

30. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009



Praha

2009

Památce

Jaroslava Šedivého

(1934–1988)

zakladatele konferencí Historie matematiky

Všechna práva vyhrazena. Tato publikace ani žádná její část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě, elektronické nebo mechanické, včetně fotokopíí, bez písemného souhlasu vydavatele.

© J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.), 2009

© MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze, 2009

ISBN 978-80-7378-092-0

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme vám sborník obsahující texty tří vyzvaných přednášek, rekapitulaci uplynulých třiceti konferencí, texty delších a kratších sdělení, které byly přihlášeny na jubilejní, 30. mezinárodní konferenci **Historie matematiky**. Všechny příspěvky byly graficky a typograficky sjednoceny, některé byly upraveny i jazykově. Zařazen byl též program konference a seznam všech účastníků, kteří se přihlásili ve stanoveném termínu (15. květen 2009). Sborník vznikl díky finanční podpoře Katedry didaktiky matematiky MFF UK a Ústavu aplikované matematiky FD ČVUT.

V první části sborníku jsou zařazeny hlavní přednášky, o něž byli požádáni zkušení přednášející, kteří se věnují matematice, dějinám matematiky, souvislostem matematiky s ostatními sférami lidské činnosti, výchově doktorandů, řízení a organizaci vědecké práce a mnoha dalším aktivitám.

Ve druhé části sborníku jsou uveřejněny kratší či delší příspěvky jednotlivých účastníků. Konference není monotematicky zaměřena, snažili jsme se poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všem přihlášeným, tj. matematikům, historikům matematiky, učitelům vysokých i středních škol, doktorandům oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* i všem dalším zájemcům o matematiku a její vývoj.

Program letošní konference je opět poměrně pestrý. Věříme, že každý najde řadu témat, která ho zaujmou a potěší, že objeví nové kolegy, přátele a spolupracovníky, získá inspiraci, řadu podnětů, motivaci i povzbuzení ke své další odborné práci a ke svému studiu.

Podrobnější informace o letošní jubilejní konferenci i o všech předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese

<http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html>.

Jindřich Bečvář a Martina Bečvářová

V Praze, v červenci 2009

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

- Balková Ľubomíra
- Bálintová Anna
- Bártlová Tereza
- Bečvář Jindřich
- Bečvářová Martina
- Benediktová Marie
- Boček Leo
- Bočková Jana
- Čižmár Ján
- Dostálová Ludmila
- Durnová Helena
- Halas Zdeněk
- Hromadová Jana
- Hykšová Magdalena
- Chmelíková Vlasta
- Chocholová Michaela
- Ilucová Lucia
- Jarošová Martina
- Kafková Marika
- Kalousová Anna
- Kotůlek Jan
- Kvasz Ladislav
- Kvaszová Milena
- Lengyelfalussy Tomáš
- Marčoková Mariana
- Melcer Martin
- Moravec Luboš
- Nakládal Čestmír
- Otavová Miroslava
- Pavlíková Pavla
- Pazourek Karel
- Pelantová Edit
- Pelikán David
- Pémová Marta
- Porubský Štefan
- Provazníková Marie
- Riečan Beloslav
- Richter Jaroslav
- Robová Jarmila
- Saxl Ivan
- Sklenáriková Zita
- Slavík Antonín
- Smýkalová Radka
- Surynková Petra
- Sýkorová Irena
- Štěpán Josef
- Štěpánová Martina
- Tihlaříková Miroslava
- Trkovská Dana
- Ulrychová Eva
- Vašíček Karel
- Widž Jiří
- Więsław Witold

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

I. Vyzvané přednášky

L. Boček, J. Hromadová: *Izoperimetrické nerovnosti, W. Blaschke a trochu politiky*

B. Riečan: *Matematika a hudba*

J. Štěpán: *Povídka o Brownově pohybu a také o Nobelově ceně za ekonomii*

II. Konferenční vystoupení (25 minut)

L. Balková: *Krok za krokem k řešení soustav lineárních algebraických rovnic*

A. Bálintová: *Skúsenosti z pôsobenia na VŠ v Tunisku vo výučbe matematiky*

J. Bečvář: *Interpretace matematických výsledků našich předků*

M. Bečvářová: *O jedné maturitní zkoušce*

M. Benediktová: *Doba C. F. Gausse*

J. Čížmár: *Matematika na Slovensku 1945–1965*

L. Dostálová: *Hilbertův program*

H. Durnová: *Proměny Oddělení matematických strojů v ČSAV*

M. Hykšová: *Karel Vorovka (1879–1929) – matematik a filosof*

V. Chmelíková: *Z historie výuky deskriptivní geometrie na středních školách*

M. Chocholová: *Tužby našich předků*

L. Ilucová: *História pentagonálnych teselácií*

A. Kalousová: *Hrabě de Buffon a hra franc-carreau*

J. Kotůlek: *Metodika soudobých dějin matematiky na příkladu Riemannovy hypotézy*

L. Kvasz: *Matematika a jej jazyk*

M. Kvaszová: *Historie vybraných problémů z počátků teorie pravděpodobnosti*

M. Marčoková: *40-ročná história konferencií slovenských matematikov*

M. Melcer: *Poválečná devastace finanční matematiky*

L. Moravec: *Seznámení s Jakubem Filipem Kulikem*

M. Otavová: *Ladislav Jandera – současník Bernarda Bolzana*

P. Pavlíková: *O Fareyových zlomcích*

K. Pazourek: *Slovní úlohy o dělitelnosti 1850–1950*

Š. Porubský: *Ako rýchlo vieme a môžeme násobiť*

I. Saxl: *Paracelsus a jeho dílo*

I. Saxl: *Matematika v době Paracelsově*

A. Slavík: *O binomické větě s racionálními a reálnými exponenty*

R. Smýkalová: *Středověký zrod trigonometrických veličin*

P. Surynková: *Vývoj výpočetní geometrie*

I. Sýkorová: *Zlomky ve staré Indii*

M. Tihlaříková: *Teorie automorfních funkcí*

D. Trkovská: *Möbiův Barycentrický počet a geometrické transformace*

J. Widž: *Z historie řetězových zlomků*

W. Więsław: *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu (1870–1882)*

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Pátek 21. 8. 2009

Dopolední program 10:00–12:00

Zahájení

Plenární přednáška:

J. Štěpán: *Povídka o Brownově pohybu a také o Nobelově ceně za ekonomii*

Odpolední program 14:00–15:30

Konferenční vystoupení:

R. Smýkalová: *Středověký zrod trigonometrických veličin*

L. Balková: *Krok za krokem k řešení soustav lineárních algebraických rovnic*

A. Bálintová: *Skúsenosti z pôsobenia na VŠ v Tunisku vo výučbe matematiky*

Odpolední program 16:00–18:00

Konferenční vystoupení:

J. Bečvář: *Interpretace matematických výsledků našich předků*

M. Otavová: *Ladislav Jandera – současník Bernarda Bolzana*

L. Dostálová: *Hilbertův program*

Sobota 22. 8. 2009

Dopolední program 8:30–10:00

Plenární přednáška:

L. Boček, J. Hromadová: *Izoperimetrické nerovnosti, W. Blaschke a trochu politiky*

Dopolední program 10:30–12:00

Konferenční vystoupení:

J. Čížmár: *Matematika na Slovensku 1945–1965*

M. Bečvářová: *O jedné maturitní zkoušce*

M. Marčoková: *40-ročná história konferencií slovenských matematikov*

Odpolední program 14:00–15:30

Konferenční vystoupení:

Š. Porubský: *Ako rýchlo vieme a môžeme násobiť*

J. Widž: *Z historie řetězových zlomků*

M. Melcer: *Poválečná devastace finanční matematiky*

Odpolední program 16:00–18:00

Konferenční vystoupení:

I. Saxl: *Matematika v době Paracelsově*

J. Kotůlek: *Metodika soudobých dějin matematiky na příkladu Riemannovy hypotézy*

Diskuse o práci historika matematiky

Neděle 23. 8. 2009

Dopolední program 8:30–10:00

Plenární přednáška:

B. Riečan: *Matematika a hudba*

Dopolední program 10:30–12:00

Konferenční vystoupení:

H. Durnová: *Proměny oddělení matematických strojů v ČSAV*

M. Chocholová: *Tužby našich předků*

D. Trkovská: *Möbiův Barycentrický počet a geometrické transformace*

Pondělí 24. 8. 2009

Dopolední program 8:30–10:00

Konferenční vystoupení:

L. Ilucová: *História pentagonálnych teselácií*

M. Benediktová: *Doba C. F. Gausse*

M. Tihlaříková: *Teorie automorfních funkcí*

Dopolední program 10:30–12:00

Konferenční vystoupení:

A. Kalousová: *Hrabě de Buffon a hra franc-carreau*

K. Pazourek: *Slovní úlohy o dělitelnosti 1850–1950*

P. Pavlíková: *O Fareyových zlomcích*

Odpolední program 14:00–15:30

Konferenční vystoupení:

I. Sýkorová: *Zlomky ve staré Indii*

M. Kvaszová: *Historie vybraných problémů z počátků teorie pravděpodobnosti*

A. Slavík: *O binomické větě s racionálními a reálnými exponenty*

Odpolední program 16:00–18:00

Konferenční vystoupení:

M. Hykšová: *Karel Vorovka (1879–1929) – matematik a filosof*

L. Kvasz: *Matematika a jej jazyk*

W. Więśław: *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu (1870–1882)*

Úterý 25. 8. 2008

Dopolední program 8:30–10:00

Konferenční vystoupení:

V. Chmelíková: *Z historie výuky deskriptivní geometrie na středních školách*

L. Moravec: *Seznámení s Jakubem Filipem Kulikem*

P. Surynková: *Vývoj výpočetní geometrie*

Dopolední program 10:30–12:00

Závěrečná diskuse

Zakončení

HISTORIE MATEMATIKY JIŽ POTŘICÁTÉ!¹

JINDŘICH BEČVÁŘ

Abstract: The contribution describes the brief history, main aims and results of thirty Summer Schools and Conferences “History of Mathematics” held in the years 1980–2009. The other interesting activities and achievements connected with the Conferences are mentioned as well.

1 Úvod

Uplynulých třicet let aktivit v dějinách matematiky v Československu, resp. v České republice bylo bezprostředně spjato s pravidelně pořádanou akcí, která se původně nazývala letní škola *Světónázorová výchova v matematice*. Dnes je již organizována jako mezinárodní konference *Historie matematiky*. Úctyhodné množství publikací, učebních textů a monografií, řada doktorátů a několik rozvíjejících se souběžných aktivit je dostatečným důvodem k podrobnějšímu ohlédnutí. Považuji za velmi zajímavé připomenout jak příčiny, které ke vzniku původních letních škol vedly, tak realizaci námětů, které byly zformulovány roku 1980 na první z nich.

2 Letní školy *Světónázorová výchova v matematice* I.–X. (1980 až 1989)

Koncem sedmdesátých let 20. století byl do učebních plánů učitelského studia matematiky v tehdejším Československu zařazen předmět *Světónázorové problémy v matematice*. Pro jeho výuku však nebyly fakulty vychovávající budoucí učitele matematiky připraveny², byl proto pociťován výrazný nedostatek jak kvalifikovaných přednášejících³, tak vhodné odborné literatury. Jaroslav Šedivý⁴ (1934–1988) z Katedry teorie vyučování matematice Matematicko-fyzikální fakulty UK ve spolupráci s Matematickou pedagogickou sekci Jednoty československých matematiků a fyziků inicioval tehdy vznik série letních škol *Světónázorová výchova v matematice*, na nichž se měli vyučující ze všech fakult připravujících budoucí učitele matematiky v Československé republice připravovat pro výuku nově vzniklého

¹ Podpořeno projektem *Podpora technických a přírodovědných oborů* Operačního programu *Vzdělávání pro konkurenceschopnost* (CZ.1.07/4.2.00/06.0005).

² Zavádění nového předmětu „*Světónázorové problémy matematiky*“ do vysokoškolského vzdělávání učitelů matematiky od studijního roku 1981/2 přináší řadu problémů. Předmět zahrnuje vedle matematické logiky a filozofických problémů základů matematiky značnou část věnovanou dějinám matematiky a právě k posledním dvěma oblastem zatím ne na všech vysokých školách existují odborníci. (J. Folta, DVT 14(1981), str. 182)

Na MFF UK byl tento předmět vyučován poprvé ve školním roce 1981/82 v pátém ročníku učitelského studia kombinací matematika-fyzika a matematika-deskriptivní geometrie v rozsahu 2/1, 0/2 se dvěma zápočty; vyučujícím byl J. Šedivý, od roku 1988 pak J. Folta. Ve stejném roce začaly běžet *Dějiny fyziky* v rozsahu 2/0 (bez zakončení, I. Úlehla, od r. 1987 L. Pátý) a *Dějiny školy a pedagogiky* v rozsahu 2/0 (zkouška, V. Šterák, R. Váňová).

³ V několika předchozích desetiletích nebyli bohužel vychováni ani profesionální odborníci pracující v historii matematiky (např. formou tehdejší aspirantury), ani vyučující dějin matematiky či filozofie matematiky. Profesionálně se dějinám matematiky v té době věnovali Luboš Nový a Jaroslav Folta z tehdejšího Ústavu československých a světových dějin ČSAV, logice a dějinám logiky pak Karel Berka z Ústavu pro sociologii a filozofii ČSAV.

⁴ O Jaroslavu Šedivém viz krátký článek [1], v němž jsou uvedeny další bibliografické odkazy. Viz též brožura [8]. Dne 8. prosince 2009 by Jaroslavu Šedivému bylo 75 let.

předmětu.⁵ Současné měly být sepsány základní učební texty pro vysokoškolskou přípravu budoucích učitelů matematiky.⁶ Společně s J. Šedivým se přípravy odborného programu letních škol a celé jejich organizace chopil Jaroslav Folta z tehdejšího Ústavu československých a světových dějin ČSAV, později k nim přibyl Eduard Fuchs z brněnské Přírodovědecké fakulty. Název vysokoškolských přednášek a seminářů, stejně tak i letních škol, byl poplatný tehdejší oficiální ideologii, program letních škol však tvořila (až na nepatrné výjimky) klasická historie matematiky, která byla místy obohacována různými filozofickými pohledy. Na první letní škole přednášeli K. Berka, J. Folta, K. Hájek, L. Nový, M. Hejný a J. Šedivý, na druhé K. Berka, J. Folta, E. Fuchs, J. Hrubeš, J. Mikulčák, I. Netuka, L. Nový, Š. Schwabík, J. Šedivý, J. Veselý a P. Vopěnka.

V letech 1980 až 1989 se konalo deset letních škol *Světónázorová výchova v matematice* (Branžež, Cikháj, Prostřední Bečva, Luhačovice, Živohošť, Malá Morávka, Lipovec, Jevany, Valašské Meziříčí a Vranov nad Dyjí); první proběhla v září, další vždy na přelomu května a června. Byl o ně poměrně velký zájem, na každý běh přijelo kolem padesáti osob.⁷

Matematická pedagogická sekce původně plánovala jen asi pět takovýchto letních škol. Zhruba od poloviny osmdesátých let se však charakter těchto akcí postupně měnil; začali na nich totiž se zasloučenými přednáškami vystupovat jejich dřívější pasivní účastníci.⁸ Původní vzdělávací akce se tak přerodila na pravidelná setkávání zájemců o historii matematiky, z nichž mnozí seznamovali své kolegy s vývojem matematických disciplín, v nichž sami pracovali a jejichž základy či pokročilé partie přednášeli na vysokých školách. Toto měnění se zaměření letních škol podstatně přispělo k tomu, že akce, která byla původně plánovaná jen na několik let, přežila tři desetiletí.

Roku 1986 vznikla z iniciativy J. Folyty při Jednotě Československých matematiků a fyziků a při Československé společnosti pro dějiny věd a techniky (vědecké společnosti tehdejší Československé akademie věd) *Stálá pracovní skupina pro dějiny matematiky*.⁹

⁵ Ve zprávě o první letní škole je zmíněno plánované zaměření těchto akcí: *Matematická pedagogická sekce JČSMF zařadila do plánu svých akcí v letech 1980–84 sérii letních škol věnovaných problematice světónázorové výchovy ve vyučování matematice na vysokých školách. ... Obsahem školy v prvních dvou letech má být převážně historie matematiky, logiky a deskriptivní geometrie, podávaná z pozic historického materialismu; filozofická problematika bude převažovat později, kdy bude možné opřít její výklad o znalost faktů z historie zmíněných věd ... Dobrá motivace obtížných pojmů a metod zvyšuje kvalitu učitelské práce při výuce matematiky. A o to jde i organizátorům letních škol k světónázorovým problémům ve vyučování matematice. Zpráva je podepsána Výbor MPS, je otištěna v PMFA 26(1981) na str. 116. Napsal ji patrně J. Šedivý.*

Ve zprávě o 2. letní škole je uvedeno: ... málokterá fakulta má odborníky v příslušném oboru, vhodné literatury – především pro studenty – je nedostatek a tak problémy se zajištěním kvalitní výuky daného předmětu jsou nemalé. (E. Fuchs, MFvŠ 13(1982/83), str. 281)

⁶ Pro zajištění semináře k světónázorové výchově v učitelském studiu bude účelné připravit čítanky klasických matematických textů, popř. sborník statí (jejich základem mohou být přednášky v letní škole). (PMFA 26(1981), str. 116)

⁷ O prvních deseti letních školách *Světónázorová výchova v matematice* a o publikacích, které vznikly v souvislosti s touto letní školou v období 1980 až 1989, lze základní fakta nalézt v článku [2].

⁸ ... se náplň letní školy začala zaměřovat stále více ke speciálním otázkám moderního vývoje matematiky a nabývat více seminárního charakteru. Svědčí o tom i rozšíření počtu přednášejících ... (J. Folta, DVT 18(1985), str. 60)

⁹ Podnět k založení takovéto skupiny se zrodil již na první letní škole v Branžeži. Ve zprávě o jejím průběhu je uvedeno: *Doporučovalo se, aby Jednota československých matematiků a fyziků vytvořila skupinu vážnějších zájemců o historii matematiky a tak podnítila rozvoj tohoto oboru u nás. V diskusi bylo mimo jiné naznačeno, že je třeba věnovat zavedení předmětu na vysoké školy zvýšenou péči, protože tato pedagogická základna by mohla posílit i badatelskou práci v dějinách matematiky a tak pomoci postihnout zejména neobyčejný rozvoj*

Jejím předsedou se stal Břetislav Novák, místopředsedou Jaroslav Folta, tajemníkem Jindřich Bečvář, členy této skupiny byli L. Berger, L. Bukovský, E. Fuchs, M. T. Morovics, I. Netuka, L. Nový, J. Šedivý, A. Šolcová a J. Veselý.¹⁰ Po krátké době převzal vedení Stálé pracovní skupiny pro dějiny matematiky J. Folta, místopředsedou se stal J. Bečvář, hospodářem E. Fuchs a tajemnicí A. Šolcová. Pod hlavičkou této skupiny (a již zmíněné Matematické pedagogické sekce Jednoty, často též s pomocí některé její pobočky) byly v dalších letech letní školy o světónázorové výchově organizovány. Po smrti J. Šedivého je připravovali J. Folta, E. Fuchs a J. Bečvář.

V červnu roku 1989, ještě před politickými změnami ve státě, bylo na desáté letní škole ve Vranově nad Dyjí rozhodnuto změnit původní název této akce poznamenaný tehdejší ideologií tak, aby zcela otevřeně a jasně charakterizoval její zaměření – *Letní škola z historie matematiky*.

V souvislosti s letními školami se Jaroslav Šedivý, Jaroslav Folta a Eduard Fuchs postarali o vydání čtyř dílů skript *Světónázorové problémy matematiky* (1983, 1984, 1985, 1987), do nichž přispělo i několik dalších autorů (J. Bečvář, K. Berka, J. Čížmár, J. Frolíková, I. Füzeková, J. Hořejší, J. Chvalina, I. Netuka, Š. Schwabik, J. Veselý). Na tyto texty, které vyšly ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze jako klasická skripta v tehdejší běžném formátu A4, navázaly dva sborníky vybraných přednášek z letních škol, které ve formátu B5 vydala Jednota československých matematiků a fyziků; první sborník, *Světónázorová výchova v matematice* (1987), editoval J. Šedivý, druhý sborník, *Filozofické a vývojové problémy matematiky* (1988), editoval J. Folta.¹¹ Autorsky se na nich podíleli J. Bečvář, K. Berka, J. Čížmár, E. Fuchs, J. Hruběš, R. Kolomý, H. Kořínková¹², I. Marek, I. Netuka, J. Pech, V. Štefl, J. Šedivý a J. Veselý. V letech 1987 a 1988 vydali Jaroslav Šedivý, Jiří Mikulčák a Stanislav Židek ve spolupráci s I. Füzekovou a J. Pechem (opět ve Státním pedagogickém nakladatelství jako klasická skripta A4) dva tituly zaměřené na dějiny vyučování matematice v našich zemích: *Antologie matematických didaktických textů. Období 1360–1860* a *Antologie z učebnic matematiky 1860–1960*. V letech 1982 až 1990 vydala Jednota pod taktovkou Jaroslava Šedivého a Jaroslava Folyt osm souborů *Dějin matematiky a fyziky v obrazech*. Tyto soubory obrázků doprovázených stručným textem popularizovaly zejména významné matematiky, fyziky a astronomy, světové i naše, řadu důležitých záležitostí obsahovala i věcná hesla: nejslavnější monografie a časopisy, které sehrály zásadní roli ve vývoji matematiky a fyziky, stroje a přístroje, vědecké společnosti, školy apod. Byly určeny zejména učitelům středních, ale i základních škol; forma těchto publikací umožňovala vyvěšovat jednotlivé listy na školních nástěnkách. První soubor připravili J. Šedivý a J. Folta, druhý soubor V. Malíšek, další již měly větší autorské kolektivy.¹³

československé matematiky v průběhu dvacátého století a zejména v období výstavby socialistického Československa. (J. Folta, DVT 14(1981), str. 182)

¹⁰ Viz J. Folta: *Stálá pracovní skupina pro dějiny matematiky*, DVT 19(1986), str. 255, J. Bečvář: *Stálá pracovní skupina pro dějiny matematiky*, in V. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky, JČSMF, Brno, 1988, str. 44–47. Viz též *Sjezdový sborník*, Jednota československých matematiků a fyziků, Jednota slovenských matematiků a fyziků, Nitra, 1990, str. 53–54, *Sjezdový sborník*, Jednota českých matematiků a fyziků, Olomouc, 1993, str. 79–80.

¹¹ Texty některých přednášek byly v osmdesátých letech publikovány v časopise *Matematika a fyzika ve škole*.

¹² Její třístránkový příspěvek *Světónázorová výchova v duchu závěrů XVI. sjezdu KSČ* byl jediným ideologickým příspěvkem všech těchto publikací.

¹³ V článku [2] jsou rovněž uvedeny podrobné bibliografické údaje o všech publikacích uvedených v tomto odstavci; jsou tam i odkazy na jejich recenze.

Škoda, že připravovaný devátý svazek již nevyšel. Připomeňme, že námět na vydávání takovýchto souborů se zrodil na první letní škole v Branžeži.¹⁴

Skripta *Světónázorové problémy matematiky*, antologie matematických didaktických textů i soubory *Dějiny matematiky a fyziky v obrazech* postupně získávali účastníci jednotlivých letních škol.

I z pohledu dnešní doby, kdy je vydávání publikací všeho druhu usnadněno současnou technikou a nepodléhá zdoluhavému řízení, je třeba vysoce ocenit výkon tehdejších tvůrců výše zmíněných publikací. Je zajímavé, že aktivita těchto deseti let byla z velké části naplánována již na první letní škole v Branžeži.

Poznamenejme ještě na okraj, že roku 1988 vzniklo na Matematickém ústavu Univerzity Karlovy, který je součástí Matematicko-fyzikální fakulty UK, *Oddělení historie matematiky* pod vedením Jindřicha Bečváře. Dějiny matematiky tak roku 1988 získaly jisté institucionální zajištění. V souvislosti se vznikem tohoto oddělení byla na MFF UK vypsána výběrová přednáška *Dějiny matematiky*, kterou ve školním roce 1988/89 vedl J. Folta. V následujícím roce vznikl při Oddělení historie matematiky výběrový seminář z dějin matematiky, který se po několika letech stal součástí Celostátního semináře z dějin matematiky a posléze se transformoval (od školního roku 2005/06) na nynější *Didakticko-historický seminář*. Od roku 1988 jej vede J. Bečvář.

3 Letní školy Historie matematiky XI.– XXIII. (1990 až 2002)

Od roku 1990 se konaly letní školy pod názvem *Historie matematiky* vždy začátkem června (Lanžhot, třikrát Manětín-Brdo), od roku 1994 pak ve druhé polovině srpna (Vyškov, Chrudim, čtyřikrát Jevíčko, Velké Meziříčí a dvakrát Jevíčko).

Po roce 1990 nastaly v organizaci těchto akcí výrazné problémy způsobené razantním zvýšením cen ubytovacích zařízení (noclezné i stravné) a malými finančními možnostmi fakult. Organizátoři letní školy tehdy využili nabídku J. Foltý a uspořádali třikrát za sebou letní školu na jeho soukromém objektu na Brdu nedaleko Manětína.¹⁵ Tyto tři akce měly svoji osobitou atmosféru (spaní ve spacích pytlích na půdě, rozdělování obědů přivezených z vývařovny místního družstva, kolektivní příprava večeří z nakoupených zásob apod.), počet účastníků však velmi rychle poklesl; 11. letní školy v Lanžhotě se účastnilo 55 osob, ale 14. letní školy na Brdu jen něco málo přes deset osob. V následujících letech využili organizátoři svých kontaktů s kolegy působícími na školách s ubytovacími zařízeními (Jan Zlatník, Petr Jílek a František Procházka, Dag Hrubý, Aleš Trojáněk) a uspořádali letní školy postupně na Vysoké škole pozemního vojska ve Vyškově, na průmyslové škole v Chrudimi, na gymnáziu v Jevíčku a na gymnáziu ve Velkém Meziříčí.¹⁶ Počet účastníků akce výrazně vzrostl, na 15. škole ve Vyškově již bylo opět více než padesát osob.¹⁷

¹⁴ Učitelé středních i základních škol by jistě uvítali soubory fotografií významných matematiků, logiků a filozofů, ukázek početní techniky a dalších přístrojů, typických listů z významných publikací apod. Takové materiály by mohli uplatnit na nástěnkách, v matematických učebnách i při výuce. (PMFA 26(1981), str. 116) Tak se uvažovalo o vytvoření čítanky klasických matematických textů, o sérii diapásů z dějin matematiky, o publikaci souborů fotografií významných matematiků (či titulních stran jejich prací apod.) pro potřeby výuky jak na vysokých školách, tak na středních školách. (J. Folta, DVT 14(1981), str. 182)

¹⁵ Viz článek J. Foltý nazvaný *O sponzorství trochu jinak*, Vesmír 70(1991), str. 708.

¹⁶ Řadu zajímavých informací o obou těchto gymnáziích čtenář získá z jejich nedávno vydaných almanachů: *Gymnázium Jevíčko 1897–2007. Almanach k 110. výročí založení Gymnázia v Jevíčku*, Jevíčko, 2007, *Almanach*

Na jednotlivých vysokých školách se po roce 1989 podstatně přepracovávaly učební plány, fakulty se výrazně diferencovaly, přestaly existovat celostátní programy studia jednotlivých oborů, tedy i plány studia učitelství matematiky. Předmět *Světónázorové problémy v matematice* byl většinou nahrazen předmětem *Dějiny matematiky*.¹⁸

V letech 1991 až 1992 se na Matematicko-fyzikální fakultě UK a na Přírodovědecké fakultě MU konstituoval nový obor doktorského studia nazvaný *Obecné otázky matematiky a informatiky*.¹⁹ V jeho rámci lze studovat dějiny matematiky, obhájit disertační práci a získat titul Ph.D. (původně titul Dr.). Během devadesátých let se tak letní školy z historie matematiky staly místem setkávání doktorandů, jejich školitelů a členů oborové rady, platformou pro prezentaci výsledků doktorského studia, pro diskuse a výměny zkušeností. Poprvé se krátká vystoupení doktorandů uskutečnila roku 1994 ve Vyškově²⁰, v dalších letech již někteří doktorandi podrobně referovali o své připravované disertační práci. Od poloviny devadesátých let byly proto letní školy vedeny též pod hlavičkou oborových rad doktorského studia oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky*, hlavními organizátory akcí byli předsedové oborových rad J. Bečvář a E. Fuchs. Počet obhájených doktorských disertačních prací v Praze a v Brně postupně narůstá, některé patří přímo do dějin matematiky. M. Bečvářová se roku 2007, deset let po obhájení disertační práce *Život a dílo F. J. Studničky*, úspěšně habilitovala na Filozofické fakultě UK s prací *Česká matematická komunita*.

Roku 1993 se v Jevíčku konal první *Seminář z historie matematiky pro vyučující na středních školách*, který převzal původní vzdělávací aktivity dřívějších letních škol z historie matematiky. Přípravný výbor tvořili Jindřich Bečvář, Eduard Fuchs a Dag Hrubý, přednášeli J. Bečvář, E. Fuchs, A. Šarounová a J. Šimša, počet účastníků přesáhl 80 osob. Myšlenka uspořádat takový seminář se zrodila na šestém semináři o filosofických otázkách matematiky a fyziky. Semináře o filosofických otázkách měly již v té době svou tradici (Bílovec 1980, Olomouc 1982, Jevíčko 1985, Bílovec 1986, Žďár nad Sázavou 1988, Jevíčko 1992). Od té doby se semináře z historie matematiky pravidelně střídají se semináři o filosofických otázkách; druhý až osmý seminář z historie matematiky se konaly v Jevíčku v letech 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005 a 2007, zatímco sedmý až čtrnáctý seminář o filosofických otázkách proběhly v letech 1994, 1996, 1998, 2002 v Jevíčku a v letech 2000, 2004, 2006 a 2008 ve Velkém Meziříčí.²¹

100 let gymnázia ve Velkém Meziříčí, Velké Meziříčí, 1999, *Almanach 110 let Gymnázia Velké Meziříčí*, Velké Meziříčí, 2009.

¹⁷ O letních školách, které se konaly v letech 1990 až 2002, lze najít základní fakta v článcích [2], [4] a [5].

¹⁸ V učebních plánech učitelského studia na MFF UK byl od školního roku 1990/91 zaveden místo předmětu *Světónázorové problémy v matematice* předmět *Dějiny matematiky*, který vedl J. Bečvář. Nejprve byl vyučován pro studenty 5. ročníku učitelského studia matematiky po celý školní rok v rozsahu 2/0, po úpravách studijních plánů byl redukován na 2/0 v letním semestru 4. ročníku s klasifikovaným zápočtem, několik let však dobíhalo studium s celoroční přednáškou. V dalších letech J. Bečvář postupně ke kurzovní semestrální přednášce připojoval tři semestrální výběrové přednášky o vývoji matematiky ve starověku, středověku a novověku.

¹⁹ Viz J. Bečvář: *Obecné otázky matematiky a informatiky*, in Celostátní seminář fakult vychovávajících učitelé matematiky. Pracovní materiály (red. E. Fuchs, Z. Došlá), Šlapanice 28. 9.–30. 9. 1992, MU Brno, str. 27–28.

²⁰ Novinkou letní školy bylo zařazení bloku, ve kterém se představilo 18 doktorandů postgraduálního studia *Obecné otázky matematiky a informatiky*, kteří studují na MFF UK v Praze a na PřF MU v Brně. Ti, kteří mají již dva roky studia za sebou, hovořili o výsledcích své připravované disertační práce, ostatní o svém studiu, zadaném tématu disertace, metodách práce apod. Velmi užitečné bylo neformální setkání doktorandů, jejich vzájemné diskuse, i diskuse s ostatními účastníky letní školy. Koncepce výchovy ve výše uvedeném oboru postgraduálního studia byla předmětem dalších dlouhých diskusí. (J. Bečvář, PMFA 40(1995), str. 164)

²¹ Informace o I. až VII. semináři z historie matematiky lze nalézt v článku [6].

Zprávy o obou seminářích jsou pravidelně zveřejňovány v odborném tisku (Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Matematika, fyzika, informatika, Učitel matematiky, DVT). Od roku 1994 se letní škola z historie matematiky konala vždy v bezprostřední časové návaznosti na tyto semináře, pouze roku 1999 semináři předcházela.

Roku 1994 založili Jindřich Bečvář a Eduard Fuchs edici *Dějiny matematiky*. Komunita badatelů v dějinách matematiky i zájemců o otázky vývoje matematiky a jejího vyučování tak získala jednak řadu textů, jednak bohaté publikační možnosti. Některé svazky edice mají charakter sborníků rozšířených verzí přednášek proslovených na letních školách, seminářích či při jiných příležitostech, jiné svazky jsou upravenými disertačními pracemi absolventů doktorského studia *Obecné otázky matematiky a informatiky* (P. Šišma, M. Němcová-Bečvářová, K. Lepka, M. Hykšová, Z. Kohoutová, A. Slavík, L. Lomtadze, E. Pecinová), resp. obhájenou habilitační prací (M. Bečvářová), některé jsou monografiemi učebnicového charakteru (*Malý průvodce teorií integrálu, Počátky počtu pravděpodobnosti, Matematika v 16. a 17. století, Matematika ve středověké Evropě, Matematika ve starověku – Egypt a Mezopotámie*), jiné jsou monografiemi ryze odbornými (*Z historie Jednoty, Matematika v jezuitském Klementinu v letech 1600–1740, Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady, Matematika na německé technice v Brně, Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938, Z historie lineární algebry*), tři svazky obsahují komentované překlady klasických textů (*Tři středověké sbírky matematických úloh, Staroegyptská matematika – Hieratické matematické texty, Matematika v devíti kapitolách*).²² V edici *Dějiny matematiky* rovněž vyšly monografie věnované několika našim matematikům (Eduard Weyr, Jan Vilém Pexider, František Josef Studnička, Karel Rychlík, Vladimír Kořínek, Emil Weyr, Ladislav Svante Rieger) – soustavně je tak realizována myšlenka, s níž přišel J. Bečvář v roce 1986 na zakládající schůzi Stálé pracovní skupiny pro dějiny matematiky.²³

Jednotlivé svazky edice *Dějiny matematiky* byly během let postupně vydávány s finanční podporou projektů Fondu rozvoje vysokých škol, projektů Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, s podporou Grantové agentury ČR, resp. Grantové agentury Akademie věd ČR, přispěla též Jednota českých matematiků a fyziků a její Matematická vědecká sekce (dnešní Česká matematická společnost), několik svazků bylo finančně podpořeno Výzkumným centrem pro dějiny vědy²⁴ apod. V posledních letech využívá edice *Dějiny matematiky* podporu Matematické sekce MFF UK, Katedry didaktiky matematiky MFF UK a Ústavu aplikované matematiky FD ČVUT.

Od roku 1994 získávají jednotlivé svazky edice *Dějiny matematiky* účastníci letních škol a seminářů z historie matematiky, seminářů o filosofických otázkách matematiky a fyziky, delegáti a hosté sjezdů Jednoty českých matematiků a fyziků, účastníci a porotci Studentské vědecké a odborné činnosti a vysokoškolští a středoškolští učitelé, kteří se účastní nejrůznějších odborných a vzdělávacích akcí, konferencí, seminářů, různých soustředění, letních škol apod.

Edice *Dějiny matematiky* se zrodila a dále rozvíjela v těsné souvislosti s letními školami a semináři z historie matematiky, bezprostředně navázala na řadu výše

²² Některé tituly edice *Dějiny matematiky* patří do více „kategorií“.

²³ O edici *Dějiny matematiky* viz [3] a [7]. Viz též recenze L. Nového v DVT 42(2009), str. 55–61.

²⁴ *Výzkumné centrum pro dějiny vědy* existovalo od podzimu roku 2000 až do konce roku 2004; angažovali se v něm J. Bečvář, M. Bečvářová, E. Fuchs a M. Hykšová.

zmíněných publikací, s nimiž přišli Jaroslav Šedivý a Jaroslav Folta v osmdesátých letech dvacátého století. Roku 2009, kdy se akce věnovaná dějinám matematiky koná již potřicáté, má edice *Dějiny matematiky* již čtyřicet svazků. Technický pokrok posledních patnácti let umožnil autorům či autorským kolektivům vydávání profesionálně připravených publikací, o jejichž typografické a grafické úrovni se předchozí generaci ani nesnilo.

4 Konference Historie matematiky XXIV.–XXX. (2003 až 2009)

Charakter pravidelně pořádaných akcí se postupně natolik proměnil, že se termín *letní škola* stal anachronismem. Proto byla roku 2003 letní škola přejmenována na *konferenci* a s jistou mírou nadsázky jí bylo přidáno přívlastko mezinárodní. Pravidelně se totiž naši akce účastní hosté ze Slovenska a Polska, objevili se účastníci z Německa, Itálie, Ruska a Ukrajiny. Nezanedbatelná část programu konference patří v posledních letech doktorandům, kteří zde prezentují výsledky své práce za uplynulý školní rok. V letech 2003, 2005 a 2007 se konference konala v Jevíčku, v letech 2004, 2006 a 2008 ve Velkém Meziříčí, v roce 2009 se koná opět v Jevíčku.²⁵

Po řadu let dostávali účastníci letních škol a konferencí rozmnožené sylaby přednášek v nejednotné podobě v papírových deskách, program konference se i přednášející dozvídali až po příjezdu na akci. Roku 2006 došlo k výrazné změně. Všichni účastníci se s programem připravované konference, jejím časovým harmonogramem i seznamem účastníků mohli seznámit na webové stránce konference zhruba měsíc před konferencí a po příjezdu na konferenci získali při prezentaci konferenční sborník svázaný v kroužkové vazbě s veškerými materiály: program konference, její časový harmonogram, seznam účastníků, sylaby, resp. stručné verze konferenčních příspěvků. V následujících dvou letech již účastníci dostávali klasický konferenční sborník vytištěný v nakladatelství Matfyzpress. V letech 2006 a 2007 editovala s velkým nasazením sborník M. Bečvářová, o rok později M. Bečvářová a J. Bečvář.

Současný programový a organizační výbor (J. Bečvář, M. Bečvářová, E. Fuchs, M. Hykšová, I. Saxl) udělal v posledních třech letech obrovský kus práce, podařilo se mu po obsahové i organizační stránce výrazně pozvednout úroveň konference. Jednu část programu nyní zaujímá několik zvaných přednášek, druhou část větší počet kratších konferenčních příspěvků. Začal být vydáván profesionálně připravený konferenční sborník, který účastníci získávají hned po příjezdu na konferenci. Na publikování konferenčních příspěvků tedy není třeba čekat. Akce se v posledních letech pravidelně účastní více než padesát osob – učitelé vysokých škol, doktorandi, jejich školitelé, členové oborových rad výše zmíněného doktorského studijního oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky*, pravidelně se objevují i studenti, středoškolské učitelé a další zájemci.

Všechny informace o konferenci *Historie matematiky*, o seminářích z historie matematiky pro vyučující na středních školách, seminářích o filosofických otázkách matematiky a fyziky, o edici *Dějiny matematiky*, o doktorském studiu v oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* a o *Didakticko-historickém semináři* na MFF UK lze získat na následujících rozsáhlých, pravidelně aktualizovaných webových stránkách:

²⁵ O konferencích, které se konaly od roku 2003, lze najít základní fakta v článcích [4] a [5].

<http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html>
http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/seminar_ss/
<http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/otazky/>
<http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/Edice/Edice.htm>
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~becvar/pgs/pgs.htm>
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~becvar/dh-seminar.htm>

Dostanete se na ně ze stránky Katedry didaktiky matematiky MFF UK, jejíž adresa je <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/>.

5 Doplnující program

Ve večerních programech letních škol a konferencí se často diskutovalo o metodách práce v dějinách matematiky, o nové literatuře, našich i zahraničních akcích věnovaných otázkám vývoje matematiky, o nově zřízeném doktorském studiu, o výchově v tomto oboru, o vhodných tématech disertačních prací, rodily se náměty pro příští práci, programy seminářů apod. Účastníci si mohli zakoupit některé nové i starší tituly odborné literatury nebo je získat v pravidelně organizované dražbě.

Odborný program letních škol a konferencí býval doplněn nejrůznějšími poznávacími a kulturními aktivitami. Výlety do okolí pravidelně organizovala tzv. turistická sekce, při večerních posezeních se mnohdy o rozšíření literárního rozhledu účastníků staral J. Folta, na společenských večerech vystoupil několikrát se svými přednáškami B. Henry,²⁶ někdy přijel i doc. Arne Vrbský ze Zemědělské akademie v Grünfeldu a proslovil odbornou přednášku na téma výzkum lidových písní se zemědělskou tematikou.²⁷ Rovněž se zpívalo u klavíru nebo při kytáře.

V roce 1993 byl v Jevíčku v restauraci Na Dvorci založen klub Paracelsus, řada účastníků letních škol, konferencí a seminářů se stala jeho členy. V dalších letech se pravidelně konalo přijímání do tohoto klubu spojené s obtížným vstupním testem.

6 Do dalších let

V letošním roce se zájemci o historii matematiky setkávají již potřicáté. Věřím, že aktivity úspěšně rozvíjené v minulých letech budou pokračovat i v dalším desetiletí. Pevně doufám, že se bude každoročně konat konference z historie matematiky a každým druhým rokem seminář z historie matematiky pro vyučující na středních školách, že budou vycházet další svazky edice *Dějiny matematiky*, že bude i v příštích letech pozornost věnována matematikům našich zemí, že budou čas od času v oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* obhajovány kvalitní doktorské disertace věnované vývoji matematiky a že se časem dočkáme další habilitace z dějin matematiky.

Quod bonum, felix, faustum, fortunatumque sit!

²⁶ Na jubilejní, desáté letní škole měl mírně pobuřující politický projev, na jedenácté proslovil přednášku *Matematika a život*, na dvanácté přednášku *Z dějin techniky* a na třinácté škole uspořádal výstavku koláží. Rovněž byl několikrát vystaven jeho soubor *Dějiny dějin matematiky a fyziky v obrazech*.

²⁷ Jednou se v Jevíčku objevila nečekaně i jeho žena Mathilde.

Literatura

- [1] Bečvář J., Fuchs E.: *Jaroslav Šedivý, zakladatel letních škol z historie matematiky*. In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v 19. století, Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky*, edice *Dějiny matematiky*, sv. 3, Prometheus, Praha, 1996, 121–122.
- [2] Bečvář J.: *Historie letních škol z historie matematiky*. In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v 19. století, Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky*, edice *Dějiny matematiky*, sv. 3, Prometheus, Praha, 1996, 123–143.
- [3] Bečvářová M.: *Dějiny matematiky – Nová ediční řada. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 42(1997), 213–214.
- [4] Bečvářová M.: *Letní školy z historie matematiky*. In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v proměnách věků III*, edice *Dějiny matematiky*, sv. 24, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2004, 242–253.
- [5] Bečvářová M.: *Letní školy z historie matematiky* (doplňk k článku ze sborníku č. 24). In Bečvářová M., Bečvář J. (ed.): *Matematika v proměnách věků V*, edice *Dějiny matematiky*, sv. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, 325–331.
- [6] Bečvářová M.: *Semináře z historie matematiky pro vyučující na středních školách*. In Bečvářová M., Bečvář J. (ed.): *Matematika v proměnách věků V*, edice *Dějiny matematiky*, sv. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, 317–324.
- [7] Fuchs E., Těšínská E.: *Edice „Dějiny matematiky“*. DVT 39(2006), 121–124.
- [8] Mikulčák J.: *Jaroslav Šedivý 1934–1988. Ovlivnili vyučování matematice*, sv. 2, KDM, MFF UK, Praha, 1998.

Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz

VYZVANÉ PŘEDNÁŠKY

IZOPERIMETRICKÉ NEROVNOSTI, W. BLASCHKE A TROCHU POLITIKY

LEO BOČEK, JANA HROMADOVÁ

Abstract: Simple isoperimetric inequalities are solved by pupils at primary school. The history of the isoperimetric problem starts with the story about the queen Dido and the foundation of Carthage. Jacob Steiner spent a lot of time solving this problem by symmetrizations of geometrical objects. In 1916, Wilhelm Blaschke wrote a book “Kreis und Kugel”, which contains many proofs and different generalizations of this problem.

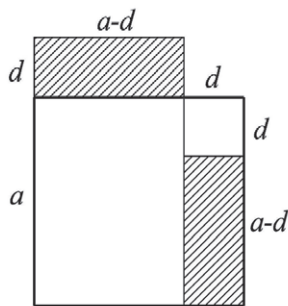
1 Izoperimetrické nerovnosti

1.1 Tětivové čtyřúhelníky

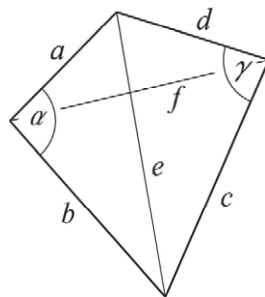
Již na základní škole se žáci učí určit obvod l a obsah S čtverce, je-li dána délka a jeho strany, případně z obvodu l čtverce vypočítat jeho obsah a podobně. Protože $l = 4a$, je $l^2 = 16a^2 = 16S$. Obdélník o stejném obvodu l dostaneme z čtverce tak, že jednu jeho stranu zmenšíme o délku d , druhou o stejnou délku zvětšíme, jeho obsah bude $(a-d)(a+d) = a^2 - d^2$, tedy menší, než obsah výchozího čtverce (obr. 1). Proto pro obsah S každého pravoúhelníku o obvodu l platí

$$(1) \quad l^2 \geq 16S,$$

přičemž rovnost platí pouze pro čtverec. Dostali jsme tak první izoperimetrickou nerovnost, která nám vlastně říká, že mezi všemi pravoúhelníky s daným obvodem l má největší obsah právě jen čtverec.



Obr. 1



Obr. 2

Vezmeme-li libovolný konvexní čtyřúhelník (obr. 2) se stranami délek a, b, c, d (každá strana musí být nutně menší než součet zbývajících tří), tak pro jeho obsah S platí

$$(2) \quad 4S = 2ab \sin \alpha + 2cd \sin \gamma,$$

kde α je úhel mezi stranami a, b a γ je úhel mezi stranami c, d . Vidíme, že obsah S není délkami stran určen, závisí ještě na volbě úhlů α, γ . Ty ovšem nejsou na sobě nezávislé, jsou spolu vázány podmínkou

$$(3) \quad a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos \alpha - 2cd \cos \gamma,$$

kteřou dostaneme z kosinové věty. Umocníme-li rovnice (2) a (3) a sečteme-li je, dostaneme po úpravě vztah

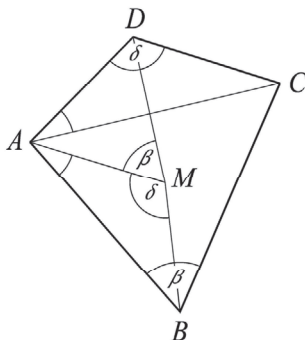
$$16S^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd \cos(\alpha + \gamma).$$

Je proto $16S^2 \leq 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$ a rovnost platí pouze v případě $\alpha + \gamma = \pi$, tedy když je čtyřúhelník tětivový, tedy když mu lze opsat kružnici. Pro ten je $S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$, kde s je poloviční obvod čtyřúhelníku. To je tzv. Brahmaguptův vzorec pro obsah S tětivového čtyřúhelníku s danými délkami a, b, c, d jeho stran. V případě $d = 0$, kdy se vlastně nejedná o čtyřúhelník, nýbrž o trojúhelník, přejde Brahmaguptův vzorec ve známý vzorec Heronův. Využijeme ještě známou nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem čtyř kladných čísel $s-a, s-b, s-c, s-d$, která říká, že součin těchto čísel se nejvýše rovná čtvrté mocnině jejich aritmetického průměru. Dostaneme tak opět nerovnost (1), teď jsme ji však dokázali pro každý čtyřúhelník. Rovnost platí pouze v případě, kdy je čtyřúhelník tětivový se stejně dlouhými stranami, tedy když je to čtverec.

