nalezení už v práci Leibnizově.

2 Univerzální řeč

1.3 Požadavky na novou řeč

Když se Leibniz snažil vytvořit novou řeč, kladl na ni několik požadavků. Některé požadavky jsou zcela přirozené. Mezi ně patří, že se tato řeč musí dát lehce naučit, lehce používat, lehce zapamatovat, ale také že musí být příjemná a po všech stránkách dokonalá. Kromě těchto požadavků měl však ještě jeden neobvyklý. Tímto požadavkem bylo, že tento jazyk musí obsahovat metodu na rozpoznávání pravdivých vět a platných úsudků.² Pro tento požadavek Leibniz našel inspiraci v jazyce matematiky. Všimá si, že v jazyce matematiky nelze říci větu, která není pravdivá (dokazatelná), protože přímo v jazyce matematiky existuje postup, jak ověřit její pravdivost. Věta, u které se tato pravdivost nedá ověřit, se pak říci nesmí.

Aby bylo možné dosáhnout požadavků, které Leibniz měl, bylo by nutné zobrazit přirozený svět přímo ve struktuře této nové řeči. Leibniz se toho snažil dosáhnout pomocí charakteristických čísel.

¹ Například Francis Bacon nebo René Descartes.

² Je zřejmé, že Leibniz uvažuje metodu, která používá čistě syntaktických prostředků.

1.4 Vytváření nové řeči

Jak bylo řečeno výše, Leibniz nejprve potřeboval přiřadit všem pojmům reálného světa nějaké charakteristické číslo. Tato čísla ale nemohou být vybírána náhodně. Je důležité rozlišovat základní pojmy a pojmy složené.³ Základním pojmům musí být přiřazeny prvočísla, pojmům složeným pak čísla složená. Přičemž číslo, kterým bude charakterizován nějaký složený pojem, se získá tak, že se vynásobí čísla těch základních pojmů, ze kterých se výsledný pojem skládá. To například znamená, že pojem s charakteristickým číslem 969 musí mít vlastnost s charakteristickým číslem 51, a i tato vlastnost se musí skládat z jiných vlastností s charakteristickými čísly 3 a 17. Přiřazení základních pojmů k prvočísłům si Leibniz představoval tak, že se vytvoří jakási encyklopedie. O ní se vyjádřil: „Myslím, že by to mohlo urobiť niekoľko vybraných ľudí za päť rokov; za dva roky by bezpečnou metódou kalkulu mohli spracovať tie náuky, ktoré sú v praktickom živote nejpotrebnějšíe, totiž morálku a metafyziku.“⁴

Další části procesu vytváření této řeči už Leibniz rozpracoval více podrobně. Některé dokonce v několika variantách. Dále se budu věnovat pouze jedné z těchto variant.

V okamžiku, kdy by byly všechny pojmy světa charakterizovány nějakým číslem, bylo by možné mluvit jen v těchto číslech. Leibniz si ale uvědomuje, že mluvit v číslech je velmi nepohodlné. Proto navrhl čtení čísel jiným způsobem tak, aby jejich čtení bylo více příjemné. Leibniz si uvědomuje, že každé číslo zapsané v desítkové soustavě⁵ je přesně určeno svými ciframi, a každá cifra je přesně určena svým řádem a číslicí. To znamená, že stačí najít způsob, jak jednoduše přečíst řád a číslici každé cifry. Leibniz to řeší následujícím způsobem: každé z číslic 1 až 9 přiřadí jednu souhlásku (b, c, ..., m). Stejným způsobem řádu jednotek přiřadí samohlásku *a*, řádu desítek samohlásku *e*, obdobně pak řádům stovek, tisíců a desetitisíců samohlásky *i*, *o*, *u*. Pokud by bylo potřeba, tak pro vyšší řády Leibniz navrhuje použití dvojhásek.⁶ V tomto okamžiku je každá cifra přesně určena dvojicí hlásek. Každá dvojice hlásek pak tvoří slabiku. To znamená, že každá slabika určuje jednu cifru, a naopak každá cifra určuje jednu slabiku.⁷ Pokud ze všech slabik, které získáme z jednotlivých cifer daného čísla, utvoříme slovo,⁸ utvořili jsme vlastně kratší a jednodušší způsob, jak dané číslo přečíst.⁹

Posledním a zásadním procesem při vytváření nové řeči je vytvoření kalkulu, pomocí kterého by bylo možné ověřovat platnost úsudků. Leibniz jako ukázkou předvádí jednoduchý kalkul pro obecné kladné výroky.⁹ Tento kalkul pracuje se třemi základními

³ Na tomto místě je potřeba říci, že Leibniz zastává teorii, že každý pojem je jednoznačně určen několika (konečně mnoha) základními pojmy (vlastnostmi). Tyto základní pojmy jsou dále nedělitelné.

⁴ Překlad Ján Šebestík v [3].

⁵ Odkaz na desítkovou soustavu je zcela na místě, protože Leibniz uvažoval i o použití jiných číselných soustav, pokud by byly vhodnější než soustava desítková.

⁶ Pro podrobnější vysvětlení viz [3].

⁷ Přičemž na pořadí jednotlivých slabik nezáleží.

⁸ Je zřejmé, že bez použití dvojhásek lze takto číst jen čísla od 1 do 99 999. S použitím dvojhásek se jejich počet zvětší. I přesto se může zdát, vzhledem ke způsobu jakým vytváří charakteristická čísla pojmů, že takto lze číst pouze čísla nedostatečně velká. Myslím, že tato námitka je oprávněná, Leibniz ji však neuvažuje.

⁹ Obecnými kladnými výroky v tomto případě jsou myšleny výroky typu „*a* je *b*“, kde *a* a *b* jsou nějaké pojmy, které pro tento případ můžeme ztotožnit s jejich charakteristickými čísly. Obdobně ve větě „*ab* je *c*“ pojem *ab* znamená pojem složený z pojmů *a* a *b*.

větami (dnes bychom řekli se třemi axiomy) a jedním základním úsudkem (dnes bychom řekli s jedním odvozovacím pravidlem). Základní věty jsou: „ ab je a “; „ ba je a “;¹⁰ „ a je a “. Základním úsudkem je pak: Jestliže „ a je b “ a „ b je c “, tak „ a je c “. Pomocí těchto základních pravidel pak generuje platné úsudky.¹¹

Dá se tedy říci, že i když Leibniz nedokázal vytvořit řeč, která by splňovala ty podmínky, které si stanovil,¹² objevil několik zajímavých myšlenek. Především pokus o aplikaci formálního kalkulu v oblasti ověřování platnosti úsudků, ale také jakési „kódování“ objektů přirozeného světa přirozenými čísly.

3 Gödelovo číslování

1.5 Kódování v jazyce aritmetiky

Pro potřeby důkazu vět o neúplnosti Kurt Gödel potřeboval zakódovat formule predikátové logiky, rozšířené o jazyk aritmetiky, pomocí přirozených čísel. Toto kódování provedl následujícím způsobem.

Nejprve se rozhodl, jaké symboly v zápisu formule bude považovat za základní, a které vezme jako odvozené. To například znamená, že nebude používat symbol „ $\rightarrow$ “ pro implikaci, protože jej může odstranit pomocí symbolů pro disjunkci a negaci.¹³ Dále si všimá, že zápis každé formule aritmetiky je konečnou posloupností symbolů. A to buď symbolů pro logické konstanty, nebo pro proměnné některého typu.¹⁴ Protože logických konstant je pouze konečně mnoho a proměnných každého typu je nejvýše spočetně mnoho, lze každému symbolu přiřadit nějaké přirozené číslo. Gödel přiřazuje logickým konstantám lichá čísla od 1 do 13 a proměnným n -tého typu n -té mocniny prvočísel větší než 13. V tomto okamžiku může kódovat jakoukoli formuli (transformovanou tak, aby obsahovala jen povolené symboly) jako konečnou posloupnost nenulových přirozených čísel. Každá konečná posloupnost přirozených čísel lze zakódovat přirozeným číslem. Gödel ji kóduje následujícím způsobem. Nejprve každé pozici přiřadí odpovídající prvočíslo. To znamená, že k první pozici přiřadí první prvočíslo, ke druhé pozici druhé prvočíslo a k n -té pozici n -té prvočíslo. Následně všechna prvočísla umocní na číslo na odpovídající pozici a tyto mocniny mezi sebou vynásobí. Například jednoduchá formule „ $s(0)=0$ “ lze napsat jako posloupnost „3; 11; 1; 13; 289; 1“¹⁵, která může být kódována číslem $2^3 \cdot 3^{11} \cdot 5^1 \cdot 7^{13} \cdot 11^{289} \cdot 13^1$. To je rovno přibližně $8,186 \cdot 10^{319}$.

Pro potřeby důkazu vět o neúplnosti je podstatné, že celé toto kódování lze provést uvnitř aritmetiky. Z hlediska našeho srovnání je však zajímavé to, že Gödel přiřazuje

¹⁰ Je zajímavé, že ačkoli Leibniz vytváří charakteristická čísla pomocí neuspořádaného výčtu vlastností, pro potřeby kalkulu rozlišuje pořadí jednotlivých složek.

¹¹ Pro podrobnější vysvětlení a ukázkou odvození úsudku viz [3].

¹² I kdyby byla takto vytvářená řeč realizovatelná, byl by výsledek příliš složitý pro jakékoli (natož běžné) použití.

¹³ Toto omezení jen na jednodušší sadu logických konstant není důležité z hlediska vlastního kódování. Jeho význam spočívá pouze v zjednodušení vlastního teoretického aparátu.

¹⁴ Gödel používá syntax víceřádové predikátové logiky. To znamená, že proměnné prvního typu jsou individuové proměnné, proměnné druhého typu jsou prvořádové predikáty, proměnné třetího typu jsou druhořádové predikáty atd.

¹⁵ Gödel neuvažuje „ $=$ “ mezi základními konstantami, ale jako proměnnou druhého typu, kterou definuje pomocí druhořádové definice. Více viz [2].

každému znaku nějaké prvočíslo (mocninu prvočísla) a výsledný kód formule pak získá jejich vynásobením.

4 Závěr

1.6 Shrnutí

V tomto článku jsem se pokusil rámcově představit jeden z pokusů o vytvoření univerzálního jazyka. V rámci tohoto pokusu Leibniz vytvořil poměrně rozsáhlý teoretický aparát, jenž je zajímavý zejména pro vytvoření kalkulu generujícího pravdivé věty,¹⁶ a také pro pokus o číslování objektů reálného světa přirozenými čísly.

Dále jsem se pokusil ukázat na zajímavou schodu mezi Leibnizovým číslováním objektů reálného světa a Gödelovým číslováním formulí predikátové logiky. V obou případech se pomocí prvočísel kódují základní pojmy, případně konkrétní znak. Jejich vynásobením lze následně získat příslušný složený pojem případně konkrétní formuli.

Literatura

- [1] Leibniz G. W.: *Lingua generalis, Lingua universalis*. Opusculs et fragments inédits de Leibniz, par Louis Couturat, Paris, 1903.
- [2] Gödel K.: *On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems 1*. Collected works vol. 1, Oxford university Press, New York, 1986.
- [3] Leibniz G. W.: *O reforme vied*. Přeložil Ján Šebestík, Vydavateľstvo slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1956.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*.

Adresa

Mgr. David Pelikán
Katedra filozofie
Fakulta filozofická
Západočeská univerzita v Plzni
Sedláčkova 19
306 14 Plzeň
e-mail: pelikand@kfi.zcu.cz

¹⁶ Ve skutečnosti se nejedná o věty, pouze o jakési předchůdce formálních zápisů. Aby mohl tento kalkul generovat pravdivé věty, musela by být provedena charakterizace objektů reálného světa.

KAZIMIERZ ŻORAWSKI AND THE CRACOW MATHEMATICAL SCHOOL

ZDZISŁAW POGODA

Abstract: Kazimierz Żorawski was one of greatest mathematicians working in Cracow (Kraków) at the end of the XIXth century. We will review Żorawski's most important results, in particular those in geometry, published, forgotten and then rediscovered. We will pay attention to the significance of his activities in Cracow and their influence on the development of the Cracow center and of mathematics in Poland.



Kazimierz Żorawski
22.06.1866 – 23.01.1953

In between the wars two strong mathematical centres were created in Poland:

- Lvov where then new functional analysis was being developed. Among the most prominent representatives we should mention Hugo Steinhaus, Stefan Banach, Stanisław Mazur, Juliusz P. Schauder, and Stanisław Ulam.
- Warsaw where the foundations of mathematics, topology and the theory of real functions were the main domains of research. Zygmunt Janiszewski, Wacław Sierpiński, Stefan Mazurkiewicz, Kazimierz Kuratowski, and Karol Borsuk worked at that time in Warsaw.

Then we should mention Kraków (Cracow) where the classical domains such as mathematical analysis (calculus) and theory of differential equations were preferred as research topics. Stanisław Zaremba, after his studies in Paris, settled there and worked on

mathematical analysis and differential equations. However, even earlier in 1895, Kazimierz Żorawski, whose main interest was differential geometry, began his scientific work in Cracow.

Topology, set theory, theory of differential equations, mathematical analysis and foundations of mathematics are commonly mentioned as the parts of mathematics developed by Poles. Differential geometry is rarely if at all mentioned although the results obtained by Polish mathematicians are of fundamental and durable importance. Topology and set theory were singled out by Zygmunt Janiszewski as young domains giving chances of quickly obtaining important and valuable results, which was vital to the rapid development of Polish mathematics. Functional analysis was being developed in Lvov due to Steinhaus and Banach, and their students.

Differential geometry in its classical version of the theory of curves and surfaces was a mature discipline, but its generalized version was not certain of its direction of development. Some results later included in differential geometry, firstly, were considered as results of the theory of differential equations or analysis. Although differential geometry was not among the leading domains studied by Polish mathematicians, some of the first major results obtained by Poles belonged to differential geometry. Kazimierz Żorawski was their author. His activities had a major influence on the development of the Cracow centre at the Jagiellonian University.

Kazimierz Żorawski was born on 22nd June 1866 in Szczurzyn (not Szczuczyn as all his biographical notes say) in Ciechanów district. From 1884 to 1888 he studied at the Warsaw University (then a Russian university) obtaining a Russian equivalent of a Ph.D. degree in mathematics for a treatise in astronomy. Thanks to a Copernicus scholarship he studied mathematics at Leipzig and Göttingen for three years. At Leipzig he met Sophus Lie who then was developing the theory of continuous groups, later called the theory of Lie groups. This theory attracted many eminent mathematicians like Engel, Killing, Cartan, Klein, and Picard. Żorawski also became interested in this theory and its applications to differential geometry and various parts of mathematical analysis.

His preferred research topic was the equivalence of two analytical or geometrical objects with respect to some group of transformations. His first work was dedicated to this problem – his Ph.D. thesis first published in Polish in *Rozprawy Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności*, the publication of the Academy of Arts and Sciences in Cracow (cf. [12]), and subsequently in German in *Acta Mathematica* (cf. [13]).

The discussed work was written very clearly and all considerations and calculations were carried out up to the complete resolution of the problem. The paper was highly esteemed by the specialists and cited for many years. Let us recall an opinion of Sophus Lie on Żorawski's work which can be found in the third volume of his fundamental work *Theorie der transformationsgruppen* (vol. III, p. 810, Teubner, Leipzig, 1893):

From among Leipzig theses let us also mention a beautiful Żorawski's work about invariants of bending [...] Żorawski carried out difficult and complicated calculations with great skill which were necessary to the solution of the problem. Since the work belongs also to the chapter of differential invariants I mention it here only briefly and hope to return to it in the planned work on differential invariants.

Żorawski's results were also noticed by Felix Klein and mentioned in his work on the development of mathematics in the XIXth century (cf. [6]). Żorawski is the only Polish mathematician mentioned by name in this book.

To be precise, the paper dealt with the following problem: there are given two surfaces (or more precisely two proper patches as the problem is local) in a Euclidean space. Check when one of them can be obtained from the other by bending and perhaps a reflection. The surfaces are equipped with metrics induced from the surrounding Euclidean space. The metrics are defined using the fundamental forms, i.e. differential forms of suitable form

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{E} d\bar{u}^2 + 2\bar{F} d\bar{u} d\bar{v} + \bar{G} d\bar{v}^2$$

where the coefficients $E, F, G, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ are determined by the parametrizations of the surfaces. The problem can be reduced to the question whether there exists a transformation, and if the answer is affirmative, its explicit determination,

$$u = \varphi(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \psi(\bar{u}, \bar{v})$$

transforming one of the forms into the other. To that effect it is necessary to create a complete system of invariants of the fundamental form. By a differential invariant of rank p we understand an expression $\Phi(u, v, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \dots)$ created out of variables u, v , coefficients E, F, G of the fundamental form and their derivatives up to order p which does not change its value when transformed by elements of the group.

Żorawski devised a method of determining these invariants, calculated their number for each order, and found effectively some. He also studied a more general problem. He considered the case when to the fundamental form there were added some functions of variables u and v , or an equation of the form $v = f(u)$. He presented a way how to determine the invariants for any of such two systems. These invariants carry the name of Beltrami and Minding.

In the journal *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften der math.-phys. Klasse*, I 59(1907), 160–186; II 60(1908), 20–52 (cf. [14]), he studied invariants of bending using finite transformations and differential invariants of quadratic forms of n variables, and in *Über Invarianten gewisser Formensysteme* (ibidem 66(1914), 103–117 cf. [15]) he studied invariants of pairs of such forms.

He was also interested in differential equations which found some applications in differential geometry. In the work [16] (also published in Czech) he presented a construction of differential invariants of the systems of such equations

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = f^i(t, x^1, \dots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}) \quad i = 1, \dots, n$$

with respect to the general group of point transformations $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n)$ and solved the corresponding equivalence problem. This work has a lot in common with some parts of differential geometry, which were created and developed after the publication of this paper. In

Żorawski's considerations appear quantities $A_{\mu\nu}$, which are generalizations the coefficients of the parallel displacement in the space with an affine connection, i.e. of the Christoffel symbols. One can also find a counterpart of the covariant derivative and curvature tensor. There are also some generalizations of the theory of a space with an affine connection, the theory which was created and developed later by J. A. Schouten and H. Weyl. Naturally, it is a purely analytical generalization in the language of the theory of invariants without any geometrical interpretation of the considered quantities. Żorawski's paper inspired constructions of geometries with more general connections, let us mention among others D. D. Kosambi (cf. [7]), E. Cartan (cf. [2]), and W. Ślebodziński (cf. [11]).

In Żorawski's oeuvre there are works which according to Ślebodziński (cf. [10]) are (purely) geometrical. Particular attention should be paid to paper *Über die Differentialinvarianten der Flächen in Bezug auf die lineare Gruppe und über die Translationsflächen* (Bull. Int. de l'Ac. de Cracovie 1906, 865–901, [17]) which contains the complete systems of differential invariants of a subspace of the three dimensional affine space. The differential geometry of affine spaces was developed in the second decade of the XXth century among others by W. Blaschke and G. Pick, and recently has been the scene of renewed interest, (K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, 1993). Although Żorawski obtained some pioneering and very important results, most of them were not noticed. Let us recall Ślebodziński's comments (cf. [10] and [9]).

Regretfully, [...] one has to admit that some significant results [...] have been lost for the Polish science. It happened so as they were published only in Polish and because the author, of great modesty, while writing an introduction to his work usually belittled his achievements. Therefore some of his results went unnoticed, and they were rediscovered by other mathematicians some time later and are commonly considered as their scholarly achievement.

Perhaps it is a bit strange that a scientist of that stature did not create a mathematical school in Cracow, similar to those of Lvov and Warsaw. In [5], Stanisław Gołąb writes:

When at the end of the XIXth century, the chair of mathematics at the Jagiellonian University was offered to Kazimierz Żorawski, a pupil of Lie, it seemed that this nomination would lead to a great development of geometry at the university. However, it turned out that Żorawski belonged to that class of recluse scientists. He had no success in bringing up young mathematicians.

However, we should remember that Żorawski was interested in one of those well-developed parts of mathematics and to begin a research work in one of them necessitated further intensive studies after graduation. It was very difficult as at that time there were no assistant positions for those who on one hand could help the professor with his teaching duties and on the other hand could be introduced into the research work. Professors were obliged to give both lectures and classes, and had little time to prepare advanced research lectures. Therefore most students of mathematics chose teachers' careers seeing no future in research work.

However, Żorawski through his lectures, works and personal contact influenced a few young men arousing in them interest in differential geometry and Lie group theory. He had also one student, Władysław Gąsiorowski, whom he sent to Giessen, thanks to a scholarship

of the Kretkowski Foundation, where F. Engel, an eminent student of Lie, taught. In Giessen, Gašiorowski obtained a Ph.D. for the thesis [4]. Unfortunately, the premature death stopped the career of this talented mathematician.

Finally, Żorawski's work in Cracow was born its fruit. Antoni Hoborski, a Ph.D. student of Stanisław Zaremba, started to work on differential geometry. Antoni Maria Hoborski, born on 1st April 1879 in Tarnów, entered the Jagiellonian University in 1897 and began to study mathematics and physics at a very good moment as Żorawski was at the peak of his research, and in 1900 Stanisław Zaremba, already well-known for his results in the theory of differential equations, arrived in Cracow (cf. [5] and [9]).

Hoborski himself did not create a school of differential geometry. However, he lectured regularly from 1922 to 1939 on differential geometry. The lectures notes were edited by S. Gołąb (*Geometria różniczkowa. Cz. I Teoria krzywych – Differential Geometry. Part I Curves theory*) and by A. Turowicz and S. Turski (*cz. 2. Teoria powierzchni i zarys teorii tensorów – Theory of surfaces and outline of theory of tensors*). In 1932–1933 he published two volumes on the theory of curves and was working on a book on the theory of surfaces. Unfortunately, the war and death in 1940 did not permit him to complete this work (cf. [5]).

Hoborski's work was continued by Stanisław Gołąb and Władysław Ślebodziński. St. Gołąb formalized a very important notion of a pseudogroup as well as of a concomitant and that of the equivalence of objects. He supervised over fifty Ph.D.'s.

St. Gołąb was not only a great scientist but also a very good teacher and tutor. He managed to attract group of young and talented young mathematicians and get them interested in the part of mathematics not so popular in Poland as some others. He was greatly esteemed by his former students (cf. [1] and [8]).

Władysław Ślebodziński in Wrocław and Stanisław Gołąb in Cracow, after the Second World War, they created mathematical centres at which regular research into various problems of differential geometry was carried out and important results obtained. They had many students, who started new research directions, which constituted important parts of the development of differential geometry.

After Żorawski died his family received a telegram from Bronisław Knaster, Edward Marczewski, Hugo Steinhaus, and Władysław Ślebodziński which read:

... we wish to express to the family of Professor Kazimierz Żorawski our deep compassion. He was the first of the scientists of his generation to bring the name of Poland to the forefront of world mathematics.

References

- [1] *Bibliography of professor Stanisław Gołąb*. Demonstratio Math. VI(1973), 51–75.
- [2] Cartan E.: *Observation sur le Mèmoire précédent*. Math. Zeitschrift 33(1933), 619–622.
- [3] Gancarzewicz J., Pogoda Z.: *Stanisław Gołąb (1902–1980)*. Złota Księga UJ, Wydział Matematyki i Fizyki, Kraków, 2000, 357–362.
- [4] Gašiorowski W.: *Über Definitionsgleichungen der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene*. Monatshefte für Math. und Phys. 26(1914), 135–202.

- [5] Gołąb S.: *Antoni Hoborski organizator polskiej szkoły geometrycznej*. Wiadomości Matematyczne XII(1969), 33–49.
- [6] Klein F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Springer-Verlag, 1979 (reprint).
- [7] Kosambi D.D.: *Parallelism and path-spaces*. Math. Zeitschrift 33(1933), 608–618.
- [8] Kucharzewski M.: *Scientific achievements of professor Stanisław Gołąb in the domain of geometry*. Demonstratio Math. VI(1973), 19–38.
- [9] Pelczar A.: *Stanisław Zaremba, Kazimierz Paulin Żorawski*. Złota Księga UJ, Wydział Matematyki i Fizyki, Kraków, 2000, 314–327.
- [10] Ślebodziński W.: *Kazimierz Żorawski*. Studia z dziejów katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego, Uniwersytet Jagielloński, Wydawnictwa Jubileuszowe – tom XV, Kraków, 1964, 87–101.
- [11] Ślebodziński W.: *Sur deux connexions généralisées*. Prace mat.-fiz. 43(1936), 167–205.
- [12] Żorawski K.: *O pewnym odkształceniu powierzchni*. Rozprawy Wydz. Mat.-Przyr. Akad. Um. w Krakowie 23(1891), 225–291.
- [13] Żorawski K.: *Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lieschen Gruppentheorie*. Acta Mathematica 16(1892), 1–67.
- [14] Żorawski K.: *Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades*. Berichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften I 59(1907), 160–186; II 60(1908), 20–52.
- [15] Żorawski K.: *Über Invarianten gewisser Formensysteme*. Berichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 66(1914), 103–117.
- [16] Żorawski K.: *Über gewisse Differentialinvarianten der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Bull. de l'Acad. de Bôhême 20(1915).
- [17] Żorawski K.: *Über die Differentialinvarianten der Flächen in Bezug auf die lineare Gruppe und über die Translationsflächen*. Bull. Int. de l'Ac. de Cracovie 1906, 865–901.

Address

Dr. Zdzisław Pogoda, Ph.D.
 Zakład Historii Matematyki
 Instytut Matematyki
 Uniwersytet Jagielloński
 Ul. Łojasiewicza 6
 30-348 Kraków
 Poland
 e-mail: zdzislaw.pogoda@uj.edu.pl

O ŘETĚZOVCE A HYPERBOLICKÝCH FUNKCÍCH

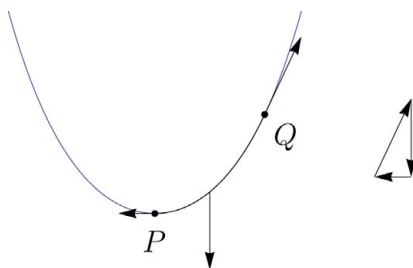
ANTONÍN SLAVÍK

Abstract: This contribution describes the early investigations of the catenary curve, i.e. the problem of determining the shape of a hanging cord. It is now well known that the result involves the hyperbolic cosine function; however, the 17th century mathematicians described the catenary in geometric terms, and the hyperbolic functions were introduced by Riccati and Lambert only later in the 18th century.

1 Řetězovka

Historie úlohy o řetězovce je popsána v mnoha knihách i článcích (viz např. [1], [2], [3], [4]). Galileo si jako jeden z prvních položil otázku, jaký tvar má řetěz zavěšený ve dvou pevných bodech, a všiml si, že tato křivka nápadně připomíná parabolu. Huyghens si již uvědomoval, že ve skutečnosti se musí jednat o jinou křivku. Roku 1690 byl v *Acta Eruditorum* uveřejněn článek, kde Jakob Bernoulli vyzval ostatní matematiky, aby se pokusili nalézt přesný matematický popis řetězovky. Tři správná řešení od Johanna Bernoulliho, Leibnize a Huyghense byla publikována roku 1691.

Ukažme si stručně postup Johanna Bernoulliho. Místo řetězu budeme pracovat s jeho idealizací, homogenním vláknem zavěšeným ve dvou bodech. Matematicky je popíšeme jako graf funkce $y = y(x)$. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že nejnižší bod řetězovky P má nulovou x -ovou souřadnici. Necht' Q je libovolný jiný bod o souřadnicích $(x, y(x))$. Na část řetězovky mezi body P a Q působí tři síly: gravitační síla, která je úměrná délce oblouku PQ , vodorovná napěťová síla v bodě P , která nezávisí na volbě Q , a konečně napěťová síla v bodě Q , která má směr tečny k řetězovce. Tyto síly musejí být v rovnováze, tj. jejich vektorový součet je nulový.



Odsud je snadno vidět, že $y'(x)$ je přímo úměrná délce oblouku PQ , neboli

$$y'(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

pro jistou konstantu c . Derivováním podle x dostaneme diferenciální rovnici

$$y''(x) = \frac{1}{c} \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (1)$$

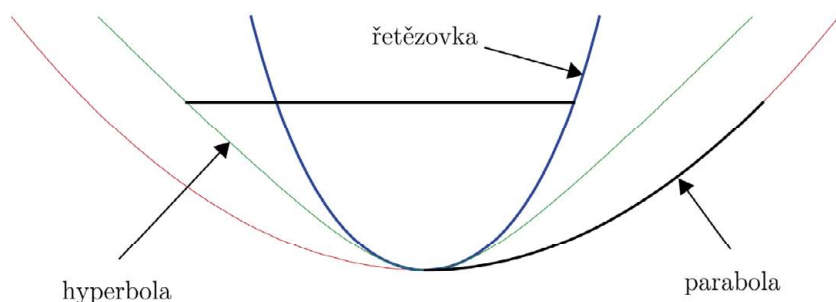
s počáteční podmínkou $y'(0) = 0$ (neboť v nule má funkce minimum). Toto byla jedna z prvních diferenciálních rovnic, se kterou se matematikové v 17. století setkali. Bernoulli ji dokázal poměrně komplikovaným postupem vyřešit a nalézt tak tvar řetězovky, čímž prokázal užitečnost a sílu nedávno objeveného infinitezimálního počtu.

Řešením rovnice (1), které splňuje předepsanou počáteční podmínku, je funkce $y(x) = c \cdot \cosh \frac{x}{c} + d$ (d je libovolná konstanta). K tomuto výsledku dojdeme např. tak, že v rovnici (1) provedeme substituci $y' = z$. Tím dostaneme rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými, kterou vyřešíme pomocí známého algoritmu. Přitom je potřeba najít primitivní funkci $\int dz / \sqrt{1 + z'(x)^2}$, což se nejsnáze provede pomocí substituce $z = \sinh t$. V článku [4] je ukázán alternativní postup, který nepředpokládá znalost hyperbolických funkcí.

Hyperbolické funkce a jejich vlastnosti však nebyly na konci 17. století ještě známy, pokusme se proto přiblížit způsob, kterým řetězovku popsal Bernoulli. Pro jednoduchost uvažujme řetězovku, která je grafem funkce $y(x) = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ (tj. položili jsme $c = 1$ a $d = 0$). Zvolíme-li např. pravou polovinu této řetězovky, můžeme ji popsat také jako funkci x v závislosti na y , tj. $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Tento výraz se téměř shoduje s délkou l oblouku paraboly $y = x^2/8 + 1$ mezi body $(0,1)$ a $(\sqrt{8(y-1)}, y)$, platí totiž

$$l = \int_0^{\sqrt{8(y-1)}} \sqrt{1 + (x/4)^2} dx = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Dodatečný člen $\sqrt{y^2 - 1}$ Bernoulli chápal jako x -ovou souřadnici bodu, který leží na hyperbole $y^2 - x^2 = 1$. Jeho popis řetězovky byl tedy geometrický: Bod ve výšce y dostaneme tak, že vyjdeme z bodu v levé části hyperboly $y^2 - x^2 = 1$ a posuneme se o vzdálenost, která je délkou oblouku paraboly $y = x^2/8 + 1$.