Pro čtyřúhelník s danými délkami stran a, b, c, d platí ještě jedna nerovnost, nerovnost Ptolemaiova. Říká, že

$$ef \leq ac + bd,$$

kde e, f jsou délky úhlopříček, a, c délky dvou protějších stran a b, d délky zbývajících dvou protějších stran čtyřúhelníku. I v tomto případě platí rovnost $ef = ac + bd$ právě tehdy, když je čtyřúhelník tětivový. Ptolemaiovu nerovnost lze dokázat pomocí kruhové inverze nebo elementárně takto:



Obr. 3

V polovině ABC (obr. 3) zvolíme bod M tak, aby $\triangle ABM$ byl podobný $\triangle ACD$, je tedy $|\angle ADC| = |\angle AMB| = \delta$ a $|\angle DAM| = |\angle CAB|$. Kromě toho je $\frac{|DA|}{|MA|} = \frac{|CA|}{|BA|}$ a podle věty jsou podobné i trojúhelníky $\triangle DAM$, $\triangle CAB$, takže $|\angle DMA| = |\angle CBA| = \beta$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je $|BD| \leq |BM| + |MD|$, rovnost platí pouze tehdy, když bod M leží na úsečce BD , tedy v případě $\delta + \beta = \pi$, kdy je čtyřúhelník tětivový. Dále je $|BM| : |CD| = |AB| : |AC|$ (plyne z podobnosti $\triangle ABM$ a $\triangle ACD$) a $|MD| : |AD| = |BC| : |AC|$ (podobnost $\triangle MAD$, $\triangle BAC$). Užitím těchto vztahů dostaneme

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Heronův vzorec pro trojúhelník říká, že pro obsah S trojúhelníku a délky a, b, c jeho stran platí

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

kde s je poloviční obvod. Použijeme-li i v tomto případě nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem kladných čísel $s-a, s-b, s-c$, dostaneme nerovnost $S^2 \leq s\left(\frac{s}{3}\right)^3$,

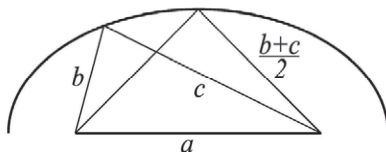
po úpravě $l^2 \geq 12\sqrt{3} \cdot S$, kde l je obvod trojúhelníku; rovnost platí pouze pro trojúhelník rovnostranný. Zadáme-li tedy například pro trojúhelník $l = 6$ cm a $S = \sqrt{3}$ cm², je tím trojúhelník jednoznačně určen, vyhovuje pouze rovnostranný trojúhelník s délkou strany 2 cm.

1.2 Mnohoúhelníky

Nerovnosti $l^2 \geq 12\sqrt{3} \cdot S$ pro trojúhelníky a $l^2 \geq 16S$ pro čtyřúhelníky jsou speciálními případy nerovnosti

$$(4) \quad l^2 \geq 4n \tan \frac{\pi}{n} \cdot S,$$

která platí pro každý konvexní, ale i nekonvexní rovinný n -úhelník. Rovnost v (4) platí pouze pro konvexní pravidelný n -úhelník. Důkaz (4) ukážeme později, ale jen pro n -úhelníky rovnostranné. Je totiž zřejmé, že n -úhelník s daným obvodem, který není rovnostranný, nemá mezi n -úhelníky daného obvodu největší obsah. Plyne to ihned z toho, že trojúhelník se stranami délek a, b, c , kde $b \neq c$, má menší obsah než rovnoramenný trojúhelník se stranami délek $a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}$ (obr. 4).



Obr. 4

Dále využijeme diskrétní variantu Wirtingerovy nerovnosti (viz [4]), která říká, že pro n -úhelník v rovině vždy platí

$$(5) \quad \sum a_i^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sum t_i^2,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou délky stran n -úhelníku a $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou vzdálenosti jeho vrcholů od těžiště n -úhelníku. Rovnost platí právě tehdy, když je n -úhelník afinním obrazem pravidelného konvexního mnohoúhelníku. V případě $n = 3$ platí tedy vždy rovnost, v případě $n = 4$ platí v (5) rovnost právě tehdy, když je čtyřúhelník rovnoběžníkem.

Nechť je dán rovinný n -úhelník $A_1 A_2 \dots A_n, A_n = A_0$ s těžištěm T a délkami $a_i = |A_i A_{i-1}|$ svých stran. Označme $\vec{t}_i$ vektor $A_i - T$. Je pak (viz [3])

$$\begin{aligned}
8 \tan \frac{\pi}{n} \cdot S &= 4 \tan \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \overrightarrow{t_{i-1}} \times \overrightarrow{t_i} \right\| = 2 \tan \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \left(\overrightarrow{t_{i-1}} + \overrightarrow{t_i} \right) \times \left(\overrightarrow{t_i} - \overrightarrow{t_{i-1}} \right) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\left\| \overrightarrow{t_{i-1}} - \overrightarrow{t_i} \right\|^2 + \tan^2 \frac{\pi}{n} \left\| \overrightarrow{t_{i-1}} + \overrightarrow{t_i} \right\|^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left[\left\| \overrightarrow{t_{i-1}} - \overrightarrow{t_i} \right\|^2 + \tan^2 \frac{\pi}{n} \left(4 \sum_{i=1}^n \left\| \overrightarrow{t_i} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{t_{i-1}} - \overrightarrow{t_i} \right\|^2 \right) \right] \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(1 - \tan^2 \frac{\pi}{n} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right) \left\| \overrightarrow{t_{i-1}} - \overrightarrow{t_i} \right\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2,
\end{aligned}$$

v případě rovnostranného n -úhelníku je $l = na$, a tedy $4n \tan \frac{\pi}{n} \cdot S \leq l^2$.

1.3 Uzavřené křivky

Posloupnost $\left\{ n \tan \frac{\pi}{n} \right\}$ je klesající, její limita je π . Dostáváme tak klasickou izoperimetrickou nerovnost

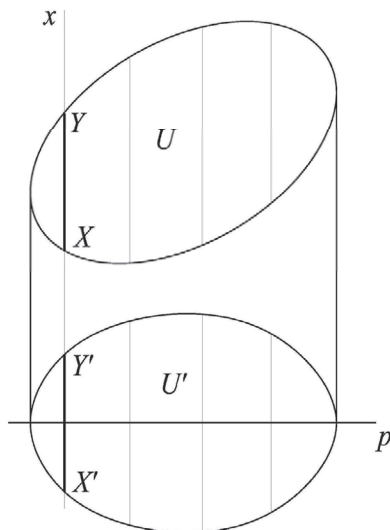
$$(6) \quad l^2 \geq 4\pi S,$$

pro každou křivku délky l v rovině, která ohraničuje útvar s obsahem S . Rovnost platí právě jen pro kružnici. Podobné uzavřené křivky mají stejný poměr $\frac{l^2}{S}$, který není pro

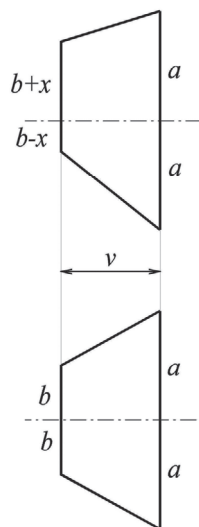
žádnou křivku menší než 4π . Číslo $\frac{l^2}{S} - 4\pi$ můžeme proto brát jako míru asymetričnosti uzavřené křivky. Pro kružnici se toto číslo rovná nule, kružnice je plně symetrická. Čím je toto číslo menší, tím více se příslušná křivka blíží kružnici, tím více je „kulatá“. Toho si zřejmě byla vědoma královna Dido (též zvaná Elissa), která se podle báje ucházela o politický azyl v cizí zemi a bylo jí přislíbeno tolik půdy, kolik je schopna ohraničit jednou volskou kůží. Dido rozstříhala kůži na tenké proužky, svázala je do uzavřené křivky, kterou rozprostřela na zem do tvaru kružnice. Na území, které takto ohraničila, bylo pak postaveno město Kartágo v dnešním Tunisu. Zнала Dido nerovnost (6) nebo dokonce i její důkaz?

Nejznámější důkazy nerovnosti (6) pocházejí od Jacoba Steinera (1796–1863), švýcarského geometra, který se zabýval téměř výhradně syntetickou geometrií. Jeho postup spočíval v symetrizaci útvaru, při které zůstával obvod zachován, ale zvětšil se obsah, nebo se nezměnil obsah, ale zmenšil se obvod. Ukážeme jeden příklad. V rovině s konvexním útvarem U s obsahem S a obvodem l zvolíme pevně přímku p (obr. 5). Přímka x kolmá k přímce p protne hranici U v bodech X, Y . Úsečku XY posuneme po přímce x tak, aby se její střed posunul na přímku p , dostaneme tak úsečku $X'Y'$. Úsečky $X'Y'$ tak vytvoří útvar U' , který má podle Cavalieriho principu stejný obsah S , ale jeho obvod se zmenšil. To plyne například z toho, že dva různé lichoběžníky se stejnými délkami základů a stejnou výškou mají stejný obsah, ale rovnoramenný má menší obvod (obr. 6). Svými symetrizacemi dokázal J. Steiner pouze to, že křivka, která není kružnicí, neohraničuje při dané délce l oblast největšího obsahu. Největší obsah může mít pouze kruh s obvodem l . Abychom však mohli tvrdit, že kruh má mezi všemi útvary s danou délkou obvodu největší obsah, museli bychom vědět, že mezi všemi uzavřenými křivkami dané délky existuje křivka ohraničující oblast maximálního obsahu. A právě

chybějící důkaz existence byl Steinerovi vytknut například takovým významným matematikem, jako byl P. Dirichlet (1805–1859). Existenční důkaz byl pak podán např. K. Weierstrasse (1815–1897) i dalšími matematiky. Využili při tom metody variačního počtu nebo teorii Fourierových řad.



Obr. 5



Obr. 6

Ukážeme si jeden důkaz opírající se o Wirtingerovo lemma: Necht' f je diferencovatelná funkce na množině reálných čísel R s periodou 2π a necht' $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Pak je $\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$ a rovnost platí právě tehdy, když je $f(x) = a \cos x + b \sin x$, a, b konstanty. Wirtingerovo lemma se dokazuje nejlépe pomocí rozvoje funkce f ve Fourierovu řadu.

Zvolme v rovině uzavřenou křivku C ohraničující konvexní oblast U . Počátek kartézské soustavy souřadnic zvolme uvnitř oblasti U . Každý jednotkový vektor se dá pak napsat ve tvaru $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Pak existuje právě jedna kladná hodnota $h(\varphi)$ tak, aby přímka s rovnicí $x \cos \varphi + y \sin \varphi = h(\varphi)$ měla s oblastí U alespoň jeden společný bod, ale žádný vnitřní bod oblasti U . Taková přímka se nazývá opěrná přímka oblasti U a funkce přiřazující každému φ hodnotu $h(\varphi)$ je tzv. opěrná funkce oblasti U (obr. 7). Zatím budeme předpokládat, že je spojitě diferencovatelná. Křivka C je pak obálkou přímk $x \cos \varphi + y \sin \varphi = h(\varphi)$, její body dostaneme jako limitu průsečíků dvou opěrných přímk odpovídajících hodnotám $\varphi, \varphi + \delta$ pro $\delta \rightarrow 0$, tedy jako průsečík přímk

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = h(\varphi)$$

$$-x \cos \varphi + y \sin \varphi = h'(\varphi),$$

takže

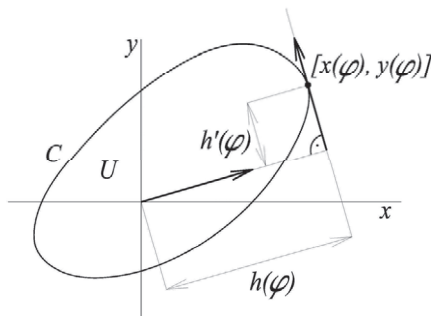
$$x(\varphi) = h(\varphi) \cos \varphi - h'(\varphi) \sin \varphi$$

$$y(\varphi) = h(\varphi) \sin \varphi + h'(\varphi) \cos \varphi,$$

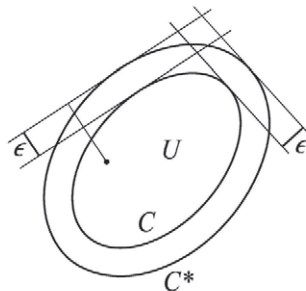
čárka znamená derivaci podle φ .

Dostali jsme tak parametrické vyjádření křivky C a z diferenciální geometrie pak víme,

$$\text{že délka } l \text{ uzavřené křivky se rovná } \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} (h + h'') d\varphi = \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi.$$



Obr. 7



Obr. 8

Využili jsme toho, že h je periodická funkce s periodou 2π a $h + h''$ je nezáporná funkce vyjadřující poloměr křivosti křivky C . Obdobně využijeme znalosti z diferenciální geometrie k vyjádření obsahu S oblasti U ,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(h + h'') d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h^2 - h'^2) d\varphi,$$

kde jsme využili integrace per partes a opět periodičnosti funkce h . Nyní použijeme Wirtingerovo lemma na funkci $f = h - \frac{l}{2\pi}$, která předpoklad Wirtingerova lemmatu splňuje. Dostaneme tak nerovnost

$$\int_0^{2\pi} h'^2 d\varphi \geq \int_0^{2\pi} \left(h^2 - h \frac{l}{\pi} + \frac{l^2}{4\pi^2} \right) d\varphi.$$

Tedy $l^2 \geq 4\pi S$.

Rovnost platí právě tehdy, když $h - \frac{l}{2\pi} = a \cos \varphi + b \sin \varphi$, tedy pro $h + h'' = \frac{l}{2\pi} = \text{konst.}$, kdy má křivka konstantní poloměr křivosti a je proto kružnicí.

Zajímavé je vzít oblast U^* , která bude dána opěrnou funkcí $h^* = h + \varepsilon$, kde ε je kladná konstanta. Oblast U^* je pak ohraničena křivkou C^* , tzv. paralelní křivkou ke křivce C (obr. 8). Pro obsah S^* a délku l^* obvodu oblasti U^* dostáváme vztahy

$$S^* = S + l\varepsilon + \pi\varepsilon^2, \quad l^* = l + 2\pi\varepsilon,$$

takže $l^{*2} - 4\pi S^* = l^2 - 4\pi S$. Poznamenejme ještě, že všechny uvedené vztahy platí i za slabších podmínek, stačí například, aby funkce h' měla konečnou variaci. Můžeme také vzít dvě opěrné funkce h_1, h_2 a pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ vzít opěrnou funkci $h = th_1 + (1-t)h_2$ a odpovídající křivky C_t ohraničující oblast U_t s obsahem S_t a obvodem l_t , které jsou dány vzorci $l_t = tl_1 + (1-t)l_2$, $S_t = t^2S_1 + 2t(1-t)M + (1-t)^2S_2$, kde $M = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h_1 h_2 - h_1' h_2') d\varphi$ je tzv. smíšený obsah oblastí U_1, U_2 .

Použijeme-li Wirtingerovo lemma na funkci $\frac{h_1}{l_1} - \frac{h_2}{l_2}$, dostaneme pro M nerovnost

$$2M \geq \frac{l_2}{l_1} S_1 + \frac{l_1}{l_2} S_2 \geq 2\sqrt{S_1 S_2}, \text{ rovnost platí právě tehdy, když jsou útvary } U_1, U_2$$

stejnolehlé s kladným koeficientem. Funkce h_1 je totiž až na funkci tvaru $a \cos \varphi + b \sin \varphi$ konstantním násobkem funkce h_2 , přičemž vhodnou volbou počátku dosáhneme toho, že h_1 bude pouze násobkem h_2 , takže U_1, U_2 jsou stejnolehlé. Zvolíme-li za U_1 kruh o poloměru r , snadno odvodíme $M = \frac{1}{2} r l_2$ a z odvozené nerovnosti dostaneme opět nerovnost $l_2^2 \geq 4\pi S_2$ s rovností právě jen v případě, kdy je U_2 rovněž kruh.

Jednou z podstatných činností matematika je zobecnit, zpřesnit, zesílit výsledky svých kolegů. Není tomu jinak ani v případě izoperimetrické nerovnosti. Existuje mnoho zobecnění, například pro plochy, nebo pro uzavřené prostorové křivky i mnoho zostření izoperimetrické nerovnosti (viz [5]). Případy prostorové necháme pro jinou přednášku, uveďme alespoň dvě zostření izoperimetrické nerovnosti pro křivky v rovině. Pomocí vhodně zvolené míry geometrických objektů lze dokázat nerovnost

$$l^2 - 4\pi S \geq \pi^2 (R - r)^2,$$

která pochází od T. Bonnesena, v níž R značí poloměr nejmenšího kruhu, který ještě pokryje konvexní množinu U a r značí poloměr největšího kruhu, který může být v U obsažen.

Jiné zostření izoperimetrické nerovnosti dostaneme využitím zostřeného Wirtingerova lemmatu (viz [6]) a má tento tvar

$$l^2 - 4\pi S \geq 2\pi^2 d^2,$$

kde d je vzdálenost těžiště křivky C od středu úsečky, jejíž krajní body dělí uzavřenou křivku na dva stejné dlouhé oblouky.

2 Wilhelm Blaschke

Téměř vše, co jsme zde uvedli, můžeme nalézt v knize W. Blaschke *Kreis und Kugel* (viz [1]), která vyšla v roce 1916 v Lipsku, ale jak píše sám autor, vznikla vlastně v Praze. W. Blaschke se narodil roku 1885 v Grazu, kde byl mimo jiné jeho učitelem také jeho otec. Univerzitní studia začal sice v Grazu, ale brzy přešel do Vídně, kde měl na něho vliv hlavně Wilhelm Wirtinger (1865–1945). Studoval také na univerzitách v Bonnu a v Göttingen u Felixe Kleina a Davida Hilberta. Privátním docentem se stal v roce 1910 na univerzitě v Bonnu, odkud přešel na univerzitu do Greifswaldu. Pro nás je významné jeho další působení, v roce 1913 se totiž stal mimořádným profesorem na německé technice v Praze, působil zde dva roky, pak přijal místo profesora v Lipsku. A tam přednesl svou vstupní přednášku 15. května 1915 právě na téma *Kreis und Kugel*, „Kružnice a koule“, kterou rozšířil a v roce 1916 vydal knižně. Snad je možno říci,



W. Blaschke

že přednáška a kniha *Kreis und Kugel* měla stejný význam pro vývoj geometrie jako vstupní přednáška Felixe Kleina, když se roku 1872 ucházel o profesorské místo na univerzitě v Erlangen a která vešla do dějin matematiky jako *Erlangenský program*. Roku 1917 opouští Blaschke Lipsko a přijímá místo profesora v Königsbergu (dnešním Kaliningradu) a jak sám říká, k odchodu z Prahy přispěla ve válečném roce 1915 nepřátelská nálada českého obyvatelstva, do Königsbergu odešel s nadějí, že v agrárním východním Prusku bude lepší zásobování potravinami. Ke konci války působil krátce v Tübingen, aby po založení nové univerzity v Hamburku v roce 1919 přijal místo na této univerzitě a zůstal zde až do svého odchodu do důchodu v roce 1953. Přijal pak ještě na dva roky místo hostujícího profesora na univerzitě v Istanbulu (viz [2]). Profesor W. Blaschke zemřel v roce 1962 v Hamburku.

V předmluvě ke své knize *Kreis und Kugel* říká W. Blaschke, že jeho knížečka je skromným válečným příspěvkem DU-muže. Blaschke byl totiž od dětství invalidou, kulhal, a to DU znamená Dienstuntauglich = nezpůsobilý vojenské služby. Dobře, že nebyl přijat od armády. Kdo by byl napsal tak významnou práci o izoperimetrické nerovnosti? W. Blaschke je autorem řady dalších knih o geometrii, například třídílné učebnice *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, dále *Vorlesungen über Integralgeometrie*, *Geometrie der Gewebe* (geometrie tkání), spoluautorem byl Gerrit Bol, posledním dílem je *Elementare Differentialgeometrie*, kterou napsal s Kurtem Leichtweissem.

Předmluvy se někdy ani nečtou. Předmluvy W. Blaschkeho obsahují zajímavé politické poznámky. O jedné jsme se už zmínili. V předmluvě k prvnímu dílu přednášek o diferenciální geometrii děkuje autor nakladatelství, které podle slov W. Blaschkeho si uchovalo sílu v době, kdy bratranec významného francouzského geometra zatančil vítězný tanec nad poraženým Německem. Je to narážka na okupaci německého Porúří francouzskými vojsky v roce 1923, kdy byl předsedou francouzské vlády Raimont Poincaré, bratranec Henriho Poincaré. V předmluvě k *Teorii tkání*, která vyšla v roce 1939, vyslovuje Blaschke uspokojení nad tím, že kniha vychází v radostné době, kdy se jeho užší vlast Rakousko spojila s jeho širší vlastí – Velkoněmeckou říší.

W. Blaschke byl zpočátku proti politice třetí říše ve vědecké oblasti, obával se vědecké izolace Německa. Stal se však členem nacistické strany a asi ne z kariérních důvodů, neměl to zapotřebí, snad spíše z přesvědčení. Ve válce přišel o všechny svůj majetek, když byl jeho dům v Hamburku zcela vybombardován. Po válce byl Blaschke krátce postaven mimo službu, ale ještě v roce 1946 byl „odnacistifikován“ a mohl znovu vést svou katedru. Zcela jiný osud potkal profesora L. Berwalda, kterému Blaschke děkuje v předmluvě ke druhému dílu přednášek o diferenciální geometrii. Ten je věnován hlavně afinní diferenciální geometrii, která byla hodně pěstována na německé technické univerzitě v Praze v tzv. „afinním věnečku“, jehož členem byl také Ludwig Berwald. Bohužel, Ludwig Berwald spolu se svou ženou zahynuli v koncentračním táboře v polské Lodži [7].

Literatura

- [1] Blaschke W.: *Kreis und Kugel*. Verlag von Veit u. Comp., Leipzig, 1916, též ruský překlad Nauka, Moskva, 1967.
- [2] Blaschke W.: *Reden und Reisen eines Geometers*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.
- [3] Boček L.: *Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone*. Časopis pro pěstování matematiky 104(1979), 86–92.
- [4] Maleček K.: *Geometrischer Beweis der diskreten Ungleichung von W. Wirtinger*. Mathematica Bohemica 120(1995), 83–89.
- [5] Ossermann R.: *The isoperimetric inequality*. Bulletin American Mathematical Society 84(1978), 1182–1238.
- [6] Pech P.: *A sharpening of a discrete analog of Wirtinger's and isoperimetric inequalities*. Mathematica Bohemica 117(1992), 425–428.
- [7] Pinl M.: *In memory of Ludwig Berwald*. Scripta Mathematica 27(1964), 193–203, český překlad Nádeník Z.: *Památce Ludwiga Berwalda*. Časopis pro pěstování matematiky 92(1967), 229–237.
- [8] [8] Wikipedia (The free encyclopedia): *Wilhelm Blaschke* [online]. Poslední revize 12. 2. 2009 [cit. 9. 6. 2009]
- [9] http://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Blaschke.

Adresa

doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: bocek@karlin.mff.cuni.cz

RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: jole@karlin.mff.cuni.cz

POVÍDKA O BROWNOVĚ POHYBU A TAKÉ O NOBELOVĚ CENĚ ZA EKONOMII

JOSEF ŠTĚPÁN¹

Abstract: We shall follow the celebrated journey started by the discovery of Brownian motion in 1895 that having met many crossroads passed through Physics, Mathematics and Economy (L. Bachelier, A. Einstein, N. Wiener, P. Lévy, A. N. Kolmogorov, K. Itô) to meet finally the Nobel Prize for Economy in 1997 (R. Merton, M. Scholes) in connection with finding out a usable mathematical model for the stock market financial operations.

1 Náhodná procházka

Historicky prvním stochastickým modelem s dynamikou v čase je **diskrétní náhodná procházka**, jejíž geneze může být popsána následovně:

★ Částice se pohybuje po celočíselné přímce $\mathbb{Z}$ a její polohy v časech $n = 0, 1, 2, \dots$ jsou značeny jako $S_0, S_1, S_2, \dots$. V čase nula je částice v poloze $S_0 = 0$.

★ Je-li částice v čase n v poloze S_n , hodíme symetrickou mincí, kde na rubu a lici je vyražena číslice 1, respektive číslice -1 , a posuneme částici o jednotku doprava nebo doleva podle výsledku pokusu.

Základní vlastnosti náhodné procházky zjistíme snadno:

$$P[S_n = 2k - n] = 2^{-n} \binom{n}{k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

jde o k pohybů doprava a $(n - k)$ pohybů doleva. Snadno též spočítáme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny S_n

$$ES_n = \sum_{k=0}^n (2k - n) P[S_n = 2k - n] = 0, \quad \text{Var}(S_n) = \sum_{k=0}^n (2k - n)^2 P[S_n = 2k - n] = n$$

a zjistíme, že přírůstky

$$X_1 = S_1 - S_0, \quad X_2 = S_2 - S_1, \quad \dots, \quad X_n = S_n - S_{n-1}, \quad \dots$$

jsou nezávislé náhodné veličiny, to jest, že platí

$$P[X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n] = 2^{-n} = P[X_1 = k_1] \cdot \dots \cdot P[X_n = k_n]$$

pro každé n a pro každou posloupnost $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ čísel 1 a -1 .

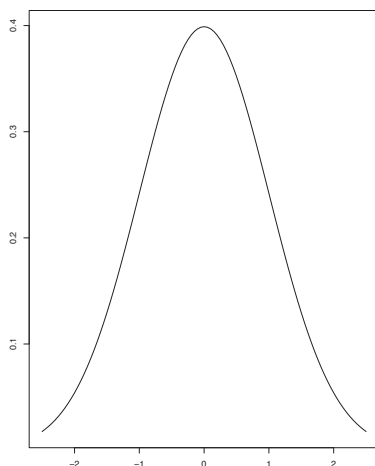
¹Za simulace a vyobrazení, které doprovázejí text, je autor zavázán doktorandovi MFF UK Jakubu Staňkovi.

Centrální limitní věta, kterou právě pro tento případ dokázal A. De Moivre v roce 1730 a obecněji P. S. Laplace v roce 1812, říká, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \leq y \right] = F(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

platí pro $y \in \mathbb{R}$.

Připomeňme, že $F(y) = P[Y \leq y]$ je distribuční funkce náhodné veličiny Y s normovaným **Gaussovým rozdělením** pravděpodobností, jejíž hustota $F'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ je na Obr. 1.



Obr. 1

Spočteme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y :

$$EY = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0, \quad \text{Var}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

a jest tedy

$$EY = E \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = 0, \quad \text{Var}(Y) = \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \right) = 1.$$

Předchozí výpovědi o vlastnostech náhodné procházky se týkají jejího chování v individuálním čase $t = n$. Následující vlastnost se týká chování úseku náhodné procházky $S_1, S_2, \dots, S_n$.

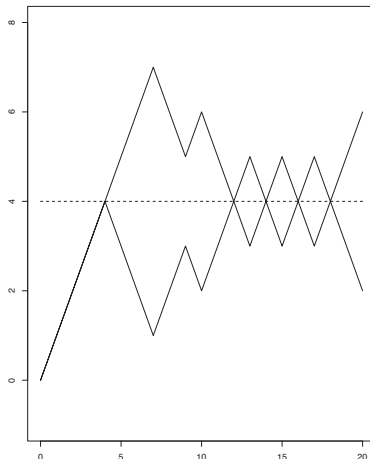
Vstup náhodné procházky do bariery. Bud a kladné celé číslo. Pak

$$P \left[\max_{1 \leq t \leq n} S_t \geq a \right] = 2 \cdot P[S_n > 0] + P[S_n = a],$$

protože množiny trajektorií naší částice

$$\left[\max_{1 \leq t \leq n} S_n \geq a, S_n > a \right] \quad \text{a} \quad \left[\max_{1 \leq t \leq n} S_n \geq a, S_n < a \right]$$

mají stejnou mohutnost (kombinatorický princip reflexe).



Obr. 2

Vypočteme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left[\frac{1}{\sqrt{t}} \max_{1 \leq s \leq t} S_s \geq a\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = P[|Y| \geq a],$$

kde Y je náhodná veličina s normovaným Gaussovým rozdělením.

Následující vlastnosti budou již vlastnostmi celé nekonečné trajektorie (S_n) .

Okamžik prvního vstupu náhodné procházky do bariery $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ je náhodný čas (říkáme také Markovský čas)

$$\tau_a := \inf\{t > 0 : S_t = a\}, \quad \text{kde } \inf \emptyset = \infty.$$

$$\text{Pak } P[\tau_a < \infty] = 1, \quad \text{ale } E\tau_a = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot P[\tau_a = t] = \infty.$$

Odsud zjišťujeme, že **náhodná procházka je rekurentní** v následujícím smyslu:

$$P\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty\right] = P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty\right] = 1.$$

Naše částice tudíž navštíví každý svůj možný stav $a \in \mathbb{Z}$ v nekonečně mnoha časových okamžicích. Střední doba čekání na prvou takovou návštěvu je však nekonečná. V této souvislosti poznamenejme, že je-li $\lambda_a := \min(\tau_a, \tau_{-a})$ okamžik prvního výstupu částice z otevřeného intervalu $(-a, a)$, je $E\lambda_a = a^2 < \infty$.

Historickým mezníkem byl objev, který učinil E. Borel v roce 1925; je znám jako **zákon velkých čísel**. Tento zákon jednoduše říká:

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \right] = 1.$$

S malými nároky na matematický aparát se můžeme o náhodné procházce poučit v učebnici [27], s mnohem větší námahou pak v monografii [25].

2 Brownův pohyb

Tento pohyb jako fyzikální fenomén poprvé zaznamenal anglický botanik R. Brown v roce 1827 tím, že pozoroval pohyb zrněk pylu v tekutině způsobený trvalými nárazy menších molekul kapaliny. Dostí překvapivé bylo to, že první kvalitativní (matematický) popis Brownova pohybu navrhl L. Bachelier v roce 1900 v souvislosti s pokusem modelovat fluktuace ceny akcie na burze.

Fyzikální teorii Brownova pohybu vytvořil A. Einstein v letech 1905 a 1906 v souvislosti s budováním statistické termodynamiky. Důkladnou matematickou teorii Brownova pohybu vytvořil N. Wiener již v roce 1923, tedy v době, kdy nebyl k dispozici slavný univerzální model $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, který pro matematickou pravděpodobnost vytvořil A. N. Kolmogorov v roce 1933. U tohoto modelu se nyní musíme zastavit, abychom i my mohli Brownův pohyb, lépe řečeno jeho jednorozměrnou projekci, matematizovat. Pojmenujeme objekty v této trojici:

Ω je seznam náhodných stavů světa,

$\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ je σ -algebra (poskytující seznam některých vlastností stavů světa),

P je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{F}$,

$P(F)$ je pravděpodobnost vlastnosti F .

Připomeňme, že σ -algebra je množinový systém, který je uzavřen na spočetné množinové operace, který zahrnuje množinu prázdnou i celý prostor Ω . Rovněž připomeňme, že pravděpodobnostní míra je funkce P definovaná na $\mathcal{F}$ s hodnotami v intervalu $[0, 1]$ taková, že

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(F_k), \quad \text{pro disjunktní } F_k \in \mathcal{F}.$$

Pozorovat, měřit stavy světa $\omega \in \Omega$ komplexně většinou nelze, pozorujeme pouze některé jejich měřitelné charakteristiky, například $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Požadavek měřitelnosti vyjadřujeme následujícím způsobem:

Každá vlastnost typu $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval,

náleží do $\mathcal{F}$, a tudíž má pravděpodobnost, kterou značíme jako $P[X \in I]$.

Každé zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, které splňuje výše uvedený požadavek měřitelnosti, nazýváme náhodná veličina.

Základní představu o pravděpodobnostním rozložení hodnot náhodné veličiny X poskytují její dvě číselné charakteristiky: střední hodnota EX a rozptyl $\text{Var}(X) = E(X - EX)^2$, které můžeme interpretovat jako pravděpodobnostní těžiště, respektive moment setrvačnosti hodnot $(X(\omega), \omega \in \Omega)$. A. N. Kolmogorov již znal teorii abstraktního integrálu $\int X dP$, kterou vytvořil H. Lebesgue v roce 1902 a definoval střední hodnotu EX jako tento integrál pro X ve velkém lineárním prostoru, který značíme $L_1 = L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a který zahrnuje všechny jednoduché náhodné veličiny $X \in J$ typu

$$X(\omega) = x_k \text{ pro } \omega \in F_k, \text{ kde } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

$$\text{a kde } F_1, F_2, \dots, F_n \text{ jsou množiny v } \mathcal{F}, \text{ které tvoří rozklad } \Omega.$$

Pro jednoduchou náhodnou veličinu X přirozeně definujeme střední hodnotu jako vážený průměr

$$EX = \sum_{k=1}^n x_k \cdot P[X = x_k].$$

Definiční obor L_1 operátoru střední hodnota E je pak v jistém smyslu maximální lineární prostor obsahující J , do kterého ještě můžeme tento operátor z J rozšířit jako operátor spojitý a lineární. Střední hodnota a rozptyl náhodné procházky S_n , respektive střední hodnota a rozptyl normované Gaussovy náhodné veličiny Y jsou touto abstraktní definicí určeny souhlasně se vzorci uvedenými v 1. odstavci.

N. Wiener byl postaven před složitější úlohu. Náhodný stav světa $\omega \in \Omega$ určuje kompletní život částice, což je mimořádně *nehladká*, přesto však spojitá trajektorie

$$B(\omega) = (B_t(\omega), t \geq 0), \text{ kde } B_t(\omega) \text{ je poloha částice v čase } t.$$

Brownův pohyb musí být proto definován jako náhodná veličina s hodnotami v prostoru spojitých funkcí $C[0, \infty)$. Takové náhodné veličině říkáme spojitý stochastický proces. Ukazuje se, že jeho správná definice je následující:

B_t je reálná náhodná veličina pro každé $t \geq 0$,

$B(\omega) = (B_t(\omega), t \geq 0)$ je spojitá funkce na $[0, \infty)$ pro každé $\omega \in \Omega$.

Fyzikální vlastnosti Brownova pohybu pobízejí definovat jej jako spojitý stochastický proces, který startuje z počátku a jehož pravděpodobnostní vlastnosti jsou následující:

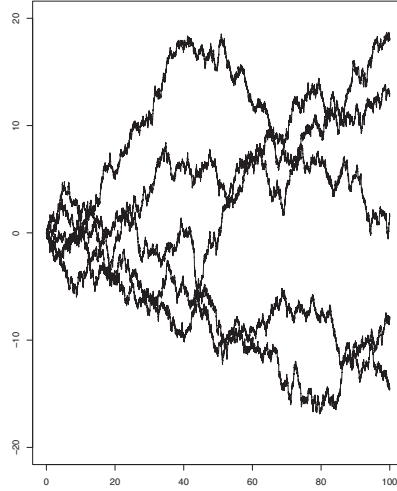
$\frac{B_t - B_s}{\sqrt{t - s}}$ je normovaná Gaussova náhodná veličina pro každou dvojici $s < t$ a

$$P[B_{t_1} - B_{t_0} \leq x_1, B_{t_2} - B_{t_1} \leq x_2, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \leq x_k] =$$

$$= P[B_{t_1} - B_{t_0} \leq x_1] \cdot P[B_{t_2} - B_{t_1} \leq x_2] \dots P[B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \leq x_k]$$

pro každou konečnou rostoucí posloupnost časových okamžiků $t_0, t_1, \dots, t_k$ a pro každou konečnou posloupnost čísel $x_1, x_2, \dots, x_k$. Připomeňme, že proces, který splňuje druhou z uvedených podmínek je nazýván proces s nezávislými přírůstky.

Dvourozměrný stochastický proces (B_t^1, B_t^2) , kde B^1 a B^2 jsou nezávislé jednorozměrné Brownovy pohyby, jest pak matematický model dynamiky pozorované již zmíněným botanikem. Jednorozměrný Brownův pohyb, kterým se budeme dále zabývat, bývá často nazýván **Wienerův proces**. Simulace trajektorie Brownova pohybu může vypadat následovně:



Obr. 3

Na počátku našeho výkladu si povšimneme dvou podobností náhodné procházky a Brownova pohybu. Prvá z uvedených definičních vlastností platí pro náhodnou procházku limitně:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left[\frac{S_{s+t} - S_s}{\sqrt{t}} \leq x \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = P \left[\frac{B_{s+t} - B_s}{\sqrt{t}} \leq x \right], \quad s \in \mathbb{N}.$$

Také střední hodnota a rozptyl dynamik S_n a B_t jsou stejné

$$ES_t = EB_t = 0, \quad \text{Var} S_t = ES_t^2 = t, \quad \text{Var} B_t = EB_t^2 = t.$$

Samozřejmě nezávislost přírůstků $B_t - B_s$ Brownova pohybu, postulovaná druhou požadovanou definiční vlastností, napodobuje nezávislost přírůstků $S_t - S_s$ náhodné procházky.

Bylo vytvořeno mnoho nových matematických postupů a konstrukcí, aby mohla být dokázána existence Brownova pohybu a objeveny jeho mnohdy velmi kuriózní vlastnosti. Rozhodující počáteční kroky v letech 1935 až 1942 učinili A. N. Kolmogorov, P. Lévy, J. L. Doob, K. Itô a mnozí další matematici.

Budeme si všimat dalších analogií mezi náhodnou procházkou, která žije ve světě diskrétním a Brownovým pohybem, jehož domovem je svět spojitý.

Vstup Brownova pohybu do bariery. L. Bachelier již v roce 1900 objevil **reflekční princip** pro Brownovu částici

$$P[\max_{s \leq t} B_s > a] = 2P[B_t \geq a] + P[B_t = a] = 2P[B_t > a], \quad a > 0,$$

a jako důsledek pak tvrzení, kterému se dnes říká **Bachelierova věta**:

$$P \left[\max_{s \leq 1} B_s \geq a \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = P[|B_1| \geq a] = \lim_{t \rightarrow \infty} P \left[\max_{1 \leq s \leq t} \frac{S_s}{\sqrt{t}} \geq a \right].$$

Obecněji, $P[\max_{s \leq t} B_s \geq a] = P[|B_t| \geq a]$.

Okamžik prvního vstupu Brownovy částice do bariery $0 \neq a \in \mathbb{R}$ je opět náhodný Markovský čas

$$\tau_a := \inf\{t > 0 : B_t = a\}, \quad \text{kde } \inf \emptyset = \infty.$$

Tak jako v případě náhodné procházky platí

$$P[\tau_a < \infty] = 1, \quad \text{ale } E\tau_a = \infty \text{ pro } a \neq 0.$$

Opět se tudíž dovídáme, že **Brownova částice je rekurentní**, to jest

$$P \left[\liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty \right] = P \left[\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty \right] = 1.$$

Také Brownova částice navštíví každý svůj možný stav $a \in \mathbb{R}$ v nekonečně mnoha časových okamžicích, střední doba čekání na prvou návštěvu je nekonečná. Stejně jako v případě náhodné procházky jest $E\lambda_a = a^2 < \infty$, kde $\lambda_a := \min(\tau_a, \tau_{-a})$ je okamžik prvního výstupu částice z otevřeného intervalu $(-a, a)$.

Brownův pohyb je proces s nezávislými přírůstky, a tudíž i pro něj platí

$$\textbf{Silný zákon velkých čísel.} \quad P \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0 \right] = 1.$$

Pozorujeme-li chaotické chování fyzikální Brownovy částice, neděláme si iluze o matematických vlastnostech její trajektorie. Z mnoha jejích dnes již známých patologií si vybereme dvě opravdu zdařilé

Patologie 1. Trajektorie B_t je **spojitá a nemá derivaci v žádném z bodů intervalu** $(0, \infty)$ a není tedy funkcí s konečnou variací na žádném omezeném intervalu. Přesněji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| B_{\frac{kt}{n}} - B_{\frac{(k-1)t}{n}} \right| = \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Oblíbenou a poměrně obtížnou exhibicí na přednáškách o základech matematické analýzy je konstrukce spojitě funkce, která nemá nikde derivaci. Brownův pohyb jiné funkce nezná.

Patologie 2. Označíme-li $Z = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$ množinu časových okamžiků, ve kterých se Brownova částice nachází v počátku souřadnic, pak Z je **nespočetná uzavřená množina bez izolovaných bodů**. To například znamená, že částice, která startuje z počátku nejprve nekonečně krátce změní znaménko své polohy a pak se teprve vydá na cestu k některé nenulové bariéře.

Výše uvedená patologická chování nejsou vlastností všech trajektorií. Nalézt však trajektorii, která není patologická můžeme však pouze s pravděpodobností nula.

Jsou jména a významné monografie, které je třeba zmínit v souvislosti se studiem Brownova pohybu v období 1930 až 1960, a to obecně již i v libovolné konečné dimenzi. Jsou to P. Lévy (1940), J. L. Doob (1953) a E. B. Dynkin (1959), kteří vytvořili pro Brownův pohyb teoretické prostředí s klíčovými pojmy jako jsou **martingal**, **difuse a spojitý Markovský proces**. M. Donsker (1951–1952) a V. Strassen (1964) navázali na práce P. Erdőse a M. Kace (1946) a učinili tak významný krok ve studiu Brownova pohybu jako **limitního chování náhodné procházky**. V závěru odstavce vysvětlíme jejich výsledky a zformulujeme tvrzení, které by mohlo mít název **Moivreova-Laplaceova limitní supervěta**, známá však jest jako

Princip invariance. V této souvislosti jsou podstatné dva kroky:

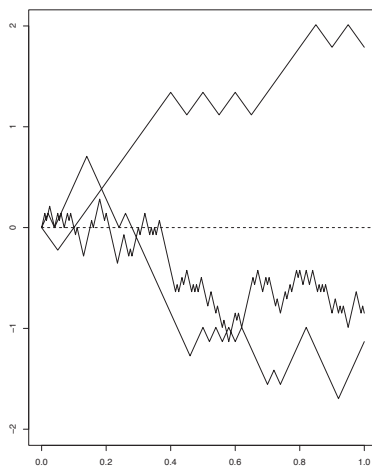
- (1) Na trajektoriích Brownova pohybu skrytě žije náhodná procházka S_n , která je konstruovaná následovně. Položíme $S_0 = 0 = B_0$ a čekáme na první okamžik, λ_1 , kdy B_t poprvé vstoupí do $\{-1, 1\}$. Brownův pohyb je rekurentní, a proto jest $\lambda_1 < \infty$. Položíme $S_1 = B_{\lambda_1}$. Nyní čekáme na okamžik $\lambda_1 < \lambda_2 < \infty$, kdy částice poprvé vstoupí do $\{B_{\lambda_1} - 1, B_{\lambda_1} + 1\}$ a položíme $S_2 = B_{\lambda_2}$. Takto pokračujeme indukcí a intuitivně je zřejmé, že takto vytvořená posloupnost $S_0, S_1, S_2, \dots$ je náhodná procházka.
- (2) Při každém $n \in \mathbb{N}$ transformujeme úsek náhodné procházky $S_0, S_1, \dots, S_n$ do spojitého polygonu $(S_t^n, t \in [0, 1])$ s uzlovými body

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sqrt{n}} \right), \quad 0 \leq k \leq n \quad (\text{Obr. 4}).$$

Závažným výsledkem je pak zjištění, že polygon S_t^n lze v limitě aproximovat Brownovým pohybem $B_t^n = n^{-\frac{1}{2}} B_{nt}$, který vzniká změnou časové škály v původním Brownově pohybu B_t . Platí

$$P \left[\max_{0 \leq t \leq 1} |S_t^n - B_t^n| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0 \quad \text{při } n \rightarrow \infty \quad \text{pro každé } \epsilon > 0,$$

a toto jest nazýváno princip invariance. Zjišťujeme, že při vhodném zjemňování časové i stavové škály náhodné procházky je Brownův pohyb limitním stavem náhodné procházky. Pověsimme si také (Obr. 4) postupného přibývání bodů, kde polygony S_t^n nemají derivaci. Patologie 1 není již tak překvapivá ani z matematického hlediska.



Obr. 4

Výsledky, o nichž jsme hovořili v tomto odstavci, se opírají o náročný aparát teorie pravděpodobnosti a matematické analýzy (jako např. v monografii [25]).

3 Stochastický kalkulus

V mnohých aplikacích je diskrétní časová dynamika $(X_t, t = 0, 1, \dots, n)$ určována rekurentně pomocí spojitého koeficientu $b(x)$ (*drift*) a spojitého koeficientu $\sigma(x)$ (*volatilita*) vzorcem

$$(1) \quad X_t - X_s = b(X_s) \cdot (t - s) + \sigma(X_s) \cdot (S_t - S_s), \quad 0 \leq s < t,$$

kde $b(x)$ je okamžitá střední rychlost pohybu, pohyb jest však ovlivňován i náhodným šumem, prostřednictvím náhodné procházky S_t . Vhodnou časově prostorovou transformací při využití principu invariance ze závěru předchozího odstavce vyplývá, že výše uvedená diferenční rovnice přechází v limitě do rovnice, které budeme říkat **stochastická diferenciální rovnice**, a má tvar

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Opatrně tuto rovnici přepíšeme do tvaru integrálního

$$(2) \quad X_t = X_0 + \int_0^t b(X_u) du + \int_0^t \sigma(X_u) dB_u, \quad t \in [0, 1]$$

a čelíme prvé obtíži: standardní Lebesgueovská teorie integrálu (přesněji Lebesgue-Stieltjesova integrálu) totiž nepočítá s diferenciálem dB_t , který je budován na funkci B_t , která nemá konečnou variaci, což je vlastnost Brownova pohybu, kterou jsme zaznamenali jako Patologie 1.

Prvý stochastický integrál s diferenciálem dB_t definoval K. Itô v roce 1942 v článku psaném japonsky a ve světové matematické komunitě byl tento integrál

akceptován po vydání monografie [K. Itô (1944)]. Vysvětlíme Itôův postup v poněkud modernější podobě, avšak s omezeními, která dovoluje náš předpoklad na spojitost koeficientů driftu $b(x)$ a volatility $\sigma(x)$.

Povšimneme si, že řešení diferenční rovnice (1) posloupnost (X_t) je konstruována tak, že hodnota X_t je pouze funkcí časového úseku náhodné procházky $S_0, \dots, S_t$. Také si povšimneme, že v limitní rovnici (2) jsou procesy $b_t = b(X_t)$ a $\sigma_t = \sigma(X_t)$ již spojitě.

Itôův stochastický integrál $\int_0^t \sigma_s dB_s$ budeme proto zvažovat pouze pro integrandy σ_s , které mají následující vlastnost:

$(\sigma_t, t \geq 0)$ je spojitý proces, který je adaptován na Brownův pohyb $(B_t, t \geq 0)$, to jest takový, že platí $\sigma_t = f_t(B_s, s \leq t)$ pro každé $t \geq 0$.

Pro takový integrand σ_t vytvoříme posloupnost Riemannových aproximací

$$I_t^n = \sum_{k=1}^n \sigma_{\frac{(k-1)t}{n}} \cdot \left(B_{\frac{kt}{n}} - B_{\frac{(k-1)t}{n}} \right)$$

a ukážeme (nikoliv příliš snadno), že existuje limita aproximací $\lim_{n \rightarrow \infty} I_t^n := I_t$ ve smyslu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\max_{0 \leq s \leq t} |I_s^n - I_s| \geq \epsilon\right] = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Značíme $I_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$ a nazýváme **stochastický integrál procesu σ** . Tento integrál je samozřejmě lineární funkcí integrandu.

Uvedeme však některé další základní a velmi netriviální vlastnosti tohoto integrálu.

(1) $\int_0^t \sigma_s dB_s$ lze definovat jako spojitý adaptovaný proces, opět tudíž jest

$$\int_0^t \sigma dB = f_t(B_s, 0 \leq s \leq t).$$

(2) Je-li integrand σ integrovatelný se čtvercem, tj. platí-li $E \int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$, pak

$$E \int_0^t \sigma_s dB_s = 0, \quad \text{Var} \left(\int_0^t \sigma_s dB_s \right) = E \left(\int_0^t \sigma_s dB_s \right)^2 = E \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Tyto vzorce však potvrzují obavu, že nekonečná variace trajektorií Brownova pohybu způsobuje nestandardní chování stochastického integrálu.

Klasická pravidla pro derivování říkají, že $dB_t^2 = 2B_t dB_t$, jinak zapsáno $B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s$. Toto však není možné, protože

$$EB_t^2 = t \quad \text{a zároveň} \quad E \int_0^t B_s dB_s = 0.$$

K. Itô v roce 1951 završil svá zkoumání stochastického integrálu a našel pravidla pro zacházení se stochastickým diferenciálem pro širokou třídu stochastických procesů odvozených z Brownova pohybu. Proces

$$Y_t = bt + \sigma B_t, \quad \sigma \neq 0, \quad \text{v diferenciální formě} \quad dY_t = b dt + \sigma dB_t,$$

se nazývá **driftovaný Brownův pohyb**. Je-li drift b záporný, pak ze zákona velkých čísel pro Brownův pohyb plyne, že $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = -\infty$, současně však Y_t s kladnou pravděpodobností vstoupí do libovolné bariery $a > 0$. Pro $b < 0$, $\sigma = 1$ například platí

$$P[\tau_a < \infty] = e^{2ba}, \quad \tau_a = \inf\{t > 0 : Y_t = a\}.$$

Brownův pohyb můžeme však driftovat složitěji. Proces

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \text{v diferenciální formě} \quad dY_t = b_t dt + \sigma_t dB_t,$$

kde b_t a σ_t jsou spojitě adaptované procesy, nazveme **proces Itôův**.

Itôova formule. Uvažíme výše uvedený Itôův proces Y_t a funkci $f(t, y)$ se spojitými derivacemi

$$\dot{f}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y), \quad f_y(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y), \quad f_{yy}(t, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y).$$

Pak proces $X_t = f(t, Y_t)$ je Itôův a má stochastický diferenciál

$$dX_t = \dot{f}(t, Y_t) dt + f_y(t, Y_t) dY_t + \boxed{\frac{1}{2} f_{yy}(t, Y_t) \sigma_t^2 dt}.$$

Podrobněji a v integrálním tvaru

$$X_t = f(0, Y_0) + \int_0^t \left[\dot{f}(s, Y_s) + f_y(s, Y_s) b_s + \frac{1}{2} f_{yy}(s, Y_s) \sigma_s^2 \right] ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Výraz v rámečku odpovídá druhému členu Taylorova rozvoje, v klasickém kalkulu jej nenajdeme a jest daní za nekonečnou variaci Brownova pohybu.

Speciálně, volíme-li $f(t, y) = f(y)$ a $Y_t = B_t$, dostáváme

$$df(B_t) = f_y(B_t) dt + \frac{1}{2} f_{yy}(B_t) dB_t.$$

Pro funkci $f(y) = y^2$ dostáváme správný diferenciál druhé mocniny Brownova pohybu $dB_t^2 = dt + 2B_t dB_t$.

Vrátíme se na počátek tohoto odstavce ke stochastické diferenciální rovnici

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad X_0 = x$$

se spojitými koeficienty $b(x)$ a $\sigma(x)$, která je příkazem nalézt spojitý adaptovaný proces X_t s vlastností

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s \quad \text{platné pro } t \geq 0.$$

Každé řešení takové rovnice se nazývá **difusní proces** nebo jednoduše difuze. Základy teorie difusních procesů položil S. N. Bernstein v roce 1934. Byl to však K. Itô (1951b), který vybudoval jejich rigorózní matematickou teorii, vyřešil otázky existence jednoznačnosti řešení. Současný stav zkoumání v této oblasti lze v přístupné formě blízké aplikacím nalézt v monografii [21].

Vyzkoušíme si nyní jednu klasickou stochastickou diferenciální rovnici, která se nazývá **Langevinova rovnice**:

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t, \quad X = x > 0, \quad b > 0, \quad \sigma > 0$$

pro rychlost pohybu molekuly plynu, nebo rychlost Brownovy částice v prostředí s koeficientem viskozity b . Položíme-li

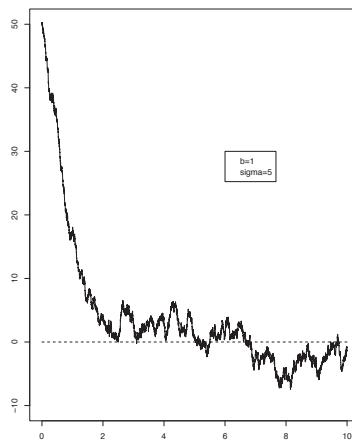
$$dY_t = e^{bt} dB_t, \quad Y_0 = x \quad \text{a} \quad f(t, y) = \sigma e^{-bt} y,$$

$$X_t = f(t, Y_t) = \sigma e^{-bt} \left\{ x + \int_0^t e^{bs} dB_s \right\},$$

pak užitím Itôovy formule zjišťujeme, že X_t je řešení Langevinovy rovnice. Lze dokázat, že je řešením jediným. Rovnici jako model pro rychlost Brownova pohybu sestavil již v roce 1908 P. Langevin. Fyzici L. S. Ornstein a G. E. Uhlenbeck v roce 1930 rovnici vyřešili. Při $t \rightarrow \infty$ vypočítáme

$$EX_t = x \cdot e^{-bt} \rightarrow 0, \quad \text{Var}(X_t) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2b(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2bt}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2b}$$

a zjistíme, že rychlost Brownovy částice X_t má při $t \rightarrow \infty$ hustotu pravděpodobností jako $\frac{\sqrt{2b}}{\sigma} \cdot Y$, kde Y je normovaná Gaussova náhodná veličina. Limitní chování rychlosti nezávisí na její počáteční hodnotě x . Simulaci Ornstein-Uhlenbeckova procesu X_t nabízí Obr. 5.



Obr. 5

4 Finanční matematika

Jedna z nedůležitějších stochastických diferenciálních rovnic je rovnice lineární

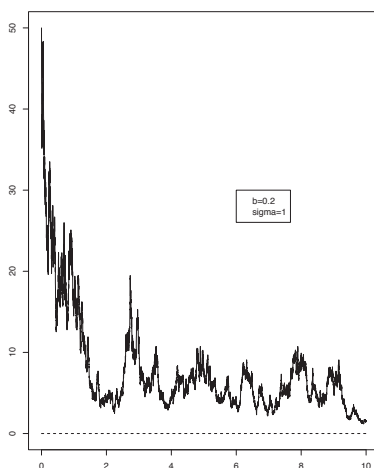
$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Přepíšeme-li tuto rovnici do tvaru $\frac{dX_t}{X_t} = b dt + \sigma dB_t$, vidíme, že procentuální krátkodobé změny X_t se chovají jako driftovaný Brownův pohyb, což je představa o chování burzovní akcie, kterou použil již L. Bachelier v roce 1905. Tento model pro cenu akcie je od této doby používán ve finanční matematice, i když, jak dnes již víme, je mnohdy pouze prvním přiblížením realitě burzovních obchodů. Označíme

$$Z_t = \sigma B_t, \quad f(t, z) = x_0 \exp \left\{ \left(b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + z \right\}$$

$$X_t = f(t, Z_t) = x \exp \left\{ \left(b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\}$$

a pomocí Itôovy formule zjišťujeme, že X_t je řešení naší rovnice. Lze dokázat, že je to řešení jediné při počáteční podmínce $X_0 = x_0$. Proces X_t je exponenciála driftovaného Brownova pohybu $dY_t = \left(b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t$ a nazývá se **geometrický Brownův pohyb**. Simulace trajektorie tohoto procesu je na Obr. 6.



Obr. 6

Vypočítáme střední hodnotu řešení X_t v čase t jako

$$EX_t = x_0 \exp \left\{ \left(b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \cdot Ee^{\sigma B_t} = x_0 \cdot e^{bt}.$$

Předpokládáme-li $\frac{\sigma^2}{2} > b > 0$, pak Y_t je driftovaný Brownův pohyb se záporným driftem a poznatky, které jsme získali ve 3. odstavci nám poskytují poněkud překvapivou zprávu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EX_t = +\infty, \quad \text{ale} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0.$$

Současne však X_t dokáže vstoupit s kladnou pravděpodobností do libovolné bariery $a > 0$. Toto jest nejen příklad toho, že limitu a integrál nelze beztestně zaměňovat, ale i důvod k zamyšlení pro investora, který vlastní rizikovou akci, o vztahu pravděpodobnosti a střední hodnoty. Naštěstí, reálné burzovní obchody jsou ukončeny v některém terminálním čase $T < \infty$.

R. C. Merton v roce 1971, později F. Black a M. Scholes vytvořili v roce 1973 následující model finančního trhu: rozumný investor používá svůj majetek dvojím způsobem. Nakupuje bezpečné obligace nebo dluhopisy (*bonds*), které zhodnocují jeho investici s kladnou úrokovou mírou r (*interest rate*). Cena jedné obligace Y_t se tudíž řídí obyčejnou diferenciální rovnicí

$$dY_t = r dt, \quad Y_0 = y_0 > 0, \quad \text{a proto} \quad Y_t = y_0 \cdot e^{rt}.$$

Investor toužící po větším zisku pak také nakupuje akcie (*stocks*), které jsou rizikové a jejich cena X_t je terčem náhodných pertubací. Pro cenu akcie zvolíme geometrický Brownův pohyb řízený rovnicí

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0 > 0, \quad \text{tudíž} \quad X_t = x_0 \exp \left\{ \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\}.$$

Označíme jako o_t počet obligací a jako a_t počet akcií, které investor vlastní v čase t . Vektor $p_t = (o_t, a_t)$ se nazývá portfolio a stochastický proces $V_t = o_t \cdot Y_t + a_t \cdot X_t$ pak registruje jeho hodnotu, tudíž majetek investora v čase t .

Záporná hodnota počtu obligací o_t modeluje vlastně kredit, který investor získal k podpoře svých operací s akciemi. Záporná hodnota počtu akcií a_t je znamením pro obchod, který je znám jako krátký prodej (*short sale operation*): Znamená to, že investor prodá obligace, které nevlastní, musí je však ve velmi krátké době zpětně koupit nebo za ně zaplatit. Model vyžaduje, aby byla dodržována dvě následující pravidla:

P 1. Obchodování musí být spojitě. Investor může **spojitě** měnit své portfolio $p_t = (o_t, a_t)$ v libovolném čase t prodejem a nákupem libovolně malých částí obligací a akcií na základě vývoje ceny akcie X_s v časovém intervalu $[0, t]$. Jinými slovy předpokládáme, že stochastické procesy o_t a a_t jsou spojitě a adaptované, to jest, že platí $p_t = f_t(B_s, s \leq t)$.

P 2. Žádáme také, aby se portfolio $p_t = (o_t, a_t)$ financovalo samo. Investor nemůže podporovat své obchody z vnějších zdrojů. Zisk nebo ztráta na hodnotě portfolio musí být pouze důsledkem změn v cenách obligace či akcie. Portfolio, které se financuje samo (*self-financing portfolio*), je matematicky definováno požadavkem

$$dV_t = o_t dY_t + a_t dX_t$$

a po dosazení

$$dV_t = (o_t \cdot rY_t + a_t \cdot bX_t) dt + a_t \cdot \sigma X_t dB_t.$$

Portfolio $p_t = (o_t, a_t)$ je vlastně dynamická obchodní strategie s počáteční investicí V_0 , která má mít v terminálním čase T jistou požadovanou hodnotu v závislosti na finální ceně akcie. Požadavek (*contingent claim*) je tudíž vyjádřen jako $V_T = h(X_T)$, kde $h(x) \geq 0$ je některá vhodná funkce. Bylo by velmi příjemné konstruovat portfolio p_t tak, aby platilo $V_t = f(t, X_t)$, kde $f(t, x)$ je funkce se spojitými derivacemi jak vyžaduje Itôova formule. Pravidlo P1 zaručuje, že V_t je Itôův proces a můžeme tuto formuli použít. Dostaneme

$$dV_t = \left[\dot{f}(t, X_t) + f_x(t, X_t)bX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)\sigma^2 X_t^2 \right] dt + f_x(t, X_t)\sigma X_t dB_t.$$

Porovnáme tento stochastický diferenciál s diferenciálem

$$dV_t = (o_t \cdot rY_t + a_t \cdot bX_t) dt + a_t \cdot \sigma X_t dB_t,$$

který definuje samofinancující se portfolio a porovnáním koeficientů obdržíme $a_t = f_x(t, X_t)$ a také rovnost

$$(BS\ 1) \quad o_t \cdot rY_t + f_x(t, X_t) \cdot bX_t = \dot{f}(t, X_t) + f_x(t, X_t) \cdot bX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t) \cdot \sigma^2 X_t^2,$$

protože Itôův proces je nulový právě tehdy, když má nulové koeficienty. Odsud

$$(BS\ 2) \quad o_t = \frac{1}{rY_t} \left\{ \dot{f}(t, X_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t) \cdot \sigma^2 X_t^2 \right\} \quad \text{a také} \quad a_t = f_x(t, X_t).$$

Dosadíme a obdržíme

$$\begin{aligned} (BS\ 3) \quad f(t, X_t) &= V_t = o_t Y_t + a_t X_t \\ &= f_x(t, X_t) X_t + \frac{1}{rY_t} \left\{ \dot{f}(t, X_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t) \sigma^2 X_t^2 \right\} Y_t. \end{aligned}$$

Protože geometrický Brownův pohyb X_t navštíví s kladnou pravděpodobností každý bod množiny $(0, \infty)$ a protože zúčastněné koeficienty jsou spojitě, (BS 3) platí právě tehdy, když $f(t, x)$ je řešení slavné Black-Scholesovy parciální diferenciální rovnice

$$(BS\ 4) \quad \dot{f}(t, X) = rf(t, x) - rx f_x(t, x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t, x), \quad x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

s okrajovou podmínkou $f(T, x) = h(x)$.

Zajímavý terminální požadavek poskytuje volba $h(X_T) = (X_T - K)^+$, kde K je kladná konstanta (*exercise prize*). Smysl takové volby bude patrný až vyložíme podstatu evropského opčního kontraktu. Jediné řešení Cauchyova problému (BS 4) s právě uvedenou okrajovou podmínkou je funkce $f(x, t) \geq 0$ definovaná na $[0, T] \times (0, \infty)$ vztahem

$$x_F \left(\frac{\ln(x/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - Ke^{r(T-t)} F \left(\frac{\ln(x/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$

pro $0 \leq t < T$ a jako $(x - K)^+$ pro $t \geq T$, kde $F(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$ je distribuční funkce normované Gaussovy náhodné veličiny. Dosazením ceny akcie X_t do rovnice této funkce dostaneme časový průběh hodnoty portfolia $V_t = f(t, X_t)$ a dosazením do rovností (BS 2) pak tvar portfolia $p_t = (o_t, a_t)$, který respektuje požadavek $V_T = (X_T - K)^+$. Pozoruhodným a často diskutovaným rysem tohoto řešení je skutečnost, že nezávisí na velikosti driftu b v rovnici pro cenu akcie X_t .

Právě předvedené řešení zdánlivě neřešitelné úlohy je v jistém smyslu řešení nejlepší v množině dynamických portfolií, která se sama financují a která nedovolují investorovi ani krátkodobá zadlužení. Jinými slovy také požadujeme dodržování pravidla

P 3. Hodnota portfolia $V_t = o_t Y_t + a_t X_t$ nesmí být v časovém intervalu $[0, T]$ nikdy záporná.

Obchodní strategie, která se přidržuje pravidel P1, P2 a P3, se nazývá **strategie přípustná**. Pravidlo P3 je rozumné, jeho absence dovoluje obchody, které mohou ohrozit bezpečnost celého finančního trhu. **Minimální cena** $c(h, T)$ terminálního požadavku $h(X_T)$ je přirozeně definována jako

minimum všech $c \geq 0$ takových, že existuje přípustné portfolio s cenou $(V_t, 0 \leq t \leq T)$, které splňuje okrajové podmínky $V_0 = c$, $V_T = h(X_T)$.

Lze dokázat, že při volbě $h(x) = (x - K)^+$ je minimální cena dána vzorcem

$$(BS\ 5) \quad c(h, T) = f(0, x_0),$$

kde $f(t, x)$ je řešení Black-Scholesovy rovnice a x_0 počáteční cena akcie. Portfolio (BS 2) s hodnotou $V_t = f(t, X_t)$ je jediné s touto vlastností: je-li V_t^1 hodnota jiného portfolia (o_t^1, a_t^1) takového, že $V_T^1 = (X_T - K)^+$, pak $V_t^1 \geq V_t$ pro všechna $0 \leq t \leq T$. Black-Scholesovo portfolio je tudíž nejúspornější.

Na burze se však dějí ještě podivnější věci. Obchod s evropskou opcí (*European call option*) je kontrakt mezi investorem a prodávajícím makléřem, který dává investorovi právo, nikoliv však povinnost, nakoupit v terminálním čase jednu akcii za cenu K . Jest tudíž situace následující:

$$\begin{aligned} X_T > K &\implies \text{investor realizuje zisk } X_T - K, \\ X_T \leq K &\implies \text{investor neuplatní své právo na opci a zisk je nulový.} \end{aligned}$$

Takový kontrakt má ovšem svou cenu. Makléř se musí pojistit. Jaká je spravedlivá cena za nákup evropské opce? Uvědomíme-li si, že investor má ještě také možnost obchodovat prostřednictvím některého přípustného portfolia, byl by hloupý kdyby za opční kontrakt zaplatil více než činí minimální cena terminálního finančního požadavku $c(h, X_T)$, která je dána vzorcem (BS 5). Toto jest tedy *spravedlivá cena evropské opce* a její stanovení způsobilo, že M. C. Merton a M. Scholes obdrželi v roce 1997 Nobelovu cenu za ekonomii.

Tím také končí naše povídka o cestě Brownovy částice, kterou vykonala od roku 1985 fyzikou, matematikou a ekonomii. Dodejme pouze, že zájímající se

čtenář může tuto cestu sledovat podrobněji v pěkné monografii [23], většími nároky na znalosti pokročilejší teorie pravděpodobnosti pak v monografii [7].

Literatura

- [1] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Ann Sci. Ecole Norm. Sup. **17** (1900), 21–86.
- [2] S. N. Bernstein, *Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques*, Trudy Fiz.-Mat., Steklov Inst. **5** (1934), 95–124.
- [3] F. Black, M. Scholes, *Pricing of Options and Corporate Liabilities*, J. Political Econ. **81** (1973), 637–654.
- [4] E. Borel, *Principes et formules classiques*, 1925.
- [5] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, J. Wiley, New York, 1953.
- [6] M. D. Donsker, *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem. Amer. Math. Soc. **6** (1951–1952).
- [7] J. Dupačová, J. Hurt, J. Štěpán, *Stochastic Modeling in Economy and Finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 2002.
- [8] E. B. Dynkin, *Theory of Markov Processes*, Nauka, Moskva, 1959.
- [9] A. Einstein, *On the theory of Brownian motion* (1906, reprint z roku 1956), Dover, New York.
- [10] P. Erdős, M. Kac, *On certain limit theorems in the probability theory*, Bull. Math. Soc. **55** (1946), 292–302.
- [11] K. Itô, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 519–524.
- [12] K. Itô, *On the formula concerning stochastic differentials*, Nagoya Math. J. **3** (1951a), 55–65.
- [13] K. Itô, *On stochastic differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc. **4** (1951b), 1–51.
- [14] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer Verlag, Berlin, 1933.
- [15] P. Langevin, *Sur la théorie du mouvement brownien*, C. R. Acad. Sci. Paris **146** (1908), 530–533.
- [16] P. S. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, 1812.
- [17] H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, Ann. Mat. Pura Appl. **7** (1902), 231–359.
- [18] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- [19] R. C. Merton, *Optimal consumption and portfolio in a continuous-time model*, J. Econom. Theory **3** (1971), 373–413.
- [20] A. De Moivre, *Miscellanea Analytica Supplementum*, 1730.
- [21] B. Øksendal, *Stochastic Differential equations*, Springer, New York, 2003.
- [22] L. S. Ornstein, G. E. Uhlenbeck, *On the theory of Brownian motion*, Phys. Review **36** (1930), 823–841.
- [23] J. M. Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, New York, 2001.
- [24] V. Strassen, *An invariance principle for the law of iterated logarithm*, Z. Wahrsch. verw. Geb. **3** (1964), 211–226.
- [25] J. Štěpán, *Teorie pravděpodobnosti. Matematické základy*, Academia, Praha, 1987.
- [26] N. Wiener, *Differential spaces*, J. Math. Phys. **2** (1923), 131–174.
- [27] K. Zvára, J. Štěpán, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, Praha, 2006.

Adresa

Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Sokolovská 83

186 75 Praha 8

e-mail: stepan@karlin.mff.cuni.cz

MATEMATIKA A HUDBA

BELOSLAV RIEČAN

Abstract: Some informations about connections and collaboration between mathematicians and musicians are presented from the period 1969–1989.

1 Úvod

Rok 2009 je významným rokom výročí v dejinách bývalého Československa. Na jar roku 1969 definitívne odzvonilo Pražskej jari. Naproti tomu o 20 rokov neskôr, v novembri, nastal v Československu obrat na opačnú stranu. Naším cieľom je dokumentovať spomenutých 20 rokov na vzťahu matematikov a hudobníkov.

2 Matematici hudobníkom

Šesťdesiate roky zaznamenali politické uvoľňovanie a s tým súvisiaci rozkvet umenia i vedy. Nádeje československej kultúry zmrazili sovietske tanky a následné normalizačné previerky. Tie dopadli v slovenskej matematike zmierlivo, v slovenskej hudbe katastrofálne. Popredné osobnosti našej generácie, o ktorej je reč, boli vylúčení zo zväzu skladateľov: Ilja Zeljenka, Jozef Malovec, Ivan Parík, Juraj Beneš, Roman Berger či Juraj Hatrík. A v tej chvíli poskytla im matematika azyl. Pod patronátom Ivana Mačáka sme sa v Slovenskom národnom múzeu mohli stretávať na prednáškach o matematike (v r. 1982 boli tieto prednášky publikované v popularizačnej knihe [7]).

Matematika a hudba majú spoločný vysoký stupeň abstrakcie. To ich sem – tam ochraňuje pred mocnými tohto sveta. Príkladom môže poslúžiť skladba Míra Bázlika Canticum 43. Bázlik absolvoval Univerzitu Karlovu v Prahe (žiak Miroslava Katětova) a neskôr VŠMU v Bratislave (žiak Jána Cíkera). Vyššie spomenutú tanky ho inšpirovali k zhudobneniu Žalmu 43 v preklade Kráľickej biblie:

Suď mne, ó Bože, a zasad' se o mou při; od národu nemilosrdného a od člověka lstivého a nepravého vytrhni mne.

Aby sa to dielo mohlo uvádzať, namiesto Kráľickej biblie mienil použiť preklad biblie Vulgata. Ale aj od tohto textu ho priatelia odhovorili, aby malo dielo šancu na predvádzanie. Preto sa dielo nahralo len na vokály, pravda, v tejto podobe získalo vo Švajčiarsku jednu z najprestížnejších medzinárodných cien za kompozíciu. Inak Canticum 43 v pôvodnom znení sa dočkalo uvedenia až 15 rokov po novembrovej revolúcii.

Ako sme už napísali Seminár **Matematika a hudba** mal svoju predhistóriu v r. 1973 v múzeu. Samotný seminár začal pravidelne účinkovať od r. 1984. Zúčastňovali sa ho hudobníci, matematici a prírodovedci z celého bývalého Československa. O jeho práci sme referovali v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronómie [6]. Tieto semináre mali význam najmä tým, že umožňovali hudobným skladateľom a muzikológom stretať sa na pôde matematiky a na tejto nenápadnej pôde diskutovať. Pravdaže aj riešiť koncepcné otázky hudobnej tvorby. Napriek tomu, ale to sme v tom čase nevedeli, aj tam

sme boli sledovaní: protagonista počítačovej kompozície Rudolf Růžička bol na každom stretnutí sprevádzaný svojím tieňom, informátorom ŠTB.

Pozoruhodné je, že cestu k nám si našli aj výtvarníci. Pod rúškom počítačovej grafiky si na seminári usporiadali vernisáž svojich diel (Daniel Fischer, Jozef Jankovič, Rudolf Sikora), hoci mali oficiálne zakázané vystavovať.

17. novembra 1989 mal na seminári v Beethovenovskej Dolnej Krúpej prednášku slovenský fyzik Július Krempaský o teórii chaosu. Uviedol aj spoločenské súvislosti a predpovedal pád komunistického režimu. „Dúfam, že ma nezavrú“, prehodil. Na to mu vedúci semináru Roman Berger odvetil: „Teraz už nie, pán profesor.“

3 Budúcnosť

Je potešiteľné, že seminár Matematika a hudba žije nepretržite už 25 rokov. Prvou publikáciou bola kniha [2], preložená aj do angličtiny, resp. nemčiny [1]. Na seminár nadväzujú aj knihy Jána Halušku [3, 4]. Najnovší zborník pripravil Marek Žabka [8].

Literatura

- [1] Berger R., Kalmbach, G., Riečan B., Riečanová Z.: *Musik und Mathematik*. Aegis-Verlag, Ulm, 2005.
- [2] Berger R., Riečan B.: *Matematika a hudba*. VEDA, Bratislava, 1997.
- [3] Haluška J.: *The mathematical theory of tone systems*. Marcel Dekker, New York, Basel, 2004.
- [4] Haluška J.: *Hľadanie harmónie*. VEDA, Bratislava, 2006.
- [5] Krempaský J.: *Veda versus viera?* VEDA, Bratislava, 2006.
- [6] Riečan B.: *Matematika a hudba*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 32(1987), 302–304, 34(1989), 123–124, 39(1994), 124–126.
- [7] Riečan B., Znáň Š.: *Otec, matka, matematika a ja*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1982.
- [8] Žabka M.: *Matematika a hudba*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2007.

Adresa

Prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela
Tajovského 40
974 01 Banská Bystrica
Slovensko
e-mail: riecan@fpv.umb.sk

KONFERENČNÍ VYSTOUPENÍ

KROK ZA KROKEM K ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

L'UBOMÍRA BALKOVÁ

Abstract: Nowadays, university students are taught at the very beginning of their studies how to solve systems of linear algebraic equations (LAE). They learn about the elegant Gaussian elimination and get an impression that this algorithm is the most natural way for solving systems of LAE. However, this impression is illusory. In fact, the historical development of Linear Algebra goes in an opposite direction to the order students are taught the subject today. Determinants were born before matrices and the Frobenius theorem providing the complete solution of systems of LAE as well as an axiomatic definition of the vector space were not introduced but in the end of the 19th century.

1 Úvod

1.1 Lineární algebra na vysokých školách

V současné době je dovednost řešit soustavu m lineárních algebraických rovnic (LAR) o n neznámých, tedy najít všechny n -tice čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vyhovujících všem následujícím rovnicím

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}$$

vštepována studentům technických vysokých škol hned na prvních cvičeních lineární algebry, případně ještě před začátkem semestru v úvodních kurzech. Bez zbytečného otálení je jim naservírován maticový zápis soustavy a prozrazen algoritmus Gaussovy eliminační metody. Málokdo má čas zamyslet se nad tím, jaká je historie řešení soustav LAR, a uvědomit si, že ani Gaussova eliminace, ani pojem matice nejsou známy odjakživa. Pojdme tedy krok za krokem sledovat křivolakou cestu vývoje metod řešení soustav a částečně i lineární algebry obecně. Inspiraci k naší cestě čerpáme zejména z Dorierových prací [1], [2]. Jak uvidíme, sylabus lineární algebry (vektorový prostor, matice, determinant) představuje pojmy v opačném pořadí, než jak přicházely na svět.

2 Vývoj metod řešení soustav

2.1 Nesmělé počátky

Již před 4000 let věděli Babyloňané jak řešit soustavu 2 rovnic o 2 neznámých. Ovšem jako řešení připouštěli jen přirozená čísla, případně jednoduché zlomky. Asi 150 – 50 let před naším letopočtem dali čínští matematici ve slavných *Devíti traktátech o matematickém umění* návod k řešení soustavy 3 rovnic pro 3 neznámé, a to v oboru přirozených čísel a jednoduchých zlomků s nesmělým pokusem připustit i záporná čísla (kladná zapsána černou a záporná červenou barvou). V jejich postupu můžeme vystopovat podobnost s maticovými metodami (sestavují tabulky koeficientů), nepříliš odlišnými od dnešní Gaussovy eliminace. Řekové už pracovali s racionálními kladnými

číslky a indická nula, kterou objevil a počty s ní rozvinul Brahmagupta, umožnila vstup záporných celých čísel a operací s nimi na pole matematiky, a tedy i do oboru soustav LAR. Více informací o počátcích řešení soustav viz [3], [4].

2.2 Nové poznatky díky determinantům a maticím

Podrobné studium soustav LAR zahájil Leibniz. V roce 1693 zavádí pro tento účel determinant, který ale ještě tímto termínem neoznačuje. Jeho výsledky však nezaznamenaly ve své době žádný ohlas. V díle *Úvod do analýzy algebraických křivek* (*Introduction á l'analyse des courbes algébriques*) z roku 1750 Cramer publikuje (bez důkazu) pravidlo pro řešení n LAR pro n neznámých, které dnes nese jeho jméno. Ke studiu soustavy LAR jej přivedl v té době populární geometrický problém popisu algebraické křivky stupně n procházející $(1/2)n^2 + (3/2)n$ předepsanými body.

Cramerovo pravidlo spočívá ve výpočtu jistých determinantů, přesto ale Cramer pojem determinant nedefinuje. Teorie determinantů (bez přímé vazby na řešení soustav LAR) byla shrnuta Vandermondem v *Pojednání o eliminační teorii* (*Mémoire sur l'élimination*) roku 1772. Slovo determinant použil poprvé Gauss v roce 1801 k označení diskriminantu kvadratické formy. Systematickým studiem determinantů se jako první zabýval Cauchy. Dá se říci, že za teorii determinantů tak, jak se učí v prvním ročníku vysokých škol, vdčíme právě jemu.

Euler byl pravděpodobně první, kdo si uvědomil, že soustava n LAR pro n neznámých nemusí mít řešení, přičemž existenci řešení se v té době rozuměla existence jediného řešení. Uvědomuje si, že některé rovnice mohou být „závislé“ na jiných a že je tedy potřeba klást na rovnice jisté další podmínky, aby byla existence řešení soustavy zaručena. Pojem „závislosti“ Euler však formuluje jen vágně. Neschopnost a hlavně nezájem 18. století vypořádat se se soustavami obsahujícími jiný počet neznámých než rovnic pramení z obliby Cramerova pravidla a determinantů obecně.

Teprve v roce 1811 přichází zlom. Gauss publikuje práci zabývající se určováním orbit asteroidů, ve které v souvislosti se svým objevem metody nejmenších čtverců představuje systematický postup řešení soustav LAR (i těch, které obsahují různý počet rovnic a neznámých) – dnes nazývaný Gaussovou eliminací. Nepoužívá ještě maticový zápis, i když v jedné ze svých prací o kvadratických formách reprezentuje lineární operátory čtvercovými tabulkami čísel (dokonce definuje i jejich součin – skládání operátorů).

V analytické geometrii 17. a 18. století reprezentovaly čtvercové matice lineární transformace souřadnic. Matice (i obdélníkové) formálně definuje a teorii matic rozvíjí Cayley v člancích z let 1850 a 1858 (termín matice v roce 1850 zavádí Sylvester). Cayley si všímá zjednodušení, které přináší maticový zápis soustav, a aplikace Gaussovy eliminace přímo na matici místo na rovnice. Značí matici jediným písmenem, což je významným krokem k rozvoji maticové algebry.

2.3 Frobeniova věta

Teoretické vlastnosti soustav LAR (existence a počet řešení) jsou zkoumány ve druhé polovině 19. století v souvislosti s hledáním „jednoduchého“ (kanonického) tvaru bilineárních a kvadratických forem. Kompletní odpověď přináší Frobenius v roce 1905. V poslední ze svých prací věnovaných řešitelnosti soustav LAR formuluje elegantně – pomocí pojmu hodnota matice – větu, která dnes nese jeho jméno a která říká, že soustava je řešitelná tehdy a jen tehdy, mají-li matice soustavy a rozšířená matice soustavy stejnou hodnotu. Tím je završena dlouhá historie soustav LAR.

3 Moderní lineární algebra

3.1 Axiomatická definice vektorového prostoru

V 2. polovině 19. století je známo mnoho výsledků týkajících se lineární algebry. Samotná lineární algebra jako obecná teorie však ještě neexistuje. Především chybí stěžejní pojem: vektorový prostor. V rozsáhlém díle *Teorie extenzí, nové odvětví matematiky* (*Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*) z roku 1844 představuje Grassmann ideu vektorového prostoru abstraktních geometrických objektů. Zřejmě kvůli filozofickému úvodu a myšlenkám, které předběhly dobu o několik desítek let, se Grassmannova teorie extenzí nesetkala s ohlasem, a to ani v přepracované formě z roku 1862. Axiomatickou definici vektorového prostoru, zformulovanou téměř dnešním matematickým jazykem a ekvivalentní s dnešní definicí, vyslovuje Peano roku 1888 v poslední kapitole díla objasňujícího Grassmannovo učení *Geometrický počet* (*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*).

3.2 Ucelená teorie

Ani pro Peanovo dílo doba ještě není zralá, a tak musíme počkat až do 20. let 20. století, kdy mladý Banach ukáže ve své dizertační práci týkající se funkcionální analýzy užitečnost axiomatického pojetí lineární algebry. *Moderní algebra* od van der Waerdena z let 1930–31 představuje lineární algebru jako ucelenou teorii. Je první učebnicí lineární algebry dnešního typu, sklízí úspěch po celém světě a dočkává se mnoha dotisků (posledního v roce 1967).

Literatura

- [1] Dorier J.-L.: *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts de l'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*. Thèse, L'Institut Fourier, France, 1990.
- [2] Dorier J.-L.: *On the Teaching of Linear Algebra*. Thèse, Kluwer Academic Publishers, Laboratoire Leibniz, Grenoble, France, 2001.
- [3] Mareš M.: *Příběhy matematiky*. Pistorius & Olšanská, Vimperk, 2008.
- [4] Struik D. J.: *A Concise History of Mathematics*. Dover Publications, New York, 1987.

Adresa

Ing. Ľubomíra Balková, Ph.D.
Katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické
Trojanova 13
120 00 Praha 2
e-mail: l.balkova@centrum.cz

SKÚSENOSTI Z PÔSOBENIA NA VŠ V TUNISKU VO VÝUČBE MATEMATIKY

ANNA BÁLINTOVÁ, ROD. TROJÁČKOVÁ

Abstract: As I am the last Czecho-Slovak teacher of mathematics at the Tunisian Universities, I decided to share my long experiences with you before my definitive departure. To take such a decision is so hard for me because Tunisia becomes my second own country.

1 Úvod

1.1 Súčasný stav

Mojím terajším pracoviskom je Katedra matematiky FSM v Monastiri. Ako k tomu prišlo? Osud chcel, že som dňa 6. 10. 1993 pristala na letisku Cartage v Tunise s poverením nastúpiť na dva roky na uvedenú katedru. Na tomto pracovisku však pôsobím nepretržite až dodnes. Zabezpečujem prednášky z Kombinatorickej analýzy, Teórie grafov, Pravdepodobnosti a štatistiky, Laplaceovej a Fourierovej transformácie, ako aj niektoré cvičenia.

Od predchádzajúceho školského roku som členom výskumného kolektívu zameraného na parciálne diferenciálne rovnice. Kolektív je veľmi aktívny. V rámci pravidelných seminárov vystupuje množstvo zahraničných hostí, a naopak, jeho členovia sa v hojnom počte zúčastňujú domácich i zahraničných konferencií.

1.2 Východzie poznatky

Začiatky boli veľmi zložité. Pred príchodom do krajiny som nemala žiadne poznatky o stave vysokého školstva v Tunisku. Mala som za sebou len pohovor s tuniskou delegáciou MŠ, ktorý prebiehal v Prahe, v rámci výberového konania kandidátov. Celý proces zabezpečovala vtedajšia Polytechna – Podnik zahraničného obchodu – Agentúra pre zahraničnú technickú spoluprácu. (V Tunisku ukončila svoje pôsobenie v r. 1997 a krátko nato bola zrušená definitívne). Okrem odborných znalostí sa vyžadovala aj znalosť francúzskeho jazyka. Je to divné, ale neštudovala som ho ani na strednej ani na vysokej škole. Spočiatku som ho študovala ako samouk a neskôr na jazykovej škole. Musím však podotknúť, že situáciu mi do istej miery uľahčovalo moje predchádzajúce pôsobenie na katedre matematiky v Blide (Alžírsko) v rokoch 1989 až 1991.

Nemôžem zabudnúť na študentov, zapôsobili na mňa výbornou pamäťou. Sú vedení už od základnej školy k tomu, že písomný prejav je veľmi dôležitý. Na vysokej škole je jedinou formou skúšania, a preto vypracovaniu písomiek venujú študenti mimoriadnu pozornosť. Čo sa týka odbornosti, ich silnou stránkou je algebra a analýza, ale tzv. achilovou pätou je geometria – presnejšie povedané geometrická predstavivosť a geometrická interpretácia matematických úloh.

2 Nové výsledky

2.1 Prvá časť

V roku 2006 progresívne odštartovala v tuniskom vysokom školstve reforma LMD (Licence-Mastère-Doctorat). Podrobnejšie informácie možno nájsť na – Site web du LMD: <http://www.universites.tn/LMD>. Do študijných programov boli zavedené nové predmety, pre mňa konkrétne to znamenalo začiatok prednášania Teórie grafov.

V predchádzajúcom školskom roku bolo na FSM zahájené doktorandské štúdium: EDSTI – L'Ecole Doctorale des Sciences et Technologies de l'Information. Je určené pre najlepších tuniských a zahraničných študentov. K prednáškam sú pozvaní aj zahraniční experti a je potešujúce, že sú medzi nimi už aj prednášajúci z Českej republiky.

Výsledkom aktivity Katedry matematiky FSM bola aj realizácia projektu MEDA – 2003 MAOM – Mathématiques Assistée à l'Ordinateur et Modelisation. Projekt bol úspešne ukončený v roku 2006.

2.2 Druhá časť

Završením spoločného seminára niektorých matematikov a fyzikov v prvých rokoch môjho pôsobenia na FSM bola štúdia: Physical Laws and Mathematical Structures (viď literatúra [1]).

3 Záver

3.1 Zhrnutie výsledkov

Moje pôsobenie na FSM bolo realizované na základe podpísanej Dohody, a to z jednej strany MZV Tuniska a z druhej strany Polytechnou, zastupujúcou bývalé Československo. Bolo súčasťou pôsobenia československých expertov v zahraničí a malo svoje opodstatnenie aj v Tuniskom školstve (mimochodom zaslúžilo by si širšie štúdium v rámci histórie pôsobenia československých matematikov v Severnej Afrike). V súčasnosti sa táto forma už stáva minulosťou. Tunisko má dostatok kvalifikovaných pedagógov, ako aj výskumných pracovníkov.

3.2 Ďalšie perspektívy

Je zrejmé, že nadchádza obdobie novej formy spolupráce, a to formou krátkodobých prednáškových pobytov v rámci odborných seminárov a doktorandského štúdia, ako aj vzájomná účasť na odborných podujatiach: konferencie a pod. Veľmi zaujímavými by mohli byť aj spoločné MEDA projekty. Dúfam, že môj príspevok bude zároveň inšpiráciou pre niektorých záujemcov o spoluprácu v rámci vysokého školstva s touto, pre nás exotickou, krajinou.

Dôležitým bodom pre ďalší rozvoj spolupráce oboch krajín (v širšom zmysle) bolo stretnutie ich prezidentov v máji roku 2009. Dúfajme, že toto stretnutie bude impulzom pre začiatok novej etapy spolupráce oboch krajín aj v oblasti vysokého školstva.

Literatura

- [1] Bálintová A., Bouazra Y., Dimiev S., Lazov R.: *Physical Laws and Mathematical Structures*. Journal ou revue: Mind, Reality and Values. RACOURS, Sofija, 1997.
- [2] Site web du LMD: <http://www.universites.tn/LMD>
- [3] Site web du NTO Tunisie: <http://www.universites.tn/tempus/index.htm>

Adresa

RNDr. Anna Bálintová, CSc.
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Université de Monastir
Avenue de l' Environnement
5019 Monastir
Tunisie
e-mail: abalintova@seznam.cz

INTERPRETACE MATEMATICKÝCH VÝSLEDKŮ NAŠICH PŘEDKŮ

JINDŘICH BEČVÁŘ

Abstract: In the paper we shall describe some problems and difficulties connected with translations, commentaries and interpretations of ancient, classical as well as modern mathematical texts. We shall try to compare them with the relevant questions which have to be solved by translators and writers when they translate poetry from non-European languages (for example Japan or Chinese poetry).

1 Úvod

Tento článek volně navazuje na přednášku *Práce historika matematiky* [B1] proslovenou na loňské konferenci, dále na několik mých vystoupení na pražském historickém semináři pojednávajících o metodách práce při zpracovávání různých témat z dějin matematiky (ty byly určeny především doktorandům) a na přednášku *Opatrnost a odvaha historika matematiky* přednesenou na 8. letní škole Světonázorová výchova v matematice (Jevany, květen 1987).¹ I tento článek, stejně jako příspěvek [B1], je určen hlavně doktorandům.

Rád bych v něm upozornil na to, že při četbě popularizačních knih a různých textů o vývoji matematiky, při poslechu přednášek o matematických znalostech našich předků a při podobných příležitostech může být čtenář či posluchač snadno uveden v omyl a sveden k nesprávným představám, neboť není předem dostatečně poučen. Informace, které jsou mu předkládány, bere totiž velmi často „doslova“. Dále bych rád upozornil na to, že při sepisování textů o historii matematiky je třeba v maximální možné míře usilovat o správnost a výstižnost vyjadřování a dbát na přesné formulování myšlenek. Pisatelé disertačních prací, vědeckých a odborných článků by si měli být dobře vědomi problémů, které je při práci budou potkávat. Včasné rozpoznání nebezpečí a nástrah je nutnou podmínkou úspěšné a kvalitní práce.

V následujících odstavcích se budeme věnovat problémům překladů, modernizací a interpretací matematických textů pocházejících z různých dob, odlišných kultur či civilizací a otázkám jejich chápání a výkladu. V poslední, závěrečné části příspěvku pak pro srovnání naznačíme obdobné problémy, s nimiž se potýkají překladatelé poezie, zejména poezie orientální; zdá se, že se k problematice překladů a interpretací vyjadřují častěji než matematici.

1.1 Přiblížení problému

Problematicku porozumění psaným textům a jejich interpretacím navodíme několika velmi jednoduchými příklady, které se netýkají odborné práce v historii matematiky, ale oblasti vzdělávání či popularizace. Dirk Jan Struik (1894–2000), matematik, který věnoval velkou pozornost vývoji této vědy, napsal ve svých *Dějínách matematiky* [St] o znalostech počtářů starého Egypta, Mezopotámie a Číny tato slova:

¹ Byla tehdy inspirována článkem [Ba] z předchozího roku.

Nalezneme zde také několik formulí pro výpočet objemů, třeba krychle, rovnoběžnostěnu a kruhového válce, samozřejmě vesměs ve zcela konkrétním tvaru výpočtů nádob užívaných převážně k uchování obilí. ...

Zatímco Egypťané byli v tomto období schopni řešit pouze jednoduché lineární rovnice, ovládali Babylóňané v době Chamurapiho metody řešení kvadratických rovnic. Řešili lineární rovnice o dvou neznámých, a dokonce i problémy zahrnující kubické a bikvadratické rovnice. ...

... babylónská matematika semitského období již znala vzorce pro výpočet plochy jednoduchých pravoúhelníků a objemu jednoduchých těles ...

Tak v *Matematice* v devíti knihách nacházíme také třeba algoritmus řešení systému lineárních rovnic s libovolným počtem neznámých ... ([St], str. 22, 25, 25, 30)

Nepoučený čtenář vezme tyto věty většinou doslova, tj. představí si, že egypťští a mezopotámští počtáři při výpočtu objemů a obsahů dosazovali do vzorců, že sestavovali lineární, kvadratické a kubické rovnice, které pak algebraickými úpravami řešili, a že staří Číňané popsali algoritmus pro řešení soustav lineárních rovnic o n neznámých.

Skutečnost je trochu jiná. Přesněji řečeno, počtáři starého Egypta a Mezopotámie uměli vypočítat objemy uvedených těles podle naučených postupů, které byly dány vzorovými, konkrétně zadanými příklady. V materiálech, které se dochovaly, buď není vlastní výpočet vůbec popsán a je udán jen výsledek, nebo je postup velmi stručně a heslovitě podán slovy, případně je uveden pouze záznam výpočtu bez jakéhokoli bližšího vysvětlení. Početní postupy našich předků však odpovídají současným početním postupům, kterými jsou většinou dosazování do vzorců, řešení rovnic a jejich soustav. Žádné vzorce ani rovnice však tito staří počtáři neměli. Řešili slovní úlohy, které jsme my zvyklí řešit dosazením do vzorců, resp. rovnicemi a jejich soustavami. Jejich představy, přístup k problémům a celkový vzhled do řešení problematiky mohly vypadat zcela jinak než naše současné představy. Rovněž čínský algoritmus řešení soustavy lineárních rovnic o libovolném počtu neznámých nebyl v čínských textech vyložen obecně, ale předveden na konkrétních slovních úlohách, které je možno vyjádřit nejvýše pěti rovnicemi o pěti neznámých. D. J. Struik tedy matematické znalosti a postupy našich předků **popsal našimi současnými pojmy**, i když přesně nevystihují původní znalosti a postupy počtářů Egypta, Mezopotámie a Číny. **Přeložil** tedy nejprve původní pojmy, symboly a postupy **do moderní matematické řeči** a v ní je **hodnotil a komentoval**; čtenář si však tuto skutečnost málokdy plně uvědomí. V tomto smyslu často hovoříme o **modernizaci či interpretaci** výsledků našich předků.

Poznamenejme, že podrobné informace o matematických znalostech a postupech počtářů ve starém Egyptě, Mezopotámii a Číně lze nalézt v knihách [B6], [Vy] a [Hu], fakta o úlohách vedoucích na lineární rovnice a jejich soustavy v knize [B3]. Obšírný výklad a připojené ukázky originálních textů omezují nebezpečí špatného, resp. zjednodušeného pochopení výkladu na minimum. Ve všech těchto textech autoři usilovali o to, aby čtenář získal co nejpřesnější znalosti o myšlení našich předků a jejich matematických představách v duchu našich současných znalostí o starých civilizacích.

Výše uvedené příklady ze Struikovy knížky nám posloužily jen jako ukázka značně nepřesného, ale stručného a poměrně výstižného vyjádření, kterého se velmi často dopouštějí autoři populárně pojatých knížek o dějinách matematiky a různých publikací určených širokému okruhu čtenářů, jejichž cílem je probouzet zájem o matematiku.

V takovýchto textech lze uvedené nepřesnosti, resp. „zkratky“ velkoryse tolerovat, neměly by se však vyskytovat v odborných publikacích.²

Nezasvěcený čtenář si velmi často neuvedomí a ani nemůže uvědomit, že mu nejsou předkládány výsledky klasiků, ale jejich moderní matematická interpretace. Ten, kdo se však chce otázkami vývoje matematiky zabývat hlouběji, by měl vědět, že některé texty o matematice a jejím vývoji mohou být silně zkreslující a zavádějící. Při čtení knižní i časopisecké literatury by měl umět dobře odlišit moderní interpretace těch či oněch výsledků od jejich původní formulace. Měl by číst pozorně, studovat veškeré dostupné materiály, porovnávat je a o přečteném hluboce rozmýšlet. Při sepisování odborných statí o dějinách matematiky by měl být velmi opatrný, aby nepřisuzoval autorům doby minulé naše pojmy, naši terminologii a naši symboliku a nevnucoval jim naše představy a naše způsoby uvažování. A pokud tak činí, měl by na to důrazně upozornit a svůj přístup vysvětlit a obhájit. Měl by dbát na přesné a jasné vyjadřování a myslet na to, aby napsanému textu čtenář správně porozuměl.