2 Hyperbolické funkce

Historii hyperbolických funkcí dobře popisuje článek [2]. Připomeňme, že hyperbolický sinus a kosinus jsou definovány vztahy

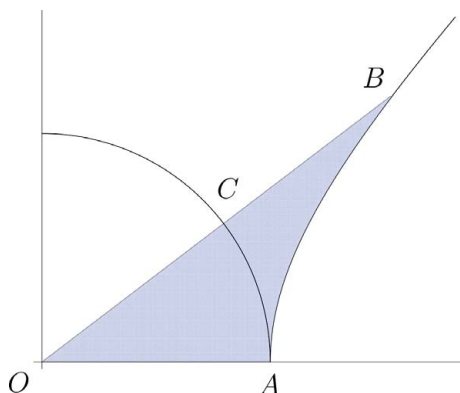
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

Tyto funkce najdeme již u Eulera, zdá se však, že jim nepřisuzoval větší důležitost (nezavedl pro ně ani žádné pojmenování). V jeho výpočtech hrály pomocnou roli při odvozování vyjádření sinu a kosinu pomocí nekonečných součinů; Euler např. zjistil, že platí

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots$$

a z tohoto vztahu dosazením $x = i \cdot z$ dostal známé vyjádření sinu ve tvaru nekonečného součinu.

Větší pozornost věnovali hyperbolickým funkcím až Johann Heinrich Lambert a Vincenzo de Riccati (syn Jacopa Riccatiho, po kterém je dnes pojmenována diferenciální rovnice). V práci *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques* z roku 1761 (v této práci byla rovněž poprvé dokázána iracionalita π) se Lambert především snažil popsat analogii mezi goniometrickými a hyperbolickými funkcemi.



Zvolíme-li na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ libovolný bod C , pak jeho souřadnice jsou $C = (\cos t, \sin t)$, kde t je velikost orientovaného úhlu OAC , ale také dvojnásobek obsahu kruhové výseče OAC . Lambert zjistil, že pro libovolný bod B na hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ platí podobný vztah, totiž $B = (\cosh u, \sinh u)$, kde u je dvojnásobek obsahu křivočarého trojúhelníku OAB . Jak k tomuto poznatku dospěl? Označíme-li $B = (f(u), g(u))$, pak Lambert pomocí geometrických úvah našel diferenciály funkcí f a g ; při použití dnešní symboliky můžeme říct, že došel ke vztahům $f'(u) = g(u)$, $g'(u) = f(u)$. Uvědomíme-li si ještě, že $f(0) = 1$ a $g(0) = 0$, pak je jasné, že Taylorovy rozvoje funkcí f a g jsou totožné s rozvoji hyperbolických funkcí.

Je zajímavé, že názvy „hyperbolický sinus“ a „hyperbolický kosinus“ se objevují až v Lambertově práci *Observations trigonometriques* z roku 1768. Lambert označuje za

autora těchto názvů Riccatiho; ten se hyperbolickým funkcím věnoval ve dvoudílné práci *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentium* (1757–1762). I když Riccati pravděpodobně objevil výše popsáný geometrický význam hyperbolických funkcí o něco dříve než Lambert, zdá se, že oba dospěli ke svým objevům nezávisle.

Není zcela jasné, kdy si matematikové uvědomili, že řetězovka je grafem hyperbolického kosinu. Tato skutečnost byla nejpozději koncem 19. století dobře známa, Riccati ani Lambert se však o ní nezmiňují.

3 Příbuzné úlohy

S řetězovkou a hyperbolickými funkcemi jsou spojeny i další zajímavé úlohy. Hledáme-li např. rovinnou křivku, která prochází zadanými dvěma body a jejíž rotací kolem osy x vznikne plocha s co nejmenším povrchem, dostaneme opět řetězovku. K tomuto výsledku dospěl Euler roku 1744 a dá se poměrně snadno odvodit užitím variačního počtu.

Roku 1675 si Robert Hooke uvědomil, že ideálním tvarem klenebního oblouku je řetězovka překlopená podle osy x (ideální oblouk je definován podmínkou, že výslednice všech sil v libovolném bodě má směr tečny k oblouku). Známým příkladem je památník Gateway Arch. v St. Louis, jehož konstrukce je popsána v článku [5].

Bratři Bernoulliové se také zabývali obecnější úlohou určit tvar zavěšeného nehomogenního vlákna. Johann Bernoulli vyřešil i obrácenou úlohu, tj. nalezení lineární hustoty zavěšeného vlákna, známe-li jeho tvar (viz opět [5]).

Literatura

- [1] Hairer E., Wanner G.: *Analysis by Its History*. Springer, 2008.
- [2] Barnett J. H.: *Enter, Stage Center: The Early Drama of the Hyperbolic Functions*. *Mathematics Magazine* 77(2004), 15–30.
- [3] Kline M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1990.
- [4] Raugh M.: *The Catenary and Hyperbolic Functions*. [online]
<http://mikeraugh.interconnect.com/MathMisc/HangingChain.pdf>
- [5] Osserman R.: *Mathematics of the Gateway Arch*. *Notices of the American Mathematical Society* 57(2010), 220–229.

Adresa

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz

TRIGONOMETRIE V EVROPĚ 15.–17. STOLETÍ

RADKA SMÝKALOVÁ

Abstract: In this text we will talk about trigonometry in the 15th – 17th century.

1 Úvod

Po šesti stoletích vědecky neplodného raného středověku (konec 5. až začátek 12. století), kdy se evropští učenci zabývali výhradně náboženskými a scholastickými úvahami, nastalo v Evropě postupné ožívání věd a umění, které bylo spojeno se vznikem městské kultury. V době obchodních výprav a křížáckých válek se Evropané seznámili nejen s vymoženostmi východní kultury, ale i s kulturními poklady dávno zapomenutého antického světa. To vše dalo mohutný podnět k samostatné tvůrčí činnosti evropských učenců. Pozvolna začíná jedno z nejkrásnějších a na památky nejbohatších období v dějinách Evropy – renesance.

Neopomenutelný význam pro rozvoj matematiky měly překlady z řečtiny a arabštiny do jazyka latinského, který se stal společným pro všechny západoevropské učence té doby. Například do latiny přeložený Ptolemaiov *Almagest* (z řečtiny i arabštiny) mohli středověcí evropští matematici a astronomové studovat již ve druhé polovině 12. století.

Podoba a přehlednost trigonometrických tabulek ve středověké Evropě byly závislé na způsobu zapisování čísel a jejich vyjadřování zlomky. S naší moderní desítkovou poziční soustavou a s indo-arabskými číslicemi byla Evropa seznámena v 8. století. Tento indo-arabský systém nebyl ihned přijat širokou veřejností, která dávala přednost zápisům čísel pomocí římských číslic. Nicméně evropští učenci vnímali výhodu nového systému a nadšeně ho obhajovali. Hlavně díky výkladu o indo-arabských číslicích v díle *Liber abaci* (1202) od Leonarda Pisánského získala desítková poziční soustava všeobecnou podporu ve vědeckých kruzích.

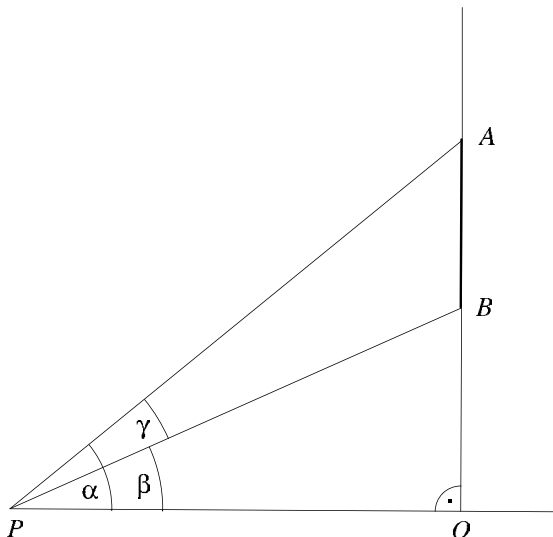
První trigonometrické tabulky využívající nového systému byly sestaveny okolo roku 1460 rakouským astronomem a matematikem Georgem Peurbachem (1423–1461). Narozdíl od Ptolemaia, který položil poloměr kruhu r rovný 60 jednotkám a následně délky třetiv vyjadřoval pomocí šedesátinných zlomků, Peurbach kombinoval systém o základu šedesát se systémem o základu deset. Zvolil poloměr kruhu $r = 600,000$ jednotek a hodnoty trigonometrických veličin vyjadřoval celými čísly v desítkovém systému. Peurbachův žák Regiomontanus, o němž se více zmíníme v následujícím odstavci, nejdříve zvětšil poloměr kruhu na $r = 6,000,000$, ovšem velice brzy se šedesátkového systému vzdal a roku 1467 sepsal první čistě desetinné trigonometrické tabulky při poloměru kruhu $r = 10^7$. Hodnoty trigonometrických veličin byly opět zapisovány celými čísly. Při přechodu od $r = 10^7$ ke konečnému $r = 1$, jak je tomu dnes, se význam těchto tabulek neztratil: zapsaná celá čísla se stala čitateli desetinných zlomků (desetinná čárka se posunula o sedm míst doleva). Ke skutečnému přechodu k desetinným zlomkům dospěl ve svých trigonometrických tabulkách až F. Viète. Pro zajímavost uvedeme Viětův zápis hodnoty jedné z goniometrických veličin (při $r = 10^7$):

$\sin 60^\circ = 86,602\overline{540,37}$. Svislá čára odděluje čitatele zlomku od celého čísla (jmenovatele Viète vynechává) a čárky slouží k seskupování řádů od nuly vždy po třech. Dnes bychom jeho výsledek zapsali smíšeným číslem ve tvaru $\sin 60^\circ = 86602\frac{54037}{10^5}$.

2 Regiomontanus

Až do 16. století stáli u rozvoje trigonometrie hlavně astronomové. Není tedy žádným překvapením, že jím byl i vynikající německý matematik Johannes Muller alias Regiomontanus (1436–1476), který napsal dílo *O trojúhelnících všelikých knih patero* – první evropskou práci, v níž byla trigonometrie chápána jako samostatná matematická disciplína. V této významné práci, která se skládala z pěti knih, Regiomontanus metodicky uspořádal trigonometrické znalosti Ptolemaia a indických a arabských učenců. První kniha začíná zavedením základních pojmů. Funkce sinus je zde uvedena po vzoru indické definice. Ta pravá trigonometrie (tedy řešení obecných trojúhelníků) se objevuje až v knize druhé. Sinová věta, stejně tak jako všechna ostatní pravidla, je uvedena pomocí slovních spojení, nikoli v symbolech. Objevuje se zde také poprvé vzorec pro obsah S trojúhelníka ABC ve tvaru $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$. Je neobvyklé, že Regiomontanus nikdy nepoužil funkci tangens, přestože ji musel znát, ať už od svého blízkého přítele Peurbacha, nebo z arabských výpočtů stínů.

Zbývající tři knihy pojednávají o sférické geometrii a trigonometrii – obou nezbytných nástrojích astronomie. Regiomontanus celé dílo dokončil roku 1464, avšak publikováno bylo až roku 1533.



Nyní se zmíníme o jedné Regiomontanově úloze, v níž se hledá maximum. Byla to mimochodem první úloha tohoto druhu od dob starořecké matematiky. Jelikož žil Regiomontanus dvě stě let před objevením diferenciálního počtu, problém řešil

elementární metodou. Zadání zní: Tyč AB dané délky je zavěšena svisle tak, že se nedotýká podlahy. Vzdálenost mezi spodním koncem tyče B a podlahou je dána délkou úsečky BO (viz obrázek). Otázka zní: V jaké vzdálenosti od bodu O se nachází na podlaze bod P , z něhož je tyč vidět pod největším úhlem γ ?

3 John Napier

V první polovině 17. století se o podstatný přínos pro praxi trigonometrických výpočtů zasloužil anglický matematik John Napier (1550–1617), když roku 1614 objevil logaritmy. Myšlenka zavedení logaritmů má své kořeny právě u výpočtů podle trigonometrických vzorců, a to ve snaze převést součin či podíl trigonometrických veličin na jejich součet nebo rozdíl. Astronomové si totiž uvědomili, že počítání bude jednodušší a kratší, když hledané součiny a podíly vypočítají pomocí sčítání a odčítání.

Pro rozvoj matematiky měla základní význam hlavní přírodní věda té doby – astronomie. Není tedy divu, že stejně jako v Indii, rovněž v islámských zemích byli matematikové většinou i astronomy. Článkem, který spojoval matematiku a astronomii, byla právě trigonometrie.

Dnes mluvíme o logaritmech jako o funkcích. Hlavním zájmem Napierovy doby však bylo sestavení logaritmických tabulek. Mezi všemi průkopníky byl John Napier první, který sestavil přímo tabulky logaritmů hodnot sinů, nikoliv logaritmů čísel. Znovu připomeňme, že ještě v 17. století byly hodnoty sinu stále chápány jako délky. Aby dostal Napier požadovanou přesnost, položil $\sin 90^\circ = r = 10^7$ (stejně jako Regiomontanus). Na ukázkou uvedeme jeden řádek z Napierovy tabulky, která se sestává ze sedmi sloupců. První sloupec udává velikost úhlu α , druhý hodnotu sinu pro daný úhel α . V posledním sloupci se dočteme velikost úhlu doplňkového ($90^\circ - \alpha$) a v předposledním hodnotu $\sin(90^\circ - \alpha)$, což je hodnota $\cos \alpha$ (hodnoty sinu a kosinu jsou tedy přirozená čísla menší než 10^7). Třetí resp. pátý sloupec uvádí tzv. Napierovy logaritmy sinu ze druhého, resp. kosinu ze šestého sloupce. Podle této (dnes již zapomenuté) konstrukce se “logaritmem” čísla x nazývalo číslo $y = \text{NapLog } x$ určené rovností $x = 10^7 \cdot (1 - 10^7)^y$. Konečně prostřední sloupec udává hodnotu rozdílu zápisů ve třetím a pátém sloupci, rovnou hodnotě Napierova logaritmu pro tangens úhlu v prvním sloupci. Jednotlivé řádky Napierovy tabulky odpovídají hodnotám úhlu α s krokem 1 minuta.

Literatura

- [1] Juškevič A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha, 1977.
- [2] Maor E.: *Trigonometric delights*. Princeton University Press, Princeton, 1998.
- [3] Červený M.: *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích - diplomová práce*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.
- [4] Boyer C. B.: *A history of mathematics*. John Wiley and sons, INC, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.
- [5] Katz V. J.: *A history of mathematics*. Addison Wesley, Menlo Park, New York, Harlow, Don Mills, Sydney, Mexico City, Madrid, Amsterdam, 1998.

- [6] Grattan-Guinness I.: *The rainbow of mathematics*. Fontana Press, London, 1997.
- [7] Wolfram MathWorld (the web's most extensive mathematics resource): Weisstein Eric.
Poslední revize 30. dubna 2010.
<http://mathworld.wolfram.com/NapierianLogarithm.html>

Adresa

Mgr. Radka Smýkalová
Ústav matematiky
Lesnická a dřevařská fakulta
Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně
Zemědělská 3
613 00 Brno
e-mail: smyky@seznam.cz

VÝVOJ LINEÁRNÍ PERSPEKTIVY VE VÝTVARNÉM UMĚNÍ

PETRA SURYNKOVÁ

Abstract: This contribution deals with the major development steps in using of the linear perspective in painting during the history. We describe principles of the linear perspective. We mention several incorrect methods used in imaging and focus on the analysis of some known artistic paintings. Applications of perspective projection are shown in the paper, for example non-linear perspective.

1 Úvod

1.1 Výtvarné umění

Výtvarné umění – malířství, sochařství i architektura, výrazně napomohlo k rozvoji geometrie, matematiky a vědy vůbec. Při hledání správného zobrazování prostoru se díky výtvarnému umění rozvinuly techniky, které se později vyvinuly v klasické geometrické zobrazovací metody, jak je známe dnes. V našem pojednání se budeme zabývat převážně malířstvím, přičemž se zaměříme pouze na jednu složku výtvarného díla. Budeme se věnovat snaze o geometrické ovládnutí prostoru v dílech malířů a způsoby zobrazování trojrozměrného prostoru na ploše obrazu. Nutno podotknout, že toto hledisko rozhodně není jediným měřítkem, podle kterého by se mohla posuzovat kvalita a velikost uměleckého díla. Někdy je tato složka dokonce nedůležitá. Musíme si uvědomit, že každá historická epocha má své estetické normy a své vlastní způsoby uměleckého vyjadřování. V minulosti šlo ve většině kultur o jiné priority než realistické zobrazování prostoru. Nemluvě o soudobém výtvarném umění. V některých historických obdobích by dokonce realistické zobrazování prostoru (či lépe zobrazování odpovídající lidskému vidění) vedlo zcela jistě k nesprávné interpretaci zobrazované situace.

Budeme-li studovat umělecká díla, zjistíme, že malíř vždy musí řešit tři základní úlohy – zobrazení postav, zobrazení vztahů mezi postavami a zobrazení prostoru, do něhož jsou postavy umístěny. Alespoň jedna z těchto složek bývá v díle přítomna.

1.2 Lineární perspektiva

Existuje celá řada druhů promítání, pomocí kterých lze zobrazovat prostorové útvary na nějakou plochu, nejčastěji rovinu. Od nepaměti se člověk snažil zobrazovat předměty a osoby kolem sebe tak, jak je vidí. Samotné vidění je ale velmi složitý proces. Díváme-li se na nějaký objekt oběma očima, vznikají tak dva nestejně obrazy pozorovaného předmětu. Náš mozek tyto dva obrazy přetransformuje do trojrozměrné podoby. Tento proces je ještě mnohem komplikovanější. Určité prostorové informace lze totiž získat i pozorováním jedním okem, protože logicky předpokládáme nebo díky zkušenostem odhadujeme, jak daleko je od nás pozorovaný předmět umístěn.

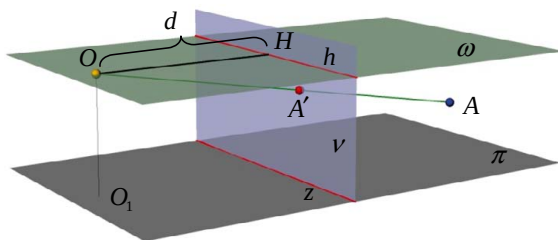
Chceme-li v rovinném obraze co nejlépe vystihnout lidské vidění a zobrazovat objekty realisticky, pracujeme s tzv. středovým promítáním, speciálně s lineární perspektivou. Připouštíme tedy jakési zjednodušení, neboť předpokládáme, že objekty pozorujeme jen jedním okem. Pro malířské potřeby je však tento postup dostačující.

Středové promítání je určeno *průmětnou* (rovina, do které promítáme) a *středem promítání*, který v průmětně neleží. Středový obraz libovolného bodu prostoru různého

od středu promítání konstruujeme jako průsečík spojnice tohoto bodu a středu s průmětnou. Spojnicím zobrazovaných bodů se středem říkáme *promítací přímky*. Aby bylo možno ze středového obrazu zrekonstruovat prostorový objekt, doplňuje se středový průmět ještě pravoúhlým průmětem do průmětny.

Jediná podmínka, kterou jsme pro obecné středové promítání vyžadovali, byla ta, aby střed promítání neležel v průmětně. Takto ale mohou vznikat velmi zkreslené obrazy. Chceme-li, aby se dojem vyvolaný středovým promítáním co nejvíce přiblížil lidskému vidění, musíme se řídit jistými podmínkami. Vzdálenost středu promítání od průmětny, tzv. *distanci*, značíme d , volíme nejméně 20 až 25 cm, což je minimální vzdálenost, ze které je lidské oko schopné zřetelně pozorovat objekty. Navíc pozorovaný objekt leží uvnitř rotační kužlové plochy, tzv. *zorného kužele*, s vrcholem ve středu promítání, osou kolmou k průmětně a vrcholovým úhlem v rozmezí 20° až 45° . Průnik zorného kužele s průmětnou se nazývá *zorné pole*. Objekty, které leží mimo zorný kužel, se zobrazují s větším zkreslením. Volba velikosti zorného pole vyplývá ze zkušenosti. Promítání, které vyhovuje těmto podmínkám, označujeme jako *lineární perspektivu*.

Popišme si celou situaci pomocí správné terminologie a uveďme si další podmínky, které nejsou nezbytné, ale často se při zadávání lineární perspektivy objevují. Sledujme obr. 1. V lineární perspektivě volíme průmětnu v ve svislé poloze. Zobrazované předměty stojí většinou na vodorovné rovině π , tzv. *základní rovině*, obvykle za průmětnou v . Střed promítání O

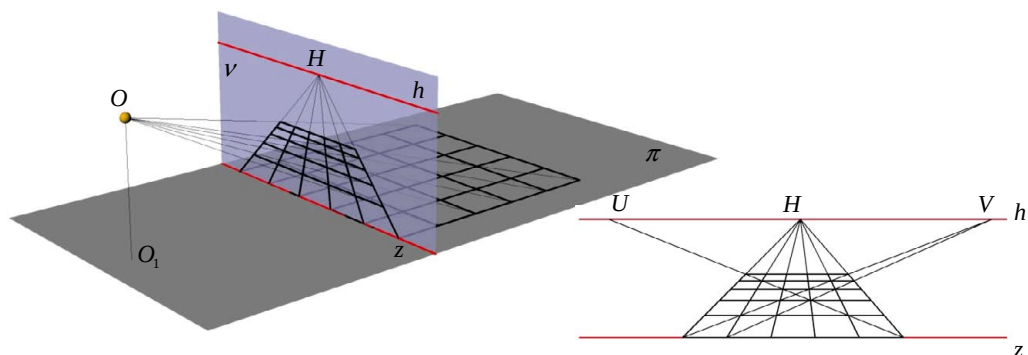


Obr. 1: Perspektivní obraz A' bodu A

nazýváme oko a umísťujeme ho nad základní rovinu zpravidla ve výšce 1,5 – 2 m (odpovídá výšce člověka). Průmětna v protíná základní rovinu ve vodorovné přímce, kterou nazýváme *základnice* a značíme z . *Hlavní bod* H je pravoúhlým průmětem oka do průmětny v , rovina ω vedená okem rovnoběžně se základní rovinou π je tzv. *obzorová rovina* a její průsečnice s průmětnou v je tzv. *horizont*, značíme h . Z konstrukce plyne, že horizont prochází hlavním bodem a je rovnoběžný se základnicí.

Lineární perspektiva je určena, známe-li horizont, hlavní bod, distanci (tedy vzdálenost oka od průmětny) a vzdálenost základnice a horizontu (tedy výšku oka). Perspektivním obrazem přímky, která prochází okem, je jediný bod a to její průsečík s průmětnou v . K určení obrazu přímky, která neprochází okem a je různoběžná s průmětnou, stačí nalézt obrazy dvou jejích bodů. Speciálně se volí průsečík přímky s průmětnou v , tzv. *stopník*. Tento bod už nikam nepromítáme, protože leží v průmětně, je tedy snadné sestavit jeho obraz. Druhým bodem je obraz nevlastního bodu přímky, tzv. *úběžník*. Sestavíme ho jako průsečík rovnoběžky se zobrazovanou přímkou vedené okem s průmětnou v . Úběžník přímky můžeme také chápat jako perspektivní obraz bodu, který leží na této přímce nekonečně daleko. Snadno si uvědomíme, že úběžníky všech přímk rovnoběžných se základní rovinou leží na horizontu. Jinými slovy horizont je množinou úběžníků všech přímk rovnoběžných se základní rovinou. Je zřejmé, že přímky, které jsou vzájemně rovnoběžné, se zobrazují do různoběžek se společným úběžníkem. Další podrobné informace o lineární perspektivě nalezne čtenář např. ve [2].

Ve svých dílech úběžníky ani jiné důležité body malíři samozřejmě nezobrazovali. Účinným a osvědčeným způsobem, jak rozčlenit obraz do hloubky a usnadnit si tak zobrazování složitějších obrazců, bylo zakreslování čtvercové dlažby, tzv. *pavimenta*.



Obr. 2: Pavimentum v průčelné poloze a jeho perspektiva

Z tohoto důvodu byla v dobách minulých věnována nalezení správné konstrukce pavimenta značná pozornost. Obr. 2. vlevo ukazuje konstrukci perspektivního obrazu pavimenta v průčelné poloze, tj. jedna dvojice stran čtverců je rovnoběžná se základnicí a druhá je tedy kolmá k průmětně ν . Přímkám, které jsou kolmé k průmětně ν , říkáme *hloubkové přímky*, jejich úběžníkem je hlavní bod H . Obr. 2. vpravo znázorňuje situaci v průmětně ν . Sestrojeny jsou také úhlopříčky čtvercové dlažby a jejich společné úběžníky na horizontu. Náročnější konstrukcí je obraz pavimenta v neprůčelné poloze.

2 Vývoj v zobrazování prostoru

2.1 Nejstarší umění

Nejstarší stopy lidské umělecké činnosti spadají až do pravěku – do starší doby kamenné. Jeskynní malby z tohoto období (cca 40 000 – 10 000 př. Kr.) překvapují svým realismem především u zobrazování zvířat. Osoby byly naopak zobrazovány velmi jednoduše, někdy pouze symbolicky pomocí znaku nebo nějakého charakteristického předmětu. Důležitou roli hrály vztahy mezi osobami, případně i zvířaty. Velikost postav představovala vztah nadřazenosti či podřízenosti, neměla zpravidla nic společného se snahou o znázornění prostoru, ta byla v těchto dobách minimální.

Více důkazů umělecké činnosti se dochovalo ze starověku. Jednou z oblastí, kde malířství zaznamenalo pokrok, byl Egypt (cca od 4. tisíciletí př. Kr.). Hlavním výtvarným prvkem byla obrysová kresba. Lidské tělo bylo často zobrazováno z různých pohledů. Trup byl zobrazen zepředu, hlava z profilu. Nebyly tedy používány perspektivní zásady promítání. Velikost postav opět vyjadřovala váhu a společenské postavení člověka. Problém hloubky prostoru byl zprvu řešen pouhým překrýváním postav, později se ale objevovaly náznaky prostorového zobrazení. Obrazy byly rozděleny na pásy, které se kladly na sebe, přičemž každý vyšší pás znamenal ústup do hloubky.

Větší pokrok byl zaznamenán v etruském výtvarném umění (8. až 4. století př. Kr.). Postavy byly zobrazovány zcela realisticky. Docházelo k prvním pokusům o použití perspektivního zobrazení. Předměty se zmenšují s rostoucí vzdáleností od průmětny, navíc se obrazy rovnoběžných přímk kolmých na průmětnu sbíhají v jednom nebo více blízkých úběžnících. Drobné předměty na obrazech ale bývají znázorněny spíše ve volném rovnoběžném promítání a případné nesrovnalosti byly různě maskovány.

Řecké umění (8. až 4. století př. Kr.) dosahovalo značných úspěchů v oblasti stavitelství a sochařství, v malířství však nezaznamenalo výraznější úspěch. Z pozdního období řeckého antického malířství se do dnešních dob nedochovalo téměř nic.

V umění antického Říma (8. století př. Kr. až 5 století po Kr.) zaujímalo malířství jednu z předních pozic. Malovaly se divadelní kulisy, které měly navodit dokonalou iluzi prostoru. Perspektivního zobrazování bylo využíváno při malbě iluzivních průhledů do předstíraných prostorů. Důležitým odvětvím římského malířství byla také knižní ilustrace. Po zániku Římského impéria mizí i naděje na další rozvoj perspektivního zobrazování. Další podrobné informace je možné nalézt např. v [1].

2.2 Předrenesanční období

V prvních stoletích našeho letopočtu má svůj počátek křesťanské umění západních zemí. Po uznání křesťanství byla malba úzce spjata s Písmem a omezena pouze na jeho ilustrování. Křesťanství nastolilo tvrdá dogmata, podle kterých se umělci museli řídit. Bylo zahrnuto antické umění. Zobrazovali se pouze výjevy ze života svatých a i to mělo svá přísná pravidla. Jak je vidět, první křesťanské doby byly malířství i sochařství krajně nepříznivé. V této době se neobjevovaly žádné pokusy o znázornění prostoru.

Postupem času se ale situace stává příznivější. Pro dějiny malířství byla zvláště významná doba gotiky. Gotika obnovila staré znalosti realistického ztvárnění postav, dokonce se objevovaly snahy umělců o perspektivní znázornění předmětů, nelze však ještě hovořit o lineární perspektivě, neboť tehdejší malíři tvořili svá díla spíše intuitivně. V poslední fázi docházelo i k pokusům o realistické zobrazování prostoru. Avšak uvědomělé hledání zákonitostí perspektivy je prokazatelné až ke sklonku doby gotické a převážně pak v období nastupující renesance.

Mezi představitele vrcholné gotiky patří Ambrogio di Bondone,¹ zvaný Giotto, který jako jeden z prvních malířů usiloval o realistické zobrazování skutečnosti. Jeho obrazy nejsou výsledkem geometrických konstrukcí, ale výsledkem intuice a dlouhodobého pozorování. Na tehdejší pozorovatele působily jeho obrazy takřka jako skutečnost, i když v jeho dílech nalézáme ještě chyby v perspektivním zobrazování. Rovnoběžné přímky se jednou zobrazují jako rovnoběžky, podruhé jako různoběžky. Ovšem jeho ztvárnění s náznaky perspektivy, tělesnost postav byly základem, na němž se mohlo dále vyvíjet renesanční malířství.

2.3 Renesance

Tento umělecký sloh a zároveň i historická epocha se vyznačoval zesvětštěním, individualismem a návratem k antice. Umělci viděli v renesanci znovuzrození pravého umění a kultury. Datuje se přibližně od 14. do 17. století, kolébkou nového umění byla Florencie. Hospodářský rozvoj a bohatství italských měst byly hlavními příčinami vzniku tohoto uměleckého směru. Prosperita měst vedla k rozvoji stavitelství, sochařství i malířství. Počínaje renesancí začali být významní umělci, zejména ve Florencii, zahrnováni počtami a společnost je začala pokládat za intelektuály a ne za pouhé řemeslníky, jak tomu bylo ve středověku. Základem umění byla věda. Umělci té doby studovali optiku, zabývali se geometrií, mechanikou, pitvali zvířecí i lidská těla, aby pochopili jejich anatomii, pozorovali přírodu. Celkově se velmi zasloužili o rozvoj přírodních věd.