2 Překlady, modernizace a interpretace starých textů

Nejprve se budeme věnovat úvahám o překladech, modernizacích a interpretacích matematických textů, o potřebnosti a významu těchto překladů, modernizací a interpretací, ale i problémech s nimi spjatých. Na konkrétních příkladech pak budeme některé zajímavé jevy demonstrovat.

Překladem se často rozumí nejen překlad z jednoho jazyka do druhého, např. z řečtiny do angličtiny, ale i překlad z jednoho matematického jazyka do jiného, např. z geometrické řeči do řeči algebraické. V této stati budeme slovo *překlad* chápat v klasickém, tj. jazykovém slova smyslu. Přeformulování starší matematické řeči do novější (včetně překladu pojmů a přepisu symbolů) budeme označovat jako *modernizaci* a odborný výklad matematického obsahu textu jako *interpretaci*.

Pokusíme se upozornit na některé závažné problémy, které jsou s překlady, modernizacemi a interpretacemi matematických textů spjaty. V přístupu k těmto otázkám se setkáváme se značně širokým spektrem názorů, které oscilují mezi dvěma krajními, značně vyhraněnými stanovisky.

Podle prvního je zcela nezbytné překládat, modernizovat a interpretovat texty doby dávné i nedávné, vyjadřovat je bez obav řečí moderní matematiky a využívat při tom pojmů a výsledků nejnovějších matematických disciplín, nejmodernějších teorií, včetně těch úzce speciálních.

Podle druhého krajního názoru mají veškeré matematické texty zůstat v původním stavu. Žádné překlady, modernizace a interpretace nejsou přípustné, neboť výrazně komolí text, vnášejí do něj cizorodé prvky – cizí pojmy, cizí metody a cizí postupy. Zcela extrémním postojem je dokonce odmítání překladů z jednoho jazyka do druhého (např. z řečtiny do angličtiny) a nahrazování staré symboliky (resp. slovních vyjádření) symbolikou moderní.

² Nebudeme zde řešit, zda snad uvedené nepřesnosti nevznikly překladem do češtiny. Struikova populární knížka [St] byla přeložena do řady jazyků. Autor tohoto příspěvku vlastní kromě české verze z roku 1963 i vydání anglické (1948), německé (1961), ruské (1978) a italské (1981). Jednotlivá vydání i překlady se místy liší, neodlišují se však podstatně ve „zkratkách“, které jsou v předchozích odstavcích kritizovány.

2.1 Překlad

Nejprve rozvažme problémy související s *překladem* z jednoho jazyka do druhého, například z řeckých, latinských či arabských originálů do nějakého moderního evropského jazyka, nebo z jednoho současného jazyka do druhého.

Takovéto překlady jsou nepostradatelné pro ty, kteří se chtějí podrobněji seznámit s matematickými výsledky doby minulé, ale jazyk originálního textu neznají (a mnohdy ani znát nemohou), neboť ten je nám vzdálen třeba stovky nebo tisíce let. Uvážíme-li, že je poměrně dost zájemců o egyptské papyry, mezopotámské tabulky, řecké, latinské a arabské texty, musíme překládání těchto klasických matematických spisů do moderních jazyků podpořit. Jejich překlady do světových jazyků jsou bezpodmínečně nutné pro předání informace širokému okruhu zájemců.

2.2 Modernizace

Předchozí problém *překladu* z jednoho jazyka do druhého spojitě přerůstá v problém *modernizace* matematického obsahu, tj. přenesení či přeformulování matematického obsahu práce z původního vyjádření do jazyka současné matematiky. Nelze přitom vymezit přesné hranice mezi překladem (jazyka) a matematickou interpretací, překladatel provádí překlad a modernizaci současně.

S překladem je totiž bezprostředně spjata nahrazování původních pojmů pojmy dnešními, které s nimi nejsou a nemohou být totožné, řešení terminologických otázek a nahrazování původní symboliky (pokud v původním textu vůbec nějaká byla) symbolikou moderní. To vše do značné míry posouvá obsah, formu i smysl staršího textu někam jinam. Při překladu a zejména při modernizaci jsou do původního textu vnášeny cizorodé prvky, metody a postupy, které v něm původně nebyly. Každý překladatel navíc zcela zákonitě prezentuje svoje chápání textu, svoji volbu pojmů a termínů, tj. svoji interpretaci pojmů, výsledků, obsahu a smyslu původní práce. Zajímavé je porovnat více různých překladů, modernizací a interpretací téhož textu (o překladech, modernizacích a interpretacích Eukleidových *Základů* viz [Be]).

Jako příklad uveďme termín *eutheia*, který je označením jednoho ze základních pojmů Eukleidových *Základů*. V Servítově české verzi *Základů* [Eu1] se většinou překládá (jak dále uvidíme) jako *přímka*. Pro nás je přímka jedním ze základních geometrických objektů – je nekonečná, tj. jde „z nekonečna do nekonečna“, obsahuje nekonečně mnoho bodů „spojitě uspořádaných“, které odpovídají reálným číslům, často je chápána jako číselná osa atd. Takový pohled však byl řeckým myslitelům zcela cizí, neboť jejich přístup k nekonečnu byl *potenciální*. Přímka pro ně byl konečný, omezený objekt s *potenciální možností* postupného prodlužování³, objekt, který neobsahuje žádné body – ty se na ní „objeví“ např. jako průsečíky s jiným objektem. *Eutheia* není nekonečná, nemá však krajní body, není tedy ani naší přímkou, ani naší úsečkou. Překlad slova *eutheia* jako přímka i jako úsečka proto výrazně posunuje smysl původního textu.⁴ Dnešní čtenář se totiž nemůže zbavit svého chápání pojmů přímka a úsečka.⁵ Rozumným řešením takovéto situace je připojení výstižných komentářů, v nichž je původní význam podrobně objasněn a rozdíly mezi původním a současným pojmem co nejpresněji vymezeny.

³ Již ve druhém a pátém postulátu *Základů* se hovoří o prodlužování přímek.

⁴ V dalším textu uvidíme výměnu názorů mezi R. Dedekindem a R. Lipschitzem, která se týká právě spojitosti jako základní vlastnosti čáry.

⁵ O chápání Eukleidova pojmu *eutheia* viz např. M. Hejný: *Objevování neeukleidovské geometrie*, in *Člověk – umění – matematika, Dějiny matematiky*, sv. 4, Prometheus, Praha, 1996, str. 107–126.

Příkladů pojmů, které není jednoduché přeložit do moderní matematické řeči, bychom našli více. Připomeňme např. *ideální čísla* Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893), předobrazy pojmů *množina* a *reálné číslo* u Bernarda Bolzana (1781–1848), nepříliš jasný pojem *grupa*, s nímž přišel Evariste Galois (1811–1832) atd. A uvědomme si ještě, jak se vyvíjel pojem *funkce* – ve dvacátém století znamenal něco úplně jiného než ve století osmnáctém. Objekty, které nyní mezi funkce řadíme, do matematiky osmnáctého století vůbec nepatřily. Pojem funkce dnes zahrnuje podstatně více objektů než dříve.

Z výše uvedených důvodů je důležité, aby překlad spolu s modernizací dělal odborník, tj. skutečný znalec tématu, které je překládáno. V našem případě by to měl být dobře jazykově vybavený matematik, nebo matematik spolu s výborným překladatelem, resp. kvalitně sestavený překladatelský tým obsahující matematiky i filology.⁶ Ideální je, když je vedle moderního překladu otištěn ještě originál a čtenář může porovnávat – alespoň opticky – symboliku, termíny, obrázky, případně i celé formulace. Mnohdy však bohatě postačí přetisknout vhodně vybrané ukázky původního textu a podrobně je komentovat.

Modernizace klasického textu doby více či méně vzdálené je pro současného čtenáře většinou nezbytná, neboť bez ní lze jen těžko původnímu textu porozumět. Při překladu a modernizaci se musíme snažit o maximální přesnost a výstižnost, o co největší přiblížení k původnímu textu. Teprve při následné interpretaci je možno popustit uzdu fantazii.

2.3 Interpretace

Na modernizaci matematického textu bezprostředně navazuje jeho *interpretace*, tj. výklad pojmů, výsledků (případně i důkazů) a jejich smyslu, metod; není však možná bez předchozí modernizace.

Každá interpretace je jen jistou konstrukcí, která se více či méně liší od originálu (mnohdy ani netušíme nakolik). Umožňuje studovat jen některé aspekty originálu při současném abstrahování aspektů jiných. V určitém smyslu je chudší než originál, a proto neodráží všechny jeho stránky. Na druhé straně je však bohatší než originál, neboť využívá moderních pojmů, s nimiž pracují rozsáhlé teorie obsahující hluboké výsledky. Interpretace tak podkládá původnímu dílu obsah, který v něm nebyl.

Poznamenejme, že s vývojem matematiky, s nárůstem jejích výsledků, vznikem nových teorií, s rozvojem symboliky a terminologie možnosti interpretací starších výsledků postupně narůstají. Proto je velmi podnětné se znovu vracet ke klasikům, studovat je novými očima, nacházet, co bylo přehlédnuto, co zůstalo nepochopeno, co lze nyní jiným způsobem chápat a vyložit na základě nedávného vývoje vědy. Současná matematika přináší četné inspirace a poskytuje nepřeborné možnosti, které lze plodně využívat při studiu klasiků, a objevovat tak nové pohledy na jejich díla.

Roku 1986 publikovala Izabella Grigor'jevna Bašmakova (1921–2005) podnětný článek nazvaný *O roli interpretací v historii matematiki* [Ba]. Mimo jiné ukázala, k jak zajímavým výsledkům vedl nový přístup k Diofantově *Aritmetice* (3. stol.) a Abú Kámilově *Knize o algebře a almukabale* (9. až 10. stol.). Moderní interpretace využívající algebraickou geometrii totiž přinesla překvapivá zjištění o výběru a řazení úloh v těchto dvou klasických dílech.

⁶ Poznamenejme na okraj, že velmi obtížné problémy řeší překladatelé filozofických děl. Nesprávnou volbou pojmových „ekvivalentů“ může totiž dojít ke zcela zásadním významovým posunům a deformacím celého textu. Uvažme, že filozofie nemá pojmový aparát vybudovaný tak exaktně jako matematika.

2.4 Modernizace a interpretace v samotné matematice

Je třeba si dobře uvědomit, že i matematici v samotné matematice neustále provádějí modernizace a interpretace výsledků a metod svých předchůdců. Bez nich by totiž starší výsledky nebyly součástí matematiky současné. Matematika by byla podivným konglomerátem prací, výsledků a metod, které by byly napsány různými matematickými jazyky, užívaly by odlišné pojmy, termíny a nejrůznější symboliku. K takové situaci až na malé výjimky nedochází.⁷ Výsledky původních prací jsou postupně přepracovávány, zjednodušovány a zobecňovány, v učebnicích a monografiích jsou posléze souhrnně zpracovány více či méně rozsáhlé ucelené teorie, které shrnují větší množství jednotlivých poznatků a výsledků v jeden konzistentní celek, v přehledových článcích jsou potom rekapitulovány dosažené výsledky a naznačeny směry dalšího bádání. Postupný vývoj nějaké teorie lze velmi dobře nahlédnout studiím zahrnujícím dlouhé časové období od prvních, třeba jednoduchých výsledků přes fundamentální práce až k prvním, elementárním textům se základy teorie, rozsáhlým učebnicím a monografiím, přehledovým článkům, odezvám v referativních časopisech a bibliografickým přehledům. Matematici stále přepracovávají jednotlivé partie své vědy, sjednocují je a vytvářejí z nich jeden celek. Připomeňme na tomto místě např. významnou modernizaci eukleidovské geometrie podanou v knize *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta (1862–1943) ze samého konce 19. století a významný pokus o jednotný a konzistentní výklad celé matematiky, s nímž přišli ve 20. století bourbakisté.

Kromě takovýchto postupných modernizací je účelné připomenout *reprezentace* všeho druhu, které lze chápat ve výše uvedeném smyslu jako modernizaci a interpretaci. Samotní matematici je provádějí poměrně často.

Jednoduchým příkladem je *Cayleyova věta*, podle níž je každá konečná grupa izomorfní s nějakou permutační grupou, tj. s podgrupou symetrické grupy S_n stupně n pro vhodné přirozené číslo n . Podobným příkladem je Cayleyovo vyjádření (interpretování) Hamiltonových kvaternionů jistými komplexními maticemi druhého řádu; jedná se o izomorfismus algebry kvaternionů a podalgebry komplexních matic druhého řádu (viz např. [B3], str. 267). Můžeme též připomenout lineární či maticové reprezentace, které lze chápat jako interpretace abstraktních grup lineárními transformacemi nebo maticemi. První úvahy tohoto druhu prováděl již E. Galois. Připomeňme ještě např. teorii bilineárních a kvadratických forem, která byla na přelomu 19. a 20. století přeložena (interpretována) do maticové řeči (viz např. [B3], str. 191–244).

Z geometrie lze uvést např. modely (Beltrami-Kleinův, Poincaréův), které interpretují neeukleidovskou geometrii pomocí geometrie eukleidovské.⁸ Připomenout je rovněž možno interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny na přelomu 18. a 19. století (C. Wessel, J. R. Argand, C. F. Gauss).

⁷ Výjimkami jsou někteří matematici, kteří pracovali izolovaně bez větších kontaktů s ostatním matematickým světem (např. B. Bolzano). Rovněž lze připomenout některé výsledky, které zůstaly z těch či oněch důvodů stranou hlavních vývojových proudů a byly teprve dodatečně, s velkým zpožděním rozpoznány a oceněny (G. Desargues, C. Wessel apod.).

⁸ Viz např. B. V. Kutuzov: *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie* (Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953), zejména sedmá kapitola *Idea interpretace geometrické soustavy*, str. 119–153, jejíž první, úvodní odstavec zní takto: *Souhlasně s Hilbertovým pojetím mohou být kategorie základních objektů (body, přímky, roviny) a také základní vztahy mezi nimi zcela rozličné povahy, jen když vyhovují axiomům. Odtud vyplývá možnost interpretace jedné a téže geometrické soustavy axiomů, při čemž lze vyjít od různých konkrétních významů kategorií základních objektů.*

Matematika se vyvíjí, některé disciplíny odumírají, jiné vznikají, další přímo bují. Během let se výrazně mění hlediska jejich důležitosti, objevují se pozoruhodné souvislosti, které někdy vedou i k vyřešení slavných problémů (např. tzv. Velká Fermatova věta). S těmito proměnami matematiky jde ruku v ruce vývoj názorů na výsledky práce našich předchůdců. Moderní interpretace prací klasiků se mohou stát novými podněty pro další práci v matematice (např. moderní pokračování Eudoxovy teorie proporcí – viz dále). Nové rozpracování starých myšlenek může přinést velmi zajímavé teorie (např. nestandardní analýza).

2.5 Historická interpretace

Kromě matematické interpretace je třeba připomenout i tzv. *historickou interpretaci*. Matematické výsledky je třeba ukázat v patřičném kontextu, zdůraznit jejich postavení a význam v disciplíně, do níž náležejí, zařadit je do vývojového proudu, navázat na výsledky předchůdců i následovníků. Je tedy třeba ukázat, co přinesly a jak ovlivnily další vývoj. Velmi užitečné je rovněž přihlídnout ke společenské, ekonomické a politické atmosféře doby, v níž studované výsledky vznikly. Jako příklad můžeme připomenout historický kontext vzniku deskriptivní geometrie Gasparda Mongea (1746–1818) a z doby nedávné např. vliv druhé světové války na rozvoj výpočetní techniky.

Poznamenejme ještě, jak problematické a ošidné bývá označit při historické interpretaci někoho za zakladatele nové teorie, tvůrce nové metody, objevitele nového pojmu, autora nového výsledku apod. Připomeňme v této souvislosti např. spory o zakladatele analytické geometrie (R. Descartes, P. de Fermat), tvůrce diferenciálního a integrálního počtu (I. Newton, G. W. Leibniz), neeukleidovské geometrie (G. Saccheri, N. I. Lobačevskij, J. Bolyai, C. F. Gauss), zakladatele teorie determinantů (A. T. Vandermonde, A. L. Cauchy), teorie matic (A. Cayley, A. L. Cauchy, K. T. Weierstrass, ...), objevitele Gaussova eliminačního algoritmu (C. F. Gauss, staří Číňané), autora Cramerova pravidla (G. Cramer, C. Maclaurin) apod.⁹ Určit okamžik zrodu nového pojmu, výsledku či teorie je často obtížné, problematické a mnohdy zcela nemožné. Matematika se většinou vyvíjí postupně, po krůčcích, proto je v řadě případů velmi těžké označit některý okamžik za vznik nového pojmu, výsledku či teorie. Jsou však i výjimky, např. objev kvaternionů (W. R. Hamilton, 16. říjen 1843), vznik teorie množin (G. Cantor, 7. prosinec 1873).

Stále je třeba si uvědomovat, že naši předchůdci báдали a tvořili v jiné době, psali jiným jazykem, užívali jiné vyjadřovací prostředky, jiné pojmy a termíny, jinou symboliku. Některé pojmy neměli přesně vymezeny, chápali je intuitivně, ve starších dobách popisovali vše jen slovy, neboť symbolika ještě neexistovala. Vycházeli z děl a výsledků svých předchůdců, o nichž se třeba ani nezmínili, i když je více méně přepracovávali, modifikovali nebo dokonce surově opisovali. Mnohdy o těchto záležitostech nic nevíme, neboť se práce předchůdců nedochovaly.

Zdůrazněme ještě, že se historická interpretace někdy výrazně změní v závislosti na společenských a politických zvratech. Je však novější pohled lepší, přesnější, nebo pouze jiný? Většinou je bohužel pouze poplatný nové situaci.

Problematické překlady, interpretace a modernizace se pokusíme v dalších odstavcích objasnit na několika příkladech. Přiblížíme ji též citovanými myšlenkami některých našich autorů, kteří v nedávné době několik klasických textů přeložili, modernizovali, komentovali a interpretovali.

⁹ O determinantech, maticích, soustavách lineárních rovnic viz [B3].

2.6 Řecká geometrická algebra

Řecká geometrická algebra se v řeckém světě zrodila a rozvinula v 5. a 4. století před Kristem. Ve druhé knize Eukleidových *Základů* jsou její výchozí tvrzení obsažena v prvních deseti větách. Uvedeme je nejprve v české verzi filologa Františka Servíta (1848–1923), která je poměrně věrným překladem tzv. Heibergovy kritické verze *Základů* z let 1883 až 1888:

II.1 Když jsou dvě přímky a jedna z nich se rozdělí na několik dílů, pravoúhelník sevřený těmi dvěma přímkami rovná se pravoúhelníkům sevřeným přímkou nerozdělenou a každou z úseček.

II.2 Když se přímka libovolně rozdělí, pravoúhelníky sevřené celou a oběma úsečkami rovnají se čtverci z celé.

II.3 Když se přímka libovolně rozdělí, pravoúhelník celou přímkou a jednou úsečkou sevřený rovná se pravoúhelníku úsečkami sevřenému a čtverci z řečené úsečky.

II.4 Když se přímka libovolně rozdělí, čtverec z celé rovná se čtvercům z úseček a dvojnásobnému pravoúhelníku úsečkami sevřenému.

II.5 Když se přímka rozdělí v úsečky stejné a nestejně, pravoúhelník nestejnými úsečkami celé sevřený se čtvercem úsečky mezi průsečíky rovná se čtverci půlky.

II.6 Když se rozpůlí přímka a připojí se k ní v přímém směru jiná, pravoúhelník z celé s připojenou a z připojené spolu se čtvercem z půlky rovná se čtverci z půlky a připojené.

II.7 Když se přímka libovolně rozdělí, čtverec celé a čtverec jedné úsečky součtem rovnají se dvojnásobnému pravoúhelníku z celé a řečené úsečky a čtverci úsečky zbývající.

II.8 Když se přímka libovolně rozdělí, čtyřnásobný pravoúhelník z celé a jedné úsečky spolu se čtvercem úsečky zbývající rovná se čtverci celé a řečené úsečky v jedno vzatých.

II.9 Když se rozdělí přímka na úsečky stejné a nestejně, čtverce nestejných úseček přímky celé jsou dvakrát větší nežli čtverce z půlky a z úsečky mezi průsečíky.

II.10 Když se přímka rozpůlí a připojí se k ní v přímém směru jiná, čtverce z celé s připojenou a z připojené jsou celkem dvakrát větší nežli čtverec z půlky se čtvercem z půlky a připojené v jedno vzatých. ([Eu1], str. 26–31)

Vyjádříme-li nyní těchto deset vět pomocí naší současné matematické symboliky, dostaneme takovéto formule:

$$\text{II.1}^* \quad b = c + d + \dots + k \Rightarrow ab = ac + ad + \dots + ak$$

$$\text{II.2}^* \quad a = b + c \Rightarrow ab + ac = a^2$$

$$\text{II.3}^* \quad a = b + c \Rightarrow ac = bc + c^2$$

$$\text{II.4}^* \quad a = b + c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\text{II.5}^* \quad a = 2b = c + d, \quad c > d \Rightarrow cd + (c - b)^2 = b^2$$

$$\text{II.6}^* \quad a = 2b \Rightarrow (a + c)c + b^2 = (b + c)^2$$

$$\text{II.7}^* \quad a = b + c \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\text{II.8}^* \quad a = b + c \Rightarrow 4ab + c^2 = (a + b)^2$$

$$\text{II.9}^* \quad a = 2b = c + d, \quad c > d \Rightarrow c^2 + d^2 = 2[b^2 + (c - b)^2]$$

$$\text{II.10}^* \quad a = 2b \Rightarrow (a + c)^2 + c^2 = 2[b^2 + (b + c)^2]$$

Přirozenou otázkou je, zda formule II.1* až II.10* jsou ekvivalentními vyjádřeními vět II.1 až II.10. Pokud bychom se chtěli při této interpretaci co nejvíce přidržet originálu, museli bychom alespoň připojit, že veličiny a , b , c , d jsou úsečky a ac , ad , a^2 atd. obdélníky, resp. čtverce; mohli bychom však ještě výstižněji hovořit o *délkách* úseček a *obsazích* obdélníků a čtverců. Pokud bychom formule II.1* až II.10* chápali jako

tvrzení o vlastnostech sčítání a násobení čísel, vzdalovali bychom se čím dál, tím více od původního pojetí vět II.1 až II.10.

Implikace II.1* až II.10* však lze vyjádřit ještě stručněji, a to přímo algebraickými identitami:

II.1°	$a(c + d + \dots + k) = ac + ad + \dots + ak$
II.2°	$(b + c)b + (b + c)c = (b + c)^2$
II.3°	$(b + c)c = bc + c^2$
II.4°	$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$
II.5°	$cd + [c - \frac{1}{2}(c + d)]^2 = [\frac{1}{2}(c + d)]^2$
II.6°	$(2b + c)c + b^2 = (b + c)^2$
II.7°	$(b + c)^2 + b^2 = 2(b + c)b + c^2$
II.8°	$4(b + c)b + c^2 = (2b + c)^2$
II.9°	$c^2 + d^2 = 2[(\frac{1}{2}(c + d))^2 + (\frac{1}{2}(c - d))^2]$
II.10°	$(2b + c)^2 + c^2 = 2[b^2 + (b + c)^2]$

Všechny tyto identity jsou však jednoduchými důsledky dvou základních rovností:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Lze tedy říci, že v první větě druhé knihy formuluje Eukleides distributivní zákon? Lze říci, že prvních deset vět druhé knihy Eukleidových *Základů* jsou pouhými triviálními důsledky distributivních zákonů? Pokud ano, pak se ovšem zcela vytratí původní význam a kontext vět II.1 až II.10. Překlad vět II.1 až II.10 z geometrické podoby do tvaru implikací II.1* až II.10*, resp. do podoby algebraických identit II.1° až II.10° je klasickým případem interpretace a modernizace. Původní výsledky, jejich smysl a kontext se však zcela vytratí.

V Eukleidových *Základech* jsou věty dvojího typu. Jednak jsou to tzv. *teorémy*, které se *dokazují*, a pak tzv. *úlohy* neboli *problémy*, které se *řeší konstrukcí*.¹⁰ V Heibergově kritické verzi jsou důkazy teorémů zakončovány slovy *quod erat demonstrandum*, zatímco konstrukční úlohy slovy *quod oportebat fieri*.

Prvních deset vět druhé knihy *Základů* jsou teorémy, jedenáctá a čtrnáctá věta jsou úlohy.¹¹

II.11 *Rozděl danou přímku tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající.*

II.14 *Sestroj čtverec rovný danému útvaru přímkovému.* ([Eu1], str. 32, 33)

Tyto úlohy můžeme v algebraické podobě vyjádřit takto:

II.11° Vyřešte soustavu rovnic $a = x + y$, $ax = y^2$.

II.14° Vyřešte rovnici $x^2 = ab$.

¹⁰ Thaerův německý překlad *Základů* ze třicátých let 20. století rozlišuje *Lehrsätze* a *Aufgaben*.

¹¹ Pro úplnost uvedme i dvanáctou a třináctou větu, v nichž snadno rozpoznáme tvrzení kosinové věty.

II.12 *V trojúhelnících tupouhlých čtverec strany proti úhlu tupému větší jest nežli čtverce stran tupý úhel svírajících o dvojnásobný pravoúhelník sevřený jedním ramenem úhlu tupého, na něž dopadá kolmice, a vnější úsečkou při úhlu tupém, již kolmice omezuje.*

II.13 *V trojúhelnících ostrouhlých čtverec strany proti úhlu ostrému jest menší nežli čtverec stran úhel ostrý svírajících o dvojnásobný pravoúhelník sevřený jedním ramenem úhlu ostrého, na něž dopadá kolmice, a vnitřní úsečkou jeho při úhlu ostrém, již kolmice omezuje.* ([Eu1], str. 33)

Druhá rovnice úlohy II.11^o se dá vyjádřit poměrem $a : y = y : x$. V původním, řeckém smyslu se jedná o rozdělení úsečky a zlatým řezem: poměr délek celé úsečky a a její větší části y je roven poměru délek větší části y a menší části x . Soustava II.11^o vede na kvadratickou rovnici $y^2 + ay - a^2 = 0$, jejím řešením je $y = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot a = 0,618... \cdot a$ (druhé je záporné, a proto zadání úlohy nevyhovuje).

Úlohu II.14^o dnes chápeme jako rovnici, tj. jako početní úkol, ačkoli její původní smysl byl konstruktivní – k danému obdélníku sestrojít čtverec stejného obsahu.

Porovnáme-li výše uvedená slovní vyjádření několika vět druhé knihy Eukleidových *Základů* s jejich vyjádřením naší současnou symbolikou, měli bychom pociťovat silné pochybnosti, zda je takový překlad do moderní matematické řeči a symboliky oprávněný.¹² Posouvá totiž charakter, smysl i význam původního textu zcela jinam. Je správné provádět takovéto překlady a interpretace? Je nepochybné, že „překladem“ geometrické řeči Eukleidovy do našich algebraických formulí se zcela vytratí způsob myšlení řecké matematiky 5. a 4. století př. Kr., který byl zachycen v Eukleidových *Základech*. Pro naše „pochopení situace“ je takový překlad patrně nezbytný; po něm by však mělo následovat podrobnější vysvětlení, které by původní chápání starých Řeků vysvětlilo a přiblížilo.

2.7 Eudoxova teorie proporcí

Pátá kniha Eukleidových *Základů* je věnována tzv. Eudoxově teorii proporcí, tj. teorii poměrů a úměr geometrických veličin (délky, obsahů a objemů). Nejdůležitějších je prvních sedm definic, v nichž je definován *násobek* a *díl* veličiny, *poměr* dvou veličin, *rovnost* dvou poměrů (tzv. *úměra*) a *nerovnost* mezi poměry. V těchto definicích je obsažena základní myšlenka moderní teorie reálných čísel, tzv. *Dedekindovy teorie řezů*. Je fascinující, jak myšlenka pocházející ze 4. století př. Kr. našla své plodné pokračování ve druhé polovině 19. století. O interpretaci Eudoxovy teorie podané Eukleidem v páté knize *Základů* diskutovali roku 1876 dva vynikající němečtí matematici, Richard Dedekind (1831–1916) a Rudolf Lipschitz (1832–1903). Nemohli se shodnout, zda je nebo není ve staré řecké teorii proporcí obsažena (v moderním pojetí) tzv. *úplnost*, resp. *spojitost* oboru reálných čísel. Jejich spor se týkal právě toho, co jsme v předchozím textu nazývali interpretací; uvědomme si, že se v pohledu na tento problém nemohli shodnout současníci se zhruba stejným vzděláním, kteří patřili ke stejné komunitě.

R. Lipschitz dne 8. června 1876 R. Dedekindovi mimo jiné napsal:

... musím nyní připustit, že oprávněnost Vaší definice nepopírám, že si však myslím, že se liší jen formou výrazu, ale nikoli věcně od toho, k čemu došli starší.

R. Dedekind odpověděl již 10. června. O své teorii napsal:

... systém všech řezů v nespojitém oboru racionálních čísel tvoří spojitou strukturu.

... samotné Eukleidovy principy, bez připojení principu spojitosti, který v nich obsažen **není**, jsou **nezpůsobivé** stát se základem úplné nauky reálných čísel jako poměrů veličin ...

Naopak mou teorii iracionálních čísel bude vytvořen dokonalý vzor spojitého oboru, který je právě proto *způsobivý* charakterizovat každý poměr veličin určitým, v něm obsaženým individuálním číslem.

¹² Mohli bychom navíc diskutovat exaktnost a výstižnost překladu původního řeckého textu do češtiny. Viz [Be] a [Eu2].

R. Lipschitz však spokojen nebyl. Dne 6. července napsal:

Co jste zmínil o úplnosti oboru, která je z Vašich principů vyvozena, tak ta se shoduje ve skutečnosti se základní vlastností čáry, bez níž si nikdo čáru nemůže představit.

R. Dedekind 27. července odpověděl:

Eukleides však zcela mlčí o tom, pro aritmetiku nejdůležitějším bodě, a proto nemohu souhlasit s Vaším názorem, že u Eukleida lze nalézt úplné základy teorie iracionálních čísel. Viz [B2].

Další definice (osmá až osmnáctá) nejsou příliš důležité, zavádějí některé elementární pojmy a příslušné termíny. Následuje 25 poměrně jednoduchých vět, jejichž důkazy nečiní větší potíže. Moderní interpretace některých z nich je však velmi zajímavá, jak se budeme snažit ukázat v následujících odstavcích.

V moderní interpretaci lze chápat rovnost poměrů jako ekvivalenci ε na množině M všech poměrů geometrických veličin téže dimenze. Na množině M je tedy definován disjunktní rozklad, jeho prvkům, tj. třídám ekvivalence ε budeme říkat (v duchu Dedekinda) *řezy*. Na faktorové množině M/ε množiny M všech řezů podle ekvivalence ε zavedeme *součin* a *součet* těmito definicemi:

- Jestliže je jeden řez reprezentován poměrem $a : b$ a druhý řez poměrem $b : c$, je *součin* těchto dvou řezů reprezentován poměrem $a : c$.
- Jestliže je jeden řez reprezentován poměrem $a : b$ a druhý řez poměrem $e : b$, je *součet* těchto dvou řezů reprezentován poměrem $(a + e) : b$.

Musíme se však přesvědčit, že tyto definice nejsou závislé na volbě reprezentantů. V případě násobení řezů musíme řez reprezentovaný poměrem $a : b$ reprezentovat ještě poměrem $d : e$ a řez reprezentovaný poměrem $b : c$ ještě poměrem $e : f$ a prověřit, že poměry $a : c$ a $d : f$ reprezentují stejný řez. Přesně to však říká 22. věta:

V.22 *Když jest několik veličin a jiné jim počtem rovné po dvou brány jsou také v též poměru, též stejnořadně budou v též poměru.* ([Eu1], str. 81)

V naší symbolice lze tuto větu, která se týká dvou trojic veličin, a, b, c a d, e, f , vyjádřit stručněji takto:

V.22^o Jestliže $a : b = d : e$ a $b : c = e : f$, potom $a : c = d : f$.

Násobení řezů je tedy definováno korektně. Obdobným způsobem je korektnost definice sčítání řezů vyjádřena 24. větou:

V.24 *Když první veličina má ke druhé též poměr jako třetí ke čtvrté a též pátá ke druhé má též poměr jako šestá ke čtvrté, také součet první s pátou bude mít ke druhé též poměr jako součet třetí se šestou ke čtvrté.* ([Eu1], str. 82)

V naší symbolice lze tuto větu vyjádřit stručněji takto:

V.24^o Jestliže $a : b = c : d$ a $e : b = f : d$, potom $(a + e) : b = (c + f) : d$.

Navíc je v 23. větě obsažena komutativnost násobení řezů. Jestliže je první řez reprezentovaný poměrem $a : b$ a současně poměrem $e : f$ a druhý řez poměrem $b : c$ a současně poměrem $d : e$, potom poměry $a : c$ a $d : f$ reprezentují stejný řez. Přesně to však říká 23. věta:

V.23 Když jsou tři veličiny a jiné jim počtem rovné po dvou brány jsou v též poměru a mají úměru nestejnorožnou, také stejnořadně v též poměru budou.

([Eu1], str. 82)

V naší symbolice lze tuto větu vyjádřit stručněji takto:

V.23° Jestliže $a : b = e : f$ a $b : c = d : e$, potom $a : c = d : f$.

V Eukleidových *Základech* však žádné aritmetické operace s poměry (ani s úměrami) definovány nejsou. Moderní interpretace vět páté knihy *Základů* tedy přináší zajímavé pohledy, ukazuje podivuhodné aspekty Eudoxovy teorie podané Eukleidem, ale nelze ji v naší moderní podobě vykládat jako výsledek starých Řeků.

Podrobnější informace o Eudoxově teorii proporcí, o její moderní interpretaci včetně obsáhlé bibliografie k tomuto tématu najde čtenář v článku [B2].

2.8 Interpretace komplexních čísel

V tomto odstavci porovnáme dvě interpretace komplexních čísel, které od sebe dělí necelé čtyři desítky let. První je geometrická, druhá aritmetická. Podrobněji o chápání komplexních čísel a jejich interpretacích viz [B3].

Roku 1797 předložil *geometrickou* interpretaci komplexních čísel norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745–1818) v práci *Om Directionens analytiske Betegning* [O analytické reprezentaci směru]. Vektory roviny a operace s nimi popsal pomocí komplexních čísel, jejichž povaha nebyla jeho vrstevníkům jasná:

Let +1 designate the positive rectilinear unit and +ε a certain other unit perpendicular to the positive unit and having the same origin; then the direction angle of +1 will be equal to 0°, that of -1 to 180°, that of +ε to 90°, and that of -ε to -90° or 270°. By the rule that the direction angle of the product shall equal the sum of the angles of the factors, we have:

$$(+1)(+1) = +1 ; (+1)(-1) = -1 ; (-1)(-1) = +1 ; (+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon ; (+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon ;$$

$$(-1)(+\varepsilon) = -\varepsilon ; (-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon ; (+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1 ; (+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1 ; (-\varepsilon)(-\varepsilon) = -1.$$

From this it is seen that ε is equal to $\sqrt{-1}$; and the divergence of the product is determined such that not any of the common rules of operation are contravened.

The cosine of a circle arc beginning at the terminal point of the radius +1 is that part of the radius, or of its opposite, which begins at the centre and ends in the perpendicular dropped from the terminal point of the arc. The sine of the arc is drawn perpendicular to the cosine from its end point to the end point of the arc.

Thus ... the sine of a right angle is equal to $\sqrt{-1}$. Set $\sqrt{-1} = \varepsilon$. Let v be any angle, and let $\sin v$ represent a right line of the same length as the sine of the angle v , positive, if the measure of the angle terminates in the first semi-circumference, but negative, if in the second. ...

Ke geometrické interpretaci komplexních čísel dospěli později zejména Jean Robert Argand (1768–1822), Augustin Louis Cauchy (1789–1857) a Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Počátkem třicátých let 19. století vytvořil *aritmetickou* interpretaci komplexních čísel William Rowan Hamilton (1805–1865):

Proceeding to operations upon number-couples, considered in combination with each other, it is easy now to see the reasonableness of the following definitions, and even their necessity, if we would preserve in the simplest way, the analogy of the theory of couples to the theory of singles:

$$\begin{aligned}(b_1, b_2) + (a_1, a_2) &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2); \\(b_1, b_2) - (a_1, a_2) &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2); \\(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) &= (b_1, b_2) \times (a_1, a_2) = (b_1a_1 - b_2a_2, b_2a_1 + b_1a_2) \dots\end{aligned}$$

... When the pure primary couple (1,0) is thus considered as equivalent to the number 1, it may be called, for shortness, the primary unit; and the pure secondary couple (0,1) may be called in like manner the secondary unit. ...

In the THEORY OF SIMPLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely ... the principal square-root of the couple $(-1,0)$. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed; and we may write, if we choose, for any couple (a_1, a_2) whatever, $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$...

2.9 Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Velmi známým výsledkem, který je součástí základních vysokoškolských kurzů matematiky, je tzv. Frobeniova věta formulující nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic: *soustava je řešitelná právě tehdy, když je hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice rozšířené*. Tento výsledek bývá rovněž označován jako věta Kroneckerova, Capelliova či Kroneckerova-Capelliova.

Připomeňme, že pojem *hodnoty*, který je ve výše uvedeném tvrzení obsažen, zavedl až roku 1879 německý matematik Georg Frobenius (1849–1917), ale nikoli v maticové formulaci – maticovou řeč a symboliku začal totiž užívat až roku 1896:

Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten (m+1)ten Grades verschwinden, die mten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so nenne ich m den Rang der Determinante.

Stejný pojem se rodil i v pracích dalších autorů. Připomeňme knihu *Elementary treatise on determinants with their applications to simultaneous linear equations and algebraical geometry*, kterou roku 1867 vydal anglický matematik Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898), známý pod literárním pseudonymem Lewis Carroll.¹³ Velkou pozornost věnoval ve svém textu soustavám lineárních rovnic; zformuloval řadu tvrzení o řešitelnosti a tvaru množiny všech řešení jednotlivých typů takových soustav. Svůj rozbor nakonec shrnul do obecného tvrzení, kterému – i když nám není tak časově vzdálené – dnes jen těžko rozumíme:¹⁴

If there be given n Equations, not all homogeneous, containing Variables: a test for their being consistent is that either, first, there is one of them such that, when it is taken along with each of the remaining Equations successively, each pair of Equations, so formed, has its B-Block evanescent; or, secondly, there are m of them, where m is one of the number 2 n, which contain at least m Variables, and have their V-Block not evanescent, and are such that, when they are taken along with each of the remaining Equations successively, each set of Equations, so formed, has its B-Block evanescent.

¹³ Viz J. Bečvář: *Matematik Charles Lutwidge Dodgson, spisovatel a fotograf Lewis Carroll a císařova staronová Alenka*, Učitel matematiky 5(1996/97), č. 1(21), str. 58–64.

¹⁴ Matici soustavy (v našem slova smyslu) nazývá Ch. L. Dodgson *V-Block*, rozšířenou matici *B-Block*. Matici, v níž jsou všechny subdeterminanty maximálního možného řádu rovny nule, nazývá *evanescent*.

K velmi efektivnímu a modernímu vyjádření ekvivalentní podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic došel italský matematik Alfredo Capelli (1855–1910) roku 1892 ve svém učebním textu *Sopra la compatibilità e incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite* sepsaném na základě přednášek ze školního roku 1888/89:

Dato un sistema qualunque di m equazioni di 1° grado con n incognite ... affinché esso sia compatibile con valori finiti delle incognite è necessario e sufficiente che le due matrici ... abbiano la stessa caratteristica.

Německý matematik Leopold Kronecker (1823–1891) se zabýval problematikou soustav lineárních rovnic ve svých univerzitních přednáškách, které byly vydány až roku 1903. Obsahuje již zcela moderní formulaci:

Ein System von m linearen nicht homogenen Gleichungen ... besitzt dann und nur dann überhaupt eine Lösung, wenn $R(V_0; V_i) = R(V_i)$ ist.

Poznamenejme, že $R(V_i)$, resp. $R(V_0; V_i)$ jsou matice sestavené z koeficientů příslušné soustavy, symbolem V_i jsou označeny sloupce matice soustavy a symbolem V_0 sloupec pravých stran.

Podrobněji o těchto záležitostech viz [B3], str. 142–147, 299–322.

2.10 Překlady a interpretace v edici Dějiny matematiky

Devátým svazkem edice Dějiny matematiky je knížka *Počátky počtu pravděpodobnosti* [Ma1], kterou vydal roku 1997 Karel Mačák (1938). Její součástí je úplný latinský text spisu *De ratiociniis in ludo aleae* [O výpočtech v hazardní hře] Christiaana Huygense (1629–1695) s paralelním českým překladem, rozбором a řadou poznámek, dále komentovaný překlad některých partií známého pojednání *Traité du triangle arithmétique* [Pojednání o aritmetickém trojúhelníku] Blaise Pascala (1623–1662).

Jako 15. svazek edice Dějiny matematiky vyšel roku 2001 titul *Tři středověké sbírky matematických úloh* [Ma2]. Karel Mačák tehdy předložil čtenářům velmi známou Alkuinovu sbírku z 8. století našeho letopočtu nazvanou *Propositiones ad acuendos iuvenes* [Úlohy k bystření mladíků], a to v latinské verzi a v českém komentovaném překladu. Svoji knížku doplnil Métrodórovými úlohami z palatinské antologie (*Anthologia Palatina*) ze 4. století, *Knihou aritmetických kuriozit* od Abú Kámila (asi 850 až 930) a úlohami z jezuitské koleje v Kolíně nad Rýnem ze začátku 18. století, které však mají středověké kořeny. Alkuinovu sbírku překládal K. Mačák z latinského textu, vycházel z tzv. kritické verze vydané Menso Folkertsem (1943) roku 1978. O svém překladu napsal:

Pokud se charakteru překladu týče, snažili jsme se o překlad přesný, leč matematicky srozumitelný, což jsou požadavky v jistém smyslu protichůdné. Situace je navíc komplikována tím, že ani z latinského textu zadání není občas jasné, jak Alkuin úlohu vlastně myslel; v některých případech je možné teprve na základě Alkuinem připojeného řešení zpětně jednoznačně formulovat zadání, ne však vždy. Překlad je tedy výsledkem celé řady kompromisů ... ([Ma2], str. 10)

V 19. svazku edice Dějiny matematiky nazvaném *Matematika ve středověké Evropě* [B5] je otištěn zajímavý článek K. Mačáka *Komentář ke čtyřem obrázkům z Boéthiovy „Aritmetiky“*. Obsahuje překlad a interpretaci nevelké pasáže *Aritmetiky* posledního Římana a prvního scholastika A. M. S. T. Boéthia (asi 480 až 524/5), a zejména inter-

pretaci čtyř obrázků, které znázorňují nejdůležitější poměry mezi přirozenými čísly a základní hudební intervaly (viz [B5], str. 102–119). V tomto svazku edice Dějiny matematiky nalezneme čtenář rovněž poměrně rozsáhlé ukázky z děl Leonarda Pisánského, Gerberta-Silvestra II. a české překlady úryvků ze spisů Aurelia Augustina, Boëthia, Cassiodora, Řehoře Velikého, Einharda, Isidora Sevillského, Hrabana Maura, Křišťana z Prachatic a Jeronýma Pražského.

Hana Vymazalová (1978) publikovala roku 2006 své překlady matematických textů starého Egypta v 31. svazku edice Dějiny matematiky pod názvem *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty*. Jazyk těchto textů je velmi chudý, některým příkladům mnohdy téměř chybí slovní doprovod. H. Vymazalová v předmluvě uvedla:

V překladech byla záměrně ponechána pokud možno doslovná forma úloh, která může působit až krkolomně, avšak odráží drobné jazykové a formální rozdíly mezi jednotlivými texty a rovněž zachycuje způsoby vyjadřování staroegyptských písarů. ([Vy], str. 5)

Roku 2008 vyšel jako 37. svazek edice Dějiny matematiky bohatě komentovaný překlad klasického čínského matematického textu *Matematika v devíti kapitolách*. Autorem překladu, poměrně dlouhého úvodu, obsáhlých komentářů a vysvětlivek je Jiří Hudeček. Úplný název jeho knihy je *Matematika v devíti kapitolách. Sbírká početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfega a dalších z doby Tang. Liu Hui: Matematická klasika mořského ostrova*. Hudečkova knížka přináší teprve třetí úplný překlad *Matematiky v devíti kapitolách* a příslušných kanonických komentářů do evropského jazyka (angličtina, francouzština) a je vůbec prvním českým překladem starého čínského matematického díla. O charakteru svého překladu J. Hudeček napsal:

Porozumění těmto starým textům není vždy snadné. Snažil jsem se ukázat co možná jasně, jak je ve svém přirozeném jazyce asi mohli číst jejich starověcí čtenáři; nevodím však dnešního čtenáře za ruku a nechávám na něm, aby našel „ekvivalence“ mezi jejich řečí a svým oblíbeným vyjádřením, a sám si mohl zdůvodnit, kdy lze takové ekvivalence vidět a kdy jsou problematické. Věřím, že jedině tak si bude moci udělat o čínské matematice skutečně historicky věrný obrázek a naplnit tak účel této knihy. ...

K historickým matematickým dílům můžeme přistupovat dvojím způsobem: buď se snažíme zprostředkovat jejich obsah v co nejsnazší přístupné formě, aby byl jednoduše k dispozici každému, kdo chce rychle zjistit, které dnešní poznatky byly už – alespoň „v zárodku“ – známy jejich autorům; nebo jde o co nejvěrnější přenesení pojmového systému a vyjadřovacích konvencí díla, což samozřejmě prodlužuje a komplikuje cestu k porozumění jednotlivým technickým detailům. Tomu, kdo investuje čas a energii do studia nového „jazyka“, se však otevírá mnohem úplnější pohled na myšlenkové obzory autorů díla a může se tak vyhnout nedorozuměním a anachronickým chápáním textu.

Tento překlad se v zásadě vydává druhou cestou. ([Hu], str. 4, 24)

2.11 Závěr

V předchozích odstavcích jsme poznali příklady modernizací a interpretací matematických výsledků doby minulé. Řecká geometrická algebra nečiní větší problém matematický, náročná je však interpretace, neboť je obtížné proniknout do myšlení matematiků, kteří jsou nám časově velmi vzdáleni. Teorie proporcí byla významně modernizována a interpretována až v 19. století R. Dedekindem a sehrála důležitou roli při budování teorie reálných čísel. Je překvapující, jak je náročné pochopit představy a postupy našich nepříteli časově vzdálených předchůdců. Výše uvedená Dodgsonova věta je toho příkladem. A to se přitom jedná (z hlediska dnešní matematiky) o jednoduchou záležitost.

3 Překlady a interpretace v poezii

S problémy překladu a interpretace se nepotýká jen matematika, resp. jakákoli vědecká disciplína, ale i krásná literatura. Snad nejobtížněji se překládá poezie, která je nám vzdálená jak místně, tak časově. Velké problémy jsou s překladem básní z jednoho jazyka do druhého v případě, kdy mají tyto jazyky naprosto odlišnou stavbu a strukturu a poezie obou civilizací se navíc svým charakterem výrazně odlišují. Pro češtinu jsou takovými „vzdálenými“ jazyky např. japonština a čínština; poezie vyjádřená v těchto jazycích má úplně jinou stavbu než poezie česká.

V následujících odstavcích se pokusíme – mimo jiné na základě originálních poznámek překladatelů – podrobněji nastínit problémy s překlady a interpretacemi japonské a čínské poezie. Uvidíme, že tyto problémy nejsou příliš odlišné od problémů s překladem a interpretací matematického textu. Jistá odlišnost spočívá v tom, že při překladu poezie není třeba tolik dbát na „exaktnost“, tj. na přesný převod myšlenky, ale je možno tolerovat jistou míru volnosti. Na druhé straně je však nutno postihnout atmosféru díla.

V závěrečných paragrafech uvedeme některé zajímavé informace o různých překladech slavných čtyřverší perského vědce a básníka Omara Chajjáma a o českých verzích proslulé básně *Havran* Edgara Allana Poea.