Renesance dávala umělcům prostor pro to, aby mohli navázat na své středověké předchůdce a jejich intuitivní používání lineární perspektivy geometricky odůvodnili. S rozvojem renesance se mezi malíři rozšiřovala znalost pravidel lineární perspektivy

¹ Italský malíř a architekt, žil v letech 1267 až 1337. Mezi jeho nejznámější díla patří série fresek ze života sv. Františka v Assisi, výzdoba kaple signora Enrika Scrovegniho v Padově zobrazující život Panny Marie a Ježíše Krista. Další jeho díla jsou Vyhnání ďáblů z Arezza, Sen biskupův, Vzkříšení Drusiany, Nanebevzetí Jana Evangelisty, ...

a umělci těchto zásad plně využívali. První renesanční umělec, který si prokazatelně osvojil principy lineární perspektivy, byl Filippo Brunelleschi.² Brunelleschi ztělesňoval renesanční ideál všestranně vzdělaného člověka s univerzálními zájmy. Je autorem mnoha matematických a architektonicko-teoretických studií. Poprvé určil a dokázal základní prvky lineární perspektivy. Mezi malíři však jeho metody nebyly příliš přijaty. Leon Battista Alberti³ ve svém spise O malířství uvedl základní poznatky o lineární perspektivě v systém. Upozornil na chybnost florentské metody konstrukce pavimenta a popsal dvě správné konstrukce pavimenta tzv. *costruzione legittima* a *costruzione albertina*. Kromě skutečně přesných konstrukcí pavimenta v průčelné poloze užívali mnozí malíři řadu dalších postupů – většinou ale chybných. Kromě florentské metody to byla např. Holbeinova konstrukce. Chybně zkonstruované pavimentum však nemuselo být na obraze nápadné. Většinou byla zakreslena jen jeho část a úhlopříčky čtvercové dlažby, u kterých docházelo nejčastěji k chybnému zobrazování, se v dílech většinou nijak nezdůrazňovaly. O různých konstrukcích pavimenta se dočteme např. v [1] nebo [5].

Dalším teoretikem lineární perspektivy byl Piero della Francesca.⁴ Patřil k předním tvůrcům rané renesance, soustředil se především na barvy a světlo v obraze. Jeho obraz Bičování Krista je pozoruhodnou ukázkou přesné perspektivní konstrukce. Hloubkové přímky se na tomto obraze sbíhají do jednoho bodu, je možné určit i horizont. V zobrazení pavimenta se však objevují ještě nepřesnosti.

Kromě zobrazování čtvercové dlažby se malíři setkávali i s dalšími úkoly jako např. se sestrojením perspektivního obrazu kružnice ve vodorovné rovině. První z malířů, který ve své malbě zobrazil obraz kružnice ve vodorovné rovině přesně, byl Sandro Botticelli.⁵

Zřejmě první, kdo si uvědomil význam Brunelleschiho experimentů s perspektivou, byl Masaccio.⁶ Masaccio je považován za průkopníka renesanční malby. Jeho slavná freska Svatá trojice představuje dokonalou perspektivní konstrukci. Lidé si zprvu mysleli, že umělec udělal do zdi otvor, tak bylo zobrazení imaginární architektury, výklenku a valené klenby přesvědčivé.

Velkým inovátorem v oblasti perspektivního zobrazování byl bezesporu slavný Leonardo da Vinci (1452–1519). Představoval prototyp tvůrčího renesančního člověka, neboť prokazoval znalosti ve všech oblastech tehdejších přírodních věd, techniky, architektury, sochařství i malířství. Za zmínku jistě stojí, že se zabýval i nelineárními perspektivami. Jeho touha po absolutní dokonalosti ho stále nutila zlepšovat dosažené výsledky, což bylo příčinou, že dokončených děl zanechal velmi málo. Příkladem je jeho skica Klanění tří králů s podrobným rozбором použité perspektivy. Mezi jeho další slavná díla patří Zvěstování, Poslední večeře, Madona ve skalách či Mona Lisa. Zajímavé je, že Leonardo ve svých obrazech používá výhradně průčelné polohy pavimenta.

Představitelem vrcholné renesance byl Michelangelo di Lodovico Buonarroti Simoni (1475–1564). Proslavil se jako sochař (socha Davida, Pieta), architekt (bazilika sv. Petra – ústřední prostor a kupole chrámu) a malíř. Byl geniálním umělcem, posedlý hledáním dokonalosti a snahou dokázat, že je nejlepší. Mnohdy svá díla po dokončení záměrně

² Významný italský sochař a architekt, žil v letech 1377 až 1446. Proslavil se stavbou velkolepé kupole na katedrále Santa Maria del Fiore ve Florencii, podílel se na výstavbě baziliky San Lorenzo ve Florencii. Nevěnoval se pouze církevní architektuře, ale je také autorem florentských renesančních paláců. Další informace je možné nalézt ve [3] a [6].

³ Italský humanista, architekt, teoretik umění, spisovatel a matematik, žil v letech 1404 až 1472.

⁴ Italský malíř a teoretik umění, žil v letech 1416 až 1492.

⁵ Italský malíř, žil v letech 1445 až 1510. Mezi jeho nejslavnější díla patří Zrození Venuše, Primavera nebo ilustrace k Božské komedii.

⁶ Významný italský malíř, žil v letech 1401 až 1428. Je považován za zakladatele renesančního malířství.

poškodil, když s nimi nebyl spokojen. V malířství se nejvíce proslavil výzdobou Sixtinské kaple ve Vatikánu. Jako umělec, který znal perspektivu v takové míře, že mohl využívat její přednosti, si ale také uvědomoval svazující rysy jejího užívání. Věděl, že člověk neobsáhne velkou plochu obrazu jedním pohledem a že obrazy jsou navíc na okrajích zkresleny. Proto se nedal strhnout celkovou plochou stropu Sixtinské kaple, ale rozdělil ho na několik oddělených částí, které perspektivně vyřešil zvlášť a vzájemně kompozičně propojil.

Další významní umělci renesančního období a jejich význačná díla jsou popsány ve [3], [4] a [6].

Úplné znalosti zásad lineární perspektivy bylo dosaženo v období renesance. V tomto období i v obdobích pozdějších, jako např. v baroku, se již setkáváme s obrazy se správným perspektivním zobrazováním prostoru.

2.4 Další vývoj

Postupem času malíři lineární perspektivu opět opouštěli. V některých moderních uměleckých směrech nebylo hlavním úkolem zobrazovat co nejvěrněji skutečnost. Malíři v lineární perspektivě již nemohli objevit nic nového. Obrazy z těchto období nejsou svázány tradičním perspektivním viděním. Postupně se vyvíjí abstraktní malířství.

3 Závěr

Podali jsme přehled vývoje v zobrazování prostoru. Zaměřili jsme se především na období renesance, kdy došlo k úplnému odhalení zákonitostí lineární perspektivy. Podrobnější popis vývoje perspektivního zobrazování a dalšího vývoje v zobrazování prostoru v některých moderních uměleckých směrech by mohl být zajímavým námětem například pro diplomovou práci.

Literatura

- [1] Crhánová O.: *Počátky deskriptivní geometrie v malířství*. Diplomová práce, Praha, 1982.
- [2] Drábek K., Harant F., Setzer O.: *Deskriptivní geometrie II. Díl*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1979.
- [3] Chatelet A., Groslier B. P.: *Světové dějiny umění*. Ottovo nakladatelství, Praha, 2004.
- [4] Krasouvá A.-C.: *Dějiny malířství – od renesance po současnost*. Nakladatelství Slovart, Praha, 2008.
- [5] Šarounová A.: *Geometrie a malířství – zrození lineární perspektivy*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 40, Stavební fakulta ČVUT, Praha, 1995.
- [6] Wirtz R. C.: *Umění a architektura Florencie*. Nakladatelství Slovart, Praha, 2007.

Adresa

RNDr. Petra Surynková
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: petra.surynkova@mff.cuni.cz

RUKOPIS BAKHŠHÁLÍ

IRENA SÝKOROVÁ

Abstract: The Bakhshali Manuscript is the name given to an ancient Indian mathematical work written on birch-bark. It was discovered in 1881 near the village Bakhshali. The manuscript is incomplete, its author and date are unknown. In the Bakhshali Manuscript there are several interesting problems such as solving of linear equations, solving of quadratic equations and the methods for calculating square root, examples of the rule of three, progressions and so on.

1 Úvod

1.1 Objevení rukopisu

Na severozápadě Indického poloostrova, v dnešním Pákistánu, poblíž vesnice *Bakhšhálí* objevil v roce 1881 sedlák pracující na poli pod hromadou kamení popsané kousky březové kůry. Svůj zajímavý nález oznámil, rukopis se dostal až ke guvernérovi Pandžábu. Ten jej na radu britského archeologa a indologa A. Cunninghama (1814–1893) nařídil poslat do Kalkaty, kde jej začal studovat britský orientalista A. R. Hoernle (1841–1918). Po jeho smrti se s ním zabýval G. R. Kaye (1866–1929) a mnozí další.

1.2 Popis

Rukopis se skládá ze 70 lístků březové kůry, z některých se však zachovaly jen fragmenty; největší lístek měří 14,5 krát 8,9 centimetru. V dobrém stavu je 35 lístků, pouze mírně poškozených je 16, silně poškozených je 7, z 11 lístků se zachovaly pouze torza a 1 lístek je zcela prázdný, tj. nepopsaný. Později se podařilo z některých úlomků rekonstruovat část původní stránky. Lístkům byla přidělena čísla 1 až 70 (viz [5]). Dnes je rukopis uložen v Bodleian Library, univerzitní knihovně Oxfordské univerzity.

Nalézt správné pořadí lístků popsanych z obou stran bylo obtížné, protože chybělo číslování listů na levém okraji rubové strany, které bývá obvyklé u starých sanskrtských rukopisů. Podle G. R. Kaye očíslování lístků neodpovídalo jejich pořadí v rukopise a navrhl jejich nové uspořádání (viz [5]). Pořadí lístků pomohl určit nejen obsah textu, např. číslování některých pravidel nebo pokračování příkladu na dalším lístku, ale i zkoumání kůry, stopy suků nebo barevně odlišné skvrny v kůře.

Rukopis bohužel není kompletní, není ani jasné, jak velká část se zachovala, větší část je patrně zničená. Začátek i konec rukopisu je ztracený, není tedy znám ani autor ani původní název.

Rukopis je napsán písmem *šáradá* používaným hlavně na severozápadě Indie. Jazyk, kterým je rukopis napsán, považoval G. R. Kaye za sanskrt s nezvyklou gramatikou užívaný v 11. a 12. stol. n. l. na severozápadě Indie, zatímco A. R. Hoernle tvrdil, že jde o dialekt *ghátá* nebo nějakou formu severozápadního prákrty, které se používaly kolem 3. stol. n. l. a předcházely klasickému sanskrtu.

Stáří rukopisu je předmětem mnoha diskusí. A. R. Hoernle považoval rukopis za práci ze 3. nebo 4. stol. n. l., zatímco G. R. Kaye datoval jeho vznik až do 12. století, a dokonce zpochybňoval pravost rukopisu. Objevily se i názory, že dílo pochází ze 7. stol. n. l. (T. Hayashi, viz [6]) nebo, že se jedná o pozdější kopii původního díla z počátku našeho letopočtu (viz [4]).

2 Obsah rukopisu

2.1 Struktura rukopisu, zápis čísel

Dochovaná část rukopisu *Bakhshālī* je převážně aritmetická a algebraická, text se skládá z pravidel a příkladů. Pravidla (*sútram*) jsou psána ve verších a obvykle číslována, není však uvedeno, jak byla odvozena. Způsob vyjádření pravidel není příliš srozumitelný, ke správnému pochopení bylo nutné studovat připojené příklady (*udáharanam*). Příklad začíná zkratkou *udá* a končí otázkou. Zadání jsou zapsána slovy, pak někdy následují ještě formální vyjádření (*sthāpanam*) se zkratkami a čísly. V řešení (*karanam*) jsou někdy citovány části použitých pravidel. Nakonec je provedena zkouška (*pratyayam*). Konec každého pravidla je za posledním příkladem označen symbolem



a také číslo pravidla je uvedeno až na konci.

U některé zkoušky je ještě připojen termín *pratyaya-trai-rāshikena* (zkouška pravidlem tří) nebo *pratyaya-rūponā-karanena* (zkouška metodou *rūponā*). Zkouška se v některých úlohách prováděla dosazením výsledku do zadání, někde jako prověření správnosti výpočtu sloužilo řešení původního problému provedené jiným způsobem.

V rukopise se už používal poziční zápis čísel v desítkové soustavě, v řešení příkladů se vyskytovala velká čísla (obsahující až 23 číslic). Byla většinou zapsána do „buněk“, někdy byla pouze oddělena jednou nebo dvěma svislými čarami, běžné bylo používání zlomků. V textu se často vyskytují zkratky, a to nejen místo matematických symbolů nebo k vyjádření jednotek, ale i místo běžných slov.

V rukopise se používají základní aritmetické operace – sčítání, odčítání, násobení a dělení, chybí však popis, jakým způsobem se operace prováděly. Nalezneme jen formální vyjádření výrazů a výsledky. Symboly pro aritmetické operace ještě neexistovaly, proto jsou operace vyjádřeny slovy nebo zkratkami, např. *bhá* (*bhāga*) umístěné za výrazem znamenalo, že jde o dělitele, *še* (*śesha*) označovalo zbytek, *mú* (*múla*) byla zkratka pro kořen, tj. druhou odmocninu, *pha* (*phala*) znamenalo odpověď, řešení. Zvláštností rukopisu je výskyt znaménka „+“, které bylo umístěné za číslem a značilo zápornou hodnotu, resp. označovalo číslo, které se mělo odečíst.

V algebraické části rukopisu *Bakhshālī* ještě není označení neznámých ustáleno; někde je pro neznámou použit stejný symbol jako pro nulu, tj. tečka (neznámé, nepřítomné množství), někde jsou neznámé veličiny označené zkratkami slov.

2.2 Pravidlo tří

Pro pravidlo tří se ve staré Indii užíval název *trairāśika* (tři členy); bylo řazeno mezi aritmetické operace, což bylo běžné i pro arabské a středověké texty. Tři dané členy jsou *p* (zkratka slova *pramāna*, důvod), *f* (zkratka slova *phala*, výsledek) a *i* (zkratka slova *icchā*, požadavek). Pravidlem tří se řešily úlohy založené na přímé úměrnosti: jestliže *p*

dává f , kolik dá i ? Hledalo se tedy číslo x z rovnice $\frac{x}{f} = \frac{i}{p} \Rightarrow x = \frac{f \cdot i}{p}$ (viz [3]).

Pravidlo tří bylo ve staré Indii velmi ceněné, protože bylo snadné a bylo možné je jednoduchým způsobem použít při řešení běžných problémů. V rukopise *Bakhshálí* se vyskytuje jako přímá metoda výpočtu nebo slouží ke kontrole správnosti výpočtu.

2.3 Metoda regula falsi

Metoda *regula falsi* byla popsána ve všech starých indických matematických dílech. Tato metoda je známá už ze starého Egypta a Mezopotámie (2. tis. př. n. l.), s její pomocí se obcházel přímé dělení (viz např. [1]). Většinou se užívala k řešení rovnice typu $ax = p$. Postupovalo se tak, že se zvolilo za x vhodné číslo x_0 (odhad), vypočítal se součin $ax_0 = p_0$, a pak se řešení původní rovnice vypočítalo ze vztahu $x = p \frac{x_0}{p_0}$ (viz [3]).

Při vhodné volbě x_0 byl výpočet neznámé ze vztahu $x = p \frac{x_0}{p_0}$ jednodušší než ze vztahu

$x = \frac{p}{a}$. V rukopise *Bakhshálí* se touto metodou řešila i rovnice $ax + b = p$. Zvolila se hodnota x_0 a vypočítala se hodnota $ax_0 + b = p_0$. Správná hodnota x se pak vypočítala podle vzorce $x = x_0 + \frac{p - p_0}{a}$.

2.4 Metoda rúponá

Metodou *rúponá* se počítal součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (viz [5]). Označíme-li první člen posloupnosti a_1 , diferenci d , pak výpočet součtu prvních n členů takové aritmetické posloupnosti odpovídá užití vzorce $s = \left[\frac{(n-1)d}{2} + a_1 \right] n$. V rukopise je první člen aritmetické posloupnosti označován zkratkou $\bar{a}$ (*ādi-dhana*, první člen), difference u (*uttara*, difference, přebytek) a počet členů pa (*pada*, krok, tedy počet kroků v posloupnosti). Také úlohy o posloupnostech byly známy už v Egyptě a Mezopotámii (viz např. [1]).

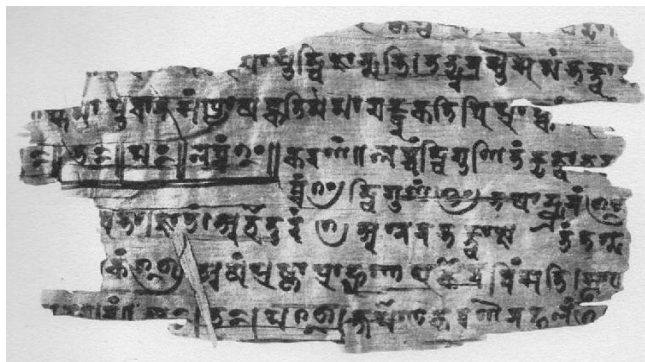
Na lístku označeném folio 9 recto je zajímavá úloha, kterou A. R. Hoernle formuloval takto (viz [5]):

Na jistou hostinu je první den pozván jeden bráhman a každý následující den další bráhman. Na jinou hostinu je pozváno každý den deset bráhmanů. Za kolik dní bude počet bráhmanů stejný a kolik jich bylo pozváno?

Počet bráhmanů na první hostině tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 1$ a $d = 1$. Dnes bychom podobnou úlohu řešili pomocí rovnice $\left[\frac{(n-1)d}{2} + a_1 \right] n = 10n$, ze které se vyjádří n , tj. $n = \frac{2(10 - a_1)}{d} + 1$, a po dosazení se vypočítá $n = \frac{2(10 - 1)}{1} + 1 = 19$. Původní postup výpočtu odpovídá tomuto vzorci, není však zcela jasné, jakým způsobem byl

chápán. V připojené zkoušce se počet bráhmanů pozvaných na první hostinu počítal metodou *rúponá* (viz poslední řádek na obr. 1).

Obr. 1. Folio 9 recto



. r . . . shth . . . ch . . . || udā || [8r.]
 māptanādvijānamabhi | tatpunastesamanābhaktvāda .
 ssaṃmāptavān saṃkhyāyāḥ katimnāchakshukativiprākṣati . r . . . m

1	u	i	pa	0	1	labdham	10	1	karaṇam labdhanādvigunātanākritvatatratra
						bldham	10		dvigunam
								20	tathādyannam
									18

 vibhājitaṃ | atrottaraṃ | 1 | anenabhaktvājātanāde .
 kaṃ

19
1

 | ayanāprashāṇāpṛābhūnā ekonaviṃśati | sthāpa .
 *pratyayam*

a	i	u	pa	19
1	1	1	1	1

 rūponākāraṇanaphalāṃ | 1

2.5 Výpočet druhé odmocniny

Pozoruhodný je poměrně přesný výpočet druhé odmocniny (viz [5]). Pravidlo je sice poškozené, ale vyskytuje se na třech lístcích, proto je bylo možno spolehlivě rekonstruovat. Výpočet přibližné hodnoty druhé odmocniny čísla, které není čtvercem, bychom dnes mohli vyjádřit vzorcem $\sqrt{Q} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} = q_1$, kde $a^2 < Q = a^2 + b < (a+1)^2$.

Platí totiž $\sqrt{Q} = \sqrt{a^2 + b} < \sqrt{a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2} = a + \frac{b}{2a} = q_1$, tedy $q_1 > \sqrt{Q}$.

Podobným způsobem byla počítána i druhá aproximace hledané odmocniny. Protože první aproximace q_1 byla větší než hledaná odmocnina, bylo třeba tuto hodnotu zmenšit.

Označíme $r = q_1^2 - Q = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a pak druhou aproximaci dané odmocniny lze počítat

$$\text{jako } \sqrt{Q} = \sqrt{q_1^2 - r} < \sqrt{q_1^2 - r + \left(\frac{r}{2q_1}\right)^2} = q_1 - \frac{r}{2q_1} = a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{b}{2a}\right)}.$$

Na listu folio 65 verso je počítána $\sqrt{481}$. První aproximace je $\sqrt{481} \approx \frac{922}{42} = 21,95238$.

Na listu folio 56 recto je uvedena druhá aproximace jako $\sqrt{481} \approx \frac{424642}{19362} = 21,93172$.

Tato hodnota se liší od správné hodnoty 21,9317121... až na pátém místě za desetinnou čárkou. Takto počítali hodnotu druhé odmocniny již ve staré Mezopotámii (viz např. [1]) a podobně se počítaly odmocniny i ve středověku (viz např. [2]).

2.6 Další typy příkladů

Rukopis obsahuje několik příkladů, které vedou na soustavy lineárních rovnic, na kvadratické rovnice, dále na úlohy o pohybu, na různé úlohy o majetku, nalézají se zde i příklady na posloupnosti apod.

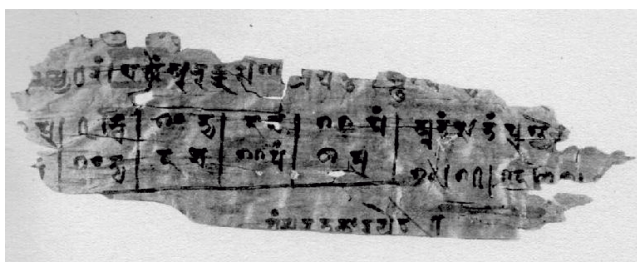
Při řešení soustav lineárních rovnic nebylo jednotné značení neznámých, např. na listu s označením folio 29 verso je soustava pěti lineárních rovnic s pěti neznámými, které jsou označeny jako *pra*, *dvi*, *tr*, *ca*, *pam*, což jsou zkratky slov první, druhý, třetí, čtvrtý a pátý. Lístek je hodně poškozen, proto je zadání úlohy nejasné. Je zde však uveden postup řešení soustavy rovnic $x_1 + x_2 = 16$, $x_2 + x_3 = 17$, $x_3 + x_4 = 18$, $x_4 + x_5 = 19$, $x_5 + x_1 = 20$. Nejprve se od čtvrté rovnice odečetla třetí, přičetla druhá a odečetla první, tím se získala rovnice $x_5 - x_1 = 19 - 18 + 17 - 16 = 2$. Odtud se vyjádřilo x_5 a dosadilo do poslední rovnice, tj. $2x_1 + 2 = 20$. Tato rovnice je jednoduchá, mohla by se řešit přímo. Příklad však měl pravděpodobně sloužit jako „demonstrační“, proto se pro řešení této rovnice užila metoda *regula falsi*. Zvolilo se $\tilde{x}_1 = 10$ a pak se postupným dosazováním do prvních čtyř rovnic dopočítaly další neznámé $\tilde{x}_2 = 6$, $\tilde{x}_3 = 11$, $\tilde{x}_4 = 7$ a $\tilde{x}_5 = 12$. Potom by poslední rovnice byla $\tilde{x}_5 + \tilde{x}_1 = 22 = p_0 \neq p = 20$. Nyní se užitím metody *regula falsi* vypočítala správná hodnota podle vzorce $x_1 = \tilde{x}_1 + \frac{p - p_0}{a}$, tedy $x_1 = 10 + \frac{20 - 22}{2} = 9$, a z dalších rovnic se získaly správné hodnoty i ostatních neznámých $x_2 = 7$, $x_3 = 10$, $x_4 = 8$ a $x_5 = 11$.

Obr. 2. Folio 29 verso



(b) $\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \parallel \begin{array}{c} 19 \\ 1 \end{array} \parallel \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \parallel$ karaṇaṁ || icchhā [29v.]
 . . . dānīśodhayetkramāt tatrādi 16 śud . s . e .
 (c) . . . tiyāyāśoddhya 7 chaturthīyāśoddhya 12 paṁ .
 (d) . . . y . . . dvitīyay . . . mīśraṁdhanāṁ
 . . . yatṛitīyay . nmiśramdhanāmsaptādashasmitaḥ tritīyaśchaturthay .
 . . . chatuṣpaṁchakamīśraṁtudhanāḥkonaviṁśati | *prathama*
 . . . titatracha ekaikasyadhanāṁkiṁśasyādvēchhi . . .
 . . . 17 || 18 || 19 || 20 ||
 (a) tr . bh .

Na listu folio 27 verso je ještě zkouška.



[27v.]
 masyadhanāṁ | eśhaṇanukkramenapūrvokt . sth . . . ri . . .
 9 pra 7 dvi 10 tri 8 cha 11 paṁ | yutañjātāṁpratyaiḥ . . .
 . m 10 tri 8 cha 11 paṁ 9 pra 16 | 17 | 18 | 19
 aṁ sarvatra kārayet ||

Na listu označeném folio 3 verso jsou neznámé označené *a*, *ha*, *ú*, tj. zkratkami slov *ašva*, *haya* (druhy koní) a *úshtra* (velbloud). Zadání příkladu lze vyjádřit takto (viz [5]):

Jeden vlastní 7 koní ašva, druhý 9 koní haya, třetí 10 velbloudů úshtra. Každý dá jedno své zvíře každému z ostatních, a pak jejich majetky mají stejnou hodnotu. Potřebujeme nalézt původní majetek každého kupce a cenu každého zvířete. Jsi-li chytrý, rozřeš hádanku.

Označíme-li neznámé (ceny zvířat) x , y , z (v rukopise *a*, *ha*, *ú*), pak po darování mají všichni stejně, tedy platí $5x + y + z = x + 7y + z = x + y + 8z$, a po snadné úpravě lze rovnice upravit do tvaru $4x + (x + y + z) = 6y + (x + y + z) = 7z + (x + y + z)$. Odtud je zřejmé, že $4x = 6y = 7z = k$, pro jednotlivé neznámé platí $x = \frac{k}{4}$, $y = \frac{k}{6}$, $z = \frac{k}{7}$, jejich součet

je roven $x + y + z = \frac{k}{4} + \frac{k}{6} + \frac{k}{7} = \frac{42 + 28 + 24}{168}k$. Pro pohodlné počítání se zvolilo $k = 168$,

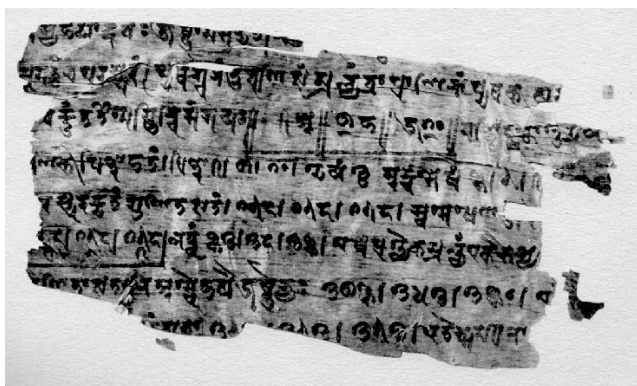
pak $x = 42$, $y = 28$ a $z = 24$. Zbývá ještě určit hodnotu majetku každého kupce, první kupec měl $7x = 294$, druhý $9y = 252$ a třetí $10z = 240$. Za řešením patrně následuje

zkouška, kterou se ověřuje rovnost majetků po darování, tj. $5 \cdot 42 + 28 + 24 = 262$, $42 + 7 \cdot 28 + 24 = 262$, $42 + 28 + 8 \cdot 24 = 262$.

Postup výpočtu je v rukopise popsán takto (viz [5]):

Dané majetky 7 a, 9 ha, 10 ú zmenšené o 3, [jsou] 4, 6, 7. Násobením každého ostatními 168, 168, 168, dělení [každým z nich] $\frac{168}{4}$, $\frac{168}{6}$, $\frac{168}{7}$ dává 42, 28, 24. Počáteční majetky 294, 252, 240, stejné majetky 262, 262, 262.

Obr. 3. Folio 3 verso



yasyahayānnavah ūṣṭrādaśatṛitiya* [3v.]
 pradattaṁchaparasaram | prithagdhanamtuvaṇijāṁmūlyamvāprāṇināṁprithakyaḍ
 . vaktuṁtatomechhindhisamśayah

7	a	9	ha	ū	10
		1			1

 vaṇijakā 3 d.ya .
 . ṇikpiṇḍahataṁ | piṇḍa 7 | 9 | 10 | deyaṁ 3 śuddhaśeṣaṁ 4 | 6 | 7 tata
 parasparakṛitāṁguṇitajātaṁ 168 | 168 | 168 | svaśeṣenatuvibhak

168	168	168
4	6	7

 labdhaṁ 42 | 28 | 24 | eṣhapratyaikamūlyamekaikaśya
 guṇitajātāni aśvaihayaī ūṣṭrebhyaḥ 294 | 252 | 240 | ekaika
 ṁjātā 262 | 262 | 262 | etessamadhanājā

3 Závěr

Úlohy uvedené v rukopise podávají zajímavá svědectví o životě společnosti ve staré Indii. V příkladech se objevují jména různých bohů, kterým byly přinášeny dary a oběti (Šiva, Vāsudeva), jsou zmíněny historické události i legendy. Jsou uvedeny i názvy starých jednotek délky, váhy, objemu, času a měny. Také je možno nalézt stará jména různých zvířat (slon, kuň, velbloud, kráva, had, sup), názvy potravin a koření (pšenice, ječmen, rýže, sůl, šafrán) i výrazy pro zlato a železo. V některých úlohách jsou cenné informace o tehdejších znalostech vesmíru (denní dráha Saturnu).

Rukopis *Bakhshálí* je rozhodně velmi zajímavá práce, i když okolnosti jejího vzniku ještě nejsou zcela vyjasněny. Připomeňme, že roku 1931 vyšla krátká recenze v ČPMF (viz [7]).

Literatura

- [1] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Dějiny matematiky, svazek 23, Prometheus, Praha, 2003.
- [2] Bečvář J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky, svazek 19, Prometheus, Praha, 2001.
- [3] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics (part I)*. Molital Banarsidass, Lahore, 1935, 1938.
- [4] Joseph G. G.: *The Crest of the Peacock*. Penguin Books, 1990.
- [5] Kaye G. R.: *The Bakhshali Manuscript: a study in medieval mathematics (parts 1–2, part 3)*. Calcutta, Government of India Central Publication Branch, 1927–1933.
- [6] O'Connor J. J., Robertson E. F.: *The Bakhshali manuscript* [online]. Poslední revize leden 2000 [cit. 12. 4. 2010].
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/References/Bakhshali_manuscript.html
- [7] Vetter Q.: *Bakhshali Manuscript (Archeological survey of India, new imp. Series vol. XLIII, parts I and II)*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), 274.

Adresa

RNDr. Irena Sýkorová
Katedra matematiky
Vysoká škola ekonomická
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: sykorova@vse.cz

POČÁTKY TEORIE MATIC U NÁS, OBZVLÁŠTĚ WEYROVA TEORIE

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Abstract: The aim of the paper is to introduce main results which are connected with the theory of matrices and which were enunciated in the Czech lands to the end of the 19th century. Czech mathematician Eduard Weyr published his original worldwide reputable results in the second half of the 19th century. We also mention some Czech textbooks on algebra which were written in this period.

1 Úvod

1.1 Vývoj teorie matic v českých zemích v kontextu vývoje světového

Teorie matic je poměrně mladou oblastí matematiky, pojem *matice* lze však vystopovat již v době před naším letopočtem ve spojení s řešením soustav lineárních rovnic. Na mysl máme zejména čínský postup řešení soustavy lineárních rovnic, který odpovídá Gaussovu eliminačnímu algoritmu. Teorie matic se však nevyvinula přímo ze studia koeficientů těchto rovnic, jak by se dalo předpokládat. Za jakési mezistupně můžeme označit vznik a následný rozvoj teorie determinantů a teorie bilineárních a kvadratických forem. Řada světových matematiků sestavovala koeficienty vyskytující se v soustavách lineárních rovnic do algebraických výrazů, které vyjadřovaly jednotlivé neznámé. K výrazu, který dnes nazýváme determinantem, dospěl německý matematik, filozof a diplomat G. W. Leibniz (1646–1716), za zrod teorie determinantů je nejčastěji považováno zveřejnění tzv. Cramerova pravidla v monografii švýcarského matematika G. Cramera (1704–1752) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* z roku 1750.¹

Německý matematik, astronom a fyzik C. F. Gauss (1777–1855) přiřazoval na přelomu 18. a 19. století kvadratickým formám jejich diskriminant,² koeficienty kvadratických forem začal umisťovat do tabulek. Uspořádání koeficientů však zavedl jiným způsobem, než jsme dnes zvyklí. Symetrickou matici reprezentující kvadratickou formu v dnešním tvaru, uvedl až Gaussův žák F. G. M. Eisenstein (1823–1852). Postupně se schylovalo ke vzniku teorie matic. Za tento okamžik je nejčastěji označeno publikování práce anglického matematika A. Cayleyho nazvané sugestivně *A memoir on the theory of matrices* z roku 1858.³ Trvalo však ještě asi pět desetiletí, než se maticová řeč ujala.

Vznik teorie determinantů tedy předcházel zrodu teorie matic o více než jedno století. I po vzniku teorie matic však byla stále většina poznatků formulována v řeči bilineárních a kvadratických forem a přetrvával důraz na teorii determinantů.

¹ Cramerovo pravidlo však znal již roku 1729 skotský matematik Colin Maclaurin, který je však nepopsal dostatečně přesně (neuvedl například způsob řešení soustavy se singulární maticí). Diskuzi k označení zakladatele teorie determinantů může čtenář nalézt v [1].

² Slovo *diskriminant* je zde uvedeno vzhledem k dnešní terminologii, Gauss toto číslo nazval *determinant*.

³ Rovněž otázka zakladatele teorie matic je stále diskutována. Pro bližší seznámení s problematikou viz opět [1].

Situace v českých zemích odpovídala evropskému vývoji. Čeští matematikové publikovali práce z teorie determinantů výrazně dříve než z maticového počtu. Přesto mezi nimi můžeme nalézt vědce, který pracoval jiným způsobem, než bylo tehdy ve světě běžné. Touto výjimkou je Eduard Weyr, který v době přetrvávajícího užívání řeči forem vyjadřoval své výsledky již v řeči matic a snažil se jako jeden z prvních matematiků na evropském kontinentě sjednotit teorii matic s teorií bilineárních a kvadratických forem. Jeho znalost matematického aparátu byla na světové úrovni, k některým otázkám přistupoval ze zcela jiného, modernějšího pohledu než ostatní světoví matematici.

1.2 První práce z teorie forem a první učebnice algebry

Pomineme-li středověké početnice a některé algebraické výsledky, které byly formulovány v rámci prací zaměřených na jiné oblasti matematiky,⁴ nelze v souvislosti s českými zeměmi až do poloviny 19. století mluvit o dílech, která by se soustavněji věnovala algebře. Tato situace se však po polovině století začínala měnit.

Vídeňská akademie věd vydala roku 1858⁵ práci faráře a suplujícího gymnaziálního profesora Václava Šimerky (1819–1887) *Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinante*, která byla předtím, zřejmě v jiné podobě, odmítnuta Královskou českou společností nauk. Věnovala se v té době značně zkoumané teorii kvadratických forem; autor zjednodušil a upravil Legendreovu metodu pro skládání dvou kvadratických forem a zkoumal mimo jiné aplikace kvadratických forem k řešení neurčité rovnice $ax^2 + bxy + cy^2 = pz^m$.

Roku 1863 byla v Praze vydána Šimerkova *Algebra čili počtářství obecné*, ke které autor připojil základní poznatky z diferenciálního a integrálního počtu. Publikace byla schválena ministerstvem jako učebnice pro střední školy, zmíněný připojený přehled matematické analýzy byl následujícího roku vydán samostatně pod názvem *Přídavek k algebře*.

Šimerka byl prvním českým matematikem, který publikoval článek o teorii determinantů.⁶ Jeho odborné práce však nevzbudily větší pozornost.⁷ V jisté míře se na této skutečnosti podílela i jeho izolovanost od matematické komunity, která mu značně komplikovala práci. Augustin Pánek (1843–1908) uvádí v [10], že se ji zřejmě snažil překonat alespoň svoji oddaností matematice: ... lze poznati, s jakou láskou myslitel náš pěstoval královskou vědu mathematickou až do posledního dechu.

Rok po Šimerkově algebře, tj. roku 1864, vyšla *Algebra pro střední školy* od Josefa Smolíka (1832–1915).⁸

⁴ Např. Bolzanovo zpřesnění Gaussových důkazů základní věty algebry z roku 1817 uvedené v rámci práce věnované teorii řad a teorii funkcí.

⁵ Rok 1858 je uveden v člancích [10] a [12]. Literatura [7] však zmiňuje rok 1857, což je rok odmítnutí práce Královskou českou společností nauk.

⁶ Jde o stať *Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten gelöst mittels der Permutationslehre* vydanou ve Vídni roku 1858. Pojednává o řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla.

⁷ Určitou výjimkou je spis *Síla přesvědčení*. Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 11(1882), 75–111. Jeho německá přepracovaná verze *Die Kraft der Ueberzeugung* byla publikována roku 1883 ve Vídni.

⁸ Bližší informace o životě a díle Josefa Smolíka lze nalézt v [4], méně podrobněji v kapitole *Středoškolská učitelé* v [3].

2 Teorie determinantů ve 2. polovině 19. století

Ve druhé polovině 19. století bylo u nás v algebře snad nejvíce pozornosti věnováno teorii determinantů. Můžeme říci, že se jednalo většinou o kratší práce, které významné původní myšlenky nepřinášely, ale spíše opakovaly výsledky tou dobou již známé v zahraničí, rozvíjely nepodstatné vylepšení teorie či její aplikace v ostatních matematických disciplínách..

Martin Pokorný (1836–1900) vydal roku 1865 knihu *Determinanty a vyšší rovnice*, která je první česky psanou učebnicí, jež je z velké části věnována nauce o determinantech. Přeložil též 1. díl učebnice Richarda Baltzera (1818–1887) *Die Elemente der Mathematik*.

V teorii determinantů pracovali F. J. Studnička, K. Zahradník, Ed. Weyr, J. Valenta, M. Lerch, W. Matzka, L. Kraus, V. Jung, M. N. Vaněček, F. Hoza, M. Pelnář, O. Ježek, A. Puchta a další. Nejsoustavněji se této problematice věnoval František Josef Studnička (1836–1903).

2.1 Determinanty v pracích Františka Josefa Studničky

František Josef Studnička byl výraznou osobností české matematické komunity 2. poloviny 19. století. Svojí neúnavnou prací pro řadu odborných spolků (např. pro Jednotu českých matematiků a fyziků, Královskou českou společnost nauk), pedagogickou a organizační činností a vydáváním česky psaných učebnic pomáhal velkou měrou k rozkvětu české matematiky.

Teorii determinantů je věnována značná část Studničkových prací. Ani v nich však nenacházíme původní výsledky, ale spíše jen pozměněné postupy a speciální případy v zahraničí známých skutečností. Velkou pozornost Studnička věnoval některým základním poznatkům, např. výpočtům determinantů, typům úprav či Laplaceově větě. Zabýval se nulovostí determinantu v závislosti na vlastnostech příslušné matice, determinanty symetrických, antisymetrických, persymetrických,⁹ reciprokových a jiných speciálních matic i různými funkcionálními determinanty.

Značnou pozornost věnoval pojmům *mocninný* a *sestavný determinant*. Mocninným determinantem přitom nazýval determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} a_1^{m_1} & a_1^{m_2} & \dots & a_1^{m_n} \\ a_2^{m_1} & a_2^{m_2} & \dots & a_2^{m_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{m_1} & a_n^{m_2} & \dots & a_n^{m_n} \end{vmatrix},$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou libovolná čísla, $m_1 = 0 < m_2 < \dots < m_n$ jsou čísla celá. Jedná se tedy o obecněji koncipovaný Vandermondeův determinant, s nímž již pracoval Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Étienne Bézout (1730–1783) a jiní.

⁹ V *persymetrické matici* se rovnají prvky se stejným součtem řádkového a sloupcového indexu.

Sestavným (kombinačním) determinantem označoval Studnička determinant uspořádaný ze symetrických funkcí $K_0, K_1, \dots, K_n$ vytvořených z prvků $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tyto funkce jsou do řádků v uvedeném pořadí vepsány tak, aby byl každý další řádek „posunut alespoň o jeden prvek doprava”.

Příkladem sestavného determinantu je

$$\begin{vmatrix} K_2 & K_3 & K_4 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & 1 & K_1 & K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & K_1 \end{vmatrix},$$

kde

$$K_0 = 1,$$

$$K_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$K_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_1a_n + a_2a_3 + a_2a_4 + \dots + a_{n-1}a_n,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$K_n = a_1a_2a_3 \dots a_n.$$

Studnička také nacházel některé vztahy mezi mocninnými a sestavnými determinanty.

Ve své čtyřicetistránkové práci *A. L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. Eine literarisch-historische Studie* z poloviny osmdesátých let, vyslovil názor, že skutečným zakladatelem teorie determinantů je Cauchy. Zařadil se tak i mezi uznávané historiky matematiky.

Přehled prací F. J. Studničky se nachází např. v [6] (viz též [8]), připomeňme zde ještě jeho učebnice pojednávající o determinantech: útlá knížka *O determinantech*, která vyšla i německy a rusky,¹⁰ učebnice *Úvod do nauky o determinantech* a spis *O determinantech mocninných a sestavných*, který roku 1897 získal cenu Královské české společnosti nauk.

3 Teorie matic ve 2. polovině 19. století

Teorií matic se v našich zemích ve druhé polovině 19. století zabývali jen Eduard Weyr (1852–1903) a Ludvík Kraus (1857–1885), jehož předčasná smrt byla velkou ztrátou pro naši matematickou obec. Zmínění matematikové se znali osobně, byli přátelé;¹¹ byl to zřejmě právě Kraus, který vzbudil Weyrův zájem o maticový počet.

¹⁰ Německá verze se jmenuje *Einleitung in die Theorie der Determinanten. Für Studierende an Mittelschulen und technischen Anstalten*, ruská *Načal'naja osnovanija teorii Determinantov' ili opred'itelej*.

¹¹ Uveďme pro zajímavost některá pochvalná vyjádření Eduarda Weyra na adresu Krause uveřejněná v [15]: ... úvahy dra. Krause vynikají takovou přesností a obsahují tolik duchaplných myšlének, že je lze nazvat pravými perlami. ... Hlavním cílem života jeho bylo poznati pravdy mathematické; za tím cílem kráčel neohlížeje se ani po zevní slávě ani po hmotných výhodách ...

3.1 Krátká poznámka o Ludvíku Krausovi

Ludvík Kraus absolvoval přednášky Felixe Kleina (1849–1925) v Mnichově a po čtyři semestry poslouchal v Berlíně Karla Weierstrasse (1815–1897) a Leopolda Kroneckera (1823–1891). Roku 1881 se stal soukromým docentem na pražské univerzitě, kde se snažil své zahraniční zkušenosti předávat dál. Jeho odborné schopnosti dokumentuje skutečnost, že roku 1884 znal obecný důkaz Cayleyovy–Hamiltonovy věty.¹²

3.2 Eduard Weyr

Rovněž Eduard Weyr získal mnohé své znalosti a zkušenosti studiem v zahraničí (Göttingen, Paříž), roku 1874 se habilitoval na české polytechnice, roku 1876 na pražské univerzitě. Od téhož roku byl mimořádným a od roku 1881 řádným profesorem na české polytechnice, od roku 1890 suplujícím profesorem na české univerzitě v Praze. Bližší informace o životě Eduarda Weyra uvádí [2] nebo [11].

Uveďme nyní v chronologickém sledu jeho nejdůležitější práce¹³ a výsledky týkající se teorie matic; nejprve však zmiňme pokus o vydání trojdílné učebnice *Základové vyšší algebry*, kterou měl Eduard Weyr napsat se svým asistentem a přítelem Václavem Karlem Řehořovským (1849–1911).¹⁴ Zatímco první, Řehořovským sepsaný svazek *Theorie souměrných funkcí kořenů* vyšel roku 1883, zbývající dva, které se měly týkat eliminace, resultantů a determinantů, resp. teorie invariantů a kovariantů, publikovány nebyly.

3.3 Přehled nejdůležitějších prací a výsledků Eduarda Weyra

Dne 25. dubna 1884 vystoupil Eduard Weyr na zasedání Královské české společnosti nauk s přednáškou *O základní větě v theorii matic*. Uvedl zde Krausův důkaz Cayleyovy–Hamiltonovy věty a poté svou pozměněnou verzi.

V témže roce v práci *Sur la théorie des quaternions* sestrojil pro matici M druhého řádu matici

$$e^M = \frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \cdot e^{\mu_2} - \mu_2 \cdot e^{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E,$$

kde E je jednotková matice a μ_1, μ_2 jsou tzv. charakteristické kořeny matice M . Charakteristickými kořeny matice přitom Weyr rozuměl její vlastní čísla.

Definoval také přirozený logaritmus $\log M$ matice M vztahem

$$e^{\log M} = M,$$

a byl tak jedním z prvních matematiků, kteří s exponenciálou s maticovým argumentem a logaritmem matice pracovali.

¹² Vyslovení Cayleyovy–Hamiltonovy věty bylo nejdůležitějším výsledkem již zmíněného článku *A memoir on the theory of matrices* z roku 1858. Důkaz této věty však A. Cayley podal pouze pro matice řádu dva, naznačil pro matice řádu tři a podotkl, že si nemyslí, že by bylo nutné předložit obecný důkaz.

¹³ Přehled prací Eduarda Weyra sestavený na základě seznamu Karla Petra z roku 1905 je uveden v [2].

¹⁴ Bližší informace o V. K. Řehořovském lze nalézt např. v [14].

V roce 1885 vyšel v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky Weyrův článek *O řešení lineárních rovnic* týkající se řešení soustav lineárních rovnic a ve francouzském časopisu *Comptes Rendus* dva jeho krátké články *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*. V nich ve stručnosti prezentoval svoji teorii charakteristických čísel a s ní spojenou problematiku typických tvarů matic. Vystavěl ji na pojmu nulita matice.¹⁵ V článku *Sur la théorie des matrices* uvedl svůj odhad nulity součinu dvou matic:

$$n(A_i) \leq n(A_1 A_2) \leq n(A_1) + n(A_2), i = 1, 2.$$

Problematiku uvedenou v obou článcích později rozvedl a podrobně vysvětlil v práci *O theorii forem bilineárních* a v její německé verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen*.

Vedle obecně známého pojmu charakteristické kořeny (dnes vlastní číslo) zavedl Weyr i svůj termín charakteristické číslo. Jestliže je A komplexní matice n -tého řádu a λ její s -násobný charakteristický kořen, potom existuje přirozené číslo r , pro které je

$$n(A - \lambda E) < n(A - \lambda E)^2 < \dots < n(A - \lambda E)^r = n(A - \lambda E)^{r+1} = \dots.$$

Označíme-li

$$\begin{aligned} n(A - \lambda E) &= \alpha_1, \\ n(A - \lambda E)^2 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots \\ n(A - \lambda E)^r &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r, \end{aligned}$$

potom přirozená čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ nazveme charakteristická čísla příslušná k charakteristickému kořenu λ . Platí pro ně vztahy

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = s.$$

Eduard Weyr uvedl velmi důležitý poznatek: systém všech charakteristických kořenů a příslušných charakteristických čísel tvoří úplný systém invariantů podobnosti matic a ke každé přípustné volbě těchto invariantů je přidružena třída podobných matic. Soubor všech charakteristických čísel příslušných ke všem charakteristickým kořenům se nazývá Weyrova charakteristika. Dále sestrojil konkrétní matici M řádu n mající dané charakteristické kořeny a charakteristická čísla a k této matici našel s využitím vztahu $X = Q^{-1} M Q$ všechny matice X patřící do stejné třídy podobných matic. Přitom matice M má velmi jednoduchý tvar, který Ed. Weyr nazval *typický tvar*. Až na uspořádání prvků je to Jordanova matice.

¹⁵ V té době užívaný pojem nulita matice znamená (pro čtvercovou matici) rozdíl řádu a hodnoty matice. Pojem nulita matice definoval James Joseph Sylvester (1814–1897) roku 1882 v práci *On the properties of a split matrix*. Pojem hodnoty zavedl roku 1879 Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917) ve dvou článcích (v jednom pro čtvercovou matici, ve druhém pro obdélníkovou matici).

V roce 1887 vyšlo ve Věstníku Královské české společnosti nauk Weyrovo pojednání *O binárných maticích*. Binárními maticemi přitom Weyr nazýval matice druhého řádu, vyložil základní poznatky o těchto maticích a operacích s nimi. Práce sloužila především pro popularizaci teorie matic a k objasnění vztahu mezi maticemi a hyperkomplexními čísly. Pod pojmem kvaternion rozuměl Eduard Weyr kvaternion s komplexními koeficienty,¹⁶ k odlišení kvaternionu s reálnými koeficienty pak používal přívlastku reálný. Pozornost věnoval opět i kanonickým tvarům.

Rovněž dokázal, že celou i racionální funkci matice M druhého řádu lze redukovat na lineární funkci tvaru $\alpha M + \beta E$, kde skaláry α, β je možno vyjádřit pomocí charakteristických kořenů (E je jednotková matice). Jestliže jsou absolutní hodnoty charakteristických kořenů μ_1, μ_2 matice M menší než je poloměr konvergence řady

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j,$$

potom je definována i matice

$$\varphi(M) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j M^j,$$

a platí $\varphi(M) = \alpha M + \beta E$. Skaláry α, β se určí pomocí řady $\varphi(z)$.

Eduard Weyr se věnoval i komplanárním maticím; maticí komplanární s maticí M přitom rozuměl každou matici tvaru $\alpha M + \beta E$. Ukázal, že všechny matice komplanární s určitou maticí M jsou komplanární navzájem a že výsledkem sčítání a násobení komplanárních matic je opět matice komplanární s maticemi, s nimiž operace provádíme.

Popsal též vztah mezi maticemi druhého řádu a hyperkomplexními čísly,¹⁷ konkrétněji kvaterniony. Jsou-li J_1, J_2, J_3, J_4 čtyři lineárně nezávislé matice druhého řádu, pak lze každou matici M druhého řádu psát ve tvaru

$$M = \rho_1 J_1 + \rho_2 J_2 + \rho_3 J_3 + \rho_4 J_4$$

a matice druhého řádu považovat za systém hyperkomplexních čísel se čtyřmi základními jednotkami. Násobení v tomto systému je zavedeno pomocí tzv. *strukturních konstant*.

Eduard Weyr rovněž uvedl některé konkrétní volby základních matic. Velmi jednoduchá je následující varianta:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹⁶ Kvaternion s komplexními koeficienty se většinou nazývá bikvaternion.

¹⁷ Kromě Eduarda Weyra se problematikou hyperkomplexních čísel v českých zemích ve druhé polovině 19. století zabývali i August Seydler (1849–1891), Matyáš Lerch (1860–1922), František Josef Studnička, Jan Odstrčil (1837–1888) a jiní.

Pro volbu

$$J_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nalezl Ed. Weyr matice

$$J_2 = i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = j = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, J_4 = k = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

pro které platí $J_2 J_2 = J_3 J_3 = -J_1$ a dále $J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_4$.

Souvislost mezi maticemi a kvaterniony pak vyjádřil těmito slovy:

Nyní jest patrné, že theorie matric jest totožná s teorií kvaternionů; stačí libovolnou matici

$$M = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

uvést do tvaru $w + xi + yj + zk$, kde w, x, y, z jsou skalary, t. j. do tvaru kvaternionu, aby ona shoda byla patrna.

Dnes bychom řekli, že každou matici M druhého řádu lze zapsat jako lineární kombinaci čtyř matic druhého řádu, které tvoří bázi vektorového prostoru dimenze čtyři. Mezi množinou uspořádaných čtveřic čísel uvažovaného tělesa, která jsou koeficienty lineární kombinace, a množinou kvaternionů s koeficienty z tohoto tělesa T existuje bijektivní zobrazení.

Nyní se ještě vraťme k Weyrovu dalšímu spisu *O theorii forem bilineárných*, který již byl výše zmíněn a jeho hlavní poznatky představeny. Vydala jej Královská česká společnost nauk v roce 1889 a vyznamenala svou cenou. Ve spisu je již užíván termín *matice*, v předchozích publikacích používal autor termínů *matrice* a *matrix*. Německy psaná verze *Zur Theorie der bilinearen Formen*, jejíž některé části jsou oproti českému znění rozvinuty a některé naopak zkráceny nebo dokonce vynechány, byla publikována roku 1890 v časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Znovu připomeňme, že jsou v těchto dvou pracích podrobně vyloženy výsledky uveřejněné v krátkých, francouzsky psaných člancích z roku 1885. A nejen v nich. Práce vysvětlují základní fakta o maticích, pojednávají o soustavách lineárních rovnic, o charakteristických kořenech, zpracovávají problematiku kanonických (typických) tvarů a s ní spojenou otázku podobnosti matic, snaží se o přiblížení teorie matic s teorií bilineárních forem a jejich transformací.

Eduard Weyr rovněž ukázal, že pomocí charakteristických čísel lze vyřešit i problém, který v maticové řeči lze formulovat takto: jak nalézt nutnou a postačující podmínku pro existenci regulárních matic H, K , pro které je

$$P' = HPK, Q' = HQK,$$

kde P, Q, P', Q' jsou matice řádu n , a metodu k určení transformačních matic H, K .¹⁸

Na závěr uvedeme ještě dva dosud nezmiňené výsledky. K danému polynomu f našel Ed. Weyr všechny matice, pro které $f(M) = 0$ a dokázal další vztah týkající se nulity součinu matic. Uvažujeme-li dva nesoudělné polynomy φ a ψ , potom nulita součinu matic $\varphi(M)$ a $\psi(M)$ je rovna součtu nulit těchto matic, tj.

$$n(\varphi(M) \cdot \psi(M)) = n(\varphi(M)) + n(\psi(M)).$$

4 Závěr

Přestože v teorii matic v našich zemích do konce 19. století pracoval soustavněji v podstatě jediný matematik, a to Eduard Weyr, byly jeho zásluhou některé české výsledky známy i v zahraničí (např. J. J. Sylvesterovi) a byly na úrovni tehdejší světové matematiky. Se zájmem většího počtu českých matematiků se teorie matic setkala až ve 20. století.

Ačkoli dnes není Weyrova teorie charakteristických čísel běžně zmiňována, vracejí se k ní i na přelomu tisíciletí někteří matematikové a pokoušejí se o její vyložení z pohledu dnešní matematiky. Například roku 1999 vyšel v časopisu *The American Mathematical Monthly* článek Helen Shapiro *The Weyr characteristic* [13], ve kterém se k výsledkům českého matematika autorka vrací a snaží se o jejich moderní výklad.

Literatura

- [1] Bečvář J.: *Z historie lineární algebry*. Edice Dějiny matematiky, 35. svazek, Matfyzpress, Praha, 2007.
- [2] Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*. Edice Dějiny matematiky, 2. svazek, Prometheus, Praha, 1995.
- [3] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. Edice dějiny matematiky, 34. svazek, Matfyzpress, Praha, 2008.
- [4] Bečvářová M.: *Josef Smolík (1832–1915)*. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.
- [5] Fiedler M.: *The Development of Linear Algebra in Czechia*. Image 41(2008), 18–20.
- [6] Němcová M.: *František Josef Studnička (1836–1903)*. Edice Dějiny matematiky, 10. svazek, Prometheus, Praha, 1998.
- [7] Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích*. Československá akademie věd, Praha, 1961.
- [8] Pánek A.: *Dr. František Josef Studnička. Nástin jeho života a činnosti*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 33(1904), 369–480.
- [9] Pánek A.: *O životě a činnosti Martina Pokorného*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 30(1901), 81–100.

¹⁸ Tento problém již vyřešili K. Weierstrass roku 1868 v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* a L. Kronecker v pracích *Über Schaaren quadratischer Formen* z roku 1868 a *Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen* z roku 1874.

- [10] Pánek A.: *Život a působení p. Václava Šimerky*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 17(1888), 253–256.
- [11] Petr K., Sobotka J.: *O životě a činnosti Eduarda Weyra*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 34(1905), 457–516.
- [12] Petržílka V.: *Ocenění prací P. Václava Šimerky*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 55(1926), 352–360.
- [13] Shapiro H.: *The Weyr characteristic*. The American Mathematical Monthly, 106(1999), 919–929.
- [14] Sobotka J.: *Václav Karel Řehořovský [nekrolog]*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 42(1913), 129–145.
- [15] Weyr Ed.: *Život a působení dra Ludvíka Krause*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 15(1886), 49–52.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*.

Adresa

Mgr. Martina Štěpánová
 Katedra informatiky v dopravě
 Dopravní fakulta Jana Pernera
 Univerzita Pardubice
 Studentská 95
 532 10 Pardubice
 e-mail: *martinastepanova@centrum.cz*

OD SHODNOSTI K TRANSFORMACÍM

DANA TRKOVSKÁ

Abstract: The article deals with the historical background of the notion *geometric transformation* from ages up to the 19th century. Significant moments when basic types of transformations (isometry, similarity, geometric motions, axial affinity, central dilatation, circular inversion, projection, stereographic projection, affine and projective transformations) were introduced are mentioned as well as prominent mathematicians and their works.

1 Úvod

První náznaky pojmu *geometrická transformace* lze nalézt již ve starém Řecku před více než dvěma tisíci lety. Zpočátku se jednalo pouze o vztah mezi dvěma rovinnými, případně prostorovými objekty, který umožnil jednoduché řešení řady geometrických problémů. S postupným rozvojem matematiky se transformacím věnovala stále větší pozornost, získané poznatky se prohlubovaly a zobecňovaly, zaváděly se stále složitější typy transformací. Jejich aplikace v dalších oborech lidské činnosti jsou všestranné, příkladem je využití perspektivy v malířství nebo stereografické projekce při konstrukci map. V dnešní době se transformace využívají k řešení řady netriviálních problémů z různých oblastí matematiky, včetně např. neeukleidovské geometrie.

V příspěvku se pokusíme nastínit postupný vývoj chápání jednotlivých typů geometrických transformací od nejstarších dob až zhruba do 19. století. U každého typu transformace popíšeme základní myšlenku, poukážeme na její pravděpodobně první výskyt a uvedeme přední osobnosti, které s daným typem transformace pracovaly.

2 Shodnost a podobnost

Nejstarším příkladem geometrické ekvivalence je *shodnost*. Již staří Řekové považovali dva objekty za shodné, pokud existoval určitý pohyb, reálný nebo myšlenkový, který jeden objekt přemístil na druhý tak, že se kryly. Nevýhodou tohoto přístupu byla skutečnost, že byl pohyb vždy chápán pouze v souvislosti s jednotlivým objektem, s nímž byl pevně svázán. Skládání pohybů dvou různých objektů tedy nebylo možno uvažovat, a tudíž se Řekové ještě nemohli ani vzdáleně přiblížit k pojmu grupa. Další překážkou mohlo být chápání roviny jako omezené části plochy.¹

Geometrické pohyby se v předeukleidovské geometrii poměrně hojně využívaly. Svědčí o tom např. skutečnost, že matematik a filozof Proklos (410–485) ve svých komentářích k Eukleidovým *Základům* poukázal na fakt, že Eudemus ve své *Historii geometrie* připsal Thaletovi z Milétu (7.–6. stol. př. n. l.) důkazy tvrzení, že kruh je svým průměrem rozdělen na dvě shodné části, že úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné, že vrcholové úhly jsou shodné a že dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a dvou úhlech, jsou navzájem shodné.

¹ Významným krokem, který později vedl k využití teorie grup v geometrii, byla myšlenka rozšíření pohybu svázaného s jedním objektem na pohyb celé roviny. Tento nový pohled již dával skládání různých pohybů smysl. Autorem této, z pohledu geometrických transformací revoluční myšlenky byl August Ferdinand Möbius (viz [2]).

Thaletovy důkazy těchto tvrzení nemohly být založeny na žádných axiomech ani pomocných větách, neboť v jeho době ještě nebyl vybudován ani axiomatický systém, ani systém základních vět. Výše uvedená tvrzení se týkají shodnosti objektů (půlkruhů, úhlů, trojúhelníků), Thales je patrně dokázal na základě představ o ztotožnění uvažovaných objektů pomocí „geometrických transformací“, i když je toto označení v jeho době ještě hodně nadnesené. V dnešním smyslu *shodné* objekty Thales nazýval *podobné*. Zdá se, že označení *shodné* pro objekty stejného tvaru a velikosti zavedli Pythagorejci (6.–4. stol. př. n. l.), kteří věřili, že takové objekty jsou tvořeny shodným počtem bodů. Termín *podobné* objekty později získal moderní, obecnější význam, Eukleides a jeho žáci *shodné* objekty (v dnešním smyslu) nazývali *podobné a stejné*.²

Eukleides z Alexandrie (asi 300 př. n. l.) uvádí v I. knize *Základů* následující tři věty o shodnosti trojúhelníků a v dalším textu se na ně odkazuje.

Když mají dva trojúhelníky dvě strany (střídavě) s dvěma stranami stejné a úhly stejnými stranami sevřené mají stejné, budou i základnu základně míti rovnou a trojúhelník s trojúhelníkem bude stejný i ostatní úhly s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, (střídavě) budou stejné. ([1], kniha I, věta IV, str. 4)

Když mají dva trojúhelníky dvě a dvě strany střídavě stejné a mají též základnu základně rovnou, budou též úhly stejnými přímkami sevřené míti stejné. ([1], kniha I, věta VIII, str. 6)

Když mají dva trojúhelníky dva úhly dvěma úhlům jednotlivě rovné a jednu stranu jedné straně rovnou buď při stejných úhlech nebo proti jednomu ze stejných úhlů, budou míti též ostatní strany rovné ostatním stranám i zbývající úhel úhlu zbývajícimu. ([1], kniha I, věta XXVI, str. 14)

3 Pohyby v geometrii

První představy o pohybu, tj. v našem pojetí transformace, využívali Pythagorejci poměrně často. Např. přímku chápali jako stopu pohybujícího se bodu, rovinu jako stopu pohybující se přímky.