3.1 Japonská poezie

Velmi známou sbírkou starojaponských pěťverší pocházejících ze 7. až 10. století je půvabná knížka *Verše psané na vodu* [MH]. Většina básní pochází ze sbírky *Kokinšú* (Sbírka starých a nových básní), několik je ze sbírky *Manjóšú* (Deset tisíc listů), psány jsou v nejoblíbenější formě starojaponské poezie, v tzv. formě *tanka*.¹⁵ Do češtiny je přebásnil Bohumil Mathesius (1888–1953), básník, překladatel a literární vědec, na základě překladů Vlasty Hilské (1909–1968), profesorky japonské filologie a historie.

V doslovu (str. 69–72) k prvnímu vydání této knížky z roku 1943 píše V. Hilská o problémech, které řešili s B. Mathesiem při převodu básní do češtiny. Překlady poezie *tanka* do světových jazyků bývaly často postaveny na zachování původního počtu slabik, tento přístup však často potlačil hlavní myšlenku básně. B. Mathesius se proto vzdal snahy na udržení počtu slabik, tj. rezignoval na udržení formálního schématu poezie *tanka*. Dospěl k názoru, že podstatou formy *tanka* je jistý protiklad mezi *tezí* a *antitezí*, že první část básně *tanka* nastiňuje určitý básnický obraz, který druhá část básně buď rozvíjí, zdůrazňuje, nebo naopak vyvrací. Vlasta Hilská roku 1943 napsala:

Autor se tu přiblížil originálu tím, že zachovává rozdělení pěťverší na dvě poloviny, dále udržuje počet řádek, nikoli však slabik, a užívá rýmu, který je typický pro ducha našeho verše. Tím se mu podařilo, aby tanka, která je v originále skutečnou básní, jí zůstala i v převodu do našeho jazyka. ([MH, 1943], str. 71)

Jako příklad úspěšné spolupráce V. Hilské a B. Mathesia uvedme dvě velmi známá japonská pěťverší:

¹⁵ *Tanka je jedenatřicetislabičná báseň, která se skládá z pěti veršů, první a třetí je o pěti slabikách, druhý, čtvrtý a pátý o sedmi slabikách. Tanka podobně jako ostatní japonské básně nemá rýmů, neboť v slabičné japonštině není rým možný.*

Charakteristické pro tanku je, že se dělí ve dvě poloviny, trojverší a dvojverší nebo obráceně; rozdělení ani počet veršů není nijak přesný. ([MH, 1943], str. 69)

Viz též *Nový Orient* 25(1970), str. 210, kde je mimo jiné šest pěťverší V. Hilské a B. Mathesia.

Psát na vodu

Sní

h

Marno je na vodu plynoucí psát,
písmena začnou tancovat:
Marnější ještě na duši psát
muže, jenž nechce tě
milovat.

Na pustou cestu
napadal sníh,
zavál už stopy po kročejích:
Já jsem ta cesta, smutek je sníh,
kdo půjde kdy v mých šlépějích?

3.2 Čínská poezie

B. Mathesius je známý zejména jako překladatel staré čínské poezie (10. stol. př. Kr. až 10. stol. po Kr.). Jeho překlady u nás vycházely již ve dvacátých letech 20. století. Jako první vyšla sbírka *Černá věž a zelený džbán* (1925), později *Zpěvy staré Číny* (1939) a *Nové zpěvy staré Číny* (1940). Další sbírku, *Třetí zpěvy staré Číny* (1949), přebásnil B. Mathesius ve spolupráci s Jaroslavem Průškem (1906–1980), orientalistou a sinologem. Mathesiovy překlady či parafráze čínské poezie měly u nás díky jeho básnické erudici obrovský úspěch. V západoevropských zemích byla přitom v té době čínská poezie téměř neznámá. Francouzský básník a spisovatel Claude Roy (1915–1997), významný znalec čínské poezie, tuto skutečnost poměrně výstižně objasnil, když o publikovaných překladech čínské poezie napsal, že sice vynikají přesností překladu, ale nedaří se jim vyvolat skutečnou poetickou náladu.

B. Mathesius se o charakteru své práce vyjádřil roku 1950 v úvodu souhrnného vydání *Zpěvů staré Číny* [M1]:

Všechny verše jsou rytmicky, rýmově, mnohdy i obrazově parafrázemi – i verše třetí knihy, které jediné jsou založeny na prozaických převodech Jaroslava Průška z čínských originálů. Některé z těchto parafrází by mohly být nazvány variacemi na čínské motivy. Forma parafráze není u nás nová, má slavnou minulost v parafrázích [ohlasech] písní ruských a písní českých od Františka Ladislava Čelakovského.

V našem případě nelze, po mém soudu, jinak než parafrází být práv jazykovým a časovým odlišností mezi starou čínskou kulturou a českou poetikou z druhé čtvrti dvacátého století, odlišností v stavbě jazyka i v stavbě veršů. V našem případě bylo nutno překládat věci nejprve do jejich praformy, lyrického prajazyka, a odtud a na této základně budovat. Je to dlouhá a obtížná, ale jediná cesta k poznání a vyrovnání s poezií tak těžké specifické váhy, jakou je poezie staré Číny. ([M1], str. 7–8, resp. [M2], str. 14)

Na jiném místě B. Mathesius o překladech, parafrázích a básnickém umění napsal:

Básnická parafráze, třebaže může počítat mezi své předky už stoleté a více než stoleté Čelakovského Ohlasy písní ruských a českých, netěšila se v předešlém ani tomto století velké oblibě českých básníků. Tato půvabná forma jako by ležela vedle cest moderní české poezie ... ([M2], str. 87)

Je na tom mého kumštu víc než jejich, a jestli jsem pod tituly poznamenal autory předloh, je to spíš má kurtoazie k těm starým pánům. ([M2], str. 188)

O životě a díle B. Mathesia a o vlivu jeho knih na další generace českých básníků pojednává obširná, zasvěcená stať od slavisty a bohemisty Jiřího Fraňka (1922–2007) nazvaná *Je cosi ...* ([M2], str. 273–306). Mimo jiné je v ní uvedeno:

Mathesius své čínské verše nazýval parafrázemi. Vznikaly jako parafráze, volné překlady a dokonce nemalá část jako zcela věrné překlady německých, francouzských,

ruských, anglických a latinských parafrází a překladů volných či věrných. A zároveň je velmi úzký vztah i mezi nimi a Mathesiovou básnickou tvorbou původní ... ([M2], str. 274)

Mathesiova překladatelská činnost byla často v mnoha směrech komentována. Otázky vyvolávala zejména přesnost jeho překladů, diskutovalo se o tom, zda se jedná o překlady, parafráze či ohlasy. Názor Jaroslava Průška je stručný:

Jeho dílo důstojně navazuje na všechny ty slavné ohlasy v naší literatuře.

([M2], str. 55)

Básník a překladatel Kamil Bednář (1912–1972) se o čínské poezii, jejím vztahu k poezii české a o Mathesiově básnickém umění vyjádřil takto:

Čínská poezie ... přichází ... k české poezii ve chvíli, kdy hledá prostší a lidštější cesty dalšího vývoje. Nebude jistě vbrzku chybět stop jejích ... vlivů na soudobé, hlavně mladé české básnictví. Stalo by se však nebezpečím její přespříliš rychlé snadné napodobení. Bohumila Mathesia sluší posuzovat více jako básníka, než jako překladatele, neboť při odlišnosti čínského jazyka od jazyků evropských je vlastně každý překlad jen novou původní básní na čínský motiv. Mathesius stvořil poezii méně lyrickou, jako spíše mužnou, širokého dechu a zralou poezii kořenné síly, napojené jakoby z pramenů lidového zpěvu. ([M2], str. 97)

Mathesiovo básnické umění ocenil i slavista a literární vědec Vladimír Forst (1921):

Mathesius byl příliš velkým básníkem, než aby mohl nějak skutečně navázat na tehdejší všestranně nízkou úroveň překladů z velmi vzdáleného cizího jazyka. Udělal tedy to, co sto let před ním velký básník Fr. L. Čelakovský na začátku vznikající tradice překladů ruské poezie, postavil se stranou dosavadního vývoje překládání a vytvořil samostatné velké básnické dílo, ne přeložené, ale v duchu oné poezie, kterou chtěl uchvátit, vytvořil parafráze, ohlasy čínské poezie. Úzce chápající duše mohou říci, že byl v tomto případě špatným překladatelem. Ale co na tom, když je nesporné, že právě tady byl velkým, výtečným českým básníkem. ([M2], str. 239)

Oldřich Král (1930), sinolog, překladatel a teoretik překladu, se o problematice překládání čínské poezie a o Mathesiově díle vyjádřil velmi výstižně:

Není nic snadnějšího pro kteréhokoli sinologického začátečníka než podrobit Mathesia zdrcující kritice. Není nic hloupějšího než to skutečně udělat. Neboť kde bychom byli s celou svou odborností, kdyby Mathesius svého času neučinil z čínské poezie výsostný a dodnes výlučný lyrický fakt moderní české kultury, jednu z klíčových vět českého lyrického textu. A jestli je přicházejícím překladatelům balvanem na cestě k prosazování nového českého překladu, tu pak není nic snadnějšího než jej překročit. Stačí být větší než on. ([M2], str. 321–322)

Vynikajícím současným znalcem a překladatelem čínské poezie je Ferdinand Stočes (1929), který nedávno získal cenu *Magnesia Litera*. Čínskou poezii publikoval nejprve francouzsky ve sbírce *Signes immortels* (Nesmrtelné znaky); roku 1988 pak vydal českou verzi pod názvem *Perlový závěs* [S1]. Dalšími jeho knihami jsou *Písňe a verše staré Číny* [S2] z roku 2004 a *Nebešťan na zemi vyhnáný. Život a dílo Li Poa (701–762)* [S3] z roku 2007.¹⁶ O společném díle B. Mathesia a J. Průška napsal:

¹⁶ Připomeňme ještě knížku *Ohlas Li Poa* (Ofitis, Ústí nad Orlicí, 2008), kterou vydala někdejší studentka B. Mathesia, Zdenka Bergrová (1923–2008). Obsahuje téměř sto parafrází básní tohoto největšího čínského básníka.

Tyto básně mají mathesiovskou lehkost i podmanivý půvab a současně, jak říká prof. Průšek sám, jsou „přesnými překlady“ – pokud můžeme při překládání čínské poezie, kdy musíme zcela stranou ponechat prvky formální, jako rým, intonaci apod., o přesných překladech vůbec mluvit. ([S1], str. 131)

O vlastní překladatelské práci napsal F. Stočes v úvodu své knížky následující slova:

Pro každou báseň ze *Signes immortels* jsem se snažil nejprve shromáždit všechny dosažitelné převody v dílech nejpřednějších světových sinologů a eventuálně ve spolupráci s paní Zheng Su vypracovat též doslovný překlad. Pokud jde o „nové“ básně – a výjimečně některé z první a druhé knihy *Zpěvů* – dříve než jsem přistoupil k propracování francouzské verze, pokusil jsem se o letmý náčrt v češtině, abych si lépe ověřil, v čem tkví jejich půvab, co dává slovům teplo a zář.

České texty zůstávaly po dlouhá léta ve stadiu konceptů a je zásluhou mých nejbližších přátel, že jsem se pokusil je dál propracovat až na úroveň vhodnou k uveřejnění. A tak se zrodila knížka *Perlový závěs*, která je tudíž obdobou, ale nikoli překladem *Signes immortels*. Stejně tak spíše než na formu – pokud jde o délku verše a střídání rýmů – klade důraz na výsledný dojem, jenž básně vyvolávají. ([S1], str. 10–11)

V zasvěceném doslovu ke své sbírce *Perlový závěs* se F. Stočes poměrně podrobně věnoval různým českým překladům a interpretacím čínské poezie, zejména pak jejich komparaci. Kritizoval např. přístup překladatelské dvojice Zlata Černá (1932) a Jan Vladislav (1923–2009), kteří uveřejnili své překlady básní devíti čínských básníků dynastie Tang (618–906) a Song (960–1279) ve sbírce *Jara a podzimy staré Číny* [ČV], pro jejich přehnané lpění na formální stránce překladu. O jejich názorech a pracovním postupu napsal:

Po metodické stránce volí naprosto rozdílný přístup k interpretaci než *Mathesius*. V jejich pojetí překlad čínské poezie, aby byl skutečným překladem, musí odrážet nejen obsah, ale i formu čínské předlohy ...

... odsuzují jako „krajnost“ názor, že čínskou poezii „lze zpřístupňovat čtenáři jedine parafrázemi ...“ A aby dokázali, že je možný skutečný „překlad“, zachovávají ve své knize formu čínského originálu počtem veršů, rozložením césur a vytvářením rýmu na shodných místech.

Zdá se však, že pro tyto přespríliš náročné formální požadavky ustupuje do pozadí celkový účinek, jakým báseň působí na čtenářovu vnímavost. Myslím ale, že právě tento účinek je tím rozhodujícím, co báseň člověku dává, a z tohoto hlediska je forma básně spíše druhořadá a měla by být podřízena tomuto prvotnímu kritériu. Vždyť velká většina čtenářů nemá ani ponětí, kolik má čínský text slabik, kde zachovává rýmy a kde střídá tóny, ale zato báseň prožívá a cítí, jakým dojmem na něho působí, jaké pocity v něm vyvolává. ([S1], str. 137–138)

V poměrně dlouhém Úvodním slovu (str. 9–39) ke knize *Písně a verše staré Číny* se F. Stočes roze-psal o čínské poezii a jejím pronikání do Evropy, o čínských básnících a jejich době a o své cestě k čínské poezii. Vyjádřil se i o překladech a interpretacích:

Jeho básně přeložila též Marta Ryšavá (1933), např. ve sbírce *Měsíc nad průsmyskem* [R]. Roku 1987 vyšly její překlady básní dvou čínských básníků z 8. století (Š'-tea, Chan-Šan) pod názvem *Nad Nefritovou tůňí jasný svět* (Odeon, Praha) a kniha *Trojzvuk* (Melantrich, Praha) obsahující překlady čínské poezie 7. až 8. století (básníci Meng Chao-žan, Paj Siang-šan a Wei Wang). Připomeňme ještě Hrubínovu knížku *Nefritová flétna* [Hr].

Základem překladu je přímá interpretace znaků s uvážením obvyklých konvencí. Když jsem si ujasnil představu toho, oč básník usiloval, jaký dojem chtěl vyvolat, snažil jsem se dosáhnout stejného cíle. Ale s prostředky jazyka, do něhož překládám, bez ohledu na formu originálu, avšak se snahou o přirozené plynutí jazyka, pevný rytmus a podle možnosti též o harmonii znaků, tónů a případně i rým. Můj přístup k překladu tedy vychází z myšlenky, že čínská lyrika je ve své podstatě impresionistická. ...

Nepokládám tedy za nutné formou překládané básně imitovat čínský vzor, což evropský čtenář nemá možnost postřehnout. Nicméně se snažím, aby čtenář věděl, zda jde o čtyřverší, šestiverší atd., a proto vyžaduje-li verš k přeložení několika řádek, je druhý a další řádek téhož verše vytištěn s odsazením. Podle možnosti překlad také nepřesouvá myšlenky z jednoho verše do druhého, ale uvnitř verše je sled slov zpravidla jiný než v čínském textu. ([S2], str. 37, 38–39)

V závěru pasáže o čínské poezii připomeneme nejčastěji překládanou čínskou báseň, kterou napsal nejznámější čínský básník Li Po (701–762). Uvedeme ji nejprve v doslovném překladu a potom v několika českých verzích, abychom mohli jednotlivé překlady a interpretace porovnat (viz [M2], str. 265–272, [S1], str. 66).

Tichá noc myšlenka (doslovný překlad)

1. lůžko ← před jasný měsíc svit
2. pochybovat je/to zem ← na jinovatka
3. zvednout hlava vyhlížet jasný měsíc
4. sklonit hlava myslit stará ves¹⁷

Myšlenka klidné noci (Jaroslav Pšenička, 1902)

Před mé lůžko luna vrhá ostré svoje světlo;
chvíli v pochybách jsem, jíní nejiskří-li na zemi se.
Zdvihám hlavu, hledím vzhůru k skvělé luně,
hlavu skláním pak a v rozpomínky nořím se na svůj domov ...

Poutník se probouzí v hospodě za noci (Bohumil Mathesius, 1925)

Na bílém loži probouzím se tich,
svítí to měsíc – či sem napad sních?
Pozvedám hlavu: hledím na měsíc,
skláním ji: myslím na zem otců svých.

V cizině (Otokar Žižka, 1942)

Daleko v cizí krajině jsem ležel. Světlo měsíční
chvělo se před mým lůžkem lesklé, stříbrné.
Zvedl jsem hlavu. – Zprvu myslil jsem,
že je to jitřní rosa, jež se leskne tam,
pak jsem však pochopil, že luna, luna je to jen ...
A smutně hlavu k zemi nakloniv,
na domov vzdálený jsem vzpomínal.

¹⁷ Spojení slov *stará* a *ves* znamená *domov*.

Myšlenky za tiché noci (Marta Ryšavá, 1976)

Před lůžkem jasné luny zář je tak bílá,
že váhám – snad se to jíním zem zatřpytila.
Pozvedám hlavu a na jasnou lunu hledím,
skláním ji, vzpomínka na domov hlavu nachýlila.

Za tiché noci (František Hrubín, 1978)

Zas probouzím se do bělostné noci.
Není snad celá země pod sněhem?
I zvedám hlavu: svítí jasný měsíc.
Skláním ji: myslím na svou rodnou zem.

Tichá noc (Ferdinand Stočes, 1988)

Před mým lůžkem
luny třpyt.
Padlo snad náhle
stříbrné jíní?
Zvedám hlavu:
v úplňku měsíc.
Skláním ji a myslím
na rodnou zemi.

Myšlenky bezesné noci (B. Henry, 2009)

Před lůžkem podivně vlní se půlnoční luny svit.
Přemítám – je to jen měsíce nebo snad sněhu třpyt?
K měsíci pohlížím, vybírám z nabídky průvodců.
Hlavu pak pokládám – čeká mě jen domov důchodců.

Připomeňme ještě malou, ale půvabnou sbírku *Hvězdy a Jarní vody* [PS], s čínskou poezií 20. století. Napsala ji v době svých studií básnířka Sie Wan-jing (1902–?) známá pod pseudonymem Ping Sin (tj. ledové srdce, srdce bez vášně). Do češtiny její básně přeložila Jarmila Häringová (1933). O problémech, které bylo třeba při překladu řešit, se však nezmínila ani v této knížce, ani ve sbírce *Mrtvá voda* Weng I-tua (1899–1946), kterou rovněž přeložila.¹⁸

3.3 Tibetská a korejská poezie

Roku 1976 vyšla malá sbírka tibetské lidové poezie *Černý mrak v bílém* [ŠK]. Jana Štroblová (1936) a Josef Kolmaš (1933) ji přeložili z tibetských originálů a čínských překladů. J. Kolmaš se v doslovu krátce zmínil o základních tendencích, kterých se drželi při své překladatelské práci:

Při tlumočení tibetské poezie jsme usilovali o překlad, jemuž by nechyběla prostota a svěžest originálu, a který by byl zároveň dobře srozumitelný i bez komentáře. Úmyslně jsme se ve své práci nevyhýbali jistě naivitě a moralizování i občasnému opakování a rozvádění stejných symbolů a motivů, neboť nakonec i to patří k bezprostřednosti a svéráz-

¹⁸ Edice Květy poezie, sv. 171, Mladá fronta, Praha, 1990.

nosti původní předlohy. Pravidelnost a rytmičnost tibetského verše jsme se v překladu snažili důsledně nahradit rýmem, deklamativnost melodičností a tam, kde to originál přímo napověděl, jsme se nebránili uplatnit i názvuky lidové poezie naší.

([ŠK], str. 183–184)

Jako malou ukázkou uvedme jedno čtyřverší ze sbírky *Černý mrak v bílém*.

Zhrzený milenec (Z okolí Lhasy)

Loni mě shodil kůň –
já nohy jsem nezlámal, nesedřel kůži z těla.
Letos mě odvrhla milenka –
já nitro mám odřené a polámané zcela!

Za připomenutí stojí sbírka starokorejské poezie *Věčná slova země zelených hor* [V], která vznikla z básní vybraných ze dvou antologií sestavených v 18. století z poezie sepsané o tři století dříve. První, *Věčná slova země zelených hor*, sestavil básník Kim Čchon-tchäk, druhou, *Poezie země Východního moře*, dal dohromady Kim Su-džang. Jednalo se o básně *sidžo*, básnická trojverší o životě, lásce, nenávisti, přírodě, práci prostého člověka apod. Sbírkou z korejských originálů přeložil Oldřich Vyhliďal (1921–1989) za jazykové spolupráce korejského bohemisty a básníka Nam Gi Doka. O metodě překládání však v knížce nic neuvedl. Jedno z těchto trojverší vypadá v českém překladu takto:

Neznámý

Už je tu podzim, stromům na návrší
padají listy – les je daleký.

A v noci bývá chladno u řeky,
když do klidného proudu drobně prší.

Nemohu usnout. Někde za horami
je moje milá. Zase už jsme sami.

Libor Koval (1930–2003), filolog, teolog, básník, překladatel a publicista, připsal svoji půvabnou sbírku *Květy staré Koreje* nesoucí podtitul *Parafráze na starou korejskou poezii ve formě sidžo* korejskému bohemistovi a básníkovi Nam Gi Dokovi. Antonín Kratochvíl (1924–2004), literární kritik a historik, napsal o Kovalových překladech v závěrečném komentáži k jeho knížce tato slova:

... poezie psaná formou „sidžo“ je především poezie lyrická – okouzlení přírodou, přátelstvím, moudrostí, ale u většiny básníků (básnířek) dominují prvky milostné. V určitých obdobích zde nechybí ani sociální a politická tematika. Jistým překvapením je také ironie a mnohdy i jemný nádech žertu. Snad právě toto bylo pro Libora Kovala magnetem. Jeho parafráze přesně vystihují tematiku básní „sidžo“, jejich vidin, tužeb a snů, ale i osobních zážitků a přírodních reflexí, skloubených vzájemně plnokrevnými básnickými obraty. Všechny Kovalovy verše jsou obrazově i formálně dokonalými napodobeninami starokorejských „sidžo“, od jejichž originálů je lze jen stěží rozeznat, i když zde jde prakticky o zcela samostatnou, částečně „zevropizovanou“ moderní formu.

([Ko], str. 100–101)

Uvedeme zde velmi pěknou, stručně vyjádřenou báseň *sidžo*:

Nutí mě k bdění
od rána

hlasité pění
skrívana.

Nemohu usnout pro ten zpěv ...
Zoufám si ... Kypí ve mně hněv.

3.4 Čtyřverší Omara Chajjáma

Zájemcům o komparace českých překladů orientální poezie lze vřele doporučit čtyřverší Omara Chajjáma, perského matematika, astronoma, filozofa, myslitele a básníka druhé poloviny jedenáctého století a prvních dvou desetiletí století dvanáctého, jehož poezii se věnovala řada našich orientalistů a básníků. Roku 1875 publikoval své překlady dvou Chajjámových čtyřverší Svatopluk Čech (1846–1908) v časopise Lumír, později překládali Chajjáma orientalista Přemysl Hájek s básníkem Janem Axamitem (1870–1931), básník Jaroslav Vrchlický (1853–1912), dále český orientalista, básník, překladatel a hudební kritik Jaromír Borecký (1869–1951), lékař a překladatel Josef Štýbr (1864–1938), básník Vilém Závada (1905–1982), který na překladech Chajjámových čtyřverší pracoval s Janem Rypkou (1886–1968), světově proslulým orientalistou, málo známý básník Jiří Mulač (rovněž ve spolupráci s J. Rypkou)¹⁹ a Eva Štolbová (1935–1993), Rypkova žákyně, specialista na perskou poezii a básnířka.²⁰

Uvedme nyní jedno z nejznámějších Chajjámových čtyřverší v doslovném překladu J. Rypky a ve trojím básnickém zpracování E. Štolbové, V. Závady ([Cha], str. 40, 137) a B. Henryho.

Jan Rypka

Kruh (nebes), v němž je náš příchod a odchod,
v něm se nejeví ani konec ani začátek.
Nikdo nepověděl správně o této otázce,
odkud je toto přicházení a kam odchod.

Eva Štolbová (1969)

Příchod a odchod, z něžž jsme plni zmatku –
to kruh je bez konce a bez začátku;
o pravém smyslu věcí nikdo nezná ani řádku:
odkud to jdeme, a kam zas vracíme se vkrátku.

Vilém Závada (1974)

V tom kruhu nebes, který spíná kolébku i hrob,
nepozná nikdo začátek či konec dob
a nepoví ti také žádný filosof,
odkud jsme přišli a kam zajdem beze stop.

¹⁹ Viz Nový Orient 19(1964), str. 167 – osm čtyřverší.

²⁰ Viz Nový Orient 17(1962), str. 19, 23(1968), str. 37, 24(1969), str. 140, 141, 144, 145, 146, 147, 151, 153, 155, 156, 157 – celkem pětadvacet čtyřverší. Další její překlady jsou otištěny v knížce [Cha].

B. Henry (2009)

Neprozdí nebes kolotoč,
ani vědec, básník, filozof,
odkud jdeme, kam a hlavně proč, proč, proč.
Neřekneme! Pro slepičí kvoč!

Následující Chajjámovo čtyřverší patří k těm známějším. Zajímavé je, že je jedním ze dvou čtyřverší, které byly do češtiny přeloženy jako první ([Cha], str. 42, 103, 131, 138).

Svatopluk Čech (1875)

Děl k sobě jsem: Chci obsáhnouti vědu!
a málo ušlo zpytavému hledu;
teď když jsem zbádal všeho rub a líc,
mám hlavu šedivou a – nevím nic.

Jan Rypka

Nikdy se mé srdce nezprostilo vědy,
málo zůstalo z tajů, které by nebyly mnou porozuměny.
Sedmdesát dva roky jsem přemýšlel ve dne v noci,
poznal jsem, že vůbec nic jsem nepoznal.

Eva Štolbová (1968)

Já všechny vědy, knížek na tisíc
jsem louskal sedmdesát let a ještě víc,
nic nezůstalo pro mne tajemstvím –
a nakonec jen vím, že nevím zase nic.

Vilém Závada (1974)

Neuzavíral jsem se nikdy poznatkům věd.
Zbývalo málo, co bych mohl nevědět.
Teprve dneska vím, že nevím vůbec nic,
i když jsem bádal dvaasedmdesát let.

B. Henry (2009)

Dvaasedmdesát let
studoval jsem slova věd.
Po těch letech, volové,
vím, že dnes vím kulové.

Více o Omaru Chajjámovi a českých překladech jeho čtyřverší viz [B4] a [Cha], kde je uvedena řada dalších odkazů.²¹

²¹ V knížce [Cha] je na str. 152–154 otištěn soupis čtyřverší, která jsou v této publikaci uvedena ve více překladech. V článku [B4] pochopitelně chybí odkaz na knížku [Cha], která vyšla později; jsou v ní bohužel chyby. Připomeňme ještě malou sbírku *Rubáiját Omara Chajjáma, hvězdáře-básníka perského. Z anglické verse Edwarda Fitzgeralda přeložil Dr. Jos. Štýbr*. Vydal L. K. Žižka v Praze roku 1922. Obsahuje 110 čtyřverší.

3.5 E. A. Poe: Havran

Pozoruhodnou publikací je kniha [Po] soustředující šestnáct českých překladů²² slavné básně *Havran*, jejímž autorem je světoznámý americký spisovatel Edgar Allan Poe (1809–1849), autor mystických, fantastických a detektivních příběhů. Úvodní studii o českých překladech Poeovy básně napsal pro tuto knihu český překladatel a literární historik Alois Bejblík, který rovněž připravil k otištění originální anglický text *Raven*. Následuje často citovaná Poeova stať *Filozofie básnické skladby*²³ z roku 1846, kterou přeložil Aloys Skoumal (1904–1988), literární a divadelní kritik a překladatel. České překlady editoval a bohatě komentoval Rudolf Havel, který rovněž připojil ediční poznámku. V závěrečné příloze jsou otištěny ještě čtyři skladby motivované Poeovou básní.²⁴

Připomeňme ještě, že švédský básník, spisovatel a kritik Ola Hansson (1860–1925) napsal, že Poeovo dílo je *chemickou sloučeninou poezie a matematiky*, a sám E. A. Poe zdůrazňoval racionálnost svých iracionálních příběhů. Ve *Filozofii básnické skladby* poznamenal: ... *budiž rozsah básně v matematickém poměru k její hodnotě* ... ([Po], str. 73)

O překlady *Havrana* se pokoušela řada dalších básníků a literátů. Velmi zajímavé svědectví o svém přístupu k této básni napsal Emanuel Lešehrad (1877–1955), jehož překlad se bohužel nedochoval.

Poeova Havrana považuji za okultní báseň. Chtěje ji přebásnit do češtiny pokud možno nejvěrněji, zvolil jsem tento postup: Zjistil jsem, která čísla ovládají původní znění. Shledal jsem, že jsou to především mystická čísla 3, 6 a 9. Na příklad slovo God má 3 písmena, slova Lenora, Pallas, Gilead, Aidenn, angels mají 6 písmen, slovo nevermore (vysloví se tříslabičně nev' ver mohr) má 9 písmen atd. Havran zakrákorává 6× své ‚Nevermore‘. Rýmy na ‚nevermore‘ se opakují 72×, čili 7+2=9. Báseň se skládá z osmnácti slok, čili 1+8=9, a každá sloka ze 6 veršů, celkem ze 108 veršů, čili 1+0+8=9. Po prvé byl Havran uveřejněn roku 1845, 1+8+4+5=18 čili 1+8=9. Děj básně se odehrává o 12. hodině noční (1+2=3), v níž Poe vzpomíná své milované zesnulé dívky. Hlavní postavou básně je zlověstný démon Havran. Mluví se v ní o knihách zapomenutých věd, o tajemných předtuchách, o nebi a pekle, o domě, v němž straší, o čarodějném nápoji zapomnění, o zaklínání, o osudné předpovědi. Před začátkem práce jsem se obklopil vzpomínkami na Poea, soustředil jsem se a snažil se vžít do autorovy představitivosti. Po ukončení přebásnění jsem shledal, že jednotlivá slova mého překladu mají skrytý význam, jenž je ve vztahu k obsahu básně. Tak v šestipísmenném slově Havran je ztajeno slovo vrah (v angličtině jsou dvě slova raven. První vyslovované reh'vn znamená havran, druhé vyslovované rävn znamená odtáhnout, uloupit, loupež, kořist) a slovo Lora připomíná latinské ora, to jest modliti se. V první sloce ve verších 4 a 5

²² Vytvořili je Vratislav Kazimír Šembera (1844–1891), Jaroslav Vrchlický, Augustin Eugen Mužík (1859–1925), Karel Dostál-Lutinov (1871–1923), Vítězslav Nezval (1900–1958), Otto František Babler (1901–1984), Jiří Taufer (1911–1986), Eugen Stoklas (1882–1963), Dagmar Wagnerová (1922–2000), Rudolf Havel (1911–1993), Jan Blahoslav Čapek (1905–1982), Kamill Resler (1893–1961), Rudolf Černý (1905–1979), Ivan Slavík (1920–2002), Svatopluk Kadlec (1898–1971) a Alois Bejblík (1926–1990).

²³ Poeova *Filozofie básnické skladby* je otištěna též v knížce *Jak se dělá báseň*, kterou editoval básník a překladatel Jan Zábrana (1931–1984) a vydal Československý spisovatel v Praze roku 1970 (viz str. 11–26). E. A. Poe zde mimo jiné píše: ... *nebude se mi vykládat za neskromnost, když ukáži na „modus operandi“ při skládání některého svého díla. Vybírám si Havrana, protože je nejznámější. Hodlám prokázat, že jeho skladba nevdechčí na žádném místě náhodě ani intuici – že celé dílo pokračovalo krok za krokem až k závěru s přesností a strohou důsledností početního úkolu.* ([Po], str. 72)

²⁴ Napsali je Jaroslav Vrchlický, Josef Váchal (1884–1969), Vladislav Vančura (1891–1942) a Konstantin Biebl (1898–1951).

a v druhé sloce ve verši 1 začáteční písmena tvoří slůvko ona; v desáté sloce ve verších 1 a 2 začáteční písmena tvoří slůvko On. Rovněž v první sloce ve verši 4, v desáté sloce ve verši 1, v jedenácté sloce ve verši 3 a v třinácté sloce ve verši 1 začáteční písmeno s prvním písmenem po caesuře je echem citoslovce Ach ze začátku druhé sloky verše 1. V sloce šestnácté ve verších 3, 4 a 5 začáteční písmena tvoří slovo rov. Refrén ‚Nikdy víckrát‘ a ‚Ne víckrát‘ mi vnučko mé jméno Em. Lešehrad. Zvolil jsem desetipísmenný závěrečný refrén ‚Ne víckrát‘ proto, že desítka je výslednicí 1+9. ([L2, 1957], str. 281, viz též [Po], str. 202–203)

3.6 Závěr

O překladech básní, resp. literárních děl nejrůznějšího charakteru, by bylo možno napsat – i ve vztahu k překladům a interpretacím vědeckých děl – daleko více. Připomeňme ještě např. problémy s překladem idiomů a slovních hříček. Na ty nelze klást požadavek věrnosti, neboť v exaktním slova smyslu jsou málokdy přeložitelné. Pokud chce překladatel zachovat ráz díla, musí vymyslet jiné slovní hříčky, ale odpovídajícího charakteru, v jazyce, do něhož překládá.²⁵

Vážným zájemcům o širokou problematiku překladů a interpretací lze vřele doporučit dnes již klasické monografie Jiřího Levého (1926–1967), anglisty, literárního vědce a teoretika překladu, nazvané *Umění překladu* [L1] a *České teorie překladu* [L2]. V první se autor věnuje všestranným nárokům na překladatelskou práci a diskutuje zejména její problematické stránky. Ve druhé monografii se podrobně zabývá vývojem překladatelských teorií a metod od počátků našeho písemnictví až do 20. století; soustředil zde též klasické studie našich významných překladatelů o překladatelské estetice. Z nejnovější doby připomeňme nevelkou knížku *Čtení o překládání* [K] Zlaty Kufnerové (1935), v níž najdeme např. statě *Báseň a rytmus*, *Jak vzniká překlad básně* a *Ještě jednou o rýmu v překládané básni*.

V závěru knížky Tao. *Texty staré Číny* vydané roku 1971 Oldřich Král napsal:

Krása překládání je v marnosti toho počínání. Vždyť překlad je cosi bytostně neukončeného, v povaze překladu je věčné přibližování a zase vzdalování, neboť jak se něčemu přibližuješ, něčemu se současně vzdaluješ. ([Kr], str. 138)

Literatura

- [Ba] Bašmakova I. G.: *O roli interpretací v istorii matematiki*. Istoriko-matematičeskije issledovanija 30(1986), 182–194.
- [B1] Bečvář J., Bečvářová M.: *Práce historika matematiky*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8.–26. 8. 2008, Matfyzpress, Praha, 2008, 73–90.
- [B2] Bečvář J.: *Teorie proporcí (od Eudoxa a Eukleida až k Dedekindovi)*. In Dostálová L. (ed.): *Eukleides: Základy geometrie*. Sborník příspěvků ze semináře Katedry filozofie FF ZČU, Plzeň, 2008, 63–105.
- [B3] Bečvář J.: *Z historie lineární algebry*. Edice Dějiny matematiky, sv. 35, Matfyzpress, Praha, 2007.

²⁵ Stephen Butler Leacock (1869–1944) je autorem velmi známé knížky humoristických povídek, která nese název *Literární poklesky* (Praha, 1963, 1966, 1968 atd.). Výborný překlad s množstvím slovních hříček pořídil František Vrba (1920–1985). Viz J. Bečvář: *Stephen Butler Leacock*, Učitel matematiky 3(1994/1995), č. 2 (14), str. 58–63.

- [B4] Bečvář J.: *Omar Chajjám, matematik, astronom, filozof, básník*. Učitel matematiky 5(1996/1997), č. 2 (22), 120–127.
- [B5] Bečvář J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Edice Dějiny matematiky, sv. 19, Prometheus, Praha, 2001.
- [B6] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Edice Dějiny matematiky, sv. 23, Prometheus, Praha, 2003.
- [Be] Bečvářová M.: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*. Edice Dějiny matematiky, sv. 20, Prometheus, Praha, 2002.
- [ČV] Jara a podzimy. *Devět básníků ze staré Číny*. Přeložili Zlata Černá a Jan Vladislav. První kniha. Druhá kniha. Edice Versus, Jiří Buchal – BB art, Praha, 2002. První vydání: Mladá fronta, Praha, 1961.
- [Eu1] *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Přeložil František Servít. Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
- [Eu2] Eukleides: *Základy. Knihy I–IV. Komentované Petrem Vopěnkou*. Edice Prameny evropské vzdělanosti, sv. 1, Nymburk, 2007.
- [Hr] Hrubín F.: *Nefritová flétna*. Květy poezie, sv. 130, Mladá fronta, Praha, 1978.
- [Hu] Hudeček J.: *Matematika v devíti kapitolách. Sbíрка početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfea a dalších z doby Tang, Liu Hui: Matematická klasika mořského ostrova*. Překlad, vysvětlivky a úvod Jiří Hudeček. Edice Dějiny matematiky, sv. 37, Matfyzpress, Praha, 2008.
- [Cha] Chajjám O.: *Omarova nesmrtelná čtyřverší. Robáijjât*. Vybral a uspořádal Jiří Bečka. Nakladatelství Dar Ibn Rushd, Praha, 2001.
- [Kr] Tao. *Texty staré Číny*. Klub přátel poezie, Československý spisovatel, Praha, 1971. Přeložil, uspořádal, úvodní esej a poznámky napsal Oldřich Král.
- [K] Kufnerová Z.: *Čtení o překládání*. Nakladatelství H & H, Jinočany, 2009.
- [Ko] Koval L.: *Květy staré Koreje. Parafráze na starou korejskou poezii ve formě sidžo*. Rozmluvy, Londýn, 1987. Rozšířené vydání, Scriptum, Praha, 1994.
- [L1] Levý J.: *Umění překladu*. Československý spisovatel, Praha, 1963, 2. vydání: Panorama, Praha, 1983, 3. vydání: Ivo Železný, Praha, 1998.
- [L2] Levý J.: *České teorie překladu*. SNKLHU, Praha, 1957, 2. rozšířené vydání rozdělené do dvou svazků: Ivo Železný, Praha, 1996.
- [Ma1] Mačák K.: *Počátky počtu pravděpodobnosti*. Dějiny matematiky, sv. 9, Prometheus, Praha, 1997.
- [Ma2] Mačák K.: *Tři středověké sbírky matematických úloh. Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil*. Edice Dějiny matematiky, sv. 15, Prometheus, Praha, 2001.
- [M1] Mathesius B.: *Zpěvy staré Číny*. 4. vydání: Odeon, Praha, 1967.
- [M2] Mathesius B.: *Zpěvy staré Číny*. Souborné vydání Mathesiových překladů, parafrází a ohlasů čínské lyriky připravil a komentuje Jiří Franěk, Klub přátel poezie, Výběrová řada, Československý spisovatel, Praha, 1988.
- [MH] *Verše psané na vodu. Starojaponská pětiverší*. Albatros, Praha 1970. Dřívější vydání: 1943, 1955, 1956, 1961, 1970, 1973, 1977, 1978. Nejnovější vydání: Edice Verše, sv. 6, Vyšehrad, Praha, 2002. Přeložili Bohumil Mathesius a Vlasta Hilská.

- [Po] Poe E. A.: *Havran. Šestnáct českých překladů*. Edice Český překlad, sv. 14, Odeon, Praha, 1990.
- [PS] Ping Sin: *Hvězdy a Jarní vody*. Edice Květy poezie, sv. 75, Mladá fronta, Praha, 1967. Přeložila Jarmila Häringová.
- [R] Li Po: *Měsíc nad průsmykem*. Odeon, Praha, 1961. Další vydání: 1977. Přeložila, doslov a komentáře napsala Marta Ryšavá.
- [S1] Stočes F.: *Perlový závěs*. Paris, 1988.
- [S2] Stočes F.: *Písňe a verše staré Číny: populární antologie čínské poezie od nejstarších dob do začátku čtrnáctého století*. Mladá fronta, Praha, 2004.
- [S3] Stočes F.: *Nebešťan na zemi vyhnáný. Život a dílo Li Poa (701–762)*. Mladá fronta, Praha, 2007.
- [St] Struik D. J.: *Dějiny matematiky*. Malá moderní encyklopedie, sv. 43, Orbis, Praha, 1963. Přeložili Luboš Nový a Jaroslav Foltá.
- [ŠK] Černý mrak v bílém. *Tibetská lidová poezie*. Edice Květy poezie, sv. 121, Mladá fronta, Praha, 1976, 3. vydání: Edice Verše, sv. 17, Vyšehrad, Praha, 2005. Přeložili Jana Štroblová a Josef Kolmaš.
- [V] *Věčná slova země zelených hor. Starokorejská lyrika*. Odeon, Praha, 1967. Přeložil Oldřich Vyhliďal. Některé básně již byly publikovány ve sbírce *Chrysantémy*, SNKLHU, 1959.
- [Vy] Vymazalová H.: *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty*. Edice Dějiny matematiky, sv. 31, Český egyptologický ústav FF UK, Praha, 2006.

Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz

O JEDNÉ MATURITNÍ ZKOUŠCE

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Abstract: This article analyses one leaving examination at the secondary school in Písek in 1876. The educational system at the Czech lands in the second half of the 19th century and the conditions for passing the leaving examinations are shortly described.

1 Úvod

V současné době se stále diskutuje o náplni, úrovni a obtížnosti maturitních zkoušek na různých typech našich středních škol. Již poměrně dlouho se připravují státní maturity, stanovují se jejich podmínky, pravidla, průběh apod. Nebude proto na škodu podívat se na jednu dobře dochovanou maturitní zkoušku skládanou na písecké reálce v roce 1876.

1.1 Střední školy v 19. století v českých zemích

V 19. století existovaly v našich zemích soukromé střední školy, soukromé střední školy s právem veřejnosti a státní, tzv. veřejné střední školy. Soukromé školy patřily církvi, skupině osob, nadacím apod.; vydávaly vysvědčení, která nebyla státem obecně uznávána. Jejich absolventi proto často skládali dodatečné maturitní zkoušky na soukromých školách s právem veřejnosti nebo na státních školách. Jejich vykonání totiž umožňovalo další vyšší studium či uplatnění ve státní službě. Nejrozšířenějšími typy státních středních škol byly klasické gymnázium, reálka a reálné gymnázium.¹

1.2 Reálky

První reálky u nás vznikly již v 70. letech 18. století; k jejich výraznějšímu rozšíření však došlo až od třicátých let 19. století. Byly zřizovány a podporovány především obcemi, měly poskytnout vzdělání nejširšímu okruhu zájemců zejména tam, kde chybělo klasické gymnázium. Podle *Nástinu* [7] z roku 1849 byly organizovány jako šestitřídní školy se dvěma stupni po třech ročnících. Pro studenty, kteří nemohli nebo nechtěli pokračovat na vyšším stupni reálky, byl zřízen speciální, prakticky orientovaný čtvrtý ročník, který byl přiřazen k nižšímu stupni. Reálky se měly zaměřovat zejména na přípravu ke studiu na technice, měly poskytovat všeobecné středoškolské vzdělání bez klasických jazyků. V roce 1849 se objevila snaha zavést na nich povinnou maturitní zkoušku; narazila však na odpor obchodní komory. Dlouhou dobu se proto na nich nematurovalo, což znamenalo výrazné omezení dalšího uplatnění jejich absolventů.

Od roku 1851 nabízely reálky hlavně vyšší odborné obchodní a živnostenské vzdělávání, vyučovaly se na nich totiž praktické a ryze speciální předměty – naopak předměty všeobecně vzdělávacího charakteru (český a německý jazyk, zeměpis, dějepis, matematika, přírodní vědy aj.) zůstávaly v pozadí. Moderní jazyky se staly nepovinnými a ocitly se zcela na okraji zájmu. Reálky se tak vzdálily původní koncepci všeobecně vzdělávací školy připravující ke studiu na technice. V roce 1865 komise školských odborníků navrhla výrazně omezit praktické předměty, zavést povinnou výuku francouzštiny a o jeden rok prodloužit dobu studia. Proti těmto návrhům se opět ostře postavila obchodní komora. O dva roky později však ministerstvo kultu a vyučování

¹ Více o vývoji středních škol v českých zemích viz [3] až [6].

vyškrtlo výklady speciálních praktických předmětů, zmenšilo rozsah chemie a kreslení, rozšířilo výuku moderních jazyků, zeměpisu, dějepisu, matematiky a přírodních věd.

V roce 1868 se šestitřídní reálky změnily na sedmitřídní se dvěma stupni – nižší se čtyřmi ročníky, vyšší se třemi. Od roku 1869 se zaměřily především na výuku matematiky (nižší stupeň – 3 hodiny týdně se stejným obsahem jako na klasickém gymnáziu, vyšší stupeň – 4 až 5 hodin týdně s širší náplní než na klasickém gymnáziu), přírodních věd a deskriptivní geometrie (3 hodiny týdně). Začaly tak plnit svůj původní úkol, tj. připravovat své studenty zejména ke studiu na technice a na lesnické, hornické, vojenské a zemědělské akademii.²

1.3 Maturitní zkouška na reálkách

Od roku 1869 byla na reálkách zavedena povinná maturitní zkouška. Realisté však nebyli rovnoprávní s absolventy klasických gymnázií, neboť jejich uplatnění bylo poměrně úzké a vzhledem k chybějícímu osmému ročníku byli během studia značně přetěžováni. Měli sice otevřené dveře ke studiu na technice, pokud však chtěli studovat na univerzitě historii nebo filologii, museli si doplnit maturitní zkoušku z latiny, řečtiny a filozofické propedeutiky, chtěli-li studovat jiné obory na filozofii, právech či medicíně, museli složit dodatečnou maturitní zkoušku z latiny a filozofické propedeutiky. Studium teologie bylo pro absolventy reálky takřka nemožné.

Od roku 1869 až do Marchetovy reformy (1908) měla maturita na reálce dvě části. Písemná část se skládala z vyučovacího jazyka (pětihodinová práce), překladu z českého jazyka do němčiny (tři hodiny), překladu z němčiny do češtiny (tři hodiny), překladu z francouzštiny do češtiny (tři hodiny), dále z matematiky (čtyři hodiny) a deskriptivní geometrie (pět hodin). Ústní část prověřovala znalosti ze zeměpisu a dějepisu, matematiky, přírodopisu, fyziky a chemie a jednoho povinného jazyka. V případě špatného výsledku písemné práce či výroční známky z deskriptivní geometrie se ústně zkoušelo i z tohoto předmětu, podobně tomu bylo také u jazyků. Ústní zkoušku z přírodopisu, fyziky a chemie bylo možno prominout v případě dobrého pololetního a výročního vysvědčení.

Hlavní ústní zkoušky probíhaly na konci školního roku (červenec) před komisí celého profesorského sboru, které předsedal zemský školní inspektor, později ředitel jiné střední školy. Podmínkou připuštění k ústní zkoušce bylo zvládnutí písemné části a dostatečné roční vysvědčení. Pokud čtyři a více písemných maturitních prací (u doplňovací zkoušky většina prací) bylo hodnoceno nedostatečně, nebyla ústní zkouška povolena ani v řádném letním, ani v opravném podzimním termínu.

Žáci soukromých škol, kteří neměli na výročním vysvědčení známku z předmětu, z něhož se nezkoušelo při ústní části maturitní zkoušky, ale který se na státní škole v závěrečném ročníku vyučoval, museli z něj nejprve složit zkoušku a teprve po jejím zdárném zvládnutí byli připuštěni k ústní maturitě.

Výsledky maturitních zkoušek se zapisovaly takto: prohlášen za dospělého s vyznamenáním, prohlášen za dospělého všemi hlasy, prohlášen za dospělého většinou hlasů, stanovena oprava po prázdninách z jednoho nebo dvou předmětů, reprobován na jeden rok či na dobu neurčitou (u externistů). Absolventům střední školy se vydávala roční i maturitní vysvědčení, na které se kromě známek z maturitních předmětů

² O vývoji reálky ve druhé polovině 19. století a v první polovině 20. století viz [2] až [6].

vepisovaly i známky z předmětů, z nichž se nematurovalo (např. náboženství, filozofická propedeutika, přírodní vědy – průměrná známka za poslední čtyři pololetí). Od roku 1896 mohly na státních středních školách maturovat jako externistky či privatistky i ženy. V roce 1904 byla aktivována *zkušební komise gymnasijní pro absolventy českých reálék*, kteří chtěli dále studovat na univerzitě.³

2 Maturita na reálce v Písku v roce 1876

Tehdy maturoval s výborným výsledkem Antonín Václav Šourek (1857–1926), pozdější univerzitní profesor deskriptivní geometrie na univerzitě sv. Klimenta Ochridského v Sofii. Vzhledem k vynikajícímu školnímu prospěchu nebyly ústně zkoumány jeho znalosti z českého a německého jazyka, chemie a přírodopisu. Jeho ústní zkouška se tak skládala jen z „úplného minima“ tzv. povinných částí. O životě a díle A. V. Šourka viz [1].

Poznamenejme, že v roce 1876 se na písecké reálce ještě nematurovalo z francouzštiny.

2.1 Písemná zkouška

O náročnosti písemné maturitní zkoušky konající se ve dnech 7. 6. až 10. 6. 1876 si můžeme udělat dobrou představu z výroční zprávy písecké reálky, v níž byla otištěna témata maturitních prací:

Z českého jazyku:

Zásluhy Komenského o školství. Pojednání.

Z německého jazyku:

- překlad z českého do německého: „Povaha M. Krameriusa“, z čítací knihy článek od A. Rybičky.⁴*
- překlad z německého do českého: „Die Schrecknisse der Alpennatur“, z čítací knihy Madiery.⁵*

Z matematiky:

- Stanovte číselnou hodnotu radikálu:*

$$A = \sqrt{\frac{a^2 \sqrt{b \log a}}{\sqrt{a} \sqrt{b}}}, \text{ jestliže } a = 1.45, b = 2.75.$$

- V trojúhelníku jest dán rozdíl dvou stran $x - y = 45^m$, stranami těmito sevřený úhel $\gamma = 46^\circ 43' 20''$, pak třetí strana $c = 80^m$. Stanovte obsah trojúhelníku toho!*
- Stanovte rovnici a délku kolmice spuštěné s vrcholu paraboly, pro níž platí rovnice $y^2 = 3x$, na přímkou vedenou ohniskem pod úhlem $\alpha = 60^\circ 30' 20''$!*

Z popisného měřictví:

- Zobraziti přímku, která prochází daným bodem, seče danou přímku a úhel α s ní tvoří.*

³ Více o maturitních zkouškách z matematiky na českých středních školách ve druhé polovině 19. století a v první třetině 20. století viz [2].

⁴ Pravděpodobně se jednalo o úryvek z knihy Antonína Rybičky (1812–1899) nazvané *Život a působení Václava Matěje Krameriusa* (nakladatel J. Pospíšil, Praha, 1859, 40 stran) zveřejněný v některé čítance.

⁵ Pravděpodobně se jednalo o úryvek z učebnice Antonína Karla Madiery (1831–1899) nazvané *Čítací kniha německá*, nakladatel I. L. Kober, Praha, 1865, 292 stran.

- b) *Má se sestrojiti parabolická průseč šikmého kužele, její pravý tvar a síť.*
 c) *Sestrojiti roviny, které dotýkají se točného paraboloidu ve dvou bodech daného meridianu.*⁶

2.2 Komentář k matematické části písemné zkoušky

První příklad není nijak složitý. Jedná se jen o úpravu výrazu, práci s mocninami, odmocninami a logaritmem. Musíme si však uvědomit, že studenti neměli k dispozici ani kalkulačku, ani logaritmické pravítko. Veškeré výpočty prováděli jen s použitím pětimístných logaritmických tabulek. Příklad tak prověřoval jejich počtářské schopnosti, zběhllost v práci s tabulkami, pečlivost a přesnost výpočtu apod. V současné době by tento příklad činil problém i studentům s kalkulačkou.

Druhý příklad také nevypadá obtížně. K jeho řešení je třeba mít jen základní poznatky z planimetrie a goniometrie (např. vztah pro výpočet obsahu trojúhelníku, kosinová věta) a umět sestavit a vyřešit kvadratickou rovnici. Označíme-li v souladu se zadáním

$$a - b = 45 \text{ m}, \quad \gamma = 46^\circ 43' 20'', \quad c = 80 \text{ m}$$

a užijeme-li kosinovou větu $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, dostaneme po dosazení údajů ze zadání a po jednoduchých úpravách kvadratickou rovnici pro délku strany b

$$2(1 - \cos \gamma) b^2 + 90(1 - \cos \gamma) b - 4375 = 0.$$

Jedno její řešení je 63,9 (po zaokrouhlení na jedno desetinné místo), druhé je záporné. Snadno lze nyní dopočítat délku strany a ($a = 108,9 \text{ m}$). Užítím známého vztahu pro obsah trojúhelníku ($S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$) získáme $S = 2\,533 \text{ m}^2$.

Problémem je zase numerické zadání, neboť použijeme-li matematické tabulky, zjistíme, že $\cos 46^\circ 43' 20'' = 0,68556$. Po dosazení má kvadratická rovnice tvar

$$2(1 - 0,68556) b^2 + 90(1 - 0,68556) b - 4375 = 0.$$

A má být vyřešena jen s použitím tabulek a písemného výpočtu. Otázkou zůstává, s jakou přesností bylo třeba příklad vyřešit.

Dnes by u maturity mohla být předložena i tato úloha, ale musela by mít patrně jiné číselné zadání. Její řešení by pravděpodobně činilo značné problémy i při použití kalkulaček.

Třetí příklad je klasickou úlohou z analytické geometrie kuželoseček, které byla na reálkách ve druhé polovině 19. století věnována značná pozornost. Při standardní volbě kartézské soustavy souřadnic, tj. vrchol $V = [0,0]$ a ohnisko $F = [\frac{3}{2}, 0]$, má rovnice přímky p procházející ohniskem F pod úhlem α tvar

$$x \operatorname{tg} \alpha - y - \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Rovnice hledané přímky k , která je kolmá na přímkou p a prochází vrcholem paraboly V , je

$$x + y \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

⁶ Viz Výroční zpráva obec. vyšších real. škol v Písku za školní rok 1876, Písek, 1876, str. 22–23.

Nyní stačí vypočítat průsečík přímk p a k ; obdržíme bod X , jehož souřadnice jsou

$$X = \left[\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha}{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}, \frac{-3\operatorname{tg}\alpha}{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} \right].$$

Pro vzdálenost vrcholu V a bodu X dostaneme

$$|XV| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Poznamenejme, že tento výsledek lze získat použitím známého vzorce pro vzdálenost bodu od přímky; rovnici přímky k pro tento výpočet nepotřebujeme.

Úloha je opět komplikována číselným zadáním: $\alpha = 60^\circ 30' 20''$, $\operatorname{tg} \alpha = 1,7679$. Dnes bychom zcela nepochybně volili zadání daleko jednodušší.

Výše uvedená písemná maturitní zkouška byla početně náročná. Správné a úplné zvládnutí těchto tří příkladů za čtyři hodiny čistého času vyžadovalo počtářské umění. Není proto divu, že u většiny studentů písemná práce z matematiky nedopadla dobře.

2.3 Ústní zkouška

O průběhu ústní maturitní zkoušky si můžeme udělat představu z příslušného *Protokolu*, který se dochoval v archivu v Písku.⁷ Obsahuje soupis otázek pro ústní zkoušky všech studentů. A. V. Šourek dostal tyto otázky.

Z matematiky:

- 1) *Periodický zlomek proměnit v zlomek obyčejný.*
- 2) *Řešení Δ z T , $x + y + z = m$, α .*
- 3) *Geom. místo průsečíků kolmice se středem na průvodce hyperboly.*

Z fyziky:

- 1) *Jak se vypočte hustota tělesa.*
- 2) *Rovnováha při páce.*
- 3) *Účinek elektr. proudu na jehlu magnetu.*

Z dějepisu a zeměpisu:

- 1) *Básnictví starých Řeků a vědy těchže.*
- 2) *Investitura.*
- 3) *Války Turků se Srby a pád říše srbské.*
- 4) *Poloostrov turecký.*
- 5) *Řád volební království českého.*

2.4 Komentář k matematické části ústní zkoušky

Ústní zkouška probíhala obvykle tak, že se student nejprve 30 minut připravoval na jednotlivé otázky z každého předmětu, pak je během třiceti minut ústně zodpovídal před maturitní komisí.

První otázka vztahující se k *periodickému zlomku* se dnes nedá běžnému středoškolákovi položit, neboť se tato látka neučí, ač je to jen jednoduchá aplikace geometrické posloupnosti, resp. geometrické řady. Z dochovaného protokolu není zřejmé,

⁷ *Protokol sepsaný při ústních zkouškách maturitních na konci školního roku 1875–76 dne 17. července 1876, fond Reálné gymnázium dr. Adolfa Heyduka, Písek 1850–1953, kartón č. 41, Státní okresní archiv Písek.*

co se přesně u ústní zkoušky požadovalo. Zda byl zadán konkrétní příklad, který měl být vyřešen, nebo zda měly být vyloženy základy teorie.

Druhá otázka není v protokolu zapsána srozumitelně, proto je velmi obtížné ji komentovat. Vzhledem k časové dotaci ústní zkoušky je však pravděpodobné, že se nepožadovalo řešení konkrétního příkladu, ale že měly být vyloženy základní planimetrické a goniometrické vztahy v trojúhelníku.

Třetí otázka je typickou úlohou z oblasti množin bodů daných vlastností. Zadání lze formulovat takto: najděte geometrické místo průsečíků průvodiče bodu hyperboly (tj. spojnice ohniska a libovolného bodu ležícího na hyperbole) a přímký kolmé na tento průvodič, která prochází středem hyperboly. Úloha vyžaduje jen porozumění základům rovinné geometrie. Dobrému studentu je po krátkém rozboru zřejmé, že řešením jsou dvě Thaletovy kružnice sestrojené nad průměry FS a GS , kde S je střed hyperboly a F a G jsou její ohniska. Poznamenejme, že podobné úlohy se vyskytují i v současných maturitních sbírkách.

3 Závěr

Domnívám se, že maturitní zkouška (nejen z matematiky) konaná v roce 1876 na písecké reálce byla nesrovnatelně obtížnější a náročnější než současné maturity. V matematice se v písemné části prověřovala především schopnost provádět delší a komplikovanější výpočty, neboť se předpokládalo, že absolvent reálky bude buď pokračovat ve studiu na technice a stane se inženýrem, nebo bude pracovat v bance, technické kanceláři, na finančním úřadě apod., tudíž bude potřebovat značnou početní zručnost. V ústní části se prověřovalo porozumění teoretickým základům matematiky a prokazovala se schopnost stručně a jasně vyložit osvojené poznatky.

Literatura

- [1] Bečvářová M.: *České kořeny bulharské matematiky*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 40, Matfyzpress, Praha, 2009.
- [2] Bečvářová M.: *Maturitní zkoušky (1–4)*. Učitel matematiky 7(1998/1999), 25–31, 81–89, 168–174, 238–247.
- [3] Bezdiček J.: *Československé střední školství v předpisech, tradici i praxi*. Brno, 1934.
- [4] Kádner O.: *Vývoj a dnešní soustava školství, díl I., II*. Sfinx, Praha, 1929, 1931.
- [5] Neuhofer R.: *Střední školství v prvních deseti letech Československé republiky*. SN, Praha, 1928.
- [6] Veselá Z.: *Dokumenty z vývoje české střední školy 1849–1939*. SPN, Praha, 1973.
- [7] *Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Oesterreich*. Wien, 1849 (vydán roku 1849, císařem schválen a podepsán až roku 1854).

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: nemcova@fd.cvut.cz

DOBA C. F. GAUSSE

MARIE BENEDIKTOVÁ

Abstract: The aim of this paper is to focus on a historical and philosophical background of work and life of Carl Friedrich Gauss. We describe German history during the 18th–19th centuries as a part of a political situation in Europe. And on this background, we give a narrative of a Gauss's life progress from mathematics to astronomy and geodesy. At the end, we close to philosophy that could influence Gauss' thoughts and mind about space.

1 Úvod

Proč vůbec zpochybňovat 5. Eukleidův postulát? Proč se může rodit neeukleidovská geometrie? Jaké jsou důvody vzniku masivního vědeckého rozvoje v Německu v první polovině 19. století? Kde se rodí myšlenky a nutkání ke znovuoobjevení „zmizelé“ planety?

Tyto uvozující tázací věty berme jako naladění do předporozumění, nikoli jako cíl, následujícího pojednání. To si rozhodně neklade nárok (už jen pro rozsah) na jejich zodpovězení. Pokusme se tedy popsat dobu Německa mezi 18. a první polovinou 19. století a vyprávějme příběh života jednoho z nejvýznamnějších a nejvlivnějších německých myslitelů.

2 Německo v 18. století a Gauss v Brunšviku

Po náboženských válkách přichází v Evropě model absolutistické vlády, ve které je veškerá moc v rukou panovníka. Ten není vázán platnými zákony, ale pouze zákony božskými – „L'état c'est moi“ (stát jsem já). V této době dochází ke zřizování státního úředního aparátu, který je přímo podřízen (a pouze) panovníkovi, stejně jako k zestátnění – stále častěji dochází k centrálnímu řízení veřejných záležitostí. Zároveň také dochází k postupnému faktickému zániku stavů. Šlechta i duchovní stále sice požívají stejných výhod, ale stát a měšťanstvo po hospodářské stránce sílí natolik, že politickou moc prakticky přebírají. Napětí ve společnosti se snaží převážně v německých zemích řešit forma osvěcenského absolutismu, který však s osvěcstvím nemá příliš společného a je jen zástěrkou před bouřemi lidu ve smyslu společenské smlouvy, ke kterému velmi zřetelně dochází ve Francii.

Na rozdíl od absolutismu francouzského s centralizovaným státem je v Německu absolutismus pouze na úrovni jednotlivých, různě silných zemí. Německá knížectví a vévodství přitom sloužila účelově, nejednotně, nejrozdílněji mocensko-politickým zájmům, ať už francouzským, rakouským či anglickým. V aliančních spojeneckých evropských mocnostech často rozhodovala na politicko-silové misce vah. V té době významu vedle rodu Habsburků nabývají i Welfové, kteří od roku 1235 ovládají vévodství brunšvicko-lüneburské. Roku 1692 dochází k ustavení hannoverského kurfiřtství a roku 1714, po válce o španělské dědictví, dosahují Welfové nástupnictví ve Velké Británii. Po evropské nadvládě Francie přebírá mocenskou situaci pentarchie,

systém pěti mocností, Pruska, Rakouska, Velké Británie, Francie a Ruska, který je víceméně až do první světové války vyrovnaný.¹

Do této doby se 30. dubna 1777 v Brunšviku (Braunschweig) kameníkovi, ale také obchodníkovi a vynikajícímu počtáři, Gebhard Dietrich Gaussovi rodí syn Johann Carl Friedrich. Během školních let vyniká jeho talent pro jazyky a jeho přítelem se stává Johann Christian Martin Bartels, pozdější profesor matematiky ve Švýcarsku a ruské Kazani, kde učil i Nikolaje Lobačevského. Uvádí se,² že Bartelsův profesor matematiky Zimmerman představuje mladého Gause pro jeho matematické i jazykové nadání brunšvickému vévodovi Carlu Wilhelmovi Ferdinandovi. Vévoda je jeho znalostmi nadšen, Gauss dostává darem logaritmické tabulky a vévoda se stává jeho donátorem po čas celých následujících studií. Jak jsme v předchozím odstavci uvedli, Brunšvicko se v té době stává významné i z pohledu celé Německé říše a vévoda měl i velkou společenskou prestiž. O rok později tedy nastupuje Gauss na Collegium Carolinum. Jak píše Dunnington,³ byla to vynikající příprava pro studium na univerzitě. Gauss zde studuje Newtonovy, Eulerovy a Lagrangeovy práce, ale také klasické i moderní jazyky, a je v nich perfektní.

3 Gaussova studia v Göttingen v revolučních časech

Německé dějiny na přelomu 18. a 19. století jsou ovlivněny především francouzskou revolucí s totálním převrácením společenským i politickým. I když v Německu ke státnímu převratu jako ve Francii nedochází, i tak se v důsledku expandujících francouzských zájmů, přerůstajících v napoleonské války, mění mocensko-politické, ale i územní rozložení sil v německém císařství. Roku 1803 se posouvají hranice jednotlivých zemí, malé rozdrobené státy se posilují, až se roku 1806 slučují v Rýnský spolek, a tím předepisují definitivní rozpad německé říše.⁴

Roku 1795 opouští Gauss Brunšvik a zapisuje se na mladou univerzitu v Göttingen. Je to naposledy, kdy užívá i jméno Johann. Ještě než odjede, objevuje základy metody nejmenších čtverců, o deset let později ji nezávisle na něm publikuje Legendre. V této době v Německu vznikají tři nové, moderní univerzity, v Halle, Göttingen a v Erlangenu. Za vznikem té v Göttingen stojí roku 1737 anglický král George II. Brzy po vzniku se Göttingen stává vyhledávanou vzdělávací institucí pro půlku dnešního Německa, ale i pro zahraniční studenty. Gauss stojí před rozhodnutím, zda studovat klasickou filologii anebo matematiku. Díky přátelství s brunšvickým rodákem Johannem Josephem Antonem Idem, se kterým se setkává až v Göttingen, se vydává na cestu matematiky. Společně ještě s Arnoldem Wilhelmem Eschenburgem jsou nerozlučnými přáteli. Eschenburg později vstupuje do služeb vévody brunšvického jako sekretář jeho kabinetu (vlády), Ide je jako profesor matematiky pozván do Moskvy, kde později na nehostinné počasí umírá.

Jeho nejdůvěrnější přítel „na život a na smrt“ je ale Farkas Bolyai von Bolya, původem ze starého maďarského šlechtického rodu. „Gauss jednou prohlásil, že Bolyai byl pouze jediným, kdo porozuměl, jak proniknout k jeho náhledu na základy

¹ Srv. [5, str. 105–108].

² Srv. [1, str. 14–16 a str. 391].

³ [1, str. 17].

⁴ „Svatá říše římská národa německého [...] nebyla od vestfálského míru z roku 1648 scénou, na níž by se rozhodovalo o německých dějinách; tento proces probíhal ve vzrůstající míře na úrovni jednotlivých německých států.“ [5, str. 132]

matematiky.“⁵ V osmnácti letech, v dubnu 1796, dokáže objevit eukleidovskou konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku, poprvé publikuje a profesor Zimmermann je na něho náležitě hrdý.⁶ Jedná se vlastně o faktický začátek jeho matematické kariéry. S Bolyaiem navštěvují společně Brunšvik, občas Bolyai dokonce navštíví jeho rodiče sám. Zmiňme jen ještě, že Farkas Bolyai byl otcem Jánose Bolyaie, který objevil hyperbolickou neeukleidovskou geometrii.⁷

Roku 1799 obhájí disertační práci, která obsahovala i důkaz základní věty algebry. Důkaz během zbytku života stále vylepšoval a třikrát publikoval (naposledy 1849). Gaussovi i přes mnoho jeho nových objevů matematika nepřipadala tolik atraktivní jako astronomie, kdy v zimě roku 1801 napomohl k znovuobjevení planety Ceres. Navázal na několik málo pozorování Guiseppe Piazzioho a svými výpočty napomohl Franzi Xaveru von Zachovi (Gottha) a Heinrichu Olbersovi (Brémy). Zbytek života se věnoval astronomii.

4 Odklon od profesionální dráhy matematiky v neklidném Německu

Napoleonské války mají za důsledek zhroucení Pruska (1807) a s Rakouskem (1809) se tak stávají druhořadými mocnostmi. „Zatímco Německo bylo politicky u konce a Napoleonova vojska defilovala ve Vídni a v Berlíně, dosáhli němečtí básníci a myslitelé světového věhlasu a stali se zakladateli velkého období v dějinách kultury – epochy klasicismu.“⁸ Stejně tak zmiňme první větu Dunningtonovy monografie: „V letech 1813–1832 byli v Německu tři největší géniové: Goethe, Gauss a Wagner.“⁹ Je to společenské napětí, které má za následek takovouto tvorbu?

Státy Rýnského spolku přebírají francouzský vzor státního aparátu, hroubí se cechovní systém, obnovuje se školství a vzdělanost. Vše ale už řídí výkonné úřednictvo, které se nyní rekrutuje i z měšťanstva. S koncem napoleonských válek se rozpadá i Rýnský spolek, Evropa se víceméně po vídeňském kongresu vrací k předrevoluční rovnováze mocenských sil, přesto reformy zůstaly. Německá říše obnovena nebyla, středně velké německé státy si zachovaly svoji svébytnost, Prusko i Rakousko byly obnoveny na úroveň evropských velmocí, avšak s územními změnami, a tím i s nedořešenými vnitřními německými otázkami, které volný Německý spolek, sdružující 35 německých knížecích států a 4 svobodná říšská města, řešit nedokázal. Nebylo to naplnění ideálů národnostních osvobozeneckých válek a zklamání studenti tak zakládají na Wartburské slavnosti (1818) Všeobecný německý buršenshaft, spolek studentů jedenácti univerzit v duchu národního a liberálního hnutí. Ve svých požadavcích chtějí ústavu s právem na svobodu jednotlivce, ale i účast národa na celkovém dění. O rok později je hnutí z Metternichova podnětu zakázáno s postihy pro studenty, ale i profesory.¹⁰ Hnutí se na univerzitách skrytě udržuje a je podhoubím pro revoluční rok 1848. Spontánní lidová povstání zasahují téměř všechna německá města a vedle nacionálně konzervativních

⁵ [1, str. 27].

⁶ [2, str. 3].

⁷ Vopěnka (viz [6, str. 57]) zmiňuje, že právě János Bolyai dokázal prolomit pochybnosti o stvoření nového geometrického světa podobně jako ve stejné době (rektor kazaňské univerzity) Nikolaj I. Lobačevskij.

⁸ [5, str. 125–126].

⁹ [1, str. 3].

¹⁰ „Všichni vysokoškolští profesori, kteří „zneužíváním svého zákonného vlivu na mysl mládeže, šířením škodlivých, veřejnému pořádku a pokoji nebezpečných nebo zásady stávajícího státního zřízení podvracejícího učení projevili svou nezpůsobilost k vykonávání jim svěřeného důležitého úřadu“, měli být nekompromisně zbaveni svých kateder a nesměli být znovu zaměstnáni v žádném ze spolkových států.“ [5, str. 148]

a umírněně liberálních hlasů se čím dál více ozývají i hlasy levicově demokratické. Pokus vytvořit nové parlamentní jednotné Německo ale padl. Nicméně předrevoluční stav se obnovit nepodaří a i Prusko a Rakousko jsou nuceny zavést ústavu jakožto nařízení panovníka, tj. bez účasti lidu.¹¹ Základní práva tehdy vznesená jsou z velké části přebíraná roku 1919 ústavou výmarské republiky.

K politickým a společenským událostem ohledně Gausse poznamenejme, že se v jeho životopisech příliš na toto téma napíše. Ví se, že se ke konci svého života roku 1848 klonil na stranu konzervativců, politicky činný však není. Nicméně vraťme se na začátek tohoto období.

Roku 1807 Gauss přijímá místo profesora astronomie v Göttingen a o rok později se jeho žákem stává Heinrich Christian Schumacher, později C. L. Gerling, Bernhard Nicolai, August Ferdinand Möbius a Johann Franz Encke, samí vlivní astronomové a matematici. Přednáší astronomii, teorii pohybu nebeských těles (v duchu své stěžejní astronomické knihy *Theoria motus*), soukromě i praktickou astronomii. V roce 1816 je v Göttingen otevřena nová hvězdárna a Gauss se stává jejím ředitelem. Později se v přednáškách věnuje kometám, výpočtu zatmění Slunce a Měsíce a výpočtové astronomii. Od roku 1823 přednáší i matematiku – teorii pravděpodobnosti, obecnou teorii křivých ploch, numerickou matematiku a nakonec přímo i svou metodu nejmenších čtverců (až od roku 1835).

5 Prostor

Posledním zlomovým bodem v Gaussově životě je rok 1821, kdy vynalézá heliotrop a začíná se věnovat geodézii. V letech 1822 až 1826 provádí pomocí svého vynálezu triangulaci Hannoveru a získává tak měření údajně až milionu trojúhelníků. Traduje se, že myšlenka nalézt trojúhelník, jehož součet úhlů nebude roven dvěma pravým (neboli zhroucení eukleidovské geometrie), vedla Gausse k proměřování trojúhelníku Brocken-Hohenhagen-Inselsberg.¹² Odchylka součtu však byla v mezích možných chyb. Nicméně uvažovat, že by tomu tak nebylo, v době, kdy se mnoho matematiků snaží dokázat 5. Eukleidův postulát, bylo velice odvážné. Bylo to v době, kdy ani János Bolyai, ani Nikolaj Lobačevskij ještě své úvahy nepublikovali. Dunnington¹³ i Vopěnka¹⁴ se zmiňují, že Gauss si byl vědom otevření nové nepoznané geometrie, nicméně zřejmě z důvodu strachu z polemiky¹⁵ nepublikuje.

Je zřejmé, že ač nikdy nestudoval filosofii, byl velmi poznamenán představami Immanuela Kanta. Nejspíš už jeho výchova byla poznamenána obratem poznání od předmětu k čistému rozumu. Rozumu, který se ale zároveň stává poslední instancí našeho poznání, na kterém vše leží a který lze i zpochybnit. Jak lze z korespondence vystopovat, Gauss během svého života rekreačně studoval spisy Humeovy, Francise Bacona, Christiana Wolffa, Friese, René Descartese, Johna Locka. Měl velkou zálibu v Hegelově filosofii. Když popáté přečetl Kantovu *Kritiku čistého rozumu*, dodal, že vše je napsáno

¹¹ Srv. [5, str. 145].

¹² Srv. [6, str. 54].

¹³ Srv. [1, str. 174–190].

¹⁴ [6, str. 61].

¹⁵ Jako vážený profesor astronomie – byl členem mnoha prestižních vědeckých společností a nositelem řady vyznamenání – nejspíš neměl zapotřebí se hádat o matematiku.

o něm.¹⁶ Samozřejmě, že ho nejvíce zajímaly otázky prostoru, který je nejvýznamnější a nejzákladnější složkou apriorního poznání, tj. poznání samého o sobě. „Prostor jakožto čistý názor, jakožto forma, v níž dochází k uskutečňování reálných objektů, rozhodující o jejich tvarech a velikostech, nám umožňuje provádět úvahy o tvarech a velikostech a [...] též již o pohybech reálných objektů.“¹⁷ Možná i proto ho tolik zajímá astronomie včetně praktické astronomie a geodézie než čistá matematika. Gauss chce vědět, jak to se světem a naším poznáním mj. i prostoru je. „Prvním požadavkem Kantovy filozofie [...] je, aby myšlení zkoumalo samo sebe, do jaké míry je schopné poznávat. Dnes jsme už ovšem překročili Kantovu filozofii a každý by chtěl být dále.“¹⁸

Carl Friedrich Gauss umírá 23. února 1855. Zbylo nám po něm velice mnoho teoretických i užitečných poznatků z oblasti matematiky, fyziky i astronomie. Sám byl především astronomem a pak až matematikem, ač se nám dnes jeví v opačném světle. Matematiku zjevně užíval ke svým praktickým potřebám v astronomii, geodézii, optice, krystalografii a také elektromagnetismu, a tak není divu, že stál u hlavních výsledků teorie chyb, základů statistiky, numerické matematiky. Jeho metody z astronomie se víceméně používají dodnes. Smyslem tohoto pojednání však bylo popsat dobu, ve které tvořil, a důvody, proč tak mohl tvořit.

Literatura

- [1] Dunnington W. D.: *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. The Mathematical Association of America, New York, 2004. (Reprint z roku 1955.)
- [2] Gauss C. F.: *Werke X.1*. G. B. Teubner, Leipzig, 1917.
- [3] Hegel G. W. F.: *Malá logika*. Nakladatelství Svoboda, Praha, 1992. (český překlad)
- [4] Kant I.: *Kritika čistého rozumu*. OIKOYMENH, Praha, 2001. (český překlad)
- [5] Müller H., Krieger K. F., Vollrath H.: *Dějiny Německa*. NLN, s.r.o., nakladatelství Lidové noviny, Praha, 1995. (český překlad)
- [6] Vopěnka P.: *Rozpravy s geometrií: Otevření neeuclidovských geometrií světů. Trýznivé tajemství*. Vesmír, Praha, 1995.

Adresa

Mgr. Marie Benediktová
Katedra filozofie
Filozofická fakulta, Západočeská univerzita v Plzni
Sedláčkova 19
306 14 Plzeň
e-mail: marie.benediktova@gmail.com

¹⁶ Srv. [1, str. 315].

¹⁷ [6, str. 9]. Srv. [4, str. 56–57]: „Prostor je nutnou představou a priori, která je základem všech vnějších názorů. Nikdy si nedokážeme utvořit představu, že prostor není, přestože si docela dobře můžeme myslet, že se v něm nenacházejí žádné předměty.“ a dále „Prostor [...] je čistý názor.“

¹⁸ [3, str. 105].

MATEMATIKA NA SLOVENSKU 1945–1965

JÁN ČIŽMÁR

Abstract: This paper depicts a brief outline of the institutional and personal development of the mathematical community in Slovakia during the first fifteen-years period after the World War II. It shows the necessity and usefulness of university institutions for the existence and development of scientific activities in mathematics.

Úvod

Produkcia vedeckých výsledkov v matematike v 20. storočí je obvykle zviazaná s existenciou a činnosťou inštitúcií, v ktorých vedecká práca je nevyhnutnou a podstatnou zložkou ich poslania a neoddeliteľnou súčasťou ich výkonov. Takýmito inštitúciami v 20. storočí boli hlavne vysoké školy a vedecké ústavy, v ktorých matematika zohrávala rolu objektu prvoradej dôležitosti alebo mala aspoň postavenie jedného z kľúčových predmetov pracovnej náplne inštitúcie. Osamelí bežci typu Grassmanna, Weierstrassa alebo Ramanujana, ktorí tvorili novú matematiku v hlboké izolácii od popredných vedeckých centier – u prvých dvoch však nie v absolútnej odlúčenosti od zdrojov informácie o výsledkoch vedeckej tvorby – patrili v 20. storočí, najmä v jeho druhej polovici, k dávno prekonanej etape vývinu. Z hľadiska splnenia podmienok nevyhnutných pre úspech tvorivej vedeckej práce v matematike poskytovala situácia na Slovensku po skončení 2. svetovej vojny v r. 1945 nevelmi optimistický a perspektívny obraz. Jedinou reálne fungujúcou vysokou školou s vysokoškolskou výučbou matematiky bola na Slovensku Slovenská vysoká škola technická (SVŠT) v Bratislave, na ktorej podstatnú časť výučby obstarávali prof. Jur Hronec a prof. Josef Kaucký ([4]). Matematický ústav Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity (PF SU), formálne zriadený v októbri 1944, bol fakticky personálne zjednotený s obsadením I. a II. ústavu matematiky na SVŠT. To isté sa týkalo Ústavu deskriptívnej geometrie na SVŠT a Ústavu deskriptívnej geometrie na PF SU na čele so spoločným prednostom Dr. techn. Gabrielom Čeněkom. Rozdiel v deskriptívno-geometrickom vzdelávaní poslucháčov techniky a kandidátov stredoškolského učiteľstva deskriptívnej geometrie spočíval v niekoľkých špeciálnych prednáškach, ktoré pre poslucháčov učiteľstva deskriptívnej geometrie na PF SU konal ako honorovaný docent od r. 1943 stredoškolský profesor RNDr. Viktor Svitek. Na SVŠT a na PF SU pôsobil po návrate z koncentračného tábora jediný matematik spĺňajúci kritériá vedeckého pracovníka v modernej oblasti matematiky – RNDr. Štefan Schwarz ([1], [3]).

V oblasti publikačných možností bola situácia rovnako neutúšená. Jediné vedecké periodikum, ktoré príležitostne dávalo k dispozícii svoje stránky matematikom na publikáciu ich výsledkov, bol *Technický obzor slovenský*. Niekoľko polosúkromných monografií a ojedinelé vydania zborníka Prírodovedeckej fakulty SU predstavovali popri vydaní Hroncových učebníc matematiky ([4]) a Čeněkových skrípt z deskriptívnej geometrie jedinou vysokoškolskú matematickú produkciu počas vojnovéj I. Slovenskej republiky.

1945–1950

Po prekonaní prvých mesiacov povojnového chaosu, zákonitých ťažkostí a všemožných nedostatkov začala na jeseň r. 1945 vysokoškolská výučba matematiky v Bratislave pokračovať v podstate s nezmeneným personálnym obsadením, s ktorým sa na jeseň r. 1944 skončila. Mierne zmeny prinieslo angažovanie absolventov Prírodovedeckej fakulty SU Ladislava Mišíka (1921–2001) ([2]) a Michala Haranta (1920–1995) za asistenta matematiky, resp. deskriptívnej geometrie, resp. RNDr. Antona Hut'u (1915–2000) ako suplenta PF SU (už od r. 1943) pre odbor numerickej matematiky. RNDr. Štefan Schwarz sa r. 1946 habilitoval na SVŠT, r. 1947 bol vymenovaný za mimoriadneho profesora a stal sa prednostom I. ústavu matematiky na SVŠT namiesto prof. J. Kauckého, ktorý prešiel na Vysoké učení technické v Brne. S platnosťou od r. 1947 boli vymenovaní za mimoriadnych profesorov matematiky RNDr. Viktor Svitek a RNDr. František Jurga, ktorý predtým príležitostne pôsobil ako honorovaný docent aplikovanej matematiky na SVŠT ([6]). Ich pôsobiskom sa stala Pedagogická fakulta Slovenskej univerzity (PdF SU) v Bratislave, ktorá začala svoju činnosť v školskom roku 1947–1948, hoci oficiálne zriadená bola už rok predtým. Prvým dekanom fakulty bol prof. J. Hronec. Prof. Jurga bol čoskoro preložený do Košíc, kde sa stal jednou zo zakladajúcich osobností vysokých škôl trvalo alebo dočasne pôsobiach v Košiciach.

Publikačná vedecká produkcia slovenských vysokoškolských učiteľov v tomto období nebola príliš rozsiahla, čo pri záľahe organizačných a pedagogických povinností na pracoviskách nebolo príliš prekvapivé, toľko keď nové pracoviská a nové študijné programy vyžadovali prípravu nových študijných materiálov. Vyšlo niekoľko prác prof. Š. Schwarza s ústrednou tematikou jeho vtedajšieho obdobia – teóriou pologrúp, ktorej sa venoval od začiatku štyridsiatych rokov.

Blahodarný vplyv na vedeckú orientáciu a výchovu mladých vedeckých kádrov na Prírodovedeckej fakulte SU malo účinkovanie prof. Otakara Borůvku z Masarykovej univerzity v Brne, ktorý od r. 1947 po dobu jedenásť a pol roka viedol prednášky a semináre z niekoľkých partíí teórie diferenciálnych rovníc a má osobnú zásluhu na raste vedeckej kvalifikácie niekoľkých slovenských matematikov. Osobne usmernil záujem Milana Kolibiara a Jána Jakubíka, končiacich štúdium na PF SU v druhej polovici 40. rokov, na vznikajúce perspektívne odvetvie teórie zväzov, o ktorom práve bola vyšla monografia G. Birkhoffa *Lattice theory*. Táto oblasť sa stala pre oboch celoživotnou tematikou.

Koncom 40. rokov boli na SVŠT v Bratislave tri matematické ústavy: I. ústav matematiky s prednostom mim. prof. Š. Schwarzom a asistentmi M. Kolibiarom a J. Jakubíkom, II. ústav matematiky s prednostom prof. J. Hroncom a asistentmi RNDr. Ladislavom Mišíkom a RNDr. Markom Švecom a Ústav aplikovanej matematiky s prednostom RNDr. Antonom Hut'om a jedným asistentom. K matematickým pracoviskám SVŠT možno zaradiť aj Ústav deskriptívnej geometrie s prednostom mim. prof. G. Čeněkom a asistentom RNDr. Václavom Medekom. Naďalej prevládala personálna symbióza matematických ústavov SVŠT a PF SU, v určitej miere aj s matematickým ústavom na Pedagogickej fakulte SU, hoci určité náznaky oddelenia ústavov sa už začali objavovať.

Potreba zvýšeného počtu kvalifikovaných učiteľov pre 6.–9. ročník strednej školy (podľa zákona o jednotnej škole z 21. 4. 1948) vychovávaných na pedagogickej fakulte si vyžiadala

zriadenie pobočky bratislavskej fakulty v Košiciach r. 1949, presídlenaj do Prešova r. 1952, a konzultačných stredísk v Nitre a Zvolene, ktoré potrebu kvalifikovaných vyučujúcich saturovali náborom uznávaných miestnych stredoškolských odborníkov a čerstvých absolventov vysokoškolského učiteľského štúdia.

1951–1960

Do života všetkých vysokých škôl v Česko-Slovensku, a tým aj do života vysokoškolských matematických pracovísk výrazne zasiahla realizácia vysokoškolského zákona z r. 1950, ktorým sa obsahová náplň aj organizačná štruktúra vysokoškolského štúdia a pracovísk vysokých škôl mali prispôbiť obvyklým inštitúciám a poriadkom zavedeným v Sovietskom zväze. Základnou organizačnou jednotkou výkonnej štruktúry pracovísk sa *namiesto ústavu* stala *katedra*, združujúca primerane početný operatívny kolektív pracovníkov toho istého odboru s komplexnými povinnosťami v oblasti organizačnej, pedagogickej a odborno-vedeckej. Tak sa rázne pretrhla „personálna únia“ matematických ústavov SVŠT a PF SU a vznikli relatívne striktne oddelené útvary, ktorých spolupráca s pribúdajúcim časom a prílevom nových členov na pracoviská znateľne ochabovala. Vedúcim katedry matematiky na PF SU sa stal prof. J. Hronec, vedúcim jedinej katedry matematiky na SVŠT sa stal prof. Š. Schwarz. Na PdF SU zlúčením ústavov vznikla katedra matematiky a fyziky, ktorej vedúcim sa stal fyzik prof. Ján Vanovič. (Podľa vysokoškolského zákona z r. 1950 zanikla kategória mimoriadnych profesorov a vznikla jednotná kategória vysokoškolských profesorov s označením *profesor*.)

Časté organizačné a dislokačné zmeny v sieti vysokého školstva dostali relatívne definitívnu podobu r. 1952, keď vznikli a natrvalo sa usídlili Vysoká škola technická (VŠT) v Košiciach, Vysoká škola lesnícka a drevárska (VŠLD) vo Zvolene a Vysoká škola poľnohospodárska (VŠP) v Nitre. Osamostatnenie týchto škôl prinieslo so sebou aj vznik nových vysokoškolských matematických pracovísk. Tak vznikla na VŠT v Košiciach katedra matematiky a deskriptívnej geometrie s vedúcim prof. F. Jurgom (1909 – 1963), na VŠLD vo Zvolene vznikla katedra matematiky a fyziky s vedúcim prof. RNDr. Cyrilom Palajom (1912 – 1984). Na VŠP v Nitre vznikla samostatná katedra matematiky až r. 1972; jej prvým vedúcim sa stal prof. RNDr. František Krňan (1909–1981). Vznik toľkých nových vysokoškolských matematických pracovísk začiatkom 50. rokov bol zákonito sprevádzaný akútnou potrebou kvalifikovaných vysokoškolsky vzdelaných matematických kádrov, ktorých nebol v tom čase na Slovensku nadbytok a ktoré sa vtedy spravdila regrutovali z kruhov schopnejších stredoškolských profesorov. Na Slovensku chýbalo zázemie typické pre krajiny s tradičným systémom vysokých škôl, v ktorom sa z radov schopných, vzdelaných a ambiciózných stredoškolských profesorov habilitáciami vytvárala záloha uchádzačov o miesta vysokoškolských učiteľov. Ostatne, nový systém kategorizácie vysokoškolských učiteľov, v ktorom početne prevládala kategória odborných asistentov, ani osobitý tlak na vyššiu kvalifikáciu pracovníkov pre zaradenie do kategórie docentov a profesorov v prvom období existencie nových katedier naliehavo nevytváral.

Ďalším ustálenú tradíciu domácich vysokých škôl narúšajúcim zásahom do života vysokých škôl bol vysokoškolský zákon z r. 1953, ktorý zaviedol paušálne označovanie vysokoškolských absolventov univerzitného štúdia, zrušil udeľovanie tradičných akademických titulov a namiesto nich zaviedol kategóriu *vedeckých hodností kandidáta vied a doktora vied* s osobitým systémom prípravy na získanie prvej hodnosti formou vedeckej aspirantúry pod vedením kvalifikovaného

školiť. Väčšina matematických vysokoškolských pracovísk na Slovensku v prvých rokoch platnosti nových zákonov nespĺňala podmienky na oprávnenie udeľovať vedecké hodnosti v oblasti fyzikálno-matematických vied.

Neveľmi serióznym a solídne premysleným zásahom do systému vysokých škôl bol pokus o oddelenie tzv. odborného štúdia na klasických fakultách univerzít (filozofická a prírodovedecká) od špecializovanej prípravy učiteľov 2. stupňa základnej školy na dvojročných vyšších pedagogických školách a učiteľov vyšších stredných škôl na štvorročných vysokých školách pedagogických. Tento predčasný a pre malú krajinu sčasti aj hospodársky neúnosný experiment s krátkodobým trvaním v rokoch 1953–1959 (s dobiehaním cyklu do konca školského roku 1961–1962) znamenal zbytočné oslabenie kvalifikačnej úrovne potenciálne jednotných matematických katedier na univerzitách. Vedúcim katedry matematiky na fakulte prírodných vied jedinej vysokej školy pedagogickej na Slovensku v Bratislave (s filologickou fakultou v Prešove) bol prof. V. Svitek, vedúcim katedry matematiky vyššej pedagogickej školy v Bratislave bol doc. Ján Stalmašek.

Dalšiu etapu reformy učiteľského štúdia pre základné školy vrátane štúdia učiteľstva matematiky pre 2. stupeň základných škôl predstavovali pedagogické inštitúty, ktoré vznikli namiesto zrušených vyšších pedagogických škôl v Trnave (kam sa presídlila škola z Bratislavy), v Nitre, v Banskej Bystrici a v Prešove. Od r. 1964, keď sa štatút inštitútov zmenil na štatút riadnych vysokoškolských fakúlt, sa matematické katedry týchto pracovísk budovali s väčšou intenzitou a hlbším teoretickým dôrazom.

Poslednou matematickou inštitúciou, ktorá vznikla r. 1959 ako zárodok dnešného Matematického ústavu Slovenskej akadémie vied v Bratislave, bol Kabinet matematiky pri SAV, ktorého prvým riaditeľom bol prof. RNDr. Anton Kotzig, DrSc.(1919–1991) ([6]), pôvodne pracovník katedry matematiky Vysokej školy ekonomickej v Bratislave a v rokoch 1952–1958 rektor tejto školy. Skromné personálne začiatky kabinetu zodpovedali zámerom prof. Schwarza, ktorý v záujme budovania budúceho ústavu ako špičkového pracoviska uprednostňoval pozvoľné obsadzovanie kabinetu kvalitnými a perspektívnymi mladými kádrami pred masívnym príjmom priemerných uchádzačov. Prof. Kotzig bol priekopníkom teórie grafov na Slovensku.

Tvorivá vedecká práca v matematike sa na Slovensku v 50. rokoch rozbíhala značne pozvoľna. Okrem prof. Schwarza, ktorý intenzívne a úspešne pokračoval v rozvíjaní matematiky teórie pologrúp, sa už v prvej polovici 50. rokov uviedli prvými prácami z teórie zväzov M. Kolibiar a J. Jakubík ([1]). V tejto činnosti úspešne pokračovali až do konca predmetného obdobia, J. Jakubík od r. 1952 už ako pracovník VŠT v Košiciach. Z učiteľov katedry matematiky na SVŠT sa záujem L. Mišíka orientoval na teóriu funkcií a funkcionálnu analýzu a pozornosť M. Šveca sa upriamila na teóriu obyčajných diferenciálnych rovníc ([5]). Táto tematika predstavovala aj hlavný prúd vedeckej práce na PF SU v Bratislave (od r. 1954 opäť Univerzita Komenského), kde okrem dvojdielnej monografie prof. Hronca *Diferenciálne rovnice I, II* (1956, 1958) ([4]) boli úspešne obhájené kandidátske dizertačné práce Michala Greguša a Valtera Šedu. Novú tematiku do spektra vedeckej práce v matematike na PF UK vniesol absolvent učiteľstva matematiky a fyziky na Karlovej univerzite v Prahe RNDr. Tibor Šalát, ktorý svoju celoživotnú vedeckú tvorbu zasvätil teórii čísel a teórii reálnych funkcií. Práce prof. Jana Srba zo syntetickej algebrickej, projektívnej a deskriptívnej geometrie, doc. Miliča Syptáka z diferenciálnej geometrie n -rozmerného euklidovského priestoru a doc. Michala Haranta

z klasickej diferenciálnej a deskriptívnej geometrie, publikované vo fakultnom zborníku *Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Comenianae, Seria Mathematica*, neprekročili obzor klasickej tematiky. Rovnaké hodnotenie možno v podstate vysloviť o geometrických publikáciách prof. V. Sviteka, prof. G. Čenčka a doc. V. Medeka. V numerickom riešení diferenciálnych rovníc zaznamenal pokrok spresnením klasických výsledkov doc. A. Huťa ([5]). Z vtedajších mimobratislavských pracovníkov vysokých škôl sa výraznejšie prezentoval prof. F. Jurga článkami a monografiou o nomografických metódach a doc. C. Palaj výsledkami v klasickej algebrickej geometrii a lineárnej algebre.

Päťdesiate roky zaznamenali dva významné počiny. R. 1950 začal vychádzať Matematicko-fyzikálny časopis, v neskorších rokoch pretransformovaný na Matematický časopis SAV, ktorý bol predchodcom dnešného časopisu *Mathematica Slovaca*. Slovenská matematická obec získala tak pravidelné periodikum, ktoré jej umožnilo stálu a nezávislú príležitosť publikovať vlastné vedecké výsledky popri možnostiach publikácie v celoštátnych a renomovanejších československých časopisoch. Druhým významným počinom s ďalekosiahlym a dlhodobým dosahom bolo založenie seminára *Algebraické štruktúry a matematická logika*, v ktorom za premysleného vedenia akademika Schwarza vyrástlo niekoľko významných osobností celoslovenského, ba aj európskeho formátu (Juraj Bosák, Otokar Grošek, Blanka Kolibiarová, Štefan Porubský, Beloslav Riečan, Zdena Riečanová, Jozef Gruska, Ján Ivan, Jozef Eliáš a dobrá desiatka ďalších).

1961–1965

Prvá polovica šesťdesiatych rokov sa v matematickom živote na Slovensku niesla v znamení formovania seminárov, z ktorých niektoré mali v budúcnosti výrazným spôsobom ovplyvňovať smerovanie vedeckej tvorby a výchovu mladých vedeckých kádrov na Slovensku. Bol to v prvom rade bratislavský seminár z teórie diferenciálnych rovníc s celoslovenskou pôsobnosťou, v ktorom niektorí bratislavskí účastníci naďalej výdatne ťažili z návštevy brnianskeho seminára diferenciálnych rovníc s dlhšou tradíciou a významnejšími výsledkami. Utvárali sa zárodky seminára teórie reálnych funkcií a seminára z teórie čísel ([5]). Sľubný štart mal seminár z teórie grafov organizovaný pri Kabinete matematiky SAV (neskoršom Matematickom ústave SAV) vedený prof. A. Kotzigom, v ktorom sa zgrupovala početná skupina nádejných mladých pracovníkov. Okolo M. Kolibiara v Bratislave a J. Jakubíka v Košiciach sa z mladých odchovancov týchto vedeckých osobností začali tvoriť základy slovenskej školy čiastočne usporiadaných štruktúr. Na SVŠT v Bratislave pokračoval v štúdiu nových monografií pod vedením V. Medeka geometrický seminár založený ešte v polovici päťdesiatych rokov G. Čenčkom. K významnejším výsledkom v modernej geometrii sa nedopracoval a v neskorých sedemdesiatych rokoch sa postupne preorientoval na technické aplikácie ústiace neskôr do počítačovej geometrie a počítačovej grafiky.