Archytas, člen pythagorejské školy, využil pohyb při řešení klasické řecké úlohy zdvojení krychle (tzv. Délský problém). Označme a délku hrany uvažované krychle. Archytas uvažoval (v dnešní symbolice a ve vhodně zvolené soustavě souřadnic) válec $x^2 + y^2 = 2ax$, kužel $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$ a anuloid (torus) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$, který vznikl *rotací* kružnice $x^2 + z^2 = 2ax$ kolem souřadné osy z . Všechny tři uvedené útvary se protnou v bodě P , jehož souřadnice $[x, y, z]$ splňují rovnosti

$$\frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Vzdálenost bodu P od počátku zvolené soustavy souřadnic představuje hledanou délku hrany zdvojené krychle.

² Stejně pak i podobné (shodné) jsou útvary tělesové omezené rovinami podobnými, stejnými počtem i velikostí. Viz [1], kniha XI, definice 10, str. 238.

Eukleides ve svých *Základech* definoval kružnici, aniž by využil pohyb. Jeho definice koule, kužele a válce jsou však již kinematické, pohyb v sobě zahrnují. Koule dle Eukleida vznikne rotací půlkruhu kolem jeho průměru, kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny a válec vznikne rotací obdélníku kolem jedné jeho strany.

Kruh jest útvar rovinný, objímáný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všechny sobě rovny jsou. ([1], kniha I, definice 15, str. 1)

Koule jest útvar omezený tím, že se kolem pevného průměru polokruhu polokruh otočí, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčet. ([1], kniha XI, definice 14, str. 238)

Kužel jest útvar omezený tím, že se trojúhelník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčet. ([1], kniha XI, definice 18, str. 238)

Válec jest útvar omezený tím, že se rovnoběžník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran rovnoběžníků pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčet. ([1], kniha XI, definice 21, str. 238)

Uvedený způsob definování základních rotačních těles patrně odráží starší tradici, později ustoupil do pozadí. Theodosius (1.–2. stol. n. l.) ve svém díle *Sphaerica* definuje kouli staticky, podobně jako Eukleides definuje kružnici.

Na druhou stranu, např. Aristoteles ze Stageiry (384–322 př. n. l.) byl proti využití pohybu v geometrii, matematické objekty považoval za nehybné. Zastával názor, že rovina je obecnější (abstraktnější) než těleso, protože postrádá jeden jeho rozměr, přímka je obecnější než rovina, protože postrádá její šířku, a bod je obecnější než přímka, protože postrádá její délku. Tedy přímka nemůže být složena z bodů, rovina z přímek a těleso z rovin. Podle Aristotela tedy nic, co je spojitého, nelze složit z jednotlivostí. Proto tedy nelze přímku získat pohybem bodu, rovinu pohybem přímky a těleso pohybem roviny.

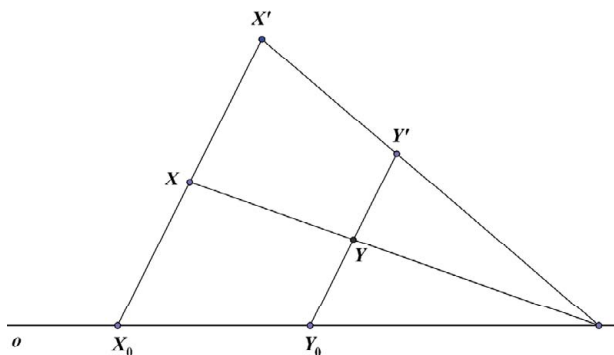
Arabští matematici Thābit Ibn Qurra (9. stol.) a Abū Alī Ibn al-Haytham (10.–11. stol.) tento Aristotelův přístup kritizovali a pohyby v geometrii hojně využívali. Naopak Omar Khayyam (11.–12. stol.) Aristotelovy názory sdílel a ve svých komentářích k Eukleidovým *Základům* kritizoval Ibn al-Haythama. Namítal, že není žádných pochyb, že přímka může existovat pouze v rovině, je její částí, a nemůže jí tedy předcházet, nemůže se bez ní pohybovat. Stejně tak přímka nemůže vzniknout pohybem bodu, protože přímka svou podstatou, svou existencí, bodu předchází.

Další matematici blízkého a středního východu i západní Evropy ve svých geometrických pracích pohyby využívali celkem pravidelně a systematicky.

Prvními doloženými geometrickými transformacemi, které jsou složitější než jednoduché pohyby, jsou osová afinita a stejnoolehlost (homothetie).

4 Osová afinita

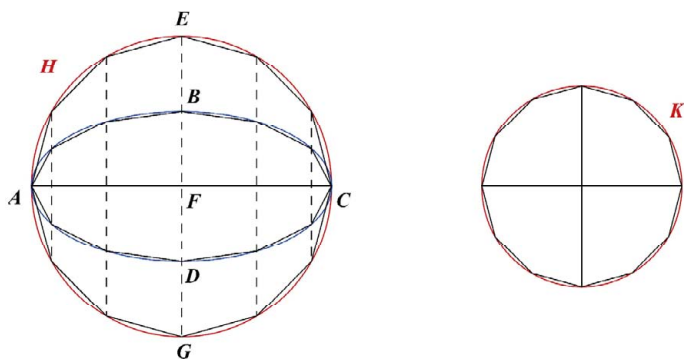
Osová afinita je určena osou afinity o a tzv. charakteristikou k . Jedná se o zobrazení, které úsečku zobrazí opět na úsečku, přičemž přímky, v nichž obě úsečky leží, se protínají na ose afinity. Charakteristika určuje poměr vzdáleností obrazu bodu a jeho vzoru od průsečíku jejich spojnice s osou afinity (viz obr. 1).



Obr. 1: Osová afinita s osou afinity o a charakteristikou $k = 2$

Osová afinita se poprvé objevila v pojednání *O konoidech a sféroidech* (*Peri kōnoeideōn kai sphairoeideōn*), jehož autorem je Archimedes ze Syrakus (287–212 př. n. l.). Týká se výpočtu objemů rotačních elipsoidů, vrchlíků dvoudílných rotačních hyperboloidů a rotačních paraboloidů. Věta 4 tohoto pojednání říká, že poměr obsahu libovolné elipsy a obsahu kruhu sestrojeného nad její hlavní osou je stejný jako poměr délek vedlejší a hlavní osy.

Nechť je dána elipsa (viz obr. 2). Nad její hlavní osou uvažujme kruh H . Sestrojme další kruh K tak, aby pro jeho obsah platilo $S_K : S_H = BD : EG$. Potom obsah kruhu K je roven obsahu dané elipsy. Archimedovo zdůvodnění je následující (důkaz je veden sporem).



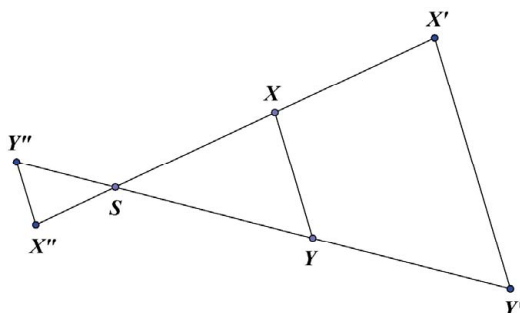
Obr. 2: Archimedův důkaz využívající osovou afinitu

Kdyby byl obsah kruhu K větší než obsah elipsy, vepíše Archimedes do kruhu K n -úhelník (n je sudé číslo), jehož obsah je také větší než obsah dané elipsy, do kruhu H vepíše jemu podobný n -úhelník, spojí úsečkami dvojice jeho vrcholů, které jsou souměrně sdruženy podle hlavní osy elipsy, označí jejich průsečíky s elipsou a ukáže, že z těchto bodů vzniklý mnohoúhelník je k vepsanému mnohoúhelníku v poměru $BD : EG$; vepsaný mnohoúhelník je přitom ve stejném poměru k mnohoúhelníku vepsanému kruhu K . Tedy mnohoúhelník vepsaný uvažované elipse má stejný obsah jako mnohoúhelník vepsaný kruhu K , což je spor s předpokladem, že mnohoúhelník vepsaný kruhu K má obsah větší než elipsa. Předpoklad, že obsah kruhu K je menší než obsah elipsy se vyvrátí zcela analogicky.

Archimedes v tomto důkazu využívá pravoúhlou osovou afinitu určenou osou AC , jejíž charakteristika je rovna poměru hlavní a vedlejší osy elipsy. Ukazuje, že poměr obsahů ploch vepsaných n -úhelníků je roven poměru obsahů ploch geometrických útvarů, které získáme z těchto n -úhelníků pro n jdoucí do nekonečna. Odvodil, že obsah elipsy mající poloosy a a b je roven πab a poloměr kruhu K je roven $\sqrt{ab}$ (geometrickému průměru délek obou poloos).

5 Stejnolehlost

Stejnolehlost (homothetie, centrální dilatace) je určena středem stejnoolehlosti S a tzv. koeficientem stejnoolehlosti $\kappa \neq 0$. Jedná se o podobné zobrazení, které úsečku zobrazí na úsečku s ní rovnoběžnou, přičemž střed stejnoolehlosti, bod a jeho obraz jsou kolineární. Absolutní hodnota koeficientu stejnoolehlosti určuje poměr podobnosti, jeho znaménko určuje umístění obrazu vzhledem ke středu stejnoolehlosti (viz obr. 3).



Obr. 3: Stejnolehlosti se středem S a koeficienty $\kappa = 2$ a $\kappa = -\frac{1}{2}$

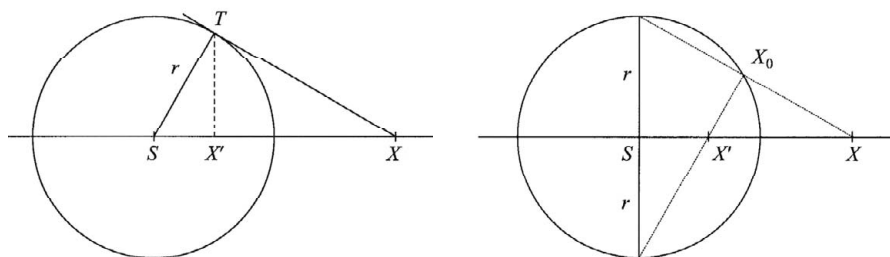
První výskyt stejnoolehlosti lze nalézt již v Eukleidových *Základech*.³ Stejnolehlost dále zmínil Apollonios z Pergy (3.–2. stol. př. n. l.) v pojednání *Rovinná místa* (*Peri topoi epiphanoi*), o němž se dochoval záznam díky historické práci *Synagōgē mathēmatikē*, jejímž autorem je Pappos z Alexandrie (3. stol. n. l.). Apollonios pravděpodobně znal základní vlastnosti stejnoolehlosti, podrobnější informace nejsou známy.

6 Kruhová inverze

Apollonios ve výše uvedené práci *Rovinná místa* rovněž poprvé uvažuje *kruhovou inverzi*. Jedná se o zobrazení, které je určeno středem S a tzv. koeficientem inverze $\kappa \neq 0$. Střed inverze, bod a jeho obraz jsou kolineární, přičemž součin vzdáleností obrazu a vzoru od středu inverze je roven absolutní hodnotě koeficientu inverze, znaménko koeficientu inverze určuje umístění obrazu vzhledem ke středu inverze. Obraz středu inverze se klade do nevlastního bodu ∞ . Kruhová inverze je involutorním zobrazením,⁴ zobrazuje zobecněné kružnice (přímky nebo kružnice) opět na zobecněné kružnice. Dva základní způsoby konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi se středem S a koeficientem inverze $\kappa = r^2$ jsou uvedeny na obr. 4.

³ Na dané přímce narýsuj útvar přímkový danému útvaru přímkovému podobný a podobně položený (stejnolehlý). Viz [1], kniha VI, věta XVIII, str. 93.

⁴ Říkáme, že zobrazení f je involutorní, jestliže složeno samo se sebou dává identitu, tj. $f \circ f = \text{identita}$.



Obr. 4: Konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi

Apollonios znal základní vlastnosti kruhové inverze. Ve svém dalším díle *Pojednání o kuželosečkách* (Kōnika) se již věnoval obecně inverzím na všech (regulárních) kuželosečkách, tedy nejen na kružnici, ale rovněž na elipse, hyperbole a parabole. Kruhová inverze byla potom po řadu století matematiky opomíjena a nepříliš využívána.

Kruhové inverzi se patrně po Apolloniově jako první blíže věnoval až Jacob Steiner (1796–1863). Je mu přisuzován objev inverze v plné obecnosti (1824), on sám v této souvislosti hovořil o „Wiedergeburt und Auferstehung“ (znovuzrození a vzkříšení). Steinerovy statě věnované *inverzní geometrii* nebyly publikovány, našly se až v jeho pozůstalosti.

Belgický matematik Adolphe Quetelet (1796–1874) kolem roku 1827 odvodil známé analytické vyjádření kruhové inverze. První systematické zpracování kruhové inverze patrně sepsal Giusto Bellavitis (1803–1880) roku 1836 pod názvem *Teoria delle figure inverse e loro uso nella geometria elementare* (Teorie inverzních útvarů a její využití v elementární geometrii). Z názvu pochází dnešní termín *kruhová inverze*. Autor zde zformuloval definici a vyložil základní vlastnosti inverze; později inverzi zobecnil do trojrozměrného prostoru.

Během dalších let inverzi znovu objevila řada dalších matematiků, např. William Thomson (lord Kelvin, 1824–1907), který v letech 1845 až 1847 v rámci studia elektrostatiky hovořil o *transformaci s reciprokými průvodiči* a rozšířil svoje fyzikální úvahy na geometrický prostor. Tento termín od W. Thomsona převzal Joseph Liouville (1809–1882) a modifikoval jej na *transformace reciprokými poloměry* (transformation par rayons vecteurs réciproques).⁵ Dokázal, že jde o jedinou nelineární transformaci v prostoru, která je konformní (zachovává úhly).

Studium kruhové inverze završil August Ferdinand Möbius (1790–1868). V práci *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* z roku 1855 provedl významné zobecnění inverze, kdy čistě geometrickými prostředky položil základy obecné rovinné transformace, která kružnice zobrazuje opět na kružnice (tzv. *kruhové transformace*). Za základ takového zobrazení vzal následující předpoklady: zobrazení je bijekcí, obrazem čtveřice bodů ležících na kružnici jedné roviny musí být čtveřice bodů incidentních s kružnicí druhé roviny (kružnicemi nazýval i přímky, tj. uvažoval tzv. zobecněné kružnice), posledním předpokladem je zachování spojitosti (dvěma nekonečně blízkým bodům jedné roviny odpovídají dva nekonečně blízké body druhé roviny).

⁵ Viz Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 12(1847), 265–290.

Čistě syntetickými úvahami dospěl A. F. Möbius po vyloučení lineárních zobrazení k závěru, že v každé z rovin existuje právě jeden bod, který se v eukleidovském prostoru nemůže zobrazit do žádného bodu druhé roviny (centrální bod, střed) a ke každé z rovin je třeba přidat po jednom bodu, který bude obrazem, resp. vzorem centrálního bodu roviny vzorů, resp. obrazů (odtud *Möbiova rovina*). Viz např. [9]. Na jeho práci navázali Carl Friedrich Gauss (1777–1855), který položil základy analytického vyjádření kruhových transformací v komplexní rovině, a Arthur Cayley (1821–1895), který ukázal, že kruhová transformace je složením kruhové inverze v Möbiově rovině a libovolného pohybu (1858).⁶

7 Promítání

Promítání (projekce) se podle dochovaných záznamů hojně využívalo již ve starém Řecku a Římě. Známý římský stavitel a architekt P. M. Vitruvius (1. stol. př. n. l.) ve svém díle *Deset knih o architektuře* (De architectura libri decem) popisuje tři projekce hojně využívané staviteli. Dle jeho slov se jedná o *ichnografii*, *orthografii* a *scénografii*. Ichnografie (*ichnos* = stopa, *grapho* = psaní) spočívá ve vytvoření obrazového modelu (projektu, plánu) prostorové situace pomocí pravítka a kružítka, v dnešní terminologii jde o konstrukci *horizontální projekce*, orthografie (*orthos* = kolmý) spočívá v zakreslení nárysu, v dnešní terminologii jde o konstrukci *frontální projekce*, a konečně scénografie (*skēnē* = scéna) spočívá v zahrnutí *perspektivy*. Lze se domnívat, že tyto tři projekce byly známy již Řekům několik století před naším letopočtem.

Pappos z Alexandrie (3. stol. n. l.) v VII. knize *Synagōgē mathēmatikē* uvádí geometrické vlastnosti středověho promítání a perspektivy. Odkazuje zde na Eukleidovo ztracené dílo *Porismata*,⁷ které se tomuto tématu možná také věnovalo. Pappos zde uvádí následující větu (viz obr. 5):

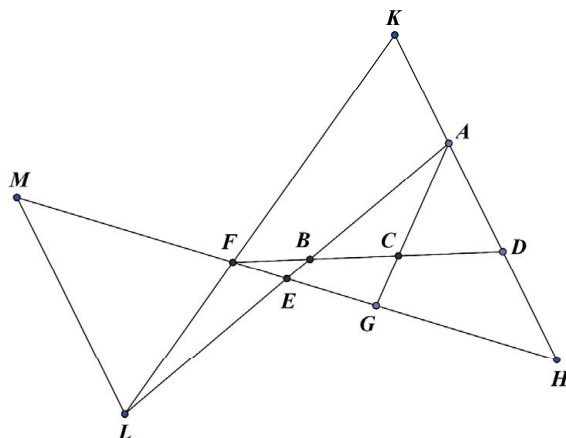
Jsou-li dány tři různé přímky AB , AC a AD , které protínají dvě další přímky FB a FE , potom platí následující rovnost

$$\frac{|FB| \cdot |DC|}{|FD| \cdot |BC|} = \frac{|FE| \cdot |HG|}{|FH| \cdot |GE|}, \text{ neboli } \frac{|FB|}{|FD|} : \frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|FE|}{|FH|} : \frac{|GE|}{|HG|}.$$

Protože body F , E , G , H získáme z bodů F , B , C , D projekcí z bodu A , je výše uvedená Pappova rovnost speciálním příkladem obecné vlastnosti každé projekce, podle které se při projekci zachovává dvojpoměr čtyř kolineárních bodů.

⁶ Viz Cayley A.: *Note on the "Circular Relation" of Prof. Möbius*. Quarterly Mathematical Journal 2(1858), str. 162.

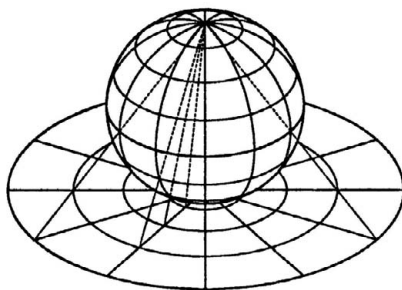
⁷ Špis *Porismata* tvořily tři knihy, úryvkovitě se jejich obsah zachoval v pracích, jež sepsal Pappos kolem roku 300 n. l. *Porisma jest úkol, jímž se žádá, by se na základech daných vyhledala veličina určitých vlastností*. V Eukleidových *Základech* porisma značí poučku, jež z důkazu poučky jiné vysvítá jasně sama sebou (důsledek). Viz [1], první strana nestránkovaného Úvodu.



Obr. 5: Zachování dvojpoměru čtyř kolineárních bodů při projekci

8 Stereografická projekce

Příkladem jedné z nejvýznamnějších projekcí, která byla využívána již ve starověku, je *stereografická projekce*. Jedná se o průmět sféry z jednoho jejího bodu (pólu) do tečné roviny vedené diametrálně protilehlým bodem, nebo do roviny s ní rovnoběžné (viz obr. 6). Při této projekci se kružnice procházející pólem zobrazí do přímek, ostatní kružnice se zobrazí opět do kružnic. Stereografická projekce je konformním zobrazením (zachovává úhly mezi dvěma křivkami).



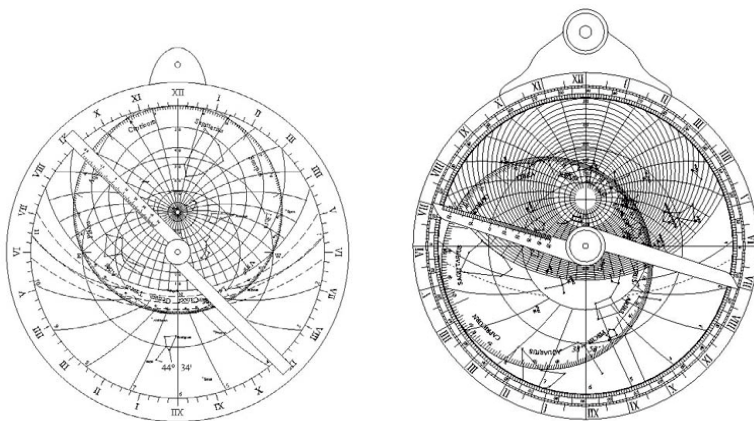
Obr. 6: Stereografická projekce

Základy stereografické projekce položil patrně Hipparchos (2. stol. př. n. l.).⁸ První písemné zmínky o stereografické projekci však nacházíme až u Vitruvia v díle *Deset knih o architektuře* a v Ptolemaiově pojednání *Zobrazení sféry do roviny* (Aplōsis epiphaneias sphairas, Planisphaerium).

⁸ Hipparchos byl jeden z největších antických astronomů, který sestavil první velký katalog hvězd, jenž obsahoval přesné polohy více než 800 stálíc. Hipparchos zdůrazňoval přesná pozorování a matematické výpočty. Vymyslel nové přístroje pro měření výšky hvězd, stanovil sklon zemské osy k ekliptice, určil délku slunečního roku s chybou jen 6 minut. Chtěl prověřit heliocentrický model vesmíru. Vyšel ze správné úvahy, že pokud Země obíhá kolem Slunce, pak se musí v průběhu roku měnit vzájemná poloha hvězd na nočním nebi. Příslušná měření skutečně provedl, ale změny ve vzájemné poloze hvězd nezaznamenal. Proto heliocentrický model zavrhl.

Klaudios Ptolemaios (1.–2. stol. n. l.)⁹ sepsal spis *O projekci* (Peri analēmματος, Analemma), v němž se zabýval ortogonální projekcí nebeské sféry do horizontální roviny, kterou využíval k řešení různých problémů sférické astronomie.

Vitruvius i Ptolemaios se věnovali astronomickým pozorováním a měřením nebeské sféry, k jejímu znázorňování využívali přístroje *arachné* a *astroláb* (astrolabon organon).¹⁰ Astroláb je založen na stereografické projekci nebeské sféry z nebeského pólu (viz obr. 7). Ve středověku byla stereografická projekce nazývána *tastih al-asturlāb*, termín stereografická projekce (*stereon* = těleso) zavedl Francois D'Aguillon (1566–1617) v díle *Šest knih o optice* (Opticorum Libri VI, 1613). Jak Vitruvius, tak Ptolemaios ve svých pracích využívali základní vlastnosti stereografické projekce, avšak bez důkazů.



Obr. 7: Astronomický přístroj astroláb

První souhrnnější pojednání o stereografické projekci včetně důkazů základních vlastností sepsal až Ahmad al-Farghānī (9. stol.) pod názvem *Kniha o konstrukci astrolábu*. Stereografické projekci zde věnuje první kapitolu a dokazuje mimo jiné, že kružnice procházející pólem se zobrazí do přímek a ostatní kružnice opět do kružnic, přičemž není obecně obrazem středu kružnice střed kružnice získané zobrazením; v dalších kapitolách se pak již věnuje konstrukci samotného astrolábu.

Další matematici středověku se pokoušeli využít pro konstrukci astrolábu jiné geometrické transformace. Abū Hāmid al-Saghānī (10. stol.) ve svém díle *Kniha o projekci do roviny* navrhl nahradit stereografickou projekci sféry do roviny z jejího pólu projekcí z libovolného bodu souřadnicové osy. V takové projekci se kružnice na sféře zobrazí obecně do kuželoseček.

⁹ Klaudios Ptolemaios je autorem *Almagestu* (Mathematiké syntaxis, Megalé syntaxis), astronomického spisu, který představoval encyklopedii tehdejšího hvězdářského vědění. Byl zastáncem geocentrického systému, pokládal Zemi za střed vesmíru, okolo něhož obíhají Slunce, Měsíc, planety a hvězdy. Jeho popis Sluneční soustavy byl považován za správný po celých patnáct století. Z nejjasnějších viditelných hvězd sestavil 48 souhvězdí, která mu připomínala určité obrazce postav, zvířat nebo věcí. Mnohá z jeho souhvězdí se používají v moderní astronomii dodnes.

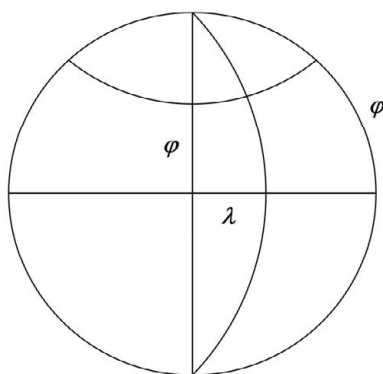
¹⁰ *Astroláb* je středověký astronomický přístroj, který v sobě zahrnuje zjednodušenou mapu hvězdné oblohy (nebeské sféry). Obsahuje pevné i pohyblivé části, které umožňují modelovat pohyby nebeských těles, měřit jejich úhlovou výšku nad horizontem, zeměpisné souřadnice i místní čas. Hlavní ciferník je rozdělen na dvanáct dílů podle znamení zvěrokruhu, střed ciferníku představuje nebeský pól.

V knize *Přehled možností konstrukce astrolábu*, kterou sepsal Abū l-Rayhān al-Bīrūnī (10.–11. stol.), autor nejprve popisuje různé způsoby a metody konstrukce tohoto přístroje. V dalším textu navrhuje za základ konstrukce tzv. *válcovou projekci*, tj. ortogonální projekci podle osy, která je limitním případem projekce al-Saghānīho, pokud střed projekce klademe do nekonečna. Při této projekci se kružnice zobrazí buď na kružnice, nebo na elipsy.

Stereografická projekce se využívá k zobrazení povrchu Země do roviny, tj. při tvorbě map. Vzhledem k tomu, že je konformním zobrazením, jsou takové mapy velmi užitečné např. pro mořeplavce.

Využití stereografické projekce při tvorbě map se věnuje již Abū l-Rayhān al-Bīrūnī v díle *Pojednání o zobrazení souhvězdí a o zakreslení země na mapu*, v němž též popisuje další typ projekce sféry do roviny, jejímž autorem je al-Bīrūnī a která je dnes známa jako tzv. *kulová projekce* (globular projection).¹¹ V této projekci se polosféra zobrazí do kruhu, jehož obvod je rozdělen na 360 stejných dílků a jehož vodorovný a svislý průměr jsou rozděleny na 180 stejných částí. Zakreslení bodu polosféry majícího zeměpisnou délku λ a zeměpisnou šířku φ se provádí následujícím způsobem (viz obr. 8).

Od středu kruhu vyneseme λ dílků na vodorovném průměru a sestrojíme kruhový oblouk procházející tímto bodem a koncovými body svislého průměru. Dále vyneseme od středu kruhu φ dílků na svislém průměru a od koncových bodů vodorovného průměru φ dílků na obvodu kruhu a sestrojíme kruhový oblouk procházející všemi třemi uvedenými body. Požadovaný bod reprezentující zvolený bod na sféře získáme jako průsečík obou kruhových oblouků.



Obr. 8: Kulová projekce

Tvorbou map se zabýval také Ptolemaios, který zahrnul využívání válcové projekce, neboť silně zkresluje vzdálenosti v rovnoběžkovém směru. Místo této projekce doporučoval své dvě dokonalejší projekce – prostou kuželovou a pseudokuželovou délkojevnou.

¹¹ Tuto projekci později znovu objevili Giovanni Battista Nicolosi (1610–1670) a Aaron Arrowsmith (1750–1823). Ke konstrukci astrolábu ji využil Philippe de La Hire (1640–1717).

Z pozdějších prací, které se využití stereografické projekce při tvorbě map věnovaly, uveďme alespoň dvě práce Leonharda Eulera (1707–1783) nazvané *O reprezentaci sférické plochy v rovině* (De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, 1778) a *O geografické projekci sférické plochy* (De projectione geographica superficiei sphaericae, 1778). L. Euler se v nich zabýval otázkou existence a konstrukce obecného konformního zobrazení sféry do roviny. Využil stereografickou projekci sféry do roviny, která bodu sféry majícímu zeměpisnou délku t a zeměpisnou šířku v přiřadí bod reprezentovaný komplexním číslem $z = \operatorname{tg} \frac{v}{2} (\cos t + i \sin t)$. Konformní zobrazení roviny poté definoval pomocí komplexní funkce.

Belgický matematik a inženýr Pierre Germinal Dandelin (1794–1847) popsal kolem roku 1827 základní vlastnosti stereografické projekce a využil ji k řešení některých matematických problémů, např. k řešení Apolloniovy úlohy spočívající v sestrojení kružnice, která se dotýká tří pevně zadaných kružnic.

9 Afinní transformace

Stejnolehlost a osová afinita jsou speciálními příklady *afinních transformací*, nejobecnějších vzájemně jednoznačných transformací roviny, při nichž se přímky zobrazí opět na přímky. Afinní transformace zachovávají rovnoběžnost přímek. Obecná afinní transformace má analytické vyjádření ve tvaru

$$x' = ax + by + p,$$

$$y' = cx + dy + q, \quad \text{kde} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pokud $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1$, nazýváme příslušné zobrazení *ekviafinní*.

Ekviafinní zobrazení poprvé nalézáme v práci *Kniha o řezech válce a jeho povrchu*, jejímž autorem je Thābit Ibn Qurra (9. stol.). Dokazuje zde, že obsah elipsy, jejíž poloosy mají délky a a b , je roven obsahu kruhu o poloměru $\sqrt{ab}$, a dále uvádí (včetně důkazu pomocí exhaustivní metody), že ekviafinní transformace zobrazí libovolnou úseč elipsy na úseč kruhu o stejném obsahu.

Obecné afinní transformace se poprvé objevují v práci *Kniha o měření paraboly*, jejímž autorem je Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit (10. stol), vnuk Ibn Qurry. Dokazuje zde, že afinní transformace zachovává poměr ploch mnohoúhelníků; tento výsledek pomocí exhaustivní metody dále rozšiřuje i na dvě úseče paraboly.

Systematické vybudování afinní geometrie učinil až Leonhard Euler (1707–1783), který rovněž zavedl termín *afinní*,¹² jímž chtěl poukázat na skutečnost, že ačkoliv geometrický útvar a jeho afinní obraz nejsou přísně vzato podobné, jsou přesto určitým způsobem příbuzné.

¹² Latinsky *affinitas* znamená spřízněnost, příbuznost.