Okolo polovice šesťdesiatych rokov získavajú profesúru významní predstavitelia vtedajšej staršej a strednej generácie slovenských matematikov (C. Palaj, M. Kolibiar, J. Jakubík, M. Greguš, V. Medek, M. Švec) a kandidátske dizertačné práce obhajujú ich prví aspiranti, resp. generační druhovia týchto aspirantov (Juraj Bosák, Pavol Brunovský, Jozef Moravčík, Tibor Katriňák, Jozef Gruska, Beloslav Riečan a ďalší), ktorí sa postupom času osvedčili ako vedúce osobnosti slovenskej matematiky.

Opisované krátke obdobie je časom intenzívneho kvantitatívneho rastu počtu absolventov

slovenského matematického školstva, v ktorom dôležitý prínos znamenalo zriadenie matematických pracovísk na novoutvorenej Prírodovedeckej fakulte Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach r. 1963 na čele s uznávanými učiteľmi a organizátormi prof. C. Palajom a prof. Ernestom Jucovičom. R. 1965 na fakultu prišiel čerstvý kandidát vied z Matematického ústavu ČSAV v Prahe Lev Bukovský, ktorý mal v budúcnosti zohrať významnú úlohu na univerzite i v celom slovenskom univerzitnom školstve.

Záver

Slovenská matematika vybudovala do r. 1965 solídne inštitucionálne a personálne základy svojho rozvoja na ďalšie desaťročia. V súčasnosti sa uzatvára pedagogická kariéra generácie, ktorá ku koncu sledovaného obdobia s prvými vedeckými výsledkami a perspektívnym programom vkročila ráznym krokom na scénu slovenského školstva a vedy.

Literatúra

- [1] Fabiánová J.: *Z histórie algebry na Slovensku*. Diplomová práca. Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského, Bratislava, 1998.
- [2] Dančíková M.: *Významné osobnosti v matematike na Slovensku po 2. svetovej vojne*. Diplomová práca. Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, Trnava, 2009.
- [3] Nemoga K., Riečan B.: *Matematika v b-mol (Štefan Schwarz – matematik a pedagóg)*. Veda, Bratislava, 1999.
- [4] Hronec O., Sulaček J., Riečan B.: *Starý pán (Kniha o Jurovi Hroncovi a jeho dobe)*. Veda, Bratislava, 1999.
- [5] Šebesta J., Čižmár J., Šuster B.: *25 rokov Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave*. FMFI UK, Bratislava, 2005.
- [6] Hlaváč A. a kol.: *Matematici, fyzici a astronómovia na Slovensku II*. JSMF, Bratislava, 1999.

Adresa

Prof. RNDr. Ján Čižmár, Ph.D.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
Priemyselná 4
P. O. BOX 9
918 43 Trnava
Slovenská republika
e-mail: jan.cizmar@truni.sk, Jan.Cizmar@fmph.uniba.sk

HILBERTŮV PROGRAM

LUDMILA DOSTÁLOVÁ

Abstract: The paper aims to present a systematic overview of the Hilbert's Programme in its historitical and contentual connotations. It explains its historical roots and contemporary background as well as its implications for the further development in the foundations of mathematics. The key topic is the development of the axiomatic-deduction method with respect to its use in Arithmetics as well as the question of its completeness and decidability.

1 Historické souvislosti

Na první pohled je Hilbertův program záležitostí dvacátých let dvacátého století – v roce 1921 jej Hilbert poprvé explicitně zformuloval;¹ roku 1926 byl precizován;² a v roce 1929 se už Hilbert cítil oprávněn prohlásit, že úspěšné naplnění programu je na dosah ruky;³ aby roku 1930 pohřbily toto jeho očekávání Gödelovy výsledky.⁴ Při bližším zkoumání můžeme jeho počátky hledat na počátku dvacátého století, kdy se Hilbert začal systematicky věnovat práci v základech matematiky. Díky tomu se okolo něj v Göttingen shromáždila skupina logiků, jejímž vědecko-výzkumným záměrem Hilbertův program v podstatě je. Nicméně ideové kořeny celého programu je třeba hledat daleko hlouběji – až v Aristotelových *Druhých analytikách* a v Leibnizově *Reformě věd*, které lze chápat jako klíčové momenty ve vývoji metody, která se dnes označuje jako axiomaticko-deduktivní a je charakteristickým rysem metodologie evropské vědy.

¹ Hilbertův program byl poprvé explicitně zformulován ve třech Hamburských přednáškách z léta 1921, které byly odpovědí na článek Hermanna Weyla "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", *Mathematische Zeitschrift*, 10(1921), 37–79. Publikovány byly o rok později jako "Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität* 1(1922), 157–177. Program navazuje na předchozí Hilbertovu práci v základech matematiky. Oproti předchozím formulacím (najít vhodný axiomatický systém matematiky a dokázat jeho bezespornost) se tu poprvé objevuje požadavek, že metody použité při dokazování a odvozování musí být finitní, což v podstatě odpovídá požadavku rozhodnutelnosti celého systému. Řada pozdějších prací (Hilbertových i jeho spolupracovníků) se pak zabývá otázkou, které z obecně užívaných metod tomuto kritériu vyhovují. Nejpodrobněji tuto otázku Hilbert rozpracoval v článku "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, 95(1926), 191–190. Hilbertova koncepce finitních metod je velice problematickou otázkou. Podrobněji viz např. článek Richarda Zacha "The Practice of Finitism. Epsilon Calculus and Consistency Proofs in Hilbert's Program", *Synthese*, 137 (2003), 211–259.

² V článku *O nekonečnu* z tohoto roku (viz předchozí poznámka) se kromě podrobného výkladu o finitních metodách poprvé objevuje explicitní distinkce mezi tzv. matematikou reálnou a ideální, resp. matematikou finitní odpovídající běžné matematické praxi, a transfinitní (např. kvantifikátory), která má být pouze konzervativním rozšířením matematiky finitní. Konzervativní v tom smyslu, že zjednodušuje vyjadřování o finitní (reálné) části matematiky, ale veškerá tvrzení finitní (reálné) matematiky zformulovaná či odvozená pomocí transfinitní (ideální) mohou být zformulována či odvozena i bez nich, čistě finitním způsobem.

³ Hilbert toto své prohlášení učinil v rámci přednášky "Probleme der Grundlegung der Mathematik" přednesené roku 1928 na Matematickém kongresu v Bologni a publikované o rok později v *Mathematische Annalen*, 102(1929), 1–9. V tomto svém prohlášení se opíral především o Bernaysovy a Ackermannovy výsledky publikované v roce 1927–1928. Jednalo se o důkazy bezespornosti různých částí matematiky prostřednictvím tzv. *ε*-kalkulu.

⁴ Gödel své výsledky poprvé prezentoval na podzim 1930 na konferenci v Königsbergu. Publikovány byly v následujícím roce "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1931), 173–198, kde je také poprvé zkonstruována konkrétní nedokazatelná sentence. Tato práce byla poté uznána jako habilitační.

2 Hilbertův program a úplnost aritmetiky

2.1 Principy Hilbertova programu

Stručně je možné Hilbertův program shrnout do dvou bodů:

- najít konečný systém (reálných)⁵ axiomů, ze kterého by bylo možné (pouze finitními metodami)⁶ odvodit veškerou matematiku,
- dokázat (opět finitními prostředky) bezespornost tohoto axiomatického systému.

Naplnit tento program předpokládá důslednou formalizaci matematiky – přepis všech tvrzení matematiky do formalizovaného jazyka a nalezení pravidel pro odvozování tak, aby důkaz konkrétního tvrzení (jeho odvození z těchto axiomů) v principu spočíval pouze v čistě mechanické manipulaci se symboly tohoto formalizovaného jazyka. Hilbert v tomto ohledu vychází ze systému Principia Mathematica (zhruba klasická predikátová logika prvního řádu a kalkulus přirozené dedukce).

První bod programu v sobě v podstatě zahrnuje důkaz korektnosti, úplnosti, konzervativnosti⁷ a rozhodnutelnosti⁸ zvoleného axiomatického systému. Hlavní pozornost se však soustředila na druhý bod programu, a sice na důkaz bezespornosti, čímž měla být zaručena pravdivost celého systému matematiky. Tento důkaz bezespornosti měl být přímý a nikoliv relativní; tj. bezespornost příslušného axiomatického systému neměla být dokazována vnořením do nějaké jiné teorie, jako tomu bylo s dosavadními důkazy tohoto druhu, nýbrž přímo (z axiomů tohoto systému samých), a sice tak, že se (finitními prostředky) ukáže, že z axiomů tohoto systému nelze odvodit spor. Tímto směrem se proto ubírala většina práce při naplňování Hilbertova programu, především práce Wilhelma Ackermanna a Paula Bernaysa, o něž především se opíral Hilbert při svém prohlášení z roku 1929.

2.2 Druhy úplnosti

Chápeme-li teorii jako množinu tvrzení daného jazyka, pak řekneme, že tato teorie (množina tvrzení) je úplná, pokud pro každé tvrzení tohoto jazyka platí, že buď toto tvrzení, nebo jeho negace patří do této teorie (množiny tvrzení). Neboli, úplné teorie jsou zvláštním případem maximálně bezesporných množin tvrzení. Od tohoto základního syntaktického pojmu úplnosti se odvíjí všechny tři různé pojmy úplnosti, které souvisí především s tím, jak zjistit úplnost nějakého systému nebo jak jí dosáhnout. V tomto duchu se nerozlišuje mezi systémem logiky a specifickou teorií – obojí je teorie, tj. množina platných tvrzení.

Sémantická úplnost je vlastností konkrétního systému logiky. Systém logiky (kalkulus) je sémanticky úplný, pokud množina jeho teorémů (odvoditelných formulí) je totožná s množinou všech tautologií (platných formulí).

Deduktivní úplnost je v podstatě tou úplností, kterou měl Hilbert na mysli při formulování svého programu. Toto pojetí úplnosti je čistě syntaktické. Teorie je deduktivně úplná, pokud existují množina tvrzení (axiomů) a systém odvozovacích pravidel takové, že pro každé tvrzení, které je zformulováno v jazyce této teorie, platí, že buď toto tvrzení, nebo jeho negace je odvoditelné prostřednictvím příslušných odvozovacích pravidel z daných axiomů. Hilbert měl jediné tu omezující podmínku na

⁵ Viz poznámka 2.

⁶ Viz poznámka 1.

⁷ Viz poznámka 2.

⁸ Viz poznámka 1.

danou množinu axiomů i pravidla, aby byly konečné, resp. rekurzivní. V jeho pojetí tedy úplnost do jisté míry splývá s efektivní rozhodnutelností.

Deskriptivní úplnost na rozdíl od deduktivní je ryze sémantická. Teorie je deskriptivně úplná, pokud se jedná o takovou množinu tvrzení, která má pouze zamýšlené modely. V případě axiomatické teorie to znamená, že třída modelů množiny axiomů neobsahuje žádné nestandardní modely; resp., že všechny její modely jsou isomorfní. Tato koncepce úplnosti pracuje pouze s pojmem platnosti tvrzení a není spojena s žádným konkrétním systémem logiky. Tím se především liší od deduktivní úplnosti, kde kromě množiny axiomů je zapotřebí brát v úvahu i systém odvozovacích pravidel.

Mezi těmito třemi druhy úplnosti platí následující vztah: teorie je deduktivně úplná, pokud její mimologická axiomatizace je deskriptivně úplná a použitý systém logiky je úplný sémanticky.

2.3 Úplnost aritmetiky

Gödelovy výsledky znamenají, že neexistuje a nemůže existovat **deduktivně** úplná axiomatizace matematiky, neboť vždy bude existovat nezávislá sentence. Tato skutečnost ale bývá obvykle interpretována v tom smyslu, že neexistuje a nemůže existovat **deskriptivně** úplná axiomatizace matematiky, tj. matematická axiomatizovaná teorie, která by měla pouze zamýšlené modely a vylučovala ty nestandardní. Ve skutečnosti však Gödelovy výsledky znamenají pouze tolik, že deskriptivně úplná axiomatizace matematiky nemůže být založena na sémanticky úplné logice. Tento fakt je přítomen v matematické praxi, která běžně vytváří deskriptivně úplné, ale deduktivně neúplné axiomatizace aritmetiky, aniž by si byla vědoma teoretické reflexe těchto počinů.

Nejběžnější jsou deskriptivně úplné axiomatizace matematiky v rámci predikátové logiky druhého řádu. Např. doplní-li se k Peanově aritmetice místo schématu indukce druhořadový axiom indukce:

$$\forall x \{ [X(0) \wedge \forall x (X(x) \rightarrow X(x+1))] \rightarrow \forall x X(x) \},$$

vznikne tak (při standardní sémantice)⁹ deskriptivně úplná teorie aritmetiky; tj. axiomatizace, která vylučuje nestandardní modely aritmetiky.

Stejně tak lze v logice vyšších řádů zformulovat i jiné matematické principy a pojmy, které se vymykaly úplné definici či axiomatizaci na úrovni prvního řádu, jako je např. konečnost či nekonečnost,otence, kardinalita, dobré uspořádání a především rovnost (identita jako taková a ekvikardinalita). Právě nemožnost definovat, resp. axiomatizovat tyto pojmy na úrovni predikátové logiky prvního řádu způsobuje neúplnost matematických teorií prvního řádu a připouští tak nestandardní modely a interpretace. Proto se tyto pojmy k příslušným teoriím prvního řádu připojují jako metateoretické omezení a doplňující předpoklady, aby bylo v prvním řádu (deskriptivní) úplnosti dosaženo alespoň na sémantické, když ne syntaktické úrovni.

Objevují se však i pokusy o deskriptivně úplné axiomatizace aritmetiky v nestandardních systémech logiky. Za všechny jmenujme např. Hintikkovu IF-logiku, která podle jejího autora má tu výhodu, že dosahuje deskriptivní úplnosti bez ontologické problematičnosti logiky druhého řádu a s výhodami jako je rozhodnutelnost či přímý důkaz bezespornosti.

Tyto a jiné axiomatizace pak splňují svůj účel, ovšem jen potud, pokud cíl matematiky nevidíme v odvozování teorémů, ale v popisování matematických struktur.

⁹ Standardní sémantika predikátové logiky druhého řádu vyžaduje, aby ke každé možné třídě individuí prvního řádu existovala entita druhého řádu, která má za své prvky tato a pouze tato individua, což je požadavek ontologicky značně problematický.

3 Závěr

Hilbertův program stanovil dva cíle – nalézt (deduktivně) úplnou axiomatizaci matematiky a dokázat přímým způsobem její bezespornost. Kromě toho ale také stanovil prostředky, jimiž má být tohoto cíle dosaženo – axiomatizace i metody odvozování mají být pouze finitistické (konečné, resp. rekurzivní).

Gödelovy věty o neúplnosti pak ukazují, že stanovenými prostředky nelze požadovaného cíle dosáhnout. Konečná, resp. rekurzivní axiomatizace matematiky nemůže být deduktivně úplná, je-li bezesporná. Má-li být axiomatizace matematiky úplná deskriptivně, pak nemůže být rekurzivní nebo nemůže být založena na sémanticky úplném systému logiky. Tím byla jednou provždy prokázána nerealizovatelnost Hilbertova programu.

Všechny následující pokusy o „úplné“ axiomatizace aritmetiky tak nejsou v žádném případě popřením nebo překonáním těchto Gödelových výsledků. Pouze na ně navazují a pokračují ve směru, který věty o neúplnosti vytyčily. Použité logiky totiž nejsou sémanticky úplné, a proto Gödelovým výsledkům nijak neodporuje, když se v jejich rámci podařilo zformulovat deskriptivně úplnou axiomatizaci aritmetiky, a je-li jejími prostředky možné nejen rozhodovat, zda dané aritmetické tvrzení je platné či nikoliv, ale případně i provést přímý důkaz bezespornosti.

Tyto výsledky však nelze považovat za splnění Hilbertova programu, neboť prostředky, jimiž bylo dosaženo cíle, nejsou finitistické. Tyto logiky nejsou rekurzivně axiomatizovatelné a metody rozhodování platnosti matematického tvrzení v dané matematické axiomatizaci nejsou finitistické (rekurzivní). Neodpovídají tedy těm metodám, jež pro dosažení svého cíle Hilbert ve svém programu stanovil.

Literatura

- [1] Detlefsen M.: *Hilbert's Program*. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [2] Gödel K.: *Filosofické eseje*. Oikomenh, Praha, 1999.
- [3] Ewald W. B. (ed.): *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 1996, 1115–1133.
- [4] Hintikka J.: *Language, Truth and Logic in Mathematics*. Selected papers, vol. 3, Kluwer, Dordrecht, 1998, 84–105.
- [5] Leibniz G. W. F.: *O reforme vied*. Slovenská akadémia vied, Bratislava, 1956.
- [6] Parkinson G. H. R. (ed.): *Leibniz, G. W. F.: Logical Papers*. Clarendon Press, Oxford, 1966.
- [7] Shapiro S.: *Foundations without Foundationalism: A Case for Second Order Logic*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [8] Zach R.: *Hilbert's Program Then and Now*. In Jacquette D. (ed.): *Handbook of Philosophy of Logic*. North Holland, Amsterdam, 2004, 917–925.

Adresa

Mgr. Ludmila Dostálová, Ph.D.
Katedra filosofie
Fakulta Filosofická, Západočeská univerzita
Sedláčkova 19
306 14 Plzeň
e-mail: ldostal@kfi.zcu.cz

PROMĚNY ODDĚLENÍ MATEMATICKÝCH STROJŮ V ČSAV

HELENA DURNOVÁ

Abstract: Upon its foundation in November 1952, Mathematical Institute was one of the institutes of the Czechoslovak Academy of Sciences. In 1950, the co-operation of mathematicians and computer constructors started within the Centre for research and technological development. The Department gained more independence as the Laboratory for Mathematical Machines (1953–1955), Institute for Mathematical Machines (1955–1958), and Research Institute for Mathematical Machines (1958–1992).

1 Úvod

1.1 Stručně o pramenech k dějinám výpočetní techniky v Československu

Na první pohled by se zdálo, že dějiny výpočetní techniky v Československu jsou dostatečně podrobně zpracovány v různých vzpomínkových článcích bývalých pracovníků Výzkumného ústavu matematických strojů a dalších pamětníků, zejména ve formě anekdot a vzpomínek na nejvýraznější osobnosti v oboru výpočetní techniky.¹ Tyto články sice nezřídka obsahují náznaky zajímavých příběhů, avšak často si odporují, a proto je nezbytně nutné nahlédnout také do dobových tištěných pramenů. Příběhy se navíc často týkají především výroby počítačů, přičemž je daleko menší pozornost věnována programování a aktivitám s ním souvisejícím.

Dějiny výpočetní techniky sahají do nedávné minulosti (v době před 2. světovou válkou lze mluvit spíše o prehistorii výpočetní techniky), což činí historickou práci jednoduchou i obtížnou zároveň. Zdánlivá jednoduchost práce spočívá v dostupnosti pramenů, včetně možnosti mluvit s pamětníky, na druhé straně je zřejmé, že věnovat se nedávné historii znamená nutně konfrontaci právě s pamětníky. Důsledkem hojnosti pramenů je pak nutnost hodnotit jednotlivé zdroje také z hlediska jejich významnosti.²

Oddělení strojů na zpracování informací vedené Antonínem Svobodou (1907–1980) bylo součástí ČSAV při jejím vzniku v listopadu 1952. Fungovalo v rámci Matematického ústavu vedeného Eduardem Čechem (1893–1960). Eduard Čech a Antonín Svoboda však začali spolupracovat již v roce 1950 na půdě Ústředního ústavu matematického, který byl součástí Ústředí vědeckého výzkumu (později Ústředí výzkumu a technického rozvoje).

Krátce po vzniku ČSAV se Oddělení strojů na zpracování informací osamostatnilo a dále pokračovalo v činnosti jako Laboratoř matematických strojů (1953–1955), Ústav matematických strojů (1955) a Výzkumný ústav matematických strojů (1958–1992, mimo akademickou půdu).

¹ Výjimkou je diplomová práce Petra Kováře pod vedením Prof. Ivana Jakubce (Kovář P.: *Dějiny výpočetní techniky v Československu 1950–1975*. FF UK, Praha, 2005).

² Viz Mahoney M. S.: *Issues in the history of computing*. In Bergin T. J., Gibson R. G. (eds.): *History of programming languages*. ACM Press, 1996, 772–781.

Základními prameny pro zpracování historie Oddělení strojů na zpracování informací, Laboratoře matematických strojů a Ústavu matematických strojů (1950–1958) jsou především Archiv Akademie věd ČR³ a publikace vydávané zmíněnými útvary, především sborník *Stroje na zpracování informací*, vydávaný od roku 1953. Technické detaily prováděného výzkumu lze ještě podrobněji studovat ve výzkumných zprávách uložených v Národním technickém muzeu. O širších souvislostech vývoje, výroby a využívání výpočetní techniky u nás lze nalézt zmínky v nejrůznějších časopisech odborného i populárního charakteru (včetně např. *Časopisu pro pěstování matematiky* či *Magazínu T*).

2 První ráčky výpočetní techniky v Československu

2.1 Instituce, politika a počítače v Československu na počátku 50. let

Traduje se, že první návrh počítače byl v Československu představen v roce 1947 v Badatelském ústavu matematickém České akademie věd a umění v Praze,⁴ avšak první československý počítač byl uveden do provozu teprve v září 1957.⁵ Potenciálních důvodů pro relativně pozdní spuštění prvního československého počítače bylo více. Jedním z nich bylo embargo na součástky západní provenience v důsledku poválečné prosovětské orientace.⁶ Dalším důvodem bylo nepřijetí kybernetiky („pavědy tmářů“) v zemích socialistického tábora.⁷ Samočinné počítače však nebyly (naštěstí) vždy a za všech okolností považovány za součást kybernetiky.

V Československu, podobně jako v ostatních zemích, bylo potřeba připravit potenciální uživatele výpočetní techniky a samozřejmě bylo třeba získat peníze na výrobu výpočetní techniky. Vahou své osobnosti pomohl založení oboru profesor ČVUT Václav Hruška (1888–1954), autor učebnic numerické matematiky.⁸

Existenci oboru matematických strojů či strojů na zpracování informací v rámci ČSAV zajišťoval po dobu několika měsíců akademik Eduard Čech. Necelé dva měsíce po založení ČSAV v lednu 1953 pak Eduard Čech plně podpořil vznik samostatné Laboratoře matematických strojů navrhovaný Antonínem Svobodou.⁹

2.2 Impuls Antonína Svobody

Pražského rodáka Antonína Svobodu, vynikajícího studenta pražské polytechniky (obor elektroinženýrství) a univerzity (obor fyzika), zavál osud během války do Spojených států amerických. Po návratu do vlasti začal Antonín Svoboda usilovat o to, aby se Československo stalo velmocí v oboru výpočetní techniky. S tímto cílem podnikl

³ V Archivu Akademie věd jsou uloženy tyto fondy: Matematický ústav, Ústav matematických strojů, Ústav teorie informace a automatizace, Zápisy zasedání presidia a výboru presidia ČSAV.

⁴ Korvasová K., Jiřina M.: *Výpočetní technika*. In Foltá J. (ed.): *Studie o technice v českých zemích 1945–1992*. 3 díly, Encyklopedický dům, Praha 2003, str. 569.

⁵ Většinou je jako datum uvedení SAPO do provozu uváděno září 1957, počítač však byl zkoušen už od března 1957 a do plného provozu byl uveden v březnu 1958.

⁶ Kaplan K.: *Československo v RVHP 1949–1956*. Praha, 1995.

⁷ Za přelomový je v tomto směru pokládán článek Arnošta Kolmana *Co je kybernetika?* z roku 1955 uveřejněný v časopise *Voprosy filosofii*. Vývojem v Sovětském svazu se podrobněji zabývá Gerovitch S.: *From Newspeak to Cyberspeak*. MIT Press, 2002.

⁸ Největší posluchárna Laboratoře matematických strojů se na počest profesora Václava Hrušky jmenovala Hruškova aula.

⁹ MSÚ-A AV ČR, A AV, Fond I. sekce ČSAV 1952–1961, Matematický ústav, karton 10, inv. č. 22.

v roce 1947 spolu se Zdeňkem Trnkou cestu po západních zemích (zejména Anglii a USA), aby se seznámil s novinkami v oboru analogové a číslicové digitální techniky.¹⁰ Po návratu zkušenosti využili při zavádění nových kurzů na ČVUT. Antonín Svoboda lákal studenty od roku 1948 na dvousemestrální přednášku o matematických strojích.¹¹

2.3 První aspiranti oboru matematických strojů

Studenti Svobodových volitelných přednášek na ČVUT patřili mezi první aspiranty v oboru matematických strojů u nás. Všichni vzpomínají na Antonína Svobodu jako na silnou osobnost a často mluví například o neformálních setkáních u čaje¹² či o týdenních pobytech pracovníků oddělení na horách.¹³ Formálně patřili mezi aspiranty Matematického ústavu, avšak mezi ostatní aspiranty Matematického ústavu nezapadli. Jak píše Mařík a Vejvoda: „Mezi aspiranty matematiky tvoří zvláštní skupinu aspiranti oddělení strojů na zpracování informací. I když tato skupina tvoří velmi dobře smílený kolektiv, je škoda, že mezi aspiranty této skupiny a ostatními aspiranty není více osobního styku.“¹⁴

2.4 Konference o matematických strojích

V prosinci roku 1952 se v Liblicích konala první z každoročních pracovních konferencí Oddělení strojů na zpracování informací. Příspěvky z této a dalších konferencí byly publikovány ve sborníku *Stroje na zpracování informací*. První díl (vydaný v roce 1953) je věnován metodice práce na samočinném počítači a metodice práce se stroji na děrné štítky.

První konference se zúčastnilo patnáct pracovníků Oddělení strojů na zpracování informací a šedesát sedm zástupců různých pracovišť, která měla zájem o využití matematických strojů, mezi nimi také početná skupina matematiků z Matematického ústavu ČSAV v čele s akademikem Eduardem Čechem. Účastníci této konference jednohlasně schválili text rezoluce, která zavazovala ČSAV k větší materiální i nemateriální podpoře oboru matematických strojů.¹⁵

2.5 Stavba SAPO

Hlavním úkolem kolektivu Laboratoře matematických strojů byla stavba prvního československého samočinného počítače. Základní návrh počítače byl představen na konferenci v Liblicích v prosinci roku 1952, podrobnosti návrhu zpracovávali pracovníci Laboratoře, často aspiranti. Jednalo se o projekt zcela nový, se kterým nebyly zkušenosti, a snad i proto se ne vše dařilo podle plánu. Přes všeobecnou podporu vyjadřovanou oboru matematických strojů musel Antonín Svoboda často zdůvodňovat finanční požadavky na

¹⁰ Vysoký P.: *Professor Svoboda, professor Trnka and first courses on computers at Czech Technical University*. In Folta J. (ed.): *Computing Technology Past & Future*. Prague Studies in the History of Science and Technology, New series, Vol. 5, 25–35.

¹¹ Dle jednoho z aspirantů Antonína Svobody byly přednášky o matematických strojích tím zdaleka nejzajímavějším volitelným předmětem. (Osobní sdělení.)

¹² O neformálních setkáních u čaje se zmiňuje například Marie Königová v rozhovoru pro Národní kontaktní centrum Ženy a věda v roce 2004 (k dispozici online: <http://www.zenyaveda.cz/html/index.php>). Viz též Oblonský J. G.: *Vzpomínky na počátky číslicové techniky v českých zemích*. Nepublikovaný manuskript, 2008.

¹³ Viz např. Mapstone R.: *OHI 35 – Antonín Svoboda*. Charles Babbage Institute Collection, k dispozici online: <http://www.cbi.umn.edu/oh/index.phtml>.

¹⁴ Mařík J., Vejvoda O.: *Aspirantský kolektiv v Matematickém ústavu Československé akademie věd*. Časopis pro pěstování matematiky 78(1953), 21–23.

¹⁵ Svoboda A.: *Z pracovní konference pořádané oddělením na zpracování informací při Matematickém ústavu Československé akademie věd*. Časopis pro pěstování matematiky 78(1953), 27–30.

další rok. V roce 1957 byl Ústav matematických strojů, vzniklý z Laboratoře matematických strojů v roce 1955, dokonce převeden ze sekce matematicko-fyzikální do sekce technické s odůvodněním, že tak bude lépe zajištěna praktická stránka stavby počítače. Práce ústavu byla pochopitelně pod drobnohledem presidia ČSAV.¹⁶

Z praktického hlediska bylo třeba vyřešit mimo jiné také velké množství vadných součástí dodávaných pro stavbu SAPO. Spolehlivost práce samočinného počítače je totiž přímo závislá na fungování či nefungování jednotlivých součástí. Technickým řešením tohoto problému bylo ztrojnásobení aritmetické jednotky: každý výpočet byl prováděn paralelně, a to třikrát. Zmíněná metoda odpovídá dřívější běžné kontrole numerického počítání: pokud alespoň dva ze tří nezávisle provedených postupů dávají stejný výsledek, je tento výsledek považován za správný, v opačném případě se výpočet opakuje. SAPO se takto sám opravoval a jeho konstruktéři o něm tvrdí, že je to první počítač, který sám opravuje své chyby.

Přes všemožné těžkosti bylo SAPO nakonec uvedeno do provozu v září 1957. Dá se říci, že dokončením SAPO končí období matematických strojů v ČSAV. Od roku 1958 byl Ústav matematických strojů vyloučen z ČSAV a zařazen pod Ministerstvo všeobecného strojírenství jako Výzkumný ústav matematických strojů.¹⁷ V důsledku tohoto kroku se Ústav matematických strojů přestal zabývat teoretickými otázkami. Zejména přešel pod Centrum numerické matematiky UK výzkum numerických metod, který byl od počátku součástí práce kolektivu Oddělení strojů na zpracování informací.¹⁸

3 Závěr

Samočinné počítače nepochybně změnily v posledních desetiletích život drtivé většiny lidí. V prvopočátcích existence počítačů šlo jejich konstruktérům především o to, aby byl omezen vliv chyb, které vznikaly při ručních výpočtech. V Československu měl tento obor v padesátých letech 20. století dobrou pozici zejména z hlediska provázanosti konstrukční a výpočetní stránky, avšak tato pozice utrpěla převodem Ústavu pod Ministerstvo všeobecného strojírenství.

Adresa

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
Ústav matematiky
FEKT VUT v Brně
Technická 8
616 00 Brno
e-mail: durnova@feec.vutbr.cz

¹⁶ A AV, Zápisy ze zasedání presidia a výboru presidia ČSAV z let 1956–1958.

¹⁷ Jančík D.: *Ministerstvo všeobecného strojírenství (MVS) – 195–1953, 1958–1965*. Inventář fondu, NAČR, Praha, 1973.

¹⁸ Numerické metody jsou předmětem řady článků sborníku *Stroje na zpracování informací*.

40-ROČNÁ HISTÓRIA KONFERENCIÍ SLOVENSKÝCH MATEMATIKOV

PAVOL GREŠÁK, MARIANA MARČOKOVÁ

Abstract: The first Conference of Slovak Mathematicians took place at Jasná pod Chopkom in Low Tatras at the end of November in 1969 as a consequence of the initiation of the 5th Slovak Congress of the Union of Czechoslovakian Mathematicians and Physicists (JČSMF). The contribution is devoted to a brief history of the Conferences of Slovak Mathematicians held in the years 1969–2008.

1 Prvá konferencia slovenských matematikov

Na 5. zjazde členov Jednoty československých matematikov a fyzikov (JČSMF) zo Slovenska, ktorý sa konal v dňoch 20.–21. mája 1968 v Červenom Kláštore, vznikla myšlienka – organizovať každý rok konferenciu matematikov. Na nasledujúcom 6. zjazde JČSMF a zároveň 1. zjazde Jednoty slovenských matematikov a fyzikov (JSMF) v Jasnej pod Chopkom sa 25. apríla 1969 prijalo uznesenie o konaní konferencie slovenských matematikov. Táto sa konala v dňoch 29. 11.–1. 12. 1969 v zotavovni ROH SNP v Jasnej pod Chopkom a odvtedy sa slovenskí matematici stretávajú každý rok koncom posledného novembrového týždňa na tom istom mieste, kde sa konferencia konala po prvý-krát pred 40 rokmi (s výnimkou niektorých rokov, kedy sa konferencia konala v iných zotavovniach, ale tiež v Nízkyh Tatrách).

Prípravný výbor prvej konferencie slovenských matematikov viedol Václav Medek a jeho členmi boli: Ladislav Berger, Milan Hejný, Milan Kolibiar, Ladislav Mišík, Jozef Moravčík, Cyril Palaj, Beloslav Riečan, Karol Rován a Tibor Šalát. Pripravili odbornú náplň tejto konferencie a jej organizovaním poverili žilinskú pobočku JSMF. Základné informácie o nej sú zhrnuté v článku [3].

Úvodné prednášky predniesli prof. RNDr. Karel Drbohlav, DrSc., ktorý prednášal „O teórii kategórií“ a doc. RNDr. Lev Bukovský, ktorý predniesol prednášku „O niektorých problémoch teórie množín“. Počas konferencie pracovali štyri sekcie: sekcia algebry a teórie čísel, sekcia teórie vyučovania matematiky, sekcia matematickej analýzy a sekcia geometrie a topológie.

Jedným z dôležitých cieľov konferencie bolo aj ustanovenie Matematickej sekcie JSMF – dnešnej Slovenskej matematickej spoločnosti (SMS). Dňa 30. novembra 1969 sa konalo v Jasnej pod Chopkom Valné zhromaždenie slovenských matematikov – účastníkov 1. konferencie slovenských matematikov, ktorého sa zúčastnilo 117 osôb. Hlavnou úlohou tohoto zhromaždenia bolo ustanovenie Matematickej sekcie JSMF, prijatie jej organizačného poriadku a voľba prvého jej výboru. Na tomto zhromaždení bola bohatá diskusia, v ktorej sa už hovorilo o každoročnom konaní matematickej konferencie a tak sa aj v skutočnosti stalo. Bol zvolený 13-členný výbor Matematickej sekcie JSMF, 4 náhradníci a 2 členovia revíznej a kontrolnej komisie. Prvým predsedom výboru Matematickej sekcie JSMF sa stal Václav Medek a tajomníkom Pavol Brunovský. Vo večerných hodinách po Valnom zhromaždení Matematickej sekcie JSMF bolo prvé zasadnutie jej výboru, na ktorom sa rokovalo o práci odborných skupín.

V nedeľu 1. decembra 1969 sa uskutočnili ešte dve prednášky: prof. RNDr. Václav Medek prednášal „O niektorých problémoch projektívnej geometrie“ a doc. RNDr. Jan Vyšín „O modernizácii vyučovania matematiky“. Týmito prednáškami a nasledujúcim

obedom sa konferencia skončila a do dnešných čias je štruktúra programu týchto konferencií podobná štruktúre programu tej prvej.

2 Obdobie od 1. do 40. konferencie slovenských matematikov

Ako konštatujú autori článkov, ktoré boli napísané k jubilejnej 20. a k jubilejnej 30. konferencii slovenských matematikov Beloslav Riečan v [5] a Ladislav Berger s Pavlom Marušiakom v [2], tieto konferencie sú považované za jedno z najvýraznejších a najviac navštevovaných podujatí JSMF a sú vo verejnosti známe už ako „Matematická Jasná“.

Už sme spomenuli, že na prvej konferencii slovenských matematikov bolo 117 účastníkov. Druhej konferencie slovenských matematikov sa zúčastnilo až 147 osôb. Konala sa 3.–5. 12. 1970. Z informačných brožúrok „Zo života pobočky JSMF v Žiline“ je zrejmé, že až do začiatku deväťdesiatych rokov minulého storočia sa postupne účasť na týchto konferenciách zvyšovala a boli roky, kedy presahovala počet 200 účastníkov – matematikov a niekedy aj ich rodinných príslušníkov. Najväčší pokles účasti na tejto konferencii sme zaznamenali v rokoch 2002–2004, kedy sa konferencie zúčastňovalo len 85–95 účastníkov. Najslabšia účasť bola vtedy z radov učiteľov základných a stredných škôl, ktorí sa konferencie väčšinou nemohli zúčastniť z finančných dôvodov. Ceny ubytovania a stravovania totiž v zotavovni (namiesto ROH teraz Sorea) SNP v Jasnej neustále rastú. Výbor Slovenskej matematickej spoločnosti neraz uvažoval o zmene miesta konferencie, a to práve z finančných dôvodov, ale vždy prevážil názor, že tradíciu treba zachovať.

Kríza rokov 2002–2004 bola prekonaná a od roku 2005 do roku 2008 sa účasť vyšplhala na 125 účastníkov, a to vďaka finančnej podpore účasti učiteľov základných a stredných škôl z projektov Európskeho sociálneho fondu (prípadne z iných projektov) vysokoškolských učiteľov a aj niektoré pobočky JSMF finančne podporili niektorých svojich členov z radov učiteľov. Nie je však naším cieľom prezentovať číselné informácie o ďalších konferenciách slovenských matematikov. Venujme sa radšej ich charakteristike, organizácii a odbornej náplni, ktoré sa postupne kryštalizovali do dnešnej podoby. Z úvodných strán zborníka abstraktov prednášok ostatnej (a dúfajme, že nie poslednej) 40. konferencie slovenských matematikov [7] vyberáme:

- **Tradícia**
Prvá konferencia slovenských matematikov sa konala v roku 1969.
- **Usporiadatelia**
Jednota slovenských matematikov a fyzikov (JSMF), pobočka Žilina,
Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF,
Katedra matematiky Fakulty prírodných vied Žilinskej univerzity v Žiline,
Katedra aplikovanej matematiky Strojníckej fakulty Žilinskej univerzity v Žiline.
- **Špecifikácia**
Domáca konferencia. Na konferenciu sú pozývaní hostia zo zahraničia.
- **Časová periodicitá**
Každoročne v poslednom novembrovom týždni.
- **Miesto konania**
Jasná pod Chopkom.
- **Ciele**
V rámci celej matematickej komunity na Slovensku:
sprostredkovať informácie o nových poznatkoch v matematike,
napomáhať riešiť problémy života učiteľov matematiky,
zdokonaľovať metodiku vyučovania matematiky,
plniť aj spoločenskú, komunikačnú a organizátorskú funkciu.

V spomínanom zborníku týchto konferencií uverejňujeme abstrakty všetkých prednášok, ktoré sa členia na hlavné (pozané) prednášky a prihlásené krátke referáty. Počas trojdňovej konferencie sa uskutoční asi 8 pozvaných prednášok a niekedy aj 20 krátkych referátov. Garantom odborného programu je Slovenská matematická spoločnosť, ktorej výbor navrhuje a pozýva pozvaných prednášajúcich. Dôvodom nášho potešenia je aj to, že čoraz viac mladých ľudí chce na konferencii vystúpiť s prednáškou a prihlasujú si krátke referáty, hlavne z teórie vyučovania matematiky. Menej je už vedeckých prihlásených referátov, avšak medzi pozvanými prednáškami sú zasa prednášky na didaktické témy zriedkavejšie. V ostatnom období organizujeme bloky krátkych referátov z teórie vyučovania matematiky, za ktorými nasledujú workshopy pre učiteľov základných a stredných škôl. Venujeme sa v nich aj otázkam a problémom prebiehajúcej reformy školstva. Tešíme sa tiež z každoročnej účasti matematikov z Českej republiky. Spravidla jeden alebo dvaja pozvaní prednášajúci sú z Českej republiky. Veľmi častým účastníkom našich konferencií ešte donedávna býval aj zástupca JČMF akademik Jaroslav Kurzweil. A keď už bilancujeme, treba uviesť aj to, že počas 40 rokov „Matematickej Jasnej“ odznelo na nej asi 330 hlavných prednášok, ktoré predniesli pozvaní prednášajúci. Krátke prihlásené referáty sa už neodvažujeme spočítať, najmä v posledných rokoch ich množstvo stúpa.

Okrem toho zaraďujeme do zborníka konferencie aj články na aktuálne témy. Týkajú sa väčšinou výučby matematiky na školách všetkých stupňov, medzinárodných kôl matematickej olympiády alebo si v nich uctíme jubileá niektorých známych matematikov. Částimi prispievateľmi v tejto časti zborníka sú prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc. a doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

Každoročne sa na konferencii vyhodnocuje súťaž o „Cenu Petra Pavla Bartoša“, ktorá je zameraná na teóriu vyučovania matematiky a súťaž mladých matematikov o „Cenu akademika Schwarza“. Víťazi týchto súťaží majú právo predniesť prednášky o svojej vedeckej práci priamo na konferencii a ocenenie za ňu preberajú z rúk predsedu SMS alebo aj predsedu ÚV JSMF, ak je účastníkom príslušnej konferencie.

Hneď na 2. konferencii slovenských matematikov sa vyhodnocovala súťaž mladých matematikov, dnešná súťaž o „Cenu akademika Schwarza“. V období do 10. konferencie slovenských matematikov v roku 1977 bolo v tejto súťaži ocenených 22 mladých matematikov. Medzi tými, ktorí sa umiestnili na prvých miestach sú dnes, resp. boli významné osobnosti slovenskej matematiky: Ivan Korec, Pavol Kostyrko, Jozef Kačur, Jaroslav Smítal, Branislav Rován, Roman Frič, Štefan Porubský, Štefan Šujan, Peter Mederly a ďalší. V období od 10. do 20. konferencie slovenských matematikov v rokoch 1978–1987 bolo ocenených celkom 29 mladých matematikov. Pripomeňme si niektorých z nich, pretože dnes zaujímajú dôležité posty v štruktúre slovenských matematických pracovísk: Marián Trenkler, Anatolij Dvurečenskij, Stanislav Jendroľ, Jozef Komorník, Otokar Grošek, Jozef Širáň, Pavol Zlatoš, Mirko Horňák, Július Korbaš, Juraj Hromkovič, Peter Maličský, Martin Škoviera a ďalší. V období po 20. konferencii slovenských matematikov sa tejto súťaže zúčastňuje čoraz menej mladých matematikov, pretože mnohí mladí nadaní slovenskí matematici odchádzajú študovať do zahraničia a tým čiastočne unikajú pozornosti SMS. Neboli preto výnimkou ani roky, kedy sa do súťaže o „Cenu akademika Schwarza“ neprihlásil nikto. Napriek tomu sa dá spomenúť niekoľko mien matematikov, ktorí v tejto súťaži získali popredné miesta a sú dnes matematickej verejnosti dobre známi: Martin Knor, Miroslav Ploščica, Katarína Cechlárová, Martin Kochol, Vladimír Janiš a ďalší. Z nedávnych víťazov súťaže o „Cenu Petra Pavla Bartoša“ spomeňme mená: Ondrej Šedivý, Tomáš Hecht, Dušan Jedinák, Tomáš Lengyelfalussy, Oliver Židek, Vladislav Rosa a ďalší.

Stretnutia v Jasnej boli vždy nezabudnuteľným zážitkom a inšpiráciou pre prácu matematikov z rôznych pracovísk a aj stretnutiami generačnými.

3 RNDr. Ladislav Berger, Dr. h. c. ŽU a „Matematická Jasná”

Žilinská pobočka JSMF sa poverenia organizovať každoročné stretnutia slovenskej matematickej obce v Jasnej pod Chopkom chopila s veľkým zanietením predovšetkým zásluhou RNDr. Ladislava Bergera, Dr. h. c. Žilinskej univerzity (1910–2008), ktorý sa veľkou mierou zaslúžil o úspech týchto konferencií. Na ich príprave a organizácii sa podieľal plných 30 rokov, a to od ich vzniku roku 1969 až do roku 1998. Postupne do organizácie týchto konferencií zapájal ďalších a ďalších matematikov zo žilinskej Vysokej školy dopravnej, neskôr Vysokej školy dopravy a spojov resp. dnešnej Žilinskej univerzity (ŽU). Spomeňme aspoň niektorých z nich: prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., prof. RNDr. Pavol Marušiak, DrSc., doc. RNDr. Ján Perenčaj, CSc., Jozef Sikora, RNDr. Milan Petřík, doc. RNDr. Pavol Grešák, CSc., doc. RNDr. Janka Feťková, CSc., doc. RNDr. Elena Wisztová, CSc., RNDr. Želmíra Blahušiaková, CSc., RNDr. Rudolf Blaško a ďalší. „Matematická Jasná” je teda nerozlučne spojená s menom dr. Bergera, čo bolo vyzdvihnuté aj v článkoch [1, 4, 6]. Bola to jeho myšlienka: zorganizovať konferenciu, na ktorej by sa stretávali učitelia matematiky zo škôl všetkých stupňov ako aj iní milovníci matematiky. „Matematická Jasná” je nádherným pomníkom jeho obetavej práce.

Literatúra

- [1] Bálint V., Marčoková M.: *Vo veku 97 rokov odišiel RNDr. Ladislav Berger, Dr. h. c. Žilinskej univerzity*. Pokroky matematiky, fyziky & astronomie 53 (2008), 253–254.
- [2] Berger L., Marušiak P.: *K tridsiatim konferenciám slovenských matematikov v Jasnej*. 30. konferencia slovenských matematikov, 19. 11.–22. 11.1998, Jasná pod Chopkom, Žilinská univerzita, 1998, 4.
- [3] Grešák P.: *Niečo o tom, ako to v Jasnej pod Chopkom začalo*. 40. konferencia slovenských matematikov, 27.–30. november 2008, Jasná pod Chopkom, EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2008, 46–48.
- [4] Marčoková M.: *A ako to v Jasnej pod Chopkom pokračovalo až po 40. konferenciu slovenských matematikov*. 40. konferencia slovenských matematikov, 27.–30. november 2008, Jasná pod Chopkom, EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2008, 48 – 50.
- [5] Riečan B.: *20 rokov Jasnej*. 20. konferencia slovenských matematikov, 2. 12.–4. 12. 1988, Jasná pod Chopkom, Pravda – závod 03 Žilina, 1988, 5–8.
- [6] Riečan B.: *Kľúč k organizácii vedy*. 40. konferencia slovenských matematikov, 27.–30. november 2008, Jasná pod Chopkom, EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2008, 51–53.
- [7] *40. konferencia slovenských matematikov*. 27.–30. november 2008, Jasná pod Chopkom, EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 61 strán.

Adresa

Doc. RNDr. Mariana Marčoková, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied, Žilinská univerzita
Univerzitná 1
010 26 Žilina
Slovenská republika
e-mail: mariana.marcokova@fpv.uniza.sk

KAREL VOROVKA (1879–1929) – MATEMATIK A FILOSOF

MAGDALENA HYKŠOVÁ

Abstract: This year we commemorate the 130th anniversary of birth and the 80th anniversary of death of Karel Vorovka. The contribution is devoted above all to his work in the field of mathematics and philosophy of mathematics. The influence of Vorovka's education in exact sciences on his philosophical treatises is discussed, too.