10 Projektivní transformace

Afinní transformace jsou speciálním příkladem obecnějších, tzv. *projektivních transformací*. Obecná projektivní transformace má v afinních souřadnicích analytické vyjádření ve tvaru

$$x' = \frac{ax + by + p}{ex + fy + r},$$
$$y' = \frac{cx + dy + q}{ex + fy + r}.$$

V klasických homogenních souřadnicích (x_0, x_1, x_2) má její analytické vyjádření tvar

$$x'_0 = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2,$$
$$x'_1 = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2,$$
$$x'_2 = a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \text{ kde } \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Abychom mohli projektivní transformace roviny definovat, je třeba přidat k obvyklé eukleidovské rovině nevlastní body jakožto průsečíky navzájem rovnoběžných přímk. Tato nutnost souvisí s požadavkem, aby projekce jedné roviny do druhé byla vzájemně jednoznačným zobrazením. Projektivní transformace (kolineace projektivní roviny) zobrazují přímky opět na přímky.

Myšlenku nevlastních bodů poprvé explicitně zmiňuje astronom a matematik Johannes Kepler (1571–1630) v práci *Astronomiae pars optica* z roku 1604. Podtitul *Dodatek k Vitellovi* (Ad Vitellionem paralipomena) naznačuje, že J. Kepler touto svou prací navazoval na dílo polského fyzika Vitella (13. stol.). V kapitole *O kuželosečkách* Kepler uvádí, že řezem kužele rovinou může být v závislosti na poloze roviny přímka, kružnice, elipsa, hyperbola nebo parabola a popisuje přechod mezi jednotlivými kuželosečkami (přímka přechází přes hyperbolu do paraboly, a ta dále přes elipsu až do kružnice). Dále zde J. Kepler zavádí ohniska kuželosečky jako takové body, že úsečky spojující tyto body s libovolným bodem kuželosečky svírají s tečnou v tomto bodě shodné úhly. V případě paraboly pak druhé ohnisko klade do nekonečna.

V roce 1613 vydal Francois D'Aguillon (1566–1617) *Šest knih o optice* (Opticorum Libri VI), v nichž se kromě stereografické projekce věnoval rovněž obecné centrální projekci, kterou nazýval *scénografie*. J. Kepler i F. D'Aguillon ve svých dílech navazovali na řadu prací o perspektivě, které byly sepsány během 14. a 15. století.¹³

¹³ Uveďme alespoň pojednání *O kreslení* (Della pittura, Florencie, 1435), které sepsal Leon Battista Alberti (1404–1472) a *O perspektivě v kreslení* (De perspectiva pingendi, Řím, asi 1480), jehož autorem je Piero della Francesca (1416–1492). V souvislosti s využitím perspektivy v malířství bychom měli zmínit také dílo Leonarda da Vinciho (1452–1519) nazvané *Pojednání o kreslení* (Il trattato della pittura) a vydané až po jeho smrti (1651) a dvě práce Albrechta Dürerra nazvané *Návod pro měření kružítkem a pravítkem* (Unterweysung der Messung mit Zirckel und Richtscheit, 1525) a *O proporcích člověka* (Von menschlicher Proportion, 1528). Oba malíři, Leonardo da Vinci a A. Dürer, se ve svých pracích věnovali geometrickým otázkám včetně geometrických zobrazení.

První souhrnné pojednání o projektivních transformacích sepsal Girard Desargues (1591–1661) pod názvem *Předběžný náčrt pokusu o pochopení jevů při vzájemném styku kužele a roviny* (Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan, 1639). K obvyklé eukleidovské rovině přidal celou nevlastní přímku a na hyperbolu poté pohlížel jako na uzavřenou křivku, jež nevlastní přímku protíná ve dvou bodech. Asymptoty hyperboly považoval za její tečny v nevlastních bodech. Parabolu chápal jako uzavřenou křivku, jež se nevlastní přímkou dotýká.

G. Desargues studoval rovněž dvojpoměr čtyř kolineárních bodů, byl si vědom jeho invariantnosti při projektivních transformacích. Pro projektivní transformace, jejichž dvojím složením získáme identitu, zavedl termín *involuce*, jenž se používá dodnes. Jako první zkoumal *polární transformace* vzhledem ke kuželosečkám. Ke zvolenému bodu P hledal množinu všech bodů X takových, že body P a X harmonicky dělí body Q a R , v nichž přímka PX protne danou kuželosečku.¹⁴ Ukázal, že množinou všech hledaných bodů X je přímka (dnes tuto přímku nazýváme *polárou* bodu P vzhledem k dané kuželosečce, bod P nazýváme jejím *pólem*).¹⁵

11 Závěr

Historie geometrických transformací je velmi bohatá, sahá až do doby před 2500 lety, kdy lze podle dochovaných informací vystopovat jejich první náznaky. Jednotlivé typy transformací byly často objevovány v souvislosti s řešením různých praktických úloh a byly využívány nejen v geometrii, ale i v dalších oborech lidské činnosti. Příkladem je užití perspektivy v malířství, promítání ve stavitelství nebo konstrukce map pomocí stereografické projekce.

Teprve kolem 18. století začaly být sepisovány souhrnnější práce věnující se jednotlivým typům transformací, byly položeny základy obecné teorie, k nimž v té době přispěla celá řada matematiků (podrobněji o tzv. *Cremonových transformacích* viz [8]). Velký zájem o tuto problematiku v 18. a 19. století souvisel s tehdejší obecným trendem v matematice, jímž byla jednak snaha o systematizaci dosavadních poznatků, jednak touha zobecňovat již dosažené výsledky, ať už do vyšších dimenzí, nebo pro stále složitější objekty. Tento trend se nemohl vyhnout ani geometrii, kde se od lineárních transformací rychle přešlo k transformacím vyšších stupňů, od bodových transformací k transformacím spojitým nebo nejednoznačným, kdy jednomu bodu mohou být přiřazeny dva nebo dokonce nekonečně mnoho bodů.

Brzy se proto začala zkoumat možnost klasifikace všech známých typů transformací. První krok v tomto směru učinil již zmiňovaný A. F. Möbius v *Barycentrickém počtu* [2] (podrobněji viz [9]). Pouze nedostatek algebraického aparátu neumožnil A. F. Möbiovi uskutečnit jeho zamýšlené pojetí klasifikace různých geometrií. K němu dospěl až Felix Klein (1849–1925) ve svém *Erlangenském programu* (1872). Využil nejnovější poznatky teorie grup a teorie invariantů a aplikoval je na geometrii. Pracoval s grupami transformací, které zachovávaly geometrické vlastnosti útvarů, a které mu umožnily zformulovat jednoduchou definici různých typů geometrií. Na základě uspořádání grup geometrických transformací poté dospěl i k uspořádání příslušných geometrií. Podrobněji o Erlangenském programu a s ním souvisejících záležitostech viz [5], [6] a [7].

¹⁴ Říkáme, že body P a X harmonicky dělí body Q a R , jestliže jejich dvojpoměr je roven -1 , tj. $(Q, R, P, X) = -1$.

¹⁵ Termín *pól* je odvozen z řeckého slova *polos* (osa) a původně značil průsečík sféry s osou rotace. Názvy *polára bodu* a *pól přímky* vzhledem k dané kuželosečce zavedli nezávisle na sobě François Joseph Servois (1767–1847) a Joseph Diaz Gergonne (1771–1859).

V příspěvku jsme se snažili připomenout důležité okamžiky z historie geometrie, kdy se v souvislosti s transformacemi poprvé objevily některé nové myšlenky. Náš výčet není v žádném případě úplný, neboť se některé informace nedochovaly, navíc není jednoduché, a někdy to ani nejde, přesně označit okamžik objevu a autora nové myšlenky. Vývoj některých pojmů obsáhl několik století, měnila se základní terminologie, postupně se objevovaly nové souvislosti.

Většina výše uvedených informací historického charakteru vychází z údajů obsažených v [3], kde je geometrickým transformacím věnována samostatná kapitola. Další souvislosti týkající se historie této problematiky lze nalézt např. v [4].

Literatura

- [1] Eukleidovy *Základy* (Elementa). Přeložil František Servít, Nákladem Jednoty českých matematiků, Praha, 1907.
- [2] Möbius A. F.: *Der barycentrische Calcul*. Georg Olms Verlag, Leipzig, 1827.
- [3] Rosenfeld B. A.: *A History of Non-Euclidean Geometry, Evolution of the Concept of a Geometric Space*. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 12, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [4] Coolidge J. L.: *A History of Geometrical Methods*. Dover Publications, Mineola, New York, 2003.
- [5] Trkovská D.: *Erlangenský program*. In Matematika v proměnách věků V, edice Dějiny matematiky, svazek 33, Prometheus, Praha, 2007, 66–82.
- [6] Trkovská D.: *Meranský program a geometrické transformace*. In Šafářová H. (ed.): Sborník příspěvků 27. mezinárodní konference o geometrii a počítačové grafice, Littera, Brno, 2007, 245–250.
- [7] Trkovská D.: *The Influence of the Erlanger and the Meraner Programm on Mathematics Education in Czech Countries*. In Barbin E., Stehlíková N., Tzanakis C. (ed.): History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the 5th European Summer University, Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, 877–884.
- [8] Trkovská D.: *Cremonovy transformace a jejich cesta z Milána do Prahy*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2008, 175–178.
- [9] Trkovská D.: *Möbiův Barycentrický počet a geometrické transformace*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2009, 229–232.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a v rámci projektu *Specifického vysokoškolského výzkumu* 2010-261 315.

Adresa

Mgr. Dana Trkovská
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: trkovska@karlin.mff.cuni.cz

ZÁKLADNÍ UČEBNÍ TEXTY Z MATEMATIKY NA VŠE PRAHA V LETECH 1954–2009

EVA ULRYCHOVÁ

Abstract: The basic textbooks used for courses of mathematics at the University of Economics in Prague (VŠE) since its establishment in 1953 are presented and compared with the textbooks used at the present time.

1 Úvod

Základní kurz matematiky na VŠE Praha prošel od založení školy v roce 1953 mnoha změnami, a to nejen co do počtu vyučovacích hodin a obsahové náplně, ale i formy výkladu. Snad k nejradikálnější změně došlo v letech 2005 – 2006, kdy byl v rámci přechodu školy na ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System) postupně na všech jejích fakultách zkrácen základní kurz matematiky z dvousemestrálního na jednosemestrální, při týdenní hodinové dotaci 2 hodiny přednášek a 2 hodiny cvičení. Tato razantní změna s sebou přinesla nejen nutnou redukci obsahu učiva, ale na žádost odborných kateder i změnu způsobu výkladu – co nejjednodušší formulaci pojmů a důraz zejména na početní postupy. Je proto zajímavé srovnat podle dochované literatury určené pro základní kurz matematiky jak obsah, tak formu výkladu vyučované látky.

V 2. a 3. části příspěvku jsou uvedeny základní učební texty (které byly v některých případech doplněny samostatnými cvičebnicemi nebo skripty rozšiřujícími učivo pro obory s rozšířenou výukou matematiky či pro výběrové přednášky). Jednotlivé učebnice jsou stručně charakterizovány, dále je uveden výčet vykládaných pojmů; tyto údaje však mohou poskytnout jen rámcovou představu – kromě obsahových rozdílů se texty odlišují i rozsahem věnovaným jednotlivým tématům, podrobností vysvětlujících komentářů, pořadím vykládaných pojmů, náročností příkladů apod. Abychom alespoň částečně přiblížili rozdíly ve výkladu pojmů v průběhu let, uvádíme ve 4. části definici limity posloupnosti a pojmů s ní bezprostředně spojených – tak, jak jsou podávány v jednotlivých učebních textech.

Uvádíme pouze základní literaturu k povinnému kurzu matematiky na VŠE. V případě víceroch (i pozměněných, odlišně nazvaných) vydání učebnice téhož autora (nebo kolektivu) uvádíme jen první a poslední vydání s vyznačením změn v posledním vydání oproti prvnímu. Názvy kapitol jsou kurzívou; pokud jsou kapitoly rozsáhlejší, jsou pro lepší orientaci názvy menších tematických celků (dle jednotlivých učebních textů) zvýrazněny podtržením.

2 Učební texty pro jednosemestrální kurz (od r. 2006)

Kolektiv katedry matematiky: Matematika pro 4MM101, 2006 ([1])

144 str. A4. Nejsou označeny definice – zaváděné pojmy podtrženy; místo vět tvrzení uvedena slovem „Platí“; neobsahuje důkazy, neužívá kvantifikátory, užívá zjednodušené formulace,

často slovní místo symbolických zápisů, jednodušší příklady. Řada řešených příkladů, cvičení (neřešené příklady) s výsledky, obsahuje obrázky. Neobsahuje aplikační příklady.

I. Lineární algebra

Lineární závislost vektorů, hodnost matice – aritmetické vektory, lineární závislost a nezávislost, hodnost matice. Soustavy lineárních rovnic – Frobeniova věta, Gaussova a Jordanova eliminační metoda, homogenní soustava. Maticová algebra – operace s maticemi, regulární matice, inverzní matice, maticové rovnice, řešení soustav užitím inverzní matice. Determinanty – rekurentní definice, rozvoj, úpravy v matici, Cramerovo pravidlo.

II. Limita posloupnosti, spojitost a limita funkce

Posloupnost – rozšířená reálná osa, okolí bodu, reálná posloupnost, vlastnosti, limita, věty. Funkce – reálná funkce jedné reálné proměnné, vlastnosti, inverzní funkce, cyklometrické funkce, limita funkce, věty.

III. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

Derivace – definice, geometrický význam, vzorce, $(f + g)'$, $(fg)'$, $(f/g)'$, $(f(g))'$, l'Hospitalovo pravidlo. Extrémy na množině – extrémy spojitě funkce na intervalu, souvislost f' a monotonie, lokální extrémy, průběh funkce.

IV. Diferenciální počet funkcí dvou a více proměnných

Funkce dvou a více proměnných – reálná funkce dvou proměnných, r proměnných, vlastnosti množin v rovině, parciální derivace. Extrémy – extrémy funkcí dvou proměnných (dodatek i pro funkce více proměnných) – vázané, uvnitř množiny, na kompaktních množinách s vnitřními body (spec. extrémy lineární funkce na konvexním mnohostěnu), parciální derivace 2. řádu, lokální extrémy funkce dvou proměnných.

V. Integrál

Integrál – primitivní funkce, neurčitý integrál, per partes, substituce, integrace funkcí speciálního tvaru, Newtonův určitý integrál, nevlastní integrál. Nekonečné řady – součet, konvergentní, divergentní řada (jen definice), geometrická řada.

VI. Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice – základní pojmy, diferenciální rovnice 1. řádu, separace proměnných, lineární diferenciální rovnice řádu k s konstantními koeficienty, zkrácená, speciální tvar pravé strany – řešení pro rovnice 2. řádu.

Kaňka M., Coufal J., Klůfa J.: Učebnice matematiky pro ekonomy, 2007 ([2])

198 str. B5. Podobný charakter jako [1], poněkud exaktnější formulace, obecnější odvozování, věty nejsou poznačeny.

Obsahově odpovídá [1], navíc obsahuje: Úvod¹ – množiny (jen způsoby zápisu množin), kartézský součin, číselné množiny (jen označení), zobrazení a jeho vlastnosti, reálná funkce jedné reálné proměnné – vlastnosti, polynom, racionální lomená funkce, exponenciální, logaritmická, goniometrické. Derivace – výpočet derivace podle definice, rovnice tečny ke grafu funkce. Integrály – druhá metoda integrace substitucí, per partes a substituce v určitém integrálu.²

Batíková B. a kol.: Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty, 2009 ([3])

Stejný kolektiv autorů jako [1].

206 str. B5. Stejný charakter jako [1], oproti [1] obsahuje aplikační příklady z ekonomie.

¹ V základním kurzu se nevyučuje, pouze jako opakování – předpokládá se znalost ze střední školy.

² Uvedené pojmy nejsou v osnovách základního kurzu matematiky.

Oproti [1] navíc: Úvod³ – opakování – funkce a její vlastnosti, posloupnost a její vlastnosti Dodatek I⁴ – vlastní čísla a vlastní vektory matice, Taylorův polynom, diferenční rovnice, autonomní diferenční rovnice, ekvilibrium. Dodatek II⁵ – aplikace matematiky v ekonomických disciplínách.

3 Učební texty pro dvousemestrální kurz (1953–2005)

Pro zestručnění textu *jsou uváděny pouze obsahové odlišnosti oproti současnému stavu* (tj. oproti osnovám jednosemestrálního kurzu 4MM101).

Veselý F.: Úvod do počtu infinitesimálního, 1954 ([4])

162 str. A4. Obsahuje definice, věty (i pomocné k důkazům), důkazy, řadu řešených příkladů, cvičení (neřešené příklady i důkazy tvrzení) bez výsledků, neužívá kvantifikátory, obsahuje obrázky. V textu podrobná vysvětlení, řada řešených příkladů. Aplikací příklady ojediněle a pouze ve cvičeních (poloměr filtru na svítidlo, ujetá vzdálenost lokomotivy při dané spotřebě uhlí).

Logické vztahy v matematice – definice, věta, důkaz, výrokový počet. Množiny – operace s množinami, rozklad množiny, Kartézský součin, zobrazení – na, prosté, inverzní, ekvivalence množin. Uspořádání množin, spočetná, nespočetná, konečná množina, indukce, podobnost množin. Přirozená čísla, mohutnost množiny, kardinální číslo, ordinální číslo. Reálná čísla, řez, operace s řezy, skoky, mezery. Omezená množina, supremum, infimum, maximum, minimum. Nerovnosti, absolutní hodnota. Odmocniny. Posloupnosti (definice obecně, dále jen reálná). Mocniny s reálným exponentem a logaritmy. Funkce – intervaly, parciální funkce, operace s funkcemi, omezená funkce, racionální celistvá funkce, racionální lomená funkce, iracionální, exponenciální, logaritmické, goniometrické, hyperbolické funkce; funkce sudá, lichá, periodická. Spojitosť funkce – okolí bodu v prostoru. Limita funkcí – limita (v úvodu: $\lim x_n = x_0$, pak $\lim f(x_n) = A$, definice pak bez komentáře „epsilon, delta“). Inverzní funkce – hyperbolometrické.

Veselý F.: Úvod do počtu infinitesimálního II, 1955 ([5])

173 str. A4. Stejný charakter jako [4]. Aplikací příklady pouze ve cvičeních, ne ekonomického charakteru (rozměry románského okna, rozměry krabice, dráha čtyř tanků, výška, ze které je vrženo těleso apod.).

Derivace – jednostranné derivace, derivace inverzní funkce. Průběh funkce – funkce rostoucí, resp. klesající v bodě, Rolleova věta, Lagrangeova věta o střední hodnotě, konvexnost, resp. konkávnost v bodě, tečna funkce. Nekonečné řady – věty, kritéria konvergence – Cauchyovo, d'Alembertovo, absolutní konvergence, Leibnizovo, výpočet součtu, Taylorova řada. Primitivní funkce – diferenciál, druhá věta o substituci, včetně užití hyperbolických funkcí. Určitý integrál – Riemannův, vlastnosti, výpočet příkladů (celkem 27 str. A4), Newtonův, per partes a substituce v určitém integrálu. Numerická integrace – metoda obdélníková, metoda lichoběžníková, Simpsonovo pravidlo. Nevlastní integrál – existence, vlastnosti.

³ V základním kurzu se nevyučuje, pouze jako opakování – předpokládá se znalost ze střední školy.

⁴ V základním kurzu se nevyučuje – pouze jako studijní materiál pro posluchače oborů, které uvedené pojmy potřebují.

⁵ V základním kurzu se nevyučuje.

Není obsaženo (v obou dílech): lineární algebra, funkce dvou proměnných, diferenciální rovnice.

Veselý F., Rychlý R.: Matematika – díl první, 1959 ([6])

212 str. A4. Úvod: látka v podstatě ve stejném rozsahu jako skripta F. Veselého ([4], [5]), omezeny některé obtížnější partie, přidána kapitola o interpolaci a o funkcích dvou proměnných; snaha látku více přiblížit chápavosti posluchačů. Obsahuje definice, věty (i pomocné k důkazům), důkazy, řadu řešených příkladů, nejsou cvičení, neuzivá kvantifikátory, obrázky jako samostatná příloha. Aplikační příklady (délka tyče jako funkce její teploty, závislost počtu výrobků na čase).

I. Logické vztahy v matematice

Výroky, operace s výroky, definice, věta, axiom.

II. Množiny

Operace s množinami, Kartézský součin. Zobrazení – prosté, na, inverzní, ekvivalence množin, uspořádání množin.

III. Přehled o racionálních číslech

Čísla přirozená, matematická indukce. Čísla celá, racionální a jejich vlastnosti, sčítání a násobení nerovností.

IV. Čísla reálná

Řezy na množině racionálních čísel, uspořádání řezů, operace s řezy. Reálná čísla. Absolutní hodnota, komplexní čísla, intervaly. Nerovnosti – kvadratické, se zlomky, s absolutní hodnotou, okolí bodu. Omezené množiny. Supremum, infimum, maximum, minimum.

V. Posloupnosti

Posloupnosti – aritmetická, geometrická, závory posloupnosti, supremum, infimum. Mocniny s reálným exponentem, logaritmy. Nekonečné řady – s nezápornými členy, kritérium srovnávací, Cauchyovo, d'Alembertovo. Řady alternující, řady s libovolnými členy, absolutní konvergence.

VI. Funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné – logaritmické stupnice na osách, parciální funkce, operace s funkcemi, racionální celistvá funkce, racionální lomená funkce, iracionální, exponenciální, logaritmické, goniometrické.

VII. Spojitost funkce

Definice „epsilon, delta“.

VIII. Limita funkce

Definice ($\lim x_n = x_0$, pak $\lim f(x_n) = A$ i definice „epsilon, delta“), nerovnosti mezi limitami, funkce nekonečně malé.

IX. Derivace

Derivace inverzní funkce, tečna ke grafu funkce, diferenciál funkce.

Veselý F., Rychlý R.: Matematika – druhý díl, 1959 ([7])

168 str. A4. Stejný charakter jako [6]. Aplikační příklady (minimalizace ceny dopravy, fyzikální aplikace – viz užití integrálu).

X. Věty o spojitých funkcích

Věty, stejnoměrná spojitost, funkce rostoucí, resp. klesající v bodě, věty o střední hodnotě.

XI. Vyšetřování průběhu funkce

Funkce ryze konvexní, resp. konkávní v bodě.

XII. Interpolace funkce

Interpolační mnohočlen, Lagrangeův vzorec, Newtonův vzorec, difference k -tého řádu.

XIII. Taylorův rozvoj

Taylorův mnohočlen, Taylorův rozvoj se zbytkem, užití Taylorova rozvoje pro vyšetřování funkce, nekonečná Taylorova řada.

XIV. Určitý integrál

Reimannův určitý integrál (25 str. A4), určitý integrál jako funkce horní meze.

XV. Neurčitý integrál

Per partes pro určitý integrál, druhá věta o substituci, substituce v určitém integrálu.

XVI. Numerická integrace

Obdélníková, lichoběžníková, Simpsonův vzorec.

XVII. Zobecněný integrál

Laplaceův integrál.

XVIII. Užití určitého integrálu

Objem rotačního tělesa, délka oblouku křivky, povrch rotačního tělesa, dráha při pohybu rovnoměrně zrychleném, tlak kapaliny na svislou obdélníkovou stěnu, efektivní hodnota střídavého proudu.

XIX. Funkce dvou proměnných

Křivky v rovině (parametrická rovnice, implicitní funkce), rovinné obrazce, množina bodů v prostoru, v n -rozměrném prostoru, limita funkcí dvou proměnných, geometrický význam parciální derivace, totální diferenciál, parciální derivace složené funkce. Vyrovnání přímkou.

Není obsaženo (v obou dílech): lineární algebra, topologické vlastnosti množin – otevřená, uzavřená, omezená, kompaktní, vázané extrémy, absolutní extrémy spojité funkce na kompaktní množině, diferenciální rovnice.

Rychlý R.: Základy vyšší matematiky, díl první, 1962 ([8])

170 str. A4. Obsahuje definice, věty, důkazy, řadu řešených příkladů, cvičení i s výsledky, neuzivá kvantifikátory, obsahuje obrázky. Omezena matematická analýza – vynechány složitější důkazy a méně důležité pojmy, poprvé základy lineární algebry. Aplikační příklady pouze ojediněle ve cvičení (vektor výroby, cenový vektor).

I. Shrnutí a opakování elementární matematiky

Logické vztahy v matematice, množiny, zobrazení, reálná čísla, absolutní hodnota, podmnožiny reálných čísel (intervaly), supremum, infimum, maximum, minimum.

II. Základy analytické geometrie v rovině

Orientovaný úhel, průmět orientované úsečky, transformace souřadnic, rovnice přímky (parametrická, obecná, úsekový tvar, směnicový tvar), kružnice, rovinné obrazce.

III. Základy analytické geometrie v prostoru

Průvodič bodu, úhel dvou směrů, přímka, rovina, kulová plocha, prostorové útvary, dodatek o vícerozměrných prostorech.

IV. Základy lineární algebry

Vektorový modul (= množina vektorů uzavřená vzhledem k součtu a násobku), určující skupina, báze. Determinanty – definice (přes permutace), lineární substituce.

V. Posloupnosti

Limita – definice „epsilon, delta“.

VI. Funkce

Lineární funkce, kvadratická funkce, supremum, infimum, parciální funkce.

VII. Limita a spojitost funkce

Limita (dvě definice: $\lim x_n = x_0$, pak $\lim f(x_n) = A$ a „epsilon, delta“, důkaz ekvivalence obou).

Rychlý R.: Základy vyšší matematiky, díl druhý, 1962 ([9])

165 str. A4. Stejný charakter jako [8]. Aplikční příklady (okamžitá rychlost jako derivace dráhy podle času, poměrný přírůstek výroby, náklady na dopravu uhlí).

VIII. Derivace funkce

Derivace jako limita poměrného přírůstku, jednostranné derivace, regulární funkce, derivace inverzní funkce, sečna a tečna ke grafu funkce, diferenciál.

IX. Užití derivací

Funkce rostoucí, resp. klesající v bodě, Rolleova věta, věty o střední hodnotě, ryzí konvexnost, resp. konkávnost v bodě. Křivky v rovině – parametrické vyjádření, jednoduchý oblouk, uzavřená křivka.

X. Funkce dvou a více proměnných

Úplný diferenciál, parciální derivace funkce složené. Základní úloha vyrovnávacího počtu. Funkce tří a více proměnných – jen parciální derivace.

XI. Neurčitý integrál

Druhá věta o substituci, integrace některých funkcí iracionálních.

XII. Určitý integrál

Riemannův integrál, určitý integrál jako funkce horní meze. Numerická integrace – metoda obdélníková, lichoběžníková, Simpsonův vzorec. Objem rotačních těles, délka oblouku křivky.

Není obsaženo (v obou dílech): Jordanova metoda, topologické vlastnosti množin – otevřená, uzavřená, omezená, kompaktní, vázané extrémy, absolutní extrémy spojité funkce na kompaktní množině, diferenciální rovnice.

V letech 1968 až 1987 byly vydávány učebnice Z. Horského:

Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE, 1968 ([10])

258 str. B5. Obsahuje definice (nejsou označeny), věty, důkazy, cvičení (i důkazy) bez výsledků, neužívá kvantifikátory, obsahuje obrázky. Stručný text (nepříliš podrobná vysvětlení), obecné formulace, málo řešených příkladů. Aplikční příklady (vektor výroby, elasticnost funkce).

I. Úvod

Logika, výrokový počet, množiny, operace s množinami, rozklad na množině, zobrazení, přirozená čísla, uspořádání množiny reálných čísel (nerovnosti), řez na množině, skok, souřadnicový systém v rovině a v prostoru, kružnice a koule.

II. Základy lineární algebry

Vektory – vektorový modul – axiomatická definice, podmodul, n -rozměrný prostor, určující skupina, báze, hodnost modulu, vektorový zápis soustavy lineárních rovnic. Soustavy lineárních rovnic – změna báze v prostoru V_n , lineární formy. Analytická geometrie – n -rozměrný prostor, body a vektory, přímka v E_n , rovina v E_n , podprostory v E_n , skalární součin, vzdálenost, lineární kombinace bodů, konvexní množiny, poloprostory. Maticová algebra – modul matic, rozdělení matic na pole. Determinanty – permutace, definice determinantu přes permutace, lineární forma příslušná k dané řadě determinantu, determinanty vybrané z matice.

III. Základy matematické analýzy

Supremum a infimum. Posloupnosti (def. obecně, dále jen reálné) – úplná indukce, Funkce – polynomy, exponenciální funkce, goniometrické funkce. Spojitosť – spojitost v bodě (dvě formulace definice), Bolzanova věta. Limity funkcí – dvě formulace definice. Derivace – deriva-

ce a spojitost, derivace inverzní funkce, diferenciál, tečný vektor prostorových křivek, elastičnost. Průběh funkce – věta o střední hodnotě, Taylorův rozvoj. Funkce dvou proměnných – válcové plochy, řezy plochy rovnoběžné s rovinami os, limita posloupnosti v E_2 , totální diferenciál, tečná rovina, vyrovnaní přímkou. Integrály – rekurentní formule, dodatek: nástin Riemannova určitého integrálu, přibližné vzorce – Simpsonova formule. Nekonečné řady – řady s nezápornými členy, kritéria konvergence, alternující řady, Leibnizovo kritérium, absolutní konvergence, Taylorova řada, funkční řady, stejnoměrná konvergence, integrování řad. Diferenciální rovnice – variance konstant, soustavy diferenciálních rovnic, komplexní čísla.

Není obsaženo: řešení soustav užitím inverzní matice, topologické vlastnosti množin – otevřená, uzavřená, omezená, kompaktní, postačující podmínka pro lokální extrém funkce dvou proměnných, vázané extrémy, absolutní extrémy spojitě funkce na kompaktní množině.

Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE I, 1987 ([11])

7. vydání. 310 str. B5. Stejný charakter jako [10], ještě více od obecného ke speciálnímu.

Obsahové změny oproti 1. vydání:

I. Základní pojmy matematiky

Kartézské součiny, rozklady na množině, ekvivalence. Uspořádané množiny, přirozená indukce. Struktury – operace na množině, grupy, tělesa, funkce s hodnotami v daném tělese. Reálná čísla, reálná osa – množina E , rozšířená reálná osa, supréмум, infimum.

II. Základy lineární algebry

Lineární vektorový prostor – množina, která vzhledem ke sčítání tvoří komutativní grupu, násobení – axiomy, skaláry = reálná čísla, zmínka i o obecném tělese (jediný příklad – množina funkcí s hodnotami v tělese E), podprostor, lineární obal, lineární závislost (v [3]: aspoň jeden vektor lineární kombinací ostatních; zde: $[Si] = [S]$ aspoň pro jedno i). Lineární zobrazení, lineární rovnice, lineární algebraická rovnice, soustava. Matice – zavedena jako schéma popisující soustavu. Geometrická interpretace soustav – lineární afinní prostory. Matice – funkční pojetí. Kvadratické formy.

III. Základy matematické analýzy

Konvergenční prostor, konvergence na množině. Limita posloupnosti – obecně (nejen pro reálnou), standardní konvergence na E^* . Speciální zobrazení, spojitost zobrazení – obecně, pak spec. pro reálné funkce, stejnoměrná spojitost (Cvičení – důkazy: Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě reálné osy ...). Limity zobrazení – obecně (hromadný bod množiny). Numerické řešení rovnic – metoda regula falsi. Funkce více proměnných, zobrazení typu (r, s) , standardní konvergence na euklidovských prostorech, implicitně definovaná funkce. Integrály – začínají Reimannovým určitým integrálem, primitivní funkce, Newtonův určitý integrál, neurčitý integrál. Funkční řady – řady typu σ a jejich vlastností, mocninné řady – poloměr konvergence, integrace, derivace. Komplexní čísla – těleso komplexních čísel, polární tvar, binomické rovnice, komplexní funkce jedné komplexní proměnné, exponenciální funkce a logaritmus v komplexním oboru, derivace komplexní funkce jedné komplexní proměnné, mnohoznačné funkce.

Není obsaženo: lokální extrémy, vázané extrémy – dosazovací metoda, Lagrangeovy multiplikátory, extrémy lineární funkce na konvexním polyedru.

V letech 1994 až 2003 byly vydávány dvojdielné učebnice dvojic autorů J. Klůfa, J. Coufal a M. Kaňka, J. Henzler:

Coufal J., Klůfa J.: Matematika I (pro Vysokou školu ekonomickou), 1994 ([12])

230 str. A4. Obsahuje definice, věty, důkazy, řadu řešených příkladů, cvičení (i důkazy) bez výsledků, užívá kvantifikátory, neobsahuje obrázky (ani k pojmům spojitost, limita), jen příloha grafů základních funkcí. Ekonomické aplikace (funkce nabídky, nákladová funkce). Obsahuje příklady řešené programem MATHEMATICA.

I. Úvod

Prolog aneb ars coniectandi – historie. Jazyk matematiky – množiny, matematická logika, architektura matematiky (axiom, definice, věta, důkazy), množinové operace, relace, uspořádání, řez, skok, mezera, zobrazení, operace, grupa, těleso, číselné množiny, matematická indukce, supréum, infimum. Speciální zobrazení – reálné funkce (nejen reálné proměnné), operace s funkcemi, supréum, infimum, maximum, minimum funkce, komplexní funkce jedné reálné proměnné, posloupnost (obecně, nejen reálná).

II. Základy lineární algebry

Lineární prostory – axiomatická definice (nad reálnými čísly), příklady, podprostor, určující skupina, báze, hodnost prostoru, prostory se skalárním součinem, ortogonální a ortonormální báze. Matic – prostor matic. Maticová algebra, symetrické matice, lineární transformace, redukce symetrických matic na diagonální, elementární matice. Determinanty a kvadratické formy – permutace, definice determinantu přes permutace, výpočet inverzní matice, Wronského determinant, charakteristická čísla, kvadratické formy a jejich klasifikace. Sylvestrova věta.

III. Matematická analýza

Konvergence – konvergenční prostor, limita posloupnosti (obecně), standardní konvergence na R a R^* , věty. Standardní konvergence na R_n . Spojitost zobrazení (obecně),

Kaňka M., Henzler J.: Matematika II (pro Vysokou školu ekonomickou), 1995 ([13])

355 str. A4. Stejný charakter jako [12], některá cvičení i s výsledky, obsahuje obrázky, neobsahuje příklady řešené programem MATHEMATICA.

I. Diferenciální počet jedné reálné proměnné

Wronského determinant, věty o střední hodnotě, Taylorův polynom.

II. Integrály

Riemannův integrál, per partes a substituce v určitém integrálu, funkce beta a gama.

III. Nekonečné řady

Obecné vlastnosti řad, řady s kladnými členy – kritéria konvergence (srovnávací, podílové, odmocninové, integrální), alternující řady (Leibnizovo kritérium), ostatní řady, absolutní konvergence, funkční řady (Weierstrassovo kritérium), mocninné řady – obor konvergence a absolutní konvergence, součet pomocí integrování a derivování, Taylorovy řady.

IV. Funkce více proměnných

Konvergence v E_r , množiny v E_r (otevřená, uzavřená, omezená, kompaktní), zobrazení typu (r, s) , spojitost a limita zobrazení typu (r, s) , reálné funkce r reálných proměnných, zúžení a rozšíření funkce, hladké funkce, diferenciál, tečná nadrovina ke grafu funkce, derivace složené funkce, derivace zobrazení typu (r, s) , implicitně definované funkce, extrémy funkcí více proměnných (včetně lokálních vázaných extrémů). Dodatek – komplexní funkce komplexní proměnné.

V. Diferenciální rovnice

Variace konstant, rovnice řádu vyššího než 2.

VI. Diferenční rovnice

Diference, vyšší diference, diferenční rovnice 1. i vyšších řádů, lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou.

Klůfa J., Coufal J.: Matematika 1, 2003 ([14])

222 str. B5. Oproti [12] nejsou důkazy, cvičení jsou s výsledky.

Obsahové změny oproti [12]: Úvod – není relace, uspořádání, řez, skok, mezera, zobrazení, operace, grupa, těleso, matematická indukce. Lineární algebra – je geometrická interpretace soustav lineárních rovnic, konvexní množiny, poloprostory. Matematická analýza – není konvergenční prostor, limita posloupnosti jen pro reálnou posloupnost, spojitost jen pro reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Kaňka M., Henzler J.: Matematika 2, 2003 ([15])

214 str. B5. Oproti [13] nejsou důkazy, cvičení jsou s výsledky, více ekonomických aplikací.

Obsahové změny oproti [13]: Nejsou funkční řady. Navíc jsou u funkcí více proměnných funkce homogenní, kvazikonvexní a kvazikonkávní.

4 Definice limity posloupnosti

Pro zajímavost porovnejme, jakým způsobem je v jednotlivých učebních textech podána definice limity posloupnosti. Pojem limity posloupnosti je vyučován po celou dobu existence základního kurzu matematiky na VŠE. Definice limity posloupnosti je jedna z těch, které se často studenti učí nazpaměť bez jakéhokoliv porozumění. I přes bezchybnou znalost definice nejsou schopni doprovodit ji obrázkem, či načrtnout graf posloupnosti se zadanou limitou apod. Proto byla definice limity posloupnosti při koncipování zkráceného jednosemestrálního kurzu 4MM101 označena za nepovinnou (s možností vyžadovat ji u zkoušky od studentů aspirujících na jedničku); důraz měl být kladen spíše na správnou představu. Tendence do budoucnosti je definici opět zařadit mezi povinné a od studentů vyžadovat její přesné znění.

Veselý F.: Úvod do počtu infinitesimálního, 1954 ([4])

Pouze pro reálnou posloupnost. Nevlastní limita samostatně později. Není obrázek. Jsou příklady řešené podle definice.

Definice limity posloupnosti: Číslo a je limitou posloupnosti a_n , když ke každému libovolně malému kladnému číslu ε existuje vždy číslo n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ vždy platí:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Veselý F., Rychlý R.: Matematika – díl první, 1959 ([6])

Pouze pro reálnou posloupnost. Nevlastní limita samostatně později. Není obrázek. Jsou příklady řešené podle definice.

Definice limity posloupnosti: Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu a , jestliže ke každému číslu ε existuje číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$.

Rychlý R.: Základy vyšší matematiky, díl první, 1962 ([8])

Pouze pro reálnou posloupnost. Nevlastní limita samostatně později. Doplněno obrázkem. Jsou příklady řešené podle definice.

Definice limity posloupnosti: Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu a , jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje číslo D tak, že pro všechna $n > D$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$.

Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE, 1968 ([10])

Pouze pro reálnou posloupnost. Nevlastní limita samostatně později. Doplněno obrázkem, okomentováno. Jsou příklady řešené podle definice.

Definice limity posloupnosti: Pravíme, že posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ má limitu rovnou číslu A , když ke každému kladnému ε existuje číslo D tak, že platí implikace $n > D \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$.

Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE, 1987 ([11])

Pro posloupnost obecně (nejen pro reálnou). Není obrázek. Nejsou příklady řešené podle definice.

Nejprve definován *konvergenční prostor*: Neprázdná množina M (prvků jakékoliv povahy) se nazývá konvergenční prostor, splňuje-li tyto axiomy:

I. Každý bod $a \in M$ vyznačuje jisté podmnožiny množiny M . Těmito podmnožinám budeme říkat okolí bodu a .

II. Každý bod $a \in M$ je prvkem každého svého okolí.

III. Jsou-li a, b dva libovolné navzájem různé body z M , potom existuje okolí bodu a a okolí bodu b tak, že obě tato okolí jsou disjunktní.

Zobrazení τ , které každému bodu $a \in M$ přiřazuje systém $\tau(a)$ všech okolí bodu a , se nazývá konvergence na množině. (Doplněno obrázky.)

Definován *p-zbytek posloupnosti*: Budiž $x_1, x_2, x_3, \dots$ posloupnost. Pro každé přirozené číslo p sestrojíme množinu $\{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots\}$ [tj. množinu všech členů posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \dots$, jejichž index je větší nebo roven číslu p]. Množinu $\{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots\}$ nazýváme zbytkem (přesněji *p-zbytkem*) posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \dots$

Definice limity posloupnosti: Budiž M konvergenční prostor, $x_1, x_2, x_3, \dots$ posloupnost obsažená v M a dále $a \in M$. Pravíme, že bod a je limita posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \dots$, když každé okolí bodu a obsahuje nějaký její *p-zbytek*. Zapsáno symbolicky:

$$\forall (U \in \tau(a)) \exists (p \in P) \forall (n \geq p) x_n \in U.$$

Coufal J., Klůfa J.: Matematika I (pro Vysokou školu ekonomickou), 1994 ([12])

Pro posloupnost obecně (nejen pro reálnou). Není obrázek. Nejsou příklady řešené podle definice.

Nejprve definován *konvergenční prostor*: Necht' A je neprázdná množina. Konvergenční prostor je uspořádaná dvojice $[A, \tau]$, kde τ je zobrazení, které každému prvku $a \in A$ přiřazuje neprázdný systém podmnožin množiny A takový, že platí:

I. $\forall (a \in A) \forall (U \in \tau(a)) (a \in U)$

II. $\forall (a \in A) \forall (b \in A) (a \neq b \Rightarrow \exists (U \in \tau(a)) \exists (V \in \tau(b)) (U \cap V = \emptyset))$.

(Není obrázek ani slovní popis I, II.)

Definice limity posloupnosti: Necht' $[A, \tau]$ je konvergenční prostor, (a_n) posloupnost obsažená v množině A a $a \in A$. Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu a v množině A , jestliže

$$\forall (U \in \tau(a)) \exists (d \in \mathbb{R}) \forall (n \in \mathbb{N}) (n \geq d \Rightarrow a_n \in U).$$

Poznámka: $\lim a_n = a$ právě tehdy, jestliže v každém okolí bodu a leží všechny členy posloupnosti (a_n) od určitého indexu počínaje.

Klůfa J., Coufal, J.: Matematika 1, 2003 ([14])

Pouze pro reálnou posloupnost. Současně pro vlastní i nevlastní limitu. Nejsou obrázky. Je příklad řešený podle definice.

Nejprve definováno *okolí bodu*:

(i) Necht' c je reálné číslo a δ kladné reálné číslo. Potom δ -okolí reálného čísla c je interval

$$U(c, \delta) = (c - \delta, c + \delta).$$

(ii) Necht' λ je reálné číslo. Potom λ -okolí bodu ∞ je interval $U(\infty, \lambda) = (\lambda, \infty)$.

(iii) Necht' χ je reálné číslo. Potom χ -okolí bodu $-\infty$ je interval $U(-\infty, \chi) = (-\infty, \chi)$.

Definice limity posloupnosti: Necht' (a_n) je reálná posloupnost a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu a , jestliže

$$\forall (U \in \tau(a)) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \in \mathbb{N}) (n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U).$$

Poznámka: zápis $\lim a_n = a$ je ekvivalentní tvrzení: v každém okolí bodu a leží všechny členy posloupnosti (a_n) od určitého indexu počínaje.

Kaňka M., Coufal J., Klůfa J.: Učebnice matematiky pro ekonomy, 2007 ([2])

Pouze pro reálnou posloupnost. Současně pro vlastní i nevlastní limitu. Není obrázek ani vysvětlení definice. Podle definice ukázáno, že $\lim n = \infty$.

Nejprve definováno *okolí $U(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$* o poloměru $\varepsilon > 0$ jako každý symetrický otevřený interval $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, okolí bodu $+\infty$ jako každý polouzavřený interval $U_s(\infty) = (s, \infty)$, kde s je libovolné reálné číslo, a analogicky okolí bodu $-\infty$ jako každý polouzavřený interval

$U_r(-\infty) = (-\infty, r)$, kde r je libovolné reálné číslo. (Doplněno obrázky.)

Definice limity posloupnosti: Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(a)$ bodu a existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, platí $a_n \in U(a)$.

Batíková B. a kol.: Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty, 2009 ([3])

Pouze pro reálnou posloupnost. Současně pro vlastní i nevlastní limitu. Doplněno obrázky.

Nejprve definováno *okolí $U(a)$ reálného bodu a* jako každý otevřený interval, jehož středem je a , tedy $U(a) = (a - d, a + d)$ pro $d > 0$, okolí $U(\infty)$ nevlastního bodu ∞ jako interval (k, ∞) a okolí $U(-\infty)$ nevlastního bodu $-\infty$ jako interval $(-\infty, k)$, kde k je libovolné reálné číslo. (Doplněno obrázky.)

Definice limity posloupnosti (jakožto nepovinná pouze v poznámce pod čarou): Posloupnost (a_n) má limitu L , jestliže v každém (i sebemenším) okolí bodu L leží všechny členy posloupnosti (a_n) od určitého členu počínaje, neboli

$$\lim a_n = L \Leftrightarrow \forall (U(L)) \exists (n_0 \in N) \forall (n \in N) (n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L)).$$

V textu: Říkáme, že posloupnost (a_n) má limitu L , jestliže se s rostoucím n hodnoty členů posloupnosti (a_n) přibližují k určité hodnotě L . (Doplňně obrázky.) Nejsou příklady řešené podle definice.

5 Závěr

Ačkoliv by učební texty jistě měly být přizpůsobeny úrovni kurzu, pro který jsou určeny, je míra zjednodušování výkladu diskutabilní a názory na tuto problematiku jsou do značné míry subjektivní. Proto není cílem tohoto článku jakékoliv hodnocení uvedených textů.

Literatura

- [1] Kolektiv katedry matematiky: *Matematika pro 4MM101*. VŠE, Oeconomica, Praha, 2006.
- [2] Kaňka M., Coufal J., Klůfa J.: *Učebnice matematiky pro ekonomy*. Ekopress, Praha, 2007.
- [3] Batíková B. a kol.: *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*. VŠE, Oeconomica, 2009.
- [4] Veselý F.: *Úvod do počtu infinitesimálního*. VŠE/SPN, Praha, 1954.
- [5] Veselý F.: *Úvod do počtu infinitesimálního II*. VŠE/SPN, Praha, 1955.
- [6] Veselý F., Rychlý R.: *Matematika – díl první*. VŠE/SPN, Praha, 1959.
- [7] Veselý F., Rychlý R.: *Matematika – druhý díl*. VŠE/SPN, Praha, 1959.
- [8] Rychlý R.: *Základy vyšší matematiky, díl první*. VŠE/SPN, Praha, 1962.
- [9] Rychlý R.: *Základy vyšší matematiky, díl druhý*. VŠE/SPN, Praha, 1962.
- [10] Horský Z.: *Učebnice matematiky pro posluchače VŠ*. SNTL, Praha/ALFA, Bratislava, 1968.
- [11] Horský Z.: *Učebnice matematiky pro posluchače VŠE*. SNTL, Praha/ALFA, Bratislava, 1987.
- [12] Coufal J., Klůfa J.: *Matematika I (pro Vysokou školu ekonomickou)*. VŠE, Praha, 1994.
- [13] Kaňka M., Henzler J.: *Matematika II (pro Vysokou školu ekonomickou)*. VŠE, Praha, 1995.
- [14] Klůfa J., Coufal J.: *Matematika 1*. Ekopress, Praha, 2003.
- [15] Kaňka M., Henzler J.: *Matematika 2*. Ekopress, Praha, 2003.

Adresa

RNDr. Eva Ulrychová
Vysoká škola ekonomická
Katedra matematiky
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: uleva@vse.cz

HISTORICKÉ VÝPOČETNÍ POMŮCKY A NETRADIČNÍ METODY ARITMETICKÝCH VÝPOČTŮ

ZUZANA VÁCLAVÍKOVÁ

Abstract: There will be described history of mechanical calculators and their mechanical construction, in this paper. The methods of elementary arithmetical operation – adding, subtracting, multiplying and dividing will be illustrated, specially the prof. Töpfer method of square root extraction.

1 Úvod

1.1 Historie výpočetních pomůcek

Již od pradávna se lidé snažili ulehčit si práci s aritmetickými výpočty. Velký zlom přinesl vnik poziční soustavy, který umožnil vývoj mechanických pomůcek. S nástupem počítačů upadly tyto mechanické stroje do zapomnění, ačkoliv možnosti, které ve své době nabízely vzbuzují úžas i dnes.

První a nejdéle používanou pomůckou byl tzv. abakus, u nás známý jako „počítadlo“. Byl pravděpodobně babylonského původu, jednalo se o soustavu rýh, po kterých se posouvaly drobné předměty – kamínky, zrna, atp. Nejstarším dochovaným důkazem je tzv. Salamínská tabule z období cca 300 let př. n. l. objevená v 19. století na ostrově Salamis.

V římském období se oddělil abakus na dva typy – západní a východní. Západní typ se přes orient dostal do Evropy, kde dostal nový název Abakus. Speciálně pak v Rusku byl západní typ známý pod názvem sčot, který se tam používá dodnes. Přesto, že se to může zdát nemožné, „staří počtáři“ uměli na těchto pomůckách nejenom sčítat a odečítat, ale také násobit, dělit a lze je využít také k výpočtu druhé a třetí odmocniny.

1.2 První mechanické stroje

Mezi průkopníky mechanických kalkulaček patřil zejména Wilhelm Schickard (1592–1635), který v roce 1623 vynalezl tzv. počítací hodiny – mechanický stroj, schopný sčítat, odečítat, násobit a dělit. Objevení popisů Schickardova kalkulátoru připravilo posmrtně o prvenství Blaise Pascala, který ve svých 18 letech sestrojil tzv. pascalínu, aby pomohl svému otci, který působil jako výběrčí královských daní, se zpracováváním velkého množství dat. Jednalo se o osmimístní sčítací stroj, poslední dvě místa určeny pro drobné peníze + 6 míst pro 6-ciferné hodnoty „zlatých“ peněz.

Později následoval vynález Gottfrieda Wilhelma von Leibnize (1646–1716), který chtěl nejprve dovybavit Pascalův počítací stroj schopností násobení a dělení. To se mu nedařilo, a tak se rozhodl raději pro zcela nový návrh počítacího stroje. V roce 1673 sestrojil svůj vlastní stroj, ve kterém použil válec se stupňovitým ozubením, známý také jako tzv. Leibnitzovo kolo. Výsledkem byl počítací stroj, který dokázal pracovat s 5 až 12-místnými

číslly, a splňoval tehdejší požadavky matematiků. Jeho principy se používaly ještě dalších cca 300 let.

Kolem roku 1820 vytvořil Charles Xavier Thomas první úspěšný sériově vyráběný kalkulátor – Thomasův Arithmometr, schopný sčítat, odčítat, násobit a dělit. Ten byl převážně založen na Leibnitzově přístroji. Technologie mechanických počítacích strojů se udržela až do 70. let 20. století.

2 Konstrukce mechanických kalkulaček

2.1 Mechanické kalkulačky Odhnerova typu

Z hlediska konstrukce můžeme rozdělit sériově vyráběné mechanické kalkulačky do tří skupin. První z nich, tzv. „pinwheel calculators“, byly stroje s klikou složené ze speciálních ozubených kol s proměnným počtem zubů (soustava paprskového soukolí), opatřené většinou páčkovou klávesnicí. První z těchto typů, tzv. Odhnerův arithmometr, sestrojil v roce 1873 W. T. Odhner (proto se tyto kalkulačky zvyknou nazývat jako „kalkulačky Odhnerova typu“). O dva roky později dostal patent, který podstoupil Peterburské továrně. Odhnerův syn po revoluci uprchl do Švédska, kde pokračoval s výrobou mechanických kalkulaček s originální značkou „Original Odhner“, zatímco co v Sovětském svazu se díky konstrukčním plánům a přenechanému patentu vyráběly Odhnerovi dvojníci pod značkou Felix. „Ruský“ Felix byl v polovině minulého století neodmyslitelnou součástí všech bank, účetních kanceláří a obchodů i u nás. V České republice byly z Odhnerových typů časté také mechanické kalkulačky německých firem Walther, Mellita, nebo Mira (od roku 1927 v Dolním Hanychově, po válce přejmenovaná na firmu Nisa).

2.2 Mechanické kalkulačky se soustavou stupňovitých válců

Druhým typem konstrukce byla soustava stupňovitých válců, zvaná také Thomasovou soustavou. Byla podkladem převážně mechanických strojů s násobnou klávesnicí, u nás používané především stroje značky Archimedes, Madas, atd.

2.3 Mechanické kalkulačky se soustavou úměrných ramen

Tento typ konstrukce se také nazýval soustavou proporcionálních pák a byl vynálezem Ing. Hamanna. U nás byly zastoupeny hlavně u výrobků německé značky Mercedes-Euklid. Kromě těchto zmíněných konstrukcí se objevovala řada dalších soustav, které se však neuchytily a nebo nedosáhly ani stadia prototypu. Přesto že se časem u strojů vylepšoval tvar, zvyšovala rychlost, či byl nahrazen mechanický pohon elektromotorem (typy řadíme již mezi tzv. elektromechanické kalkulačky), princip mechanické konstrukce zůstal pořád stejný, až do nástupu elektroniky.

2.4 Sčítací stroje

Speciální kategorii mechanických strojů tvoří sčítací stroje, určené primárně pro účetní potřeby – většinou vybavené pouze funkcí součtu a odečítání, doplněné tiskovým výstupem na pásku.

Na těchto strojích je vidět vývoj numerické klávesnice od násobných klávesnic až po dnes standardizovaný typ na všech kalkulačkách, nebo mobilech (patent firmy

Sundstrand, z roku 1914). Za zmínku stojí také patent firmy Astra-Werke z roku 1922 – tzv. multinulové klávesy, které dnes běžně vidíme na klávesnici bankomatů.

3 Metody výpočtu

3.1 Základní operace

Základní operace, kterými byly mechanické stroje vybaveny byl součet a odečítání (ve většině případů odlišen směrem otáčení kliky, u pozdějších elektromechanických kalkulaček bylo přepínání ručně). U neautomatických strojů se pak násobení a dělení provádělo využitím posuvného ramene nebo válce- například pokud se násobilo $135 \cdot 24$, nastavilo se větší z čísel na horní výsledkové počítadlo, otočilo se klikou 4-krát, posunulo se rameno o jednu pozici k „desítkám“ a otočilo se ještě 2-krát.

Podobně se využilo posouvání ramene i u dělení. U elektromechanických kalkulaček (pohon elektromotorem) byl tento proces většinou již automatický.

3.2 Odmocňování

Na mechanických strojích se k výpočtu odmocniny využívalo několik metod, jedna z nich byla metoda prof. Töpfera.

Podle metody prof. Töpfera odmocňujeme odečítáním lichých hodnot v řadě za sebou od mocněnce, rozděleného na skupiny dvojčísel od desetinné čárky doleva.

Například hledáme-li odmocninu $\sqrt{100489}$. Číslo rozdělíme na dvojčíslí 10-04-89. Od prvního dvojčíslí odečítáme postupně lichá čísla- 1,3,... dokud je číslo ve zbytku obsaženo:

$$\begin{array}{r} 10\ 04\ 89 \\ -\ 1 \\ \hline 09\ 04\ 89 \\ -\ 3 \\ \hline 06\ 04\ 89 \\ -\ 5 \\ \hline 01\ 04\ 89 \end{array}$$

Celkem jsme otočili 3-krát klikou (odečítali jsme tři čísla), což se nám objeví na výsledkovém počítadle.

Další liché číslo 7 již odečíst nemůžeme, tedy poslední odečítané liché číslo 5 zvětšíme o jedna na nejbližší sudé, tj. 6 a za něj napíšeme opět první liché číslo 1, dostaneme tedy liché číslo 61. Posuneme rameno nebo válec o jedno místo vlevo a odečítáme od 104-89, tedy

$$\begin{array}{r} 104\ 89 \\ -\ 61 \\ \hline 43\ 89 \end{array}$$

Celkem jsme otočili 1-krát klikou (odečítali jsme jedno číslo), což se nám objeví na výsledkovém počítadle za číslem 3 z předchozího odečítání, tedy máme 31.

Další liché číslo 63 již odečíst nemůžeme neboť není ve 43 obsaženo. Poslední odečítané číslo 61 změníme na nejbližší sudé, tj. 62 a za něj napíšeme opět první liché číslo 1, dostaneme tedy liché číslo 621. Posuneme rameno o jedno místo vlevo a odečítáme od 4389, tedy

$$\begin{array}{r}
 4389 \\
 - 621 \\
 \hline
 3768 \\
 - 623 \\
 \hline
 3145 \\
 - 625 \\
 \hline
 2520 \\
 - 627 \\
 \hline
 1893
 \end{array}
 , \quad \text{dále pak}
 \begin{array}{r}
 1893 \\
 - 629 \\
 \hline
 1264 \\
 - 631 \\
 \hline
 633 \\
 - 633 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Zbytek nula ukončuje proces a dále již nepočítáme. Celkem jsme v posledním odečítání otočili 7-krát klikou (odečítali jsme sedm čísel), což se nám objeví na výsledkovém počítadle za předchozími ciframi, obdržíme tedy 317 a to je výsledek odmocňování.

Další využívané metody byly například tzv. americká metoda (podobná popsané metodě, ale rychlejší) nebo také Collacova metoda odmocňování.

4 Závěr

Samotných výpočetních metod, či „návodů“ na zrychlení výpočtu byla ve své době publikována celá řada. Dobové návody dokonce uvádí, že „elektromechanický kalkulační automat je sice nepohodlnější, ale nikoliv nejrychlejší, neboť počtář dokonale ovládající techniku počítání pracuje často na ručním stroji rychleji...“. Většina těchto metod s nástupem elektroniky zanikla.

Literatura

- [1] Tomšů S.: *Počítací stroj a jeho dokonalé využití v praxi*. SNTL, Praha, 1957.
- [2] Wikipedia (The free encyclopedia): *Abacus* [online]. Poslední revize 23. květen 2010, <http://en.wikipedia.org/wiki/Abacus>
- [3] Wikipedia (The free encyclopedia): *History of computing hardware* [online]. Poslední revize 18. květen 2010, http://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical_calculator
- [4] Dobové návody k mechanickým počítacím strojům.

Adresa

RNDr. Zuzana Václavíková, Ph.D.
 Katedra matematiky
 Přírodovědecká fakulta
 Ostravská univerzita v Ostravě
 30. dubna 22
 701 30 Ostrava
 e-mail: zuzana.vaclavikova@osu.cz

MATURITNÍ ZKOUŠKY Z MATEMATIKY NA PŘELOMU 19. A 20. STOLETÍ A NA ZAČÁTKU 21. STOLETÍ

JAN ZAHRADNÍK

Abstrakt: Comparison of school-leaving examinations in mathematics at the C. k. české gymnasium in České Budějovice (later Jirsíkovo státní gymnasium) in the period 1899–1906 on the basis of the records, kept in the State District Archives in České Budějovice, and of the present-day tasks included in the school-leaving examinations at the Gymnázium J. V. Jirsíka in České Budějovice.

V současné době probíhá v české společnosti diskuse o podobě a významu maturitní zkoušky na středních školách. V mém příspěvku na této konferenci chci ukázat, jak vypadala maturitní zkouška z matematiky na gymnáziu před více než sto lety a porovnat ji s maturitní zkouškou na gymnáziu v současné době. Toto srovnání provedu v rámci jednoho gymnázia, a to C. k. českého gymnasia, které v současné době nese název Gymnázium Jana Valeriána Jirsíka v Českých Budějovicích.

Ve Státním okresním archivu v Českých Budějovicích se totiž nachází soubor dokumentů z historie této školy, která byla vlasteneckým českobudějovickým biskupem Janem Valeriánem Jirsíkem založena roku 1868 jako první české gymnázium v Českých Budějovicích. Ve srovnání s dokumentací ostatních českobudějovických středních škol, existujících ve druhé polovině 19. století, se jedná o nejrozsáhlejší soubor, obsahující kromě katalogů studentů také archiv korespondence a zejména sadu podrobných protokolů o maturitních zkouškách [1], počínající školním rokem 1898–1899 a končící školním rokem 1906–1907, které obsahují mimo jiné také záznamy příkladů zadávaných maturantům při ústní zkoušce z matematiky a příkladů, navržených pro zkoušku písemnou.

Z uchovaných protokolů je možné vytvořit si představu o tom, jak vypadala maturitní zkouška na gymnáziu na přelomu 19. a 20. století. V první řadě se student musel vyrovnat s pěti povinnými písemnými maturitními pracemi, a to z matematiky, českého jazyka, překladu z řečtiny do češtiny, překladu z latiny do češtiny, překladu z češtiny do latiny a pokud si vybral jako maturitní předmět němčinu, psal písemnou práci i z ní. Písemné zkoušky se konaly obvykle v první polovině května a jejich témata navrhovali profesori příslušného gymnázia v několika variantách. Konečný výběr témat provedl zemský školní inspektor, který z navržených variant „rudkou zatrhl“ vybrané téma. Znamky z písemných maturitních zkoušek jsou uvedeny v Přehledu výsledků zkoušek maturitních [2] a byl na ně brán ohled při stanovení výsledné známky.

Ústní maturitní zkoušky probíhaly před 110 lety podle modelu, který známe i v současné době. V řádném období se zkouška konala na závěr školního roku, tedy v měsíci červnu, případně i v první polovině července. V dopoledním i odpoledním termínu skládala maturitní zkoušku zpravidla čtveřice studentů a to ze všech předmětů ústní zkoušky. Povinnými předměty byly český jazyk, latina, řečtina a matematika. Jako nepovinný předmět si studenti mohli vybrat druhý zemský jazyk, tedy němčinu, dále se mohli přihlásit ke zkoušce ze soukromé četby z latiny nebo řečtiny. Platilo také, že ti studenti, kteří nesplnili v závěrečném ročníku požadavky z fyziky nebo dějepisu, museli se podrobit ústní zkoušce i z těchto předmětů.

Klasifikace v jednotlivých předmětech maturitní zkoušky se řídila šestimístnou stupnicí (včetně stupně „zcela nedostatečný“), výsledné hodnocení pak znělo tak, že žákovi bylo vydáno „vysvědčení dospělosti ke studování na universitě“ [1], případně „vysvědčení s vyznamenáním“. Neúspěšnému abiturientovi mohlo být povoleno opakování zkoušky.

V archívních záznamech C. k. českého gymnasia je v protokolech o maturitních zkouškách [1] z matematiky uvedeno celkem 732 příkladů, které byly v uvedených letech buď zadány u ústní zkoušky (604) nebo připraveny k výběru pro písemnou zkoušku (128). Je to soubor, který umožňuje vytvořit si celkem pravdivý obraz o tom, jakým tématům se matematika na tehdejších gymnáziích věnovala, jak náročné úlohy museli studenti řešit a v neposlední řadě také o tom, jakou známku byli u maturity klasifikováni. V záznamech se nevyskytuje název maturitní otázky, jako je tomu v současné době, jsou uvedeny pouze příklady, které byly maturantovi zadány (v počtu od jednoho do čtyř), známka kterou zkoušející navrhl u jednotlivých příkladů a návrh výsledné známky u ústní zkoušky. Úlohy jsem rozdělil do 30 témat, z nichž 29 je nazvaných podle současných zvyklostí, do 30. tématu jsem shrnul netypické úlohy.

Co se týká maturit v současné době, díky laskavosti kolegů z Gymnázia Jana Valeriána Jirsíka v Českých Budějovicích jsem dostal k dispozici sadu maturitních otázek a příkladů, které byly zadávány při maturitních zkouškách v roce 2010.

Soubor maturitních otázek z matematiky současného Jirsíkova gymnázia obsahuje 30 položek. Každá otázka má dvě části. V části nazvané „teorie“ nacházíme 3 až 5 témat, umožňujících maturantovi prokázat znalost teoretických základů. Část nazvaná „příklady“ pak obsahuje dvě úlohy, z nichž žák obvykle řeší jednu s cílem prokázat schopnost aplikovat teoretické znalosti.

V následující tabulce uvádím srovnání témat současných (levý sloupec tabulky) s tématy příkladů, zadávaných před 110 lety. V pravém sloupci tabulky jsou tučnou kurzívou uvedeny názvy témat z let 1899 – 1906, která podle mého názoru odpovídají tématům současným. Čísla v závorce uvádějí, kolik úloh z celkového souhrnu úloh zadáných při ústní maturitní zkoušce nebo navržených pro písemnou část do daného tématu náleží a také procentový podíl tématu na celkovém počtu úloh.

	Maturitní otázky rok 2010, Gymnázium J. V. Jirsíka	Komentář s ohledem na maturitní příklady 1899 – 1906, C.k. české gymnasium
1.	Úpravy výrazů	<i>Úpravy výrazů (9; 1,23%).</i>
2.	Typy důkazů, dělitelnost čísel	<i>Diofantické rovnice (5, 0,68%), příklady na typy důkazů se nevyskytují, několik příkladů na dělitelnost.</i>
3.	Výroky a množiny	<i>Příklady na toto téma se nevyskytují.</i>
4.	Definice a vlastnosti funkcí, graf funkce, inverzní funkce	<i>Příklady na pojem funkce a její vlastnosti se v souboru nevyskytují.</i>
5.	Lineární a kvadratická funkce	<i>Úlohy o maximech a minimech (5; 0,68%).</i>
6.	Mocnina s reálným exponentem, lineární lomená funkce	<i>Numerické výpočty (8; 1,09%).</i>
7.	Lineární a kvadratická rovnice	<i>Rovnice o jedné neznámé (11; 1,50%), Slovní úlohy (29; 3,96%), Reciproké rovnice (15; 2,05%).</i>
8.	Lineární a kvadratická nerovnice, soustavy rovnic a nerovnic	<i>Soustavy rovnic (30; 4,10%), úlohy na nerovnice se v souboru nevyskytují.</i>
9.	Rovnice a nerovnice s parametrem, s absolutní hodnotou, iracionální rovnice	<i>Iracionální rovnice a jejich soustavy (30; 4,10%), úlohy na rovnice s parametrem a s absolutní hodnotou se nevyskytují.</i>

10.	Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice	<i>Exponenciální rovnice (26; 3,55%), Logaritmické rovnice (14; 1,91%).</i>
11.	Goniometrické funkce	<i>Příklady na toto téma se nevyskytují.</i>
12.	Vztahy mezi goniometrickými funkcemi, goniometrické rovnice	<i>Goniometrie – úlohy na řešení trojúhelníka (60; 8,20%), Goniometrické rovnice (25; 3,42%).</i>
13.	Planimetrie	<i>V souboru se vyskytují úlohy na konstrukci kuželoseček a pouze jeden příklad na konstrukci trojúhelníku.</i>
14.	Zobrazení v rovině	<i>Konstrukce algebraických výrazů (8; 1,09%), jiné úlohy na zobrazení se nevyskytují.</i>
15.	Trigonometrie	<i>Trigonometrie (56; 7,65%).</i>
16.	Stereometrie	<i>Povrchy a objemy těles (88; 12,02%), prostorové konstrukční úlohy se nevyskytují.</i>
17.	Vektory, lineární útvary v E_2	<i>Analytická geometrie přímky v rovině (41; 5,60%), úlohy na vektory se nevyskytují.</i>
18.	Vektory, lineární útvary v E_3	<i>Úlohy na toto téma se nevyskytují.</i>
19.	Kružnice, kulová plocha, tečny	<i>Kružnice a její tečny (36; 4,92%).</i>
20.	Elipsa a její tečny	<i>Elipsa a její tečny (35; 4,78%).</i>
21.	Parabola a její tečny	<i>Parabola a její tečny (31; 4,23%).</i>
22.	Hyperbola a její tečny	<i>Hyperbola a její tečny (27; 3,69%).</i>
23.	Kombinační číslo, faktoriál, binomická věta	<i>Kombinační čísla (7; 0,96%), Binomická věta (11; 1,50%).</i>
24.	Kombinatorika a pravděpodobnost	<i>Kombinatorika (7; 0,96%), v souboru se vyskytuje jedna úloha na pravděpodobnost.</i>
25.	Komplexní čísla	<i>Komplexní čísla (12; 1,64%).</i>
26.	Posloupnosti	<i>Aritmetické posloupnosti (23; 3,14%), Geometrické posloupnosti (14; 1,91%), Finanční matematika (51; 6,97%).</i>
27.	Limita posloupnosti, nekonečné řady	<i>Nekonečné řady (11; 1,50%), v souboru se vyskytuje několik příkladů na limitu posloupnosti.</i>
28.	Limita a spojitost funkce	<i>Příklady na toto téma se nevyskytují.</i>
29.	Derivace funkce a její užití	<i>Příklady na toto téma se nevyskytují, úlohy na minima a maxima byly zřejmě řešeny bez použití derivace.</i>
30.	Integrál	<i>Příklady na toto téma se nevyskytují, kromě několika příkladů na určení plochy pod kuželosečkou, které zřejmě vyžadovaly znalost vzorce.</i>

Je vidět, že některá současná témata se v souboru z let 1899 až 1906 nevyskytují. Jedná se například o výroky a množiny, důkazy matematických vět, nerovnice, funkce, konstrukční úlohy, zobrazení, vektory, analytickou geometrii v prostoru nebo matematickou analýzu.

Naproti tomu maturanti z přelomu 19. a 20. století se museli vyrovnat s daleko větším počtem úloh, vyžadujících kromě schopnosti kombinovat a syntetizovat své poznatky i velkou početní zručnost a nakonec i znalost triků, k řešení mnohých úloh nezbytných. Jsou to například úlohy na řešení zadaných rovnic a jejich soustav, slovní úlohy, reciproké rovnice,

numerické výpočty, prováděné s pomocí logaritmických tabulek, velké množství úloh na povrchy a objemy těles. Soubor obsahuje širokou škálu úloh z analytické geometrie kuželoseček, v nichž se občas vyskytují pojmy jako pól, polára nebo subtangenta a v neposlední řadě mnoho úloh z finanční matematiky, kam řadím všechny úlohy na složené úrokování.

Nyní následují ukázky příkladů z některých témat. U každého příkladu uvádím rok konání ústní maturitní zkoušky, příjmení a jméno abiturienta, který jej řešil, jeho známku z písemné zkoušky z matematiky, známku navrženou zkoušejícím za daný příklad, návrh celkové známky za ústní zkoušku a výslednou známku z matematiky u maturitní zkoušky. Ta byla stanovena maturitní komisí s přihlédnutím k těmto údajům a také ke známkám v posledním ročníku studia.

1. Řešte soustavu rovnic: $\frac{3}{4}\sqrt{x-y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$,
 $\sqrt{x+y} + x + y = 12$. (1900, Štědrý Karel, 3, 1, 2, výsl. 2)
2. Stanovte neznámé: $x^2 + y^2 + x + y = 22$
 $x \cdot y = 4$. (1899, Vitoušek Jan, 3, 3, 3, výsl. 3)
3. Zahradník má něco méně než 50 stromů; vsadil-li je po pěti do řad, zbývá mu jeden, sází-li po sedmi, nedostávají se mu dva; kolik jich je? (1904, Krbec František, 3, 1, 1, výsl. 2)
4. Kdosi má ročně spláceti 200 K po 10 let; kdy může vložit celých 2000 K najednou při 4% celoročním úrokování? (1905, Bláha Karel, 3, 3, 4, výsl. 3)
5. Číslo 27 jest rozdělit na dva sčítance té vlastnosti, aby čtyřnásobný čtverec prvního a pětinasobný čtverec druhého byl co možná nejmenší. (1903, Soukup Josef, 4, 3, 4, výsl. 4)
6. Do rovnostranného válce je vepsán kužel a koule; vyhledati poměr jejich obsahů. (1901, Slaba Rudolf, 4, 4, 4, výsl. 4)
7. Určiti plochu trojúhelníka omezeného polárou a tečnami z bodu (-2, 0) k parabole $y^2 = 2x$. (1900, Konzal Tomáš, 3, 2, 2, výsl. 3)
8. Kužel obrácený vrcholem dolů ponoří se ve vodě po $\frac{7}{8}$ výšky. Která je jeho specifická váha? (1901, Prell Ladislav, 3, 4, 4, výsl. 4)
9. Silnice má směr od západu k východu. Jdeme-li po ní z místa A, od něhož leží jistá věž přesně na jih, do místa, z něhož věž je směrem jíz, ujdeme 364 m. Jak daleko je věž od silnice? (1905, Tupý Jan, 4, 4, 4, výsl. 4)
10. Které x činí ve výrazu $\left(3x - \frac{1}{5x}\right)^8$ čtvrtý člen rovný -1. (1902, Novotný František, 2, 2, 2, výsl. 3)

Ve skupině netypických úloh, které byly zadávány zejména premiantům, se kterými se zřejmě pan profesor chtěl pochlubit, najdeme úlohu na pravděpodobnost nebo výpočet determinantu, několik příkladů na řetězové zlomky nebo nekonečné odmocniny i úlohy na limitu posloupnosti vedoucí k číslu e nebo příklady na výpočet obsahu plochy pod kuželosečkou, na první pohled vyžadující znalost základů integrálního počtu. Na ukázkou uvádím několik příkladů z této kategorie.

1. 24 žáků jest posaditi do 6 lavic po 4; kolikerym způsobem se to dá provést? (1899, *Slabý Emanuel*, 3, 2, 1, výsl. 2)
2. Pravděpodobnost nějakého pokusu je $\frac{7}{8}$, která jest pravděpodobnost toho, že se pokus aspoň 4 krát zdaří, když jej 7 krát opakujeme. (1899, *Pátek Jan*, 2, 1, 1, výsl. 1)
3. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (zadání zapsáno v této podobě, pozn. aut.). (1900, *Šilháček Karel*, 1, 1, 1, výsl. 1)
4. Na elipse vyhledati bod, jehož stg = 6. (1901, *Sakač Václav*, 2, 1, 1, výsl. 2)
5. Stanovte $3\sqrt{4-3\sqrt{4-3\sqrt{4-\dots}}}$. (1901, *Štefl Josef*, 3, 2, 2, výsl. 2)
6. Jest vyhledati krychlový obsah prstenu, jenž vznikne otočením elipsy kol osy rovnoběžné s velkou osou, je-li velká osa elipsy $a = 2$ cm, výstřednost $e = \sqrt{2}$ a vnitřní poloměr prstenu je 5 cm. (1903, *Bílek Rudolf*, 1, 1, 1, výsl. 1)
7. Plocha omezená parabolou $y^2 = 2x$ a tětivou společnou s kruhem $(x-1)^2 + y^2 = 9$. (1902, *Novák Václav*, 2, 1, 1, výsl. 1)
8. Drát, jehož průřez jest kruh o poloměru $\rho = 3.721$ mm svinut jest v prsten kruhový, takže poloměr kruhu jeho osou utvořeného $r = 16.45$ cm. Tento kruh leží na vodorovné rovině a na něm a na téže rovině leží koule, jež se dotýká prstenu i roviny; vyhledati jest její krychlový obsah. (1903, *Krahulík Ondřej*, 1, 1, 1, výsl. 1)
9. Kdosi uloží $a = 10.000K$ do banky tak, aby sobě neb svým dědicům po 20 letech pojistil peněžitou rentu $n = 20$ let trvající a každého roku splatnou a rok od roku o 100 K se zvětšující, zúročuje-li se 4%. Jak velká bude první renta. (1903, *Roubal Jan*, 1, 1, 1, výsl. 1)
10. Hospodář koupil za 1200 K ovčí, z nichž si 15 ponechal a prodal ostatní za 1080 K, při každé vydělal 4 K; kolik jich bylo? (1904, *Renz Theodor*, 2, 1, 1, výsl. 1)

Závěrem konstatuji, že prapradědové současných maturantů se museli při studiu na gymnáziu na začátku dvacátého století vyrovnat nejen s latinou a řečtinou, češtinou, němčinou, dějepisem, zeměpisem nebo fyzikou, ale také s velmi náročnou matematikou.

Náročnost maturitní zkoušky a také velmi přísná klasifikace maturantů byla na přelomu 19. a 20. století předmětem diskusí nejen odborných, ale také rodičovských. Jejich výsledek – Marchetovy reformy z roku 1908 [3] – přinesly mimo jiné zrušení povinné písemné maturitní zkoušky z matematiky.

O více než sto let později se opět diskutuje o stupni náročnosti maturitní zkoušky a o místě matematiky v ní. Státní maturita by opět měla být vysvědčením „dospělosti k návštěvě univerzitní“, řečeno slovy začátku dvacátého století. To ale podle mého názoru není možné bez matematiky. Proto si dovoluji připojit se k těm, kteří volají po zařazení matematiky jako povinného předmětu u maturitní zkoušky i na začátku století jednadvacátého.

Při psaní tohoto příspěvku jsem vycházel mimo jiné z textu, který jsem jako návrh článku „Jak maturovali gymnazisté na přelomu 19. a 20. století“ poslal do redakce časopisu Matematika, fyzika a informatika.

Prameny

- [1] Státní okresní archiv České Budějovice: *Jirsíkovo státní gymnasium, Maturitní protokoly*. inv. č. 1200, signatura II/b/IV – 42, 1894–1906, kartón č. 60, 61.
- [2] Státní okresní archiv České Budějovice: *Jirsíkovo státní gymnasium, Výkaz o zkouškách maturitních 1899, Přehled výsledků zkoušek maturitních 1900–1906*. inv. č. 1021–1028, signatura I/c – 1013 – 1020, kniha č. 1021–1028.

Literatura

- [3] Morkes F.: *Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí*. IV – CERMAT, Praha, 2003.
- [4] Řezníčková K.: *Študenti a kantoři za starého Rakouska, české střední školy v letech 1867–1918*. Libri, Praha, 2007.

Adresa

RNDr. Jan Zahradník
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta
Jihočeská univerzita
Jeronýmova 10
370 01 České Budějovice
e-mail: jzahradnik@pf.jcu.cz

LINEÁRNÍ MODEL V DÍLE DÁNSKÉHO STATISTIKA T. N. THIELEHO

JITKA ZICHOVÁ

Abstract: The text is dedicated to the life and selected topics of work of an outstanding Danish statistician of the 19th century Thorvald Nicolai Thiele. His professional career is mentioned at the beginning. The rest of the paper deals with the theory of linear model, which represents a widely used statistical methodology with many practical applications. The contribution of Thiele to this part of mathematical statistics is described in detail.

1 T. N. Thiele

Thorvald Nicolai Thiele se narodil 24. 12. 1838 v Kodani. V roce 1860 ukončil studium astronomie na tamní univerzitě, kde dále působil v letech 1860 až 1870 jako vědecký asistent na astronomické observatoři. V roce 1875 byl ustanoven profesorem astronomie a ředitelem observatoře. Tyto funkce zastával až do odchodu do penze v roce 1907. Na univerzitě rovněž vyučoval a v letech 1900 až 1906 byl jejím rektorem. Byl postižen silným astigmatismem, a proto nemohl konat astronomická pozorování, obrátil tedy svou pozornost k matematice. Seznam jeho publikací obsahuje téměř padesát titulů, z toho dvě monografie věnované statistické inferenci a jednu na téma interpolační teorie. Další jsou články o astronomii, statistice, pojistné matematice a numerické analýze. Většina z nich byla inspirována praktickými problémy. Ve statistice se věnoval teorii pravděpodobnostních rozdělení, lineárního modelu, filtrování, Gramových-Charlierových řad a procesu Brownova pohybu. Thiele byl velmi aktivní a měl organizační schopnosti. Má zásluhu na vzniku dvou vědeckých společností, a to Dánské matematické společnosti v roce 1873 a Dánské aktuárské společnosti v roce 1901. Zemřel 26. září 1910 v Kodani. Podrobněji se o jeho životě a díle lze dočíst v knize [4] a článku [9].

2 Lineární model

Lineární model pro náhodný vektor Y je v dnes používaném značení definován předpisem

$$EY = \mu = X\beta. \quad (1)$$

Symbol E označuje operátor střední hodnoty, X je pevná matice typu n -krát m s hodnotami $m < n$, β je m -rozměrný vektor neznámých parametrů a rozptyl složek $Y_1, \dots, Y_n$ vektoru Y nezávisí na β (viz [1]). Jednoduchým příkladem je model regresní přímky proložené dvourozměrnými daty se zápisem

$$\begin{pmatrix} EY_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ EY_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & X_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix},$$

to znamená $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i$, kde $e_1, \dots, e_n$ jsou náhodné odchylky s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem.

První formulace lineárního modelu byly spojeny s řešením problémů geodézie a astronomie. V roce 1686 Edmund Halley odvodil lineární relaci mezi nadmořskou výškou a pozorovanou výškou sloupce barometru. Model regresní přímky procházející počátkem vyšetřuje Roger Cotes v roce 1722. Německý kartograf a astronom Tobias Mayer, profesor matematiky a ředitel observatoře v Göttingen, použil v roce 1750 lineární model s trojrozměrným vektorem parametrů β při vyšetřování pohybu Měsíce. Problematickou odhadu vektoru β se dále zabývali v polovině 18. století Roger Joseph Boscovich a Johann Heinrich Lambert, na konci 18. století Pierre Simon Laplace a počátkem 19. století Adrien Marie Legendre a Carl Friedrich Gauss. Poslední dva navrhli dodnes používanou metodu nejmenších čtverců. Zájemcům o historii uvedené problematiky lze doporučit knihy [3] a [5].

Thieleho důležitým přínosem pro teorii lineárního modelu je formulace tzv. kanonické formy lineární hypotézy v práci [6]. Necht' jsou složky $Z_1, \dots, Z_n$ náhodného vektoru Z nezávislé normálně rozdělené se středními hodnotami $EZ_i = \eta_{i0}$, $i = 1, \dots, n - m$ a $EZ_i = \eta_i$, $i = n - m + 1, \dots, n$. První sada středních hodnot je známá, druhou sadu neznáme. Předpokládejme stejný neznámý rozptyl σ_Z^2 u všech veličin $Z_1, \dots, Z_n$. Můžeme jej odhadnout z pozorování $z_1, \dots, z_{n-m}$ těchto veličin podle vzorce

$$s_Z^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (z_i - \eta_{i0})^2.$$

Thiele se zabývá problémem převedení lineárního modelu (1) s nezávislými normálně rozdělenými veličinami $Y_1, \dots, Y_n$ s rozptylem σ_Y^2 do výše popsané kanonické formy. Rozdělí vektor μ na dva podvektory délek $n - m$ a m tak, že

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(1)} \beta \\ X^{(2)} \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \beta, \text{ kde } X = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$$

a čtvercová matice $X^{(2)}$ má plnou hodnotu m . Dále definuje lineární transformaci

$$Z = \begin{pmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T Y \\ B^T Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} \cdot Y, \text{ kde } A^T = (I_{n-m}, -X^{(1)}(X^{(2)})^{-1}) \text{ a } B = X, \quad (2)$$

I_{n-m} je jednotková matice rozměru $n - m$, symbol T značí transpozici. Zřejmě je $\beta = (X^{(2)})^{-1} \mu^{(2)}$, $\mu^{(1)} = X^{(1)}(X^{(2)})^{-1} \mu^{(2)}$ a odtud plyne $EZ^{(1)} = A^T EY = A^T \mu = 0$. Transformací (2) vektoru Y jsme přešli ke kanonickému modelu pro vektor Z , v němž $EZ_i = \eta_{i0} = 0$ pro $i = 1, \dots, n - m$.

Odhad střední hodnoty $EZ^{(2)} = X^T EY = X^T X \beta$ metodou nejmenších čtverců je $X^T y$ při pozorované hodnotě y náhodného vektoru Y . K získání odhadu vektoru

parametrů β máme soustavu normálních rovnic $X^T X \beta = X^T y$. Při použití Gaussova algoritmu k nalezení jejího řešení násobíme obě strany dolní trojúhelníkovou maticí G s vlastností $G X^T X G^T = D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_m\}$. Dostáváme vztah

$$G X^T X \beta = G X^T y. \quad (3)$$

Složky U_i náhodného m -rozměrného vektoru $U = G X^T Y$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozptyly $\sigma_Y^2 d_i$. K dispozici máme vektor jejich pozorování $u = G X^T y$. Thiele zavádí nový vektor parametrů θ , pro který platí $\beta = G^T \theta$. Soustavu (3) pak lze psát ve tvaru $D \theta = u$ s řešením $t = D^{-1} u = D^{-1} G X^T y$, přičemž složky náhodného vektoru $D^{-1} U$ jsou nezávislé s rozptyly σ_Y^2 / d_i . V publikaci [6] Thiele odvozuje vlastnosti odhadu $b = G^T t$ vektoru parametrů β a odhadu Xb střední hodnoty EY pomocí vlastností odhadu t . Zabývá se též zobecněními modelu, například případem matice X , která nemá plnou hodnot m , což vede k soustavě normálních rovnic s nejednoznačným řešením.

3 Analýza rozptylu

Analýza rozptylu je jednou z aplikací teorie lineárního modelu (viz [1]). V knize [6] Thiele studuje její speciální případ dvojné třídění, které spočívá ve vyšetření vlivu dvou faktorů na nějakou měřenou veličinu. Motivací jsou mu pozorování průchodů k hvězd skrze m paralelních vláken nitkového kříže v astronomickém měřícím přístroji. Střední čas průchodu i -té hvězdy j -tým vláknem lze psát ve tvaru

$$EY_{ij} = \mu_{ij} = \alpha_i + \frac{\beta_j}{h_i}. \quad (4)$$

Faktor α s úrovněmi $i = 1, \dots, k$ představuje čas průchodu i -té hvězdy středovým vláknem nitkového kříže známou rychlostí h_i , zatímco faktor β s úrovněmi $j = 1, \dots, m$ reprezentuje vzdálenost j -tého vlákna od vlákna středového. O veličinách Y_{ij} předpokládáme, že jsou nezávislé normálně rozdělené s rozptylem σ_Y^2 .

Vztah (4) je rovnicí lineárního modelu (1) se speciálním tvarem matice X s neúplnou hodnotí, kde $Y = (Y_{11}, \dots, Y_{1m}, \dots, Y_{k1}, \dots, Y_{km})^T$ a vektor parametrů vyjadřujících vliv faktorů α, β je $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m)^T$. Aby byla řešitelná soustava normálních rovnic pro odhad parametrů α_i, β_j , je nutné přidat do modelu fiktivní pozorování z . Označíme-li

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_{ij}, \quad w = \sum_{i=1}^k h_i^{-2},$$

mají odhady tvar

$$a_i = \bar{y}_i - \frac{z}{m h_i}, \quad b_j = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^k h_i^{-1} (y_{ij} - \bar{y}_i) + \frac{z}{m}.$$

Thiele poznamenává, že bez přidání z nelze sestavit odhady parametrů α_i , β_j , ale je možné odhadnout lineární parametrické funkce typu $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k$ a $d_1\beta_1 + \dots + d_m\beta_m$, platí-li reparametrizační podmínky $c_1 + \dots + c_k = 0$ a $d_1 + \dots + d_m = 0$. Střední hodnoty μ_{ij} se odhadují podle předpisu

$$m_{ij} = \bar{y}_i + \frac{1}{h_i w} \sum_{r=1}^k h_r^{-1} (y_{rj} - \bar{y}_r).$$

Thiele ukazuje, že platí

$$E \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (Y_{ij} - m_{ij})^2 = \sigma_Y^2 (k-1)(m-1),$$

což umožňuje odhadnout rozptyl σ_Y^2 . Model dvojného třídění je zmíněn i v publikacích [7] a [8], na něž navázal jeden z velikánů matematické statistiky první poloviny 20. století R. A. Fisher, který ve své knize [2] řadí Thieleho k osobnostem s největším přínosem k rozvoji statistiky.

Literatura

- [1] Anděl J.: *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, Praha, 2005.
- [2] Fisher R. A.: *Statistical methods for research workers*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1932.
- [3] Hald A.: *A History of Mathematical Statistics. From 1750 to 1930*. Wiley, New York, 1998.
- [4] Lauritzen S. L.: *Thiele: Pioneer in Statistics*. Oxford University Press, 2002.
- [5] Stigler S. M.: *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*. Belknap Press, London, 1986.
- [6] Thiele T. N.: *Almindelig Iagttagelselære: Sandsynlighedsregning og mindste Kvadraters Methode*. C. A. Reitzel, Copenhagen, 1889.
- [7] Thiele T. N.: *Elementær Iagttagelselære*. Gyldendal, Copenhagen, 1897.
- [8] Thiele T. N.: *Theory of observations*. Layton, London, 1903.
- [9] Zichová J.: *Thorvald Nicolai Thiele – dánský statistik a aktuár*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 55 (2010), č. 1, 30–42.

Adresa

RNDr. Jitka Zichová, Dr.
 Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
 Matematicko-fyzikální fakulta UK
 Sokolovská 83
 186 75 Praha 8
 e-mail: zichova@karlin.mff.cuni.cz

DODATEK K ČLÁNKU

INTERPRETACE MATEMATICKÝCH VÝSLEDKŮ NAŠICH PŘEDKŮ

JINDŘICH BEČVÁŘ

Teprve před několika měsíci jsem se s překvapením dozvěděl, že jeden z našich kolegů, doc. RNDr. Jan Slavík, CSc., z Katedry fyziky Západočeské univerzity v Plzni se kromě fyziky věnuje i čínské kultuře a poezii. I on přeložil jednu z nejznámějších čínských básní, jejíž překlady jsem uvedl ve výše zmíněném článku ve sborníku jubilejní, 30. mezinárodní konference *Historie matematiky* (Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009, Praha 2009, 59–86) na stranách 78–79. Jako doplněk tohoto svého loňského textu si zde dovoluji uvést i jeho překlad.

Myšlenka tiché noci

Přeložil Jan Slavík (2007)

Před postel mi jasný měsíc svítí.

Divím se: na zemi že jíní mám.

Pozvednu hlavu, zřím jasný měsíc.

Skloním ji, na domov vzpomínám.

OBSAH

Úvodní slovo	3
Seznam účastníků	6
Seznam přednášek	7
Odborný program	8

I. Vyzvané přednášky

Kvasz L.: Jazyk matematiky ako predmet historického výskumu	13
Veselý J.: Poznámky k historii funkcionálních rovnic	29
Więsław W.: Matematyka na ziemiach polski w epoce Oświecenia	51

II. Konferenční vystoupení

Balková L.: Paul Erdős a jeho oblíbené problémy Ramseyovy teorie	79
Bálintová A.: Sudoku a história magických štvorcov	81
Bártlová T.: Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec	87
Bečvář J., Bečvářová M.: Metodika některých prací z historie	93
Bečvářová M.: 111 let od příchodu Karla Zahradníka do Brna	103
Benediktová M.: Al-Chvárizmího Aritmetický a Algebraický traktát	113
Čížmár J.: Dielo Karla Zahradníka (geometrické práce)	121
Fabian F.: Kdo je autorem axiomatiky podmíněných pravděpodobností?	129
Hykšová M.: Bruno de Finetti (1906–1985) a filosofie pravděpodobnosti	133
Chmelíková V.: Méně známí učitelé deskriptivní geometrie	137
Chocholová M.: Matematické aplikace v díle Wilhelma Matzky	149
Kalousová A.: Zobecnění Buffonovy úlohy o jehle	165
Kotůlek J.: Problémy Diracovy rovnice 1928–1933	169
Křápek M.: Zapomenuté práce Otakara Borůvky	175
Melcer M.: Eduard Čech a jeho středoškolské učebnice	179
Moravec L.: Jakub Filip Kulík v Olomouci, Štýrském Hradci a Praze	187
Otavová M.: Ladislav Jandera a pěstování početní zdatnosti na pražské universitě	199
Pazourek K.: Tři roky vězím v dělitelnosti	203
Pelikán D.: Gottfried Wilhelm Leibniz: Univerzální řeč	207
Pogoda Z.: Kazimierz Żorawski and the Cracow mathematical school	211
Slavík A.: O řetězovce a hyperbolických funkcích	217
Smýkalová R.: Trigonometrie v Evropě 15. – 17. století	221
Surynková P.: Vývoj lineární perspektivy ve výtvarném umění	225
Sýkorová I.: Rukopis Bakhšhálí	231
Štěpánová M.: Počátky teorie matic u nás, obzvláště Weyrova teorie	239

Trkovská D.: Od shodnosti k transformacím	249
Ulrychová E.: Základní učební texty z matematiky na VŠE Praha v letech 1954–2009	263
Václavíková Z.: Historické výpočetní pomůcky a netradiční metody aritmetických výpočtů	275
Zahradník J.: Maturitní zkoušky z matematiky na přelomu 19. a 20. století a na začátku 21. století	279
Zichová J.: Lineární model v díle dánského statistika T. N. Thieleho	285
Bečvář J.: Dodatek k článku Interpretace matematických výsledků našich předků	289
Obsah	290

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová (ed.)

31. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal

MATFYZPRESS

vydavatelství

Matematicko-fyzikální fakulty

Univerzity Karlovy v Praze

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

jako svou 322. publikaci

Z předloh připravených v systému Word

vytisklo Repro středisko UK MFF

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání

Praha 2010

ISBN 978-80-7378-128-6