1 Osobnost Karla Vorovky

1.1 Životní osudy

Uveďme nejprve ve stručnosti základní biografické údaje.¹ Karel Vorovka se narodil 3. února 1879 v Praze. Středoškolská studia absolvoval na c. k. reálném a vyšším gymnasiu ve Spálené ulici v Praze, kde v roce 1897 složil s vyznamenáním maturitní zkoušku. Spolu se dvěma spolužáky z gymnázia, Arnoštem Dittrichem² a Otakarem Zichem³, pak nastoupil ke studiu matematiky a fyziky na filosofickou fakultu pražské univerzity. V roce 1902 získal doktorát filosofie na základě disertační práce *O křivkách obalujících* a složil zkoušky učitelské způsobilosti. Již v předchozím roce začal Vorovka vyučovat na střední škole; po dvouletém působení na státní reálce na Vinohradech v Praze získal definitivu v Pardubicích, v roce 1905 pak přešel na staroměstskou reálku v Praze. 1. září 1910 se oženil s Jaroslavou Novotnou, s níž měl syna Karla (*17. 7. 1911) a dceru Libuši (*5. 3. 1921). 18. dubna 1919 se na základě práce [15] habilitoval na pražské univerzitě, kde byl později jmenován mimořádným (18. 7. 1921) a řádným (22. 12. 1924) profesorem filosofie exaktních věd. Od roku 1912 Vorovka působil ve vědecké radě Jednoty českých matematiků a fysiků. V letech 1920–1927 spolupracoval s Ferdinandem Pelikánem na vydávání časopisu *Ruch filosofický*, zúčastnil se rovněž mezinárodních filosofických kongresů v Neapoli (1924) a Bostonu (1926) a kongresu polského se slovanskými hosty ve Varšavě (1927). Karel Vorovka zemřel 15. ledna 1929.

1.2 Dílo

Za studií se Vorovka zabýval především matematikou a teoretickou fyzikou. Jedna seminární práce se například týká analogie hystereze v dielektriku, disertační práci Vorovka věnoval studiu křivek, jež jsou řešením obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu $f(x, y, y') = 0$; upravená verze [8] této disertace byla v roce 1903 publikována v *Časopise pro pěstování matematiky a fysiky* (dále jen ČPMF). Vorovka zde rozebírá jeden odstavec německého vydání [7] Serretovy učebnice [6], u něhož si všiml, že není

Práce vznikla za podpory grantu GAČR 401/09/1850.

¹ Podrobnější informace lze nalézt v článku [1]. V nejbližší době by pak měla vyjít komplexní monografie H. Pavlincové o Vorovkově životě a díle.

² Arnošt Dittrich (1878–1959), fyzik a astronom; po studiu působil jako středoškolský profesor, později se stal ředitelem hvězdárny v dnešním Hrubanovu a mimořádným profesorem pražské univerzity. Patřil mezi první propagátory a obhájce Einsteinovy teorie relativity, je považován za zakladatele československé archeo-astronomie.

³ Otakar Zich (1879–1934), hudební skladatel, estetik, hudební vědec; po studiu učil matematiku a fyziku na střední škole, později se stal profesorem estetiky na pražské univerzitě.

zcela správný a v původní francouzské verzi chyběl. Chybné úvahy pak Vorovka uvádí na správnou míru. Po studiích se Vorovka kromě pedagogického působení věnoval především dalšímu sebevzdělávání⁴ a postupně se začal zabývat zejména filosofií matematiky a filosofií samotnou. Nepřestal se však zajímat ani o didaktiku matematiky, o čemž svědčí mimo jiné studie o učebnicích matematiky pro střední školy [14] či stat' o didaktických názorech Jana Sobotky [17]. Je třeba rovněž připomenout, že Vorovka jako jeden z prvních Čechů s porozuměním přijal Einsteinovu teorii relativity a obhajoval ji proti jejím odpůrcům.⁵

2 Práce filosoficko-matematické

Jak Vorovka v řadě spisů sám poznamenává, na jeho názory měly velký vliv práce Henriho Poincaré. Poprvé na tohoto matematika a filosofa odkazuje v pojednání [9] z roku 1909, kde vykládá podstatu jeho *konvencionalismu*, podle něhož jsou základem matematiky *konvence* – libovolné dohody, řídící se pouze úvahami o vhodnosti, účelnosti, pohodlnosti apod. Například o geometrických axiomech se Poincaré snaží dokázat, že jsou to konvence, přičemž *volba mezi všemi možnými konvencemi vedena jest zkušeností, avšak zůstává svobodnou a není omezena, než nutností vystríhati se veškeré kontradikce* ([9], str. 217). Na otázku, proč volíme právě eukleidovskou geometrii mezi ostatními možnými, odpovídá, že je to dílo neuvědomělého oportunismu a že jí dáváme přednost proto, že je ke sledování dějů nejpohodlnější.

2.1 Náhoda, pravděpodobnost, kauzalita

Významný vliv na Vorovkovo dílo měly zejména Poincaréovy úvahy o pojmu náhody. Ty přispěly k Vorovkově zájmu o teorii pravděpodobnosti (viz článek [10], věnovaný historické i matematické stránce úlohy o ruinování hráčů) a prostupují téměř celým jeho dílem filosoficko-matematickým i filosofickým. Nejvíce je to pak patrné v článcích [11] a [12] z let 1913 a 1914, které byly podrobněji rozebrány v loňském příspěvku [3]. Na tomto místě jen poznamenejme, že Vorovka kritizoval snahy založit teorii logické indukce na teorii pravděpodobnosti, vyzýval k opatrnosti při jejím používání v reálných situacích, snažil se čtenáře přesvědčit, že teorie pravděpodobnosti nemůže vyřešit problém kauzality, a zdůraznil, že představa příčiny a účinku by měla být nahrazena pojmem korelace. O více než deset let později Vorovka publikoval krátký článek [18], v němž naopak vystoupil proti snahám vyřadit pojem příčinnosti z vědeckého bádání. Stat' uzavírá slovy: *Myšlení funkcionální a kondicionální bude vždy ke svému doplnění a ke svému provedení potřebovati také myšlení kauzálního.* ([18], str. 115)

2.2 Logika a intuice

Druhým velkým tématem Vorovkových prací, rovněž výrazně ovlivněným myšlenkami Henriho Poincaré, byla otázka, jakou úlohu mají v matematice prvky logické a prvky intuitivní. Intuicí nebo *názorem* přitom Vorovka stejně jako Poincaré rozumí jakési abstraktní poznání. V pojednání [13]⁶ z roku 1914 vysvětluje: *Tuto více méně neurčitou představu intuice objasňuje Poincaré psychologicky zajímavými doklady z prací slavných matematiků a s oblibou také vrací se vícekrát ku přirovnání s hrou v šachy. Při této hře nestačilo by ku porozumění pouze kontrolovati správnost tahů, zdali se dějí dle pravidel*

⁴ Srov. podrobný nekrolog jeho přítele A. Dittricha [1].

⁵ Vorovkův vztah k teorii relativity podrobně popsal A. Dittrich v článku [2].

⁶ Jedná se o upravenou verzi přednášky H. Poincaré *co filosof*, kterou Vorovka pronesl v Jednotě českých matematiků a fysiků 25. 1. 1913, k uctění památky H. Poincaré.

předepsaných; abychom strategii hráče pochopili, abychom chápali účelnost jeho tahů, musíme z dálky vidět cíl, k němuž hra míří. Zcela podobně při důkazu matematickém nestačí pouze dle pravidel logiky konstatovat správnost konkluzí, nýbrž nutno pochopit, proč definice, konkluse, teorémy právě tím určitým a ne jiným způsobem v celek jsou seřaděny ([13], str. 156). Z podobných Poincaréových myšlenek vycházel také Vorovkův habilitační spis *Úvahy o názoru v matematice* [15], který vyšel knižně v roce 1917. Vorovka zde nejprve rozebírá pojmy *logicismus*, podle něhož je matematika součástí logiky, všechny matematické pojmy lze explicitně definovat z logiky a všechny matematické věty lze odvodit z logických axiomů a definic čistě logickou dedukcí, a *psychologismus*, který vymezuje široce jako opak logicismu. Dále podrobně vysvětluje nedostatky logicismu, načež se obrací k systematickému výkladu psychologismu; tuto část dobře vystihují její závěrečná slova: *Dospíváme tedy takto přesvědčení, že definice čistě formální a symbolické nemohou být ideálem myšlení exaktního. Myšlení neobejde se bez definicí reálných. Nejen vědy přírodní, ale také geometrie a aritmetika musí ve svých definicích vycházeti induktivně od pozorování; názor při tom obrací se ovšem nejen ke zkušenosti a předmětům vnějším, nýbrž také a hlavně k předmětům vnitřní zkušenosti* ([15], str. 82). V poslední části spisu pak Vorovka ukazuje možnost důsledného psychologismu.

3 Práce filosofické

Vorovka je znám především jako filosof; sám sebe na sklonku života charakterizoval takto: *Vorovka je idealista, eklektik, který přejímá mnoho z pragmatismu. Od psychologismu přešel blíže k logicismu, s nímž však se přece jen neztotožňuje, jelikož věří na racionální intuici. Filosofii nepovažuje za vědu. Filosofie potřebuje vůle a jest projevem osobnosti. Je to pokus o poznání s jistotou pouze subjektivní. Pokus, k němuž jsme imperativně nuceni. Takový pokus nazývá Vorovka slovem "gnose"...* ([4], str. 23). I v ryze filosofických pracích je jasně patrný vliv Vorovkova vzdělání v matematice a fyzice. Dokládají jej nejen různé příklady a přirovnání (například pravdu a skutečnost přirovnává k opačným magnetickým pólům), ale také metoda myšlení. Snad nejvíce je to patrné ve filosofickém spise *Skepsé a gnóse* [16], vydaném v roce 1921. Dvě části se například dotýkají teorie pravděpodobnosti: druhá část spisu nese název *Soudy problematické a počet pravděpodobnosti*, a Vorovka se zde věnuje výkladu, proč není možné míru pochybnosti o nějakém soudu měřit jeho pravděpodobností; subjektivní stupeň důvěry považuje ve své podstatě za neměřitelný a také ukazuje, že není možné všechny soudy a obsahy našeho vědomí lineárně uspořádat. V následující kapitole nazvané *Jak jednati v nejistotách* se Vorovka dotýká i teorie užitku, i když slovo užitek se zde neobjevuje. Poznává, že rozhodování, zda se zúčastnit nějaké náhodné hry, závisí kromě pravděpodobností také na hodnocení zisku a ztráty. Pro případ, že by se jednalo jen o hodnoty materiální, připomíná myšlenku Karla Mengera: *První pytel žita má pro hospodářského člověka cenu nesmírnou k výživě; druhý menší k setbě, třetí ještě menší k přilepšení, čtvrtý na přepych, pátý – aby krmil papoušky* ([16], str. 19). Vorovka zmiňuje teorii užitku Daniela Bernoulliho a Pierre-Simona Laplace. Život přirovnává k náhodné hře, v níž se často rozhodujeme nikoli na základě jistoty, ale podle pravděpodobnosti. Píše: *Kdo by chtěl žít jen samými dokonalými jistotami, nedočkal by se ze strachu večera ... A přece pracujeme a chystáme budoucnost, která jest vzdálena od přítomného okamžiku na léta. Bylo by směšné o takových věcech psát, kdyby našim českým srdcím dosud nebyla tak blízka ustrašenost a bázlivost před sázkou svobodné a samostatné myšlenky* ([16], str. 25). Dodejme, že Vorovka si nejvíce cenil svého rozsáhlého spisu o dějinách, současnosti a perspektivách americké filosofie [19], vydaného posmrtně v roce 1929. Vorovka zde podává i hodnocení výsledků americké filosofie a otevřeně se hlásí k Západu.

4 Závěr

Cílem příspěvku bylo jen stručně vzpomenout osobnost Karla Vorovky, jehož dvojnásobné výročí si v letošním roce připomínáme. Zaměřili jsme se na práce z oblasti matematiky a filosofie matematiky; zájemci o podrobnější rozbor jeho filosofických prací naleznou řadu zajímavých studií ve sborníku [5], doporučit lze také článek [4].

Literatura

- [1] Dittrich A.: *Karel Vorovka*. ČPMF 59(1930), 9–21.
- [2] Dittrich A.: *Vorovkův poměr k nauce o relativitě*. In [5], 64–74.
- [3] Hykšová M.: *Filozofické pojetí pravděpodobnosti v díle T. G. Masaryka a K. Vorovky*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2008, 115–118.
- [4] Mazliak L.: *An introduction to Karel Vorovka's philosophy of randomness*. Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique 3(2007), no. 2, 14 stran.
- [5] Pelikán F. (ed.): *Vorovkův sborník*. Československá grafická unie a.s., Praha, 1937.
- [6] Serret J. A.: *Cours de calcul différentiel et intégral*. Gauthier-Villars, Paris, 1880.
- [7] Serret J. A.: *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack*. II. díl, Teubner, Leipzig, 1881.
- [8] Vorovka K.: *Integrál partikulární jakožto obálka*. ČPMF 32(1903), 229–240.
- [9] Vorovka K.: *Konvencionalism*. Česká mysl 10(1909), sešit 3, 217–228.
- [10] Vorovka K.: *Poznámka k problému ruinování hráčů*. ČPMF 41(1912), 562–567.
- [11] Vorovka K.: *Filosofický dosah počtu pravděpodobnosti*. Česká mysl 14(1913), 17–30.
- [12] Vorovka K.: *O pravděpodobnosti příčin*. ČPMF 43(1914), 81–93.
- [13] Vorovka K.: *Jak soudil H. Poincaré o vztazích matematiky k logice*. ČPMF 43(1914), 154–162.
- [14] Vorovka K., Červenka L., Posejpal V.: *Die Lehrbücher für Mathematik, darstellende Geometrie und Physik an den Mittelschulen mit böhmischer Unterrichtssprache*. Berichte über den math. Unterricht in Österreich, Heft 13, A. Hölder, Wien, 1914.
- [15] Vorovka K.: *Úvahy o názoru v matematice*. ČAVU, Praha, 1917.
- [16] Vorovka K.: *Skepse a gnóse. Vyznání filosofické*. Gustav Voleský, Praha, 1921.
- [17] Vorovka K.: *Sobotkovy názory didaktické*. ČPMF 52(1923), 154–162.
- [18] Vorovka K.: *Poznámka o kausálním myšlení*. Ruch filosofický 5(1925), 112–115.
- [19] Vorovka K.: *Americká filosofie*. Filosofická knihovna č. 5, Sfinx, Praha, 1929.

Adresa

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: hyksova@fd.cvut.cz

Z HISTORIE VÝUKY DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

VLASTA CHMELÍKOVÁ

Abstract: The aim of this article is to state some fundamental information about the teaching of descriptive geometry in the second half of the 19th century and at the beginning of the 20th century in Bohemia. Also we will have a look at the the first Czech textbooks of descriptive geometry and some fundamental information about their authors.

1 Počátky české výuky deskriptivní geometrie

1.1 První reálky

Deskriptivní geometrie jako věda se rozvinula teprve na konci 18. století v souvislosti s průmyslovou revolucí. Za jejího zakladatele je oprávněně považován Gaspard Monge.¹ V našich zemích se tato věda dostala během 19. století na vysokou úroveň. Velkou zásluhu na tom má mimo jiné i výuka deskriptivní geometrie na středních školách.

Deskriptivní geometrie se jako předmět objevuje na reálkách² již v roce 1852. Původně byla (stejně jako ostatní předměty) vyučována v němčině, ale již v roce 1861 zahájil výuku deskriptivní geometrie v jazyce českém Dominik Ryšavý³ na první české reálce pražské. V průběhu šedesátých a sedmdesátých let 19. století postupně stoupal počet reálek s českým vyučovacím jazykem. V osmdesátých letech bylo v Čechách již 14 reálek, kde se deskriptivní geometrie vyučovala česky.⁴ Vyučujícími byli až na výjimky absolventi pražské polytechniky.

1.2 Učební osnovy

V padesátých letech 19. století byly vykládány jen základy kolmého promítání a hlavní myšlenky osvětlení. Postupně však docházelo k rozšiřování učební látky. Během

¹ Gaspard Monge se narodil 9. května 1746 v Beaune (Francie). Od mládí projevoval talent v matematice, zejména v geometrii. Působil na několika školách, mimo jiné na pařížské École Polytechnique. V díle *Géométrie descriptive* (1799) popsal kolmé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny, které dnes nazýváme promítáním Mongeovým. Zemřel 28. července 1818 v Paříži.

² Reálka, která se dělila na nižší a vyšší, tvořila střední článek mezi národní školou a technickým ústavem. Původní reálky byly šestileté (nižší – 3 roky, vyšší – 3 roky), později sedmileté (nižší – 4 roky, vyšší – 3 roky). Podle zákona ze dne 13. září 1874 *reálka poskytuje žactvu vyššího obecného vzdělání na základě nauk matematicko-přírodovědných a připravuje také pro vyšší odborná studia technická, lesnická a hornická* [2].

³ Dominik Ryšavý se narodil 12. října 1830 v Bítovanech na Chrudimsku. Studoval hlavní školu v Poličce a v Praze na Malé Straně, poté pokračoval ve studiích na pražské polytechnice, kde ve školním roce 1851/2 absolvoval. Dne 1. října byl jmenován adjunktem a 19. října 1860 skutečným učitelem pražské reálky, kde působil celkem 38 let. Mimo to pracoval i jako inspektor obecných a měšťanských škol nebo jako zkušební komisař pro kandidáty učitelství na školy obecné a měšťanské. Zemřel 26. září 1890 v Praze. Kromě učebnic deskriptivní geometrie napsal *Základové měřictví a kreslení pro 1. třídu nižších škol reálných* (1876) a *Měřictví a rýsování pro II. třídy reálných škol* (1868).

⁴ Reálky s výukou deskriptivní geometrie v češtině: Karlín (Praha), Nové Město (Praha), Hradec Králové, Kutná Hora, Litomyšl, Pardubice, Písek, Plzeň, Rakovník, Tábor, Brno, Prostějov, Přerov, Telč [1].

druhé poloviny 19. století byly učební osnovy reálek několikrát upraveny (ke změnám učebních osnov reálek docházelo častěji, než u osnov gymnázií).

Podle ministerského vynesení číslo 6233 ze dne 23. dubna 1880 se měl probírat dle mého názoru poměrně velký rozsah učiva. Kromě základů pravouhlého promítání na dvě průmětny bylo vyučováno například rovnoběžné osvětlení mnohostěnů i rotačních těles, zborcené plochy, průniky křivých ploch, vržené stíny plochy na plochu či středové promítání a perspektiva. O faktu, že uvedené partie byly skutečně vyučovány, svědčí obtížnost maturitních úloh, které byly v tomto období zadávány. Dodejme ještě, že deskriptivní geometrie byla vyučována v 5., 6. a 7. (tj. poslední) třídě, a to vždy tři hodiny týdně. Na nižší reálce (1.–4. třída) se vyučoval předmět měřické rýsování, který byl jakousi přípravou na následnou výuku deskriptivy.

1.3 Zkoušky dospělosti

Zkoušky dospělosti aneb maturity byly písemné i ústní. Podle nařízení ze dne 9. května 1872 se na reálkách dělaly písemné zkoušky z vyučovacího jazyka (tj. na českých reálkách z češtiny), francouzštiny, matematiky a deskriptivní geometrie. Z těchto předmětů vyjma deskriptivy byly i zkoušky ústní (ústně se mohlo navíc maturovat i z některých dalších předmětů). Písemná práce z deskriptivy trvala pět hodin. Za tuto dobu měli studenti vypracovat tři úlohy.

Podívejme se na jedno konkrétní zadání maturitních úloh. Při písemných maturitách konaných ve dnech 24.–28. května 1886 na české reálce v Praze byly zadány tyto úlohy [3]:

1. Bodem $m(-1,2,2)$ sestrojiti příčku ku mimoběžkám $P \equiv ab[a(-3,4,-4), b(5,1,6)]$ a $R \equiv cd[c(-5,1,3), d(3,6,5)]$ na základě promítání α) orthogonalního, β) centralního.
2. Zobraziti kužel přímý a geometrické osvětlení jeho. Dány jsou 3 body kruhové hrany podstavné $a(-2,4,7)$, $b(1,8,2)$, $c(6,2,4)$ a výška kužele = 6. Směr paprsků světla $S: \angle(S_1X) = \angle(S_2X) = 135^\circ$.
3. Zobraziti a v pravé velikosti sestrojiti průsek rotačního elipsoidu [osa ab , $a(0,6,10)$, $b(0,6,0)$, poloměr rovníka = 3] s rovinou $\rho [\angle(P^\rho X) = 45^\circ$, $\angle(N^\rho X) = 120^\circ]$ obsahující střed plochy.

2 České učebnice

2.1 První učebnice deskriptivní geometrie

S počátky výuky deskriptivní geometrie v češtině souvisí i první česky psané učebnice. Nejstarší z nich je dvoudílná kniha s názvem *Zobrazující měřictví* od Dominika Ryšavého. Její první díl vyšel v roce 1862, druhý v roce 1863. Ačkoliv je v této knize poměrně mnoho věcných chyb, byla velmi důležitým článkem ve vývoji středoškolské výuky deskriptivní geometrie. V té době teprve vznikala česká deskriptivářská terminologie a právě Dominik Ryšavý je jedním z těch, kdo se o její vývoj zasloužili.

Kromě učebnic Vincence Jarolímka, kterým je věnován následující odstavec, vyšla ve druhé polovině 19. století ještě jedna česky psaná učebnice deskriptivní geometrie, a to

kniha *Deskriptivní geometrie pro vyšší třídy škol středních* (1877) od Františka Šandy.⁵ Tato učebnice však pravděpodobně k vývoji deskriptivní geometrie příliš nepřispěla, někdy je označována jako „nové vydání Ryšavého“. Jsou v ní přetištěné některé obrázky (včetně chyb) z učebnic Dominika Ryšavého a ve srovnání se současně vycházejícími učebnicemi Jarolímkovými nejsou v Šandově knize příliš rozebrány a vysvětleny základy deskriptivní geometrie. Spíše se jedná o souhrn návodů k jednotlivým konstrukcím, kterým chybí logické odvození a vysvětlení. Dle výročních zpráv reálky nebyla tato učebnice na školách používána.

2.2 Učebnice Vincence Jarolímků

Za nejvýznamnější učebnice deskriptivní geometrie druhé poloviny 19. století (pro reálky) lze bez pochyby považovat učebnice Vincence Jarolímků.⁶

Jako první vyšla sbírka úloh *Deskriptivní geometrie v úlohách pro vyšší školy reálné* (1873). Jedná se o soubor 1000 úloh, které jsou přehledně seříděny podle témat. Příklady postupně shromáždil sám autor během několikaletého působení na reálce v Praze. U složitějších úloh jsou uvedeny návody k řešení, navíc je každá kapitola uvozena stručným výkladem dané problematiky. Tato kniha byla první učebnicí vydanou Jednotou českých matematiků a současně první sbírkou úloh z deskriptivní geometrie u nás (do té doby neexistovala podobná sbírka ani v jazyku německém). Pro velký zájem se učebnice dočkala druhého přepracovaného vydání, a to v roce 1880 pod názvem *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné*. Toto vydání obsahuje více úloh, a to i z témat, která v prvním vydání chybí, zmizely však výklady a návody k těžším příkladům.

Kromě zmíněné sbírky úloh napsal Vincenc Jarolímků také klasickou učebnici deskriptivní geometrie pod názvem *Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné*. Tato učebnice má tři díly, v prvním vydání vyšel každý zvlášť – 1. díl v roce 1875, 2. díl v roce 1876 a 3. díl v roce 1877. Učebnice byla na tehdejší osnovy maximalistická, obsahovala mnohem víc látky, než bylo možné v hodinách probrat. Proto byl její obsah od druhého vydání (1887) silně zredukován. Všechny tři díly od tohoto vydání vycházely pohromadě v jednom svazku. Pro srovnání, první vydání zabírá více než 400 stran, zatímco druhé a další vydání méně než 300 stran. Tato učebnice se stala velmi oblíbenou mezi studenty. Nasvědčuje tomu fakt, že jenom u nás byla vydána celkem pětkrát. Navíc se stala žádanou i v zahraničí. Na přání profesora V. Šáka z Plovdivu byla přeložena do bulharštiny, vyšla v Plovdivu v roce 1895.

⁵ František Šanda se narodil 27. prosince 1831 v Novém Městě u Chlumce nad Cidlinou. Studoval obecnou školu v Novém Městě, hlavní školu v Hradci Králové, německou nižší reálku v Praze a varhanickou školu v Praze. Od roku 1850 studoval na pražské polytechnice. Roku 1854 byl jmenován asistentem kreslení na pražské vyšší reálce, v roce 1858 složil zkoušky učitelské způsobilosti z matematiky, deskriptivní geometrie a stavitelství. Poté vyučoval kreslení a češtinu v Košicích, v roce 1862 se však vrátil do Čech a působil jako učitel, o rok později již jako zástupce ředitele, na gymnáziu v Táboře. V letech 1862–1865 zastával navíc funkci ředitele městské vyšší dívčí školy v Táboře. Od roku 1880 pracoval jako okresní školní inspektor v Táboře, v roce 1884 byl jmenován ředitelem reálky v Karlíně. Zemřel 15. listopadu 1893 v Praze. Kromě zmíněné učebnice deskriptivní geometrie je autorem knih *Měřictví a rejsování* (1861), *Počátky stavitelství* (1862), *Měřické a perspektivní rejsování od ruky* (1862), *Měřictví pro vyšší třídy středních škol a k soukromé potřebě* (1869) aj.

⁶ Vincenc (Čeněk) Jarolímků se narodil 25. června 1846 v Pardubicích. Studoval na nižší reálce v Pardubicích a na vyšších reálkách v Kutné Hoře, Písku a Praze. Poté pokračoval ve studiích na pražské polytechnice. Působil jako profesor i ředitel na několika českých reálkách (Praha, Hradec Králové aj.), nějaký čas zastával funkci zemského školního inspektora. Dne 25. ledna 1907 byl jmenován profesorem deskriptivní geometrie na pražské polytechnice. Zemřel 14. prosince 1921 v Praze.

Jarolímkovy učebnice se vyznačují přesným, logickým a systematickým výkladem od základních poznatků k těžším úlohám. Tím se tyto učebnice liší od předchozích učebnic Ryšavého i od učebnice Šandovy. Přínos a obsah Jarolímkových učebnic je podrobněji rozebrán v článkách [4] a [5].

2.3 Učebnice po roce 1908

Jarolímkovy učebnice se používaly téměř 35 let. V roce 1908 však vešla v platnost nová učební osnova pro reálky a dle této osnovy byly vypracovány učebnice nové, kterými byly postupně Jarolímkovy knihy nahrazeny. Tyto učebnice Josefa Pithardta⁷ a Ladislava Seiferta⁸ vycházely v několika vydáních pod názvem *Základy deskriptivní geometrie*, v různých úpravách byly určeny jak reálkám, tak reálným gymnáziím.

Literatura

- [1] Lavička V.: *Deskriptiva ze stanovíště historicko-paedagogického*. F. & V. Hoblík, Pardubice, 1883.
- [2] Šafránek J.: *Školy české. Obraz jejich vývoje a osudů. Svazek II*. Matice česká, Praha, 1918.
- [3] *Výroční zpráva české reálky pražské za školní rok 1886*. Tiskem Dr. Ed. Grégra, Praha, 1886.
- [4] Foltá J.: *Přínos Vincence Jarolímka pro vyučování geometrie na českých středních školách*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 4(1959), 618–627.
- [5] Foltá J.: *Historická poznámka k učebnicím deskriptivní geometrie Vincence Jarolímka*. Matematika ve škole 8(1958), 165–172.
- [6] Srb J.: *Sedmdesátiny univ. prof. Dr. Ladislava Seiferta*. Matematika ve škole 4(1952/3), 188–189.
- [7] Klapka J.: *Prof. Dr. Ladislav Seifert zemřel*. Časopis pro pěstování matematiky 3(1956), 370–376.

Adresa

Mgr. Vlasta Chmelíková
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: vlasta.chmelikova@mff.cuni.cz

⁷ Josef Pithardt se narodil 2. března 1874 v Sezemicích u Pardubic. Vystudoval pardubickou reálku, poté studoval matematiku a deskriptivní geometrii na filosofické fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Po studiích působil jako profesor matematiky na reálkách v Hradci Králové, Rakovníku a Praze Karlíně, kde se stal nakonec ředitelem. Zemřel v srpnu 1955.

⁸ Ladislav Seifert se narodil 19. dubna 1883 v Sušici v Čechách. Navštěvoval tam školu obecnou a měšťanskou, poté byl přijat na reálku v Praze Karlíně. Po maturitě studoval na pražské technice matematiku, deskriptivní geometrii a fyziku. Po dvou letech však přestoupil na filosofickou fakultu Univerzity Karlovy. V roce 1905 aproboval z matematiky a deskriptivní geometrie. Jako učitel působil na reálkách v Praze a Plzni. Dne 18. července 1921 byl jmenován řádným profesorem geometrie na přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Více o jeho životě a díle viz články [6] a [7].

TUŽBY NAŠICH PŘEDKŮ¹

MICHAELA CHOCHOLOVÁ

Abstract: The aim of this article is to introduce an interesting archive document called *Desideraten-Protocoll*, which was recorded by the *Public University Library* in Prague in the years 1852 to 1894. Visitors of the *professor reading room* wrote into this document their wishes for new books, among them mathematicians (e.g. H. Durége, K. Hornstein, S. Kantor, W. Matzka etc.) as well, and just to them the main attention is devoted.

1 Z historie univerzitní knihovny

Roku 1773 opustili jezuité po více než 200 letech pražské Klementinum. Již čtyři roky po jejich odchodu vznikla v tomto areálu, na základě dekretu Marie Terezie ze dne 6. února 1777, *Veřejná c. k. univerzitní knihovna* podléhající státu. Byla vybudována sloučením několika dosud samostatně fungujících knihovnických celků. Mezi hlavní z nich patřila *Stará klementinská knihovna*, *Nová karolinská knihovna*, knihovny zrušených jezuitských kolejí a knihovna rodu Kinských.²

Poznamenejme, že v Klementinu sídlily do rozdělení pražské univerzity na českou a německou (zákonem ze dne 28. února 1882) také filozofická a teologická fakulta pražské univerzity. Tento rozsáhlý komplex zahrnoval ještě hvězdárnu, množství učeben, sálů, čítáren apod.

2 Desideraten-Protocoll

Jednou z čítáren *Veřejné c. k. univerzitní knihovny* byla tzv. profesorská čítárna. Z její evidence se dochoval zajímavý archivní materiál s názvem *Desideraten-Protocoll*,³ dokumentující záznamy návštěvníků čítárny z let 1852 až 1894. V tu dobu mezi ně patřili přední učenci, univerzitní profesori a významné osobnosti kulturního života.

Jmenujme například matematiky Heinricha Durége (1821–1893) a Wilhelma Matzku (1798–1891), jazykovědce Georga Bipparda (1816–1883), Martina Hattalu (1821–1903), Jana Kvíčalu (1834–1908) a Alfreda Ludwiga (1832–1913), historiky Antonína Gindelyho (1829–1892), Konstantina Höflera (1811–1897) a Jana Erazima Vocela (1802–1871), filozofy Josefa Durdíka (1837–1902) a Wilhelma Volkmana (1822–1874), profesora občanského práva Antonína Randu (1834–1914), historika, politika, spisovatele a obrozence Františka

¹ *Tužby našich předků aneb střípky z historie Veřejné c. k. univerzitní knihovny.*

² Počátky univerzitní knihovny se pojí již se založením Karlovy univerzity roku 1348. Pojem jednotné univerzitní knihovny však, tehdy a ještě několik dalších století, nebyl znám. V rámci univerzity existovaly pouze *rozptýlené kolejní knihovny*, pro něž je dnes používáno souhrnné označení *Stará karolinská knihovna*. V roce 1556 se v Klementinu usídlil jezuitský řád, který zbudoval velmi rozsáhlou řádovou knihovnu, pro niž se užívá název *Stará klementinská knihovna* nebo také *Bibliotheca maior*. Roku 1622 byla Karlova univerzita z rozkazu císaře Ferdinanda II. odevzdána jezuitům a také *Stará karolinská knihovna* byla přemístěna do Klementina, kde pro odlišení od řádové knihovny dostala souhrnný název *Bibliotheca minor*. V roce 1638 vznikla v prostorách univerzity *Nová karolinská knihovna*, sloužící především potřebám právnické a lékařské fakulty. Více o počátcích a historickém vývoji první veřejné knihovny v Praze viz [6] a [8].

³ Rukopis *Desideraten-Protocoll* je uložen v oddělení rukopisů Národní knihovny České republiky pod signaturou IX.A.24.

Palackého (1798–1876), fyziologa Jana Evangelistu Purkyněho (1787–1869) nebo univerzitní profesory a politiky Konstantina Jirečka (1854–1918) či Tomáše Garrigua Masaryka (1850–1937).

Návštěvníci profesorské čítárny do *Desideraten-Protocoll* vlastnoručně zapisovali své požadavky či doporučení k rozšíření knihovny o nové svazky.⁴ Zápisy obsahovaly jméno autora, název, rok a místo vydání požadované knihy; mnohdy i upozornění, kde je publikaci možno získat a za jakou cenu; často také zdůvodnění požadavku či připojení dalších osob k téže žádosti. Záznam byl vždy opatřen podpisem žadatele, často bylo uvedeno i datum návštěvy knihovny. Skutečnost, že většina požadovaných prací byla do fondu knihovny doplněna, dokládají dodatečné poznámky s informací o tom, že kniha byla koupena, popřípadě objednána nebo je již k dispozici.⁵

3 Tužby našich předků

Institute, které by systematicky obstarávaly (zahraniční) matematickou literaturu v našich zemích v průběhu 19. století kromě knihovny *Jednoty českých matematiků a fyziků* a *Královské české Společnosti nauk* nebyly.⁶ Přísun aktuální odborné literatury byl v tomto ohledu závislý především na aktivitě jednotlivců. Jednou z možností, jak neplatit tehdejší vysoké ceny knih, bylo pokusit se je obstarat prostřednictvím c. k. univerzitní knihovny.

V našich zemích s výjimkou syntetické geometrie a teorie determinantů nebyla v matematice věnována soustavnější pozornost žádné speciální oblasti.⁷ Každý si v podstatě volil problematiku, která vyhovovala právě jeho vědeckým zájmům a aktuálním zálibám. V tomto ohledu byl výběr nově pořizovaných knih do fondu univerzitní knihovny značně náhodný.

Velkou aktivitu při objednávání matematických spisů do c. k. univerzitní knihovny projevil v letech 1853 až 1872 **Wilhelm Matzka** (1798–1891), v té době profesor matematiky na pražské univerzitě.⁸ *Desideraten-Protocoll* obsahuje bezmála šest desítek jeho požadavků a doporučení. Matzkův zájem byl dosti široký; většinou ho poutaly aktuální nově vydané

⁴ O nákupu nových svazků rozhodovala knihovna, která byla samostatným subjektem, opírala se přitom o doporučení zástupců jednotlivých kateder univerzity. V letech 1870 až 1877 nákup nových knih řídil univerzitní senát; viz Archiv Národní knihovny, fond *Veřejná univerzitní knihovna*, číslované spisy 1870/č. 38.

⁵ Několik záznamů v *Desideraten-Protocoll* se týká žádostí o výjimky z prezenčního půjčování, upomínek předchozích nevyřízených požadavků, připomínek k provozu profesorské čítárny apod.

⁶ Více o historii *Jednoty českých matematiků a fyziků* viz Pátý L.: *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků*. Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha, 1987, a Veselý F.: *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*. SPN, Praha, 1962. Více o historii *Královské české Společnosti nauk* viz Kalousek J.: *Děje král. české společnosti nauk spolu s kritickým přehledem publikací jejích z oboru filosofie, historie a jazykovědy ke stoletému jubileu této společnosti*. Královská česká Společnost nauk, Praha, 1885, a [5].

⁷ Podrobně o vývoji matematiky v českých zemích a její výuce na pražské univerzitě a polytechnice viz [1], [3], [4], [5] a [7].

⁸ W. Matzka působil jako profesor matematiky s německou vyučovací řečí na pražské univerzitě v letech 1850/51 až 1870/71. Přednášel témata z integrálního a diferenciálního počtu, analytické geometrie, planimetrie, stereometrie, vyšších rovnic či sférické trigonometrie. V letech 1855/56 až 1870/71 vyučoval na univerzitě také partii matematické fyziky. Je autorem více než pěti desítek odborných matematických a fyzikálních prací. Více o jeho životě, pedagogickém působení a díle viz Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) ve Vídni*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 29. mezinárodní konference Historie matematiky. Matfyzpress, Praha, 2008, 119–122, Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891)*, Wien und Prag. In Binder Ch. (ed.): IX. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik. Wien, 2008, 106–112, a Chocholová M.: *Wilhelm Matzka and the Historical Development of Complex Numbers*. In Šafránková J., Pavlů J. (ed.): WDS'08 Proceedings of Contributed Papers. Matfyzpress, Praha, 2008, 38–42.

monografie o infinitesimálním počtu, řešení algebraických rovnic, rovinné, prostorové a analytické geometrii, zejména od anglických a francouzských autorů (např. Isaac Todhunter (1820–1884), George Salmon (1819–1904), Jean-Marie Duhamel (1797–1872) aj.).⁹ V několika případech požadoval také spisy o rovinné a sférické trigonometrii, komplexních číslech a kvaternionech, determinantech, řešení diferenciálních rovnic, teorii eliptických funkcí a učebnice elementární matematiky.¹⁰

*Einige wichtige Werke von A. Norder, von dem ich die Dublons annehme.
Von Dr. R. F. C. Müller (Norder) in der Zeit, Zeit. 1.
(An. 29): Paulus, Johann Adam Graunstein, in 10 Bde., 1817. 500 (29 Bde.)
Jan 1 Bde.
Von Dr. F. F. C. Müller in der Zeit, Zeit. 1817.
Briens de Haan, Heim. v. der Geometrie der Flächen. Haan 1866. 14 1/2 Bde.
Jan 2 Bde.
Briens de Haan, von der Geometrie der Flächen. Haan 1866. 14 1/2 Bde.
f. 20 Bde.
Bordoni, Calculo sublimi. 2001. 1831. 1 1/2 Bde.
Chelini, Geometria analytica. 1838. 10 Bde.
Farrell, Algebraic development. Camb. 1831. (2 1/2 Bde.) f. 1 1/2 Bde.
Schmidt, Symmetrische algebra. Bonn. 1812. (2 1/2 Bde.) f. 20 Bde.
Whitell, Dynamics. 1813. (3 1/2 Bde.) f. 1 1/2 Bde.
f. 12 Bde. d. A. 9/12. Prof. Matzka.*

Zápis v Desideraten-Protocoll pořízený dne 7. 12. 1865 W. Matzkou

Dalším z univerzitních profesorů matematiky, který se v letech 1869 až 1872 podílel na rozšiřování fondu c. k. univerzitní knihovny, byl **Heinrich Du rége** (1821–1893). Od roku 1869 vyučoval na univerzitě především základní kurz matematiky, ale do přednášek vnášel nová a aktuální témata.¹¹ Odborně se zajímal zejména o geometrii a některé novější obory

⁹ Z odborných monografií ze zmíněných oblastí požadovaných W. Matzkou jmenujme např.: Todhunter I.: *Treatise on the Differential Calculus and the Elements of the Integral Calculus*, 1852, Todhunter I.: *Treatise on the Integral Calculus*, 1857, Todhunter I.: *Theory of Equations*, 1861, Salmon G.: *A treatise on conic sections*, 1848, Salmon G.: *A treatise on higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic sections*, 1852, Salmon G.: *Lessons introductory to the modern higher algebra*, 1859, Duhamel J.-M.: *Eléments de calcul infinitésimal*, 1856. Uvedené roky odpovídají vždy prvnímu vydání díla; W. Matzka požadoval často některá z nových či přepracovaných vydání, pokud již existovala.

¹⁰ W. Matzka objednal například následující monografie: Todhunter I.: *Plane Trigonometry*, 1859, Todhunter I.: *Spherical Trigonometry*, 1859, Allégret A.: *Essai sur le calcul des quaternions de M. W. Hamilton*, 1862, Briochi F.: *Théorie des Déterminants*, 1856, Boole G.: *A treatise on differential equations*, 1865, Hermite Ch.: *Übersicht der Theorie der Elliptischen Funktionen*, 1863, Baltzer R.: *Die Elemente der Mathematik*, 1865. W. Matzka zaznamenal do *Desideraten-Protocoll* také více než desítku žádostí o fyzikální spisy.

¹¹ H. Durége působil v letech 1869/70 až 1882/83 na pražské univerzitě jako profesor matematiky s německou vyučovací řečí. Po rozdělení univerzity na část českou a německou přednášel na její německé části. Je autorem řady matematických učebnic a odborných pojednání. Více o jeho životě, pedagogické činnosti a díle viz [1] a [7].

(např. teorie eliptických funkcí a funkce komplexní proměnné). V souladu se svými zájmy žádal doplnění knihovny téměř o dvacítku spisů.¹²

Několika svými požadavky přispěli k obohacení c. k. univerzitní knihovny o matematické knihy také Anton Karl Grünwald (1838–1920), Karl Hornstein (1824–1882), Seligman Kantor (1857–1902), Josef Smolík (1832–1915) nebo František Josef Studnička (1836–1903). Jejich zájmy však byly velmi rozličné. Například S. Kantor požadoval pořízení Grassmannovy *Ausdehnungslehre* (1862), K. Hornstein několik spisů o teorii funkcí¹³ a gymnaziální profesor matematiky J. Smolík Wittsteinovu učebnici elementární matematiky *Lehrbuch der Elementar-Mathematik*.¹⁴

Literatura

- [1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek 34, Matfyzpress, Praha, 2008.
- [2] *Desideraten-Protocoll*. Rukopis, 1852–1894, Národní knihovna České republiky.
- [3] Janko J., Štrbáňová S.: *Věda Purkyňovy doby*. Academia, Praha, 1988.
- [4] Kavka F., Petrář J. (ed.): *Dějiny Univerzity Karlovy III., 1802–1918*. Univerzita Karlova, Karolinum, Praha, 1997.
- [5] Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích*. ČSAV, Praha, 1961.
- [6] Pavlíková M.: *Vznik a vývoj univerzitní knihovny*. In Kavka F., Petrář J. (ed.): *Dějiny Univerzity Karlovy II., 1622–1802*. Univerzita Karlova, Karolinum, Praha, 203–223.
- [7] Velflík A. V.: *Dějiny technického učení v Praze, I. a II. díl*. Unie, Praha, 1906 a 1909.
- [8] Voit P.: *Pražské Klementinum*. Národní knihovna v Praze, Praha, 1990.

Adresa

Mgr. Michaela Chocholová
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: chochol@karlin.mff.cuni.cz

¹² H. Durége požadoval doplnění c. k. univerzitní knihovny například o knihy: Thomae J.: *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*, 1870, Hankel H.: *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen*, 1870, Joachimsthal F.: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung*, 1872.

¹³ Např. Lamé G.: *Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes*, 1857, Lamé G.: *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 1859.

¹⁴ Více o životě, odborné činnosti a díle výše zmíněných matematiků (včetně odkazů na další literaturu) viz [1] a [5].

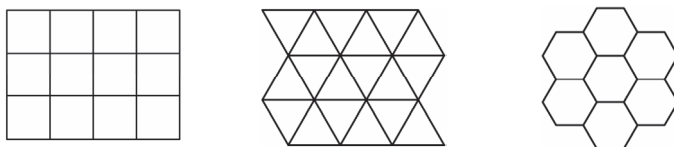
HISTÓRIA PENTAGONÁLNYCH TESELÁCIÍ

LUCIA ILUCOVÁ

Abstract: It is known that each triangle and each quadrilateral can tessellate the plane. Which other convex polygons also tessellate and how many different convex pentagons can be used to create monohedral tessellations are discussed in the article.

1 Úvod

Odpoveď na otázku, ktorý pravidelný mnohoúhelník vytvára monoedrálnu rovinnú teseláciu¹, je z pohľadu školskej matematiky jednoduchá: je to štvorec, rovnostranný trojuholník a pravidelný šesťuholník (Obr. 1).² Takisto známe a jednoducho dokázateľné je, že ľubovoľný štvoruholník (aj nekonvexný) vytvára rovinnú teseláciu a ľubovoľný trojuholník takisto (Obr. 2, 3). Problematika vytvárania monoedrálnych teselácií opakovaním jedného konvexného n -uholníka s $n \geq 5$ už ale nie je taká jednoduchá. Ako z predchádzajúcich riadkov vyplýva, pravidelný päťuholník nepatrí k útvarom, ktoré je možné využiť pre vytvorenie teselácie, ale niektoré ďalšie konvexné päťuholníky áno. Na druhej strane pravidelný šesťuholník teseláciu vytvára, ale neplatí to pre každý šesťuholník. Žiaden konvexný n -uholník s $n \geq 7$ už ale monoedrálnu rovinnú teseláciu nevytvára. Dôkaz tohoto tvrdenia pochádza od I. M. Nivena a je možné ho nájsť napríklad v [4].³ Práve histórii riešenia problematiky pokrývania roviny konvexnými päťuholníkmi sa budem v príspevku venovať.



Obr. 1 Monoedrálna rovinná teselácia vytvorená opakovaním zhodných pravidelných mnohoúhelníkov.

2 Nové výsledky

Objav, ktoré konvexné šesťuholníky vytvárajú teseláciu, je pripisovaný Karlu Augustovi Reinhardtovi (1895–1941), ktorého dizertačná práca *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*⁴ z roku 1918 obsahuje riešenie tohoto problému.⁵ Rovinné teselácie

Príspevok vznikol vďaka podpore grantu GAAV IAA100110502.

¹ Pod pojmom *monoedrálna teselácia* sa rozumie teselácia vytvorená opakovaním jedného útvaru bez medzier a prekrytí.

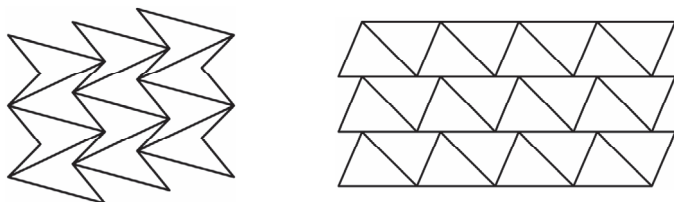
² Dôvodom je, že len tieto pravidelné n -uholníky majú veľkosti vnútorných uhlov také, že ich celočíselný násobok je rovný 360° (rovnostranný trojuholník: $6 \times 30^\circ$, štvorec: $4 \times 90^\circ$, pravidelný šesťuholník: $3 \times 120^\circ$).

³ Prvýkrát dôkaz Ivan Morton Niven publikoval v decembri 1978 (Niven I.: *Convex Polygons which Cannot Tile the Plane*. American Mathematical Monthly 85, 10(1978), 785–792.).

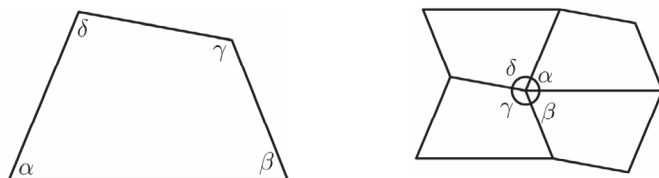
⁴ Reinhardt K.: *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*. Dissertation der Naturwiss. Fakultät, Universität Frankfurt am M., Borna – Leipzig, 1918. Dizertačnú prácu písal K. A. Reinhardt pod vedením L. Bieberbacha (1886–1982), ktorý je známy svojou prácou v oblasti dynamiky komplexných premenných.

vytvárajú práve tri typy konvexných šesťuholníkov (Obr. 4), pričom pod „typom“ sa všeobecne rozumie množina mnohoúhelníkov, ktoré vyhovujú určitým podmienkam pre veľkosť strán a vnútorných uhlov.

Objavovanie konvexných teselujúcich päťuholníkov je ale ságou, ktorá trvá niekoľko desaťročí. Po prvýkrát sa klasifikácia päťuholníkov vytvárajúcich monoedrálnu teseláciu v rovine objavila takisto v Reinhardtovej dizertačnej práci, v ktorej stanovil päť⁶ rôznych skupín požiadavok pre uhly a strany daného päťuholníka, a každá z nich tak definuje jeden teselujúci typ päťuholníka. (Pre päťuholníky tohoto typu existuje veľa rozličných teselácií.) Podľa [5] Reinhardt nepochyboval, že vytvoril kompletne riešenie tohoto problému, ale nevedel dokázať, že každý teselujúci päťuholník je možné určiť zaradiť k jednému z daných piatich typov. Napriek tomu bol Reinhardt vo svojom odvodzovaní tak dôkladný, že sa jeho klasifikácia prijala ako finálny výsledok. Reinhardtovo tvrdenie potvrdili H. Heesch⁷ a O. Kienzle v roku 1963⁸. O päť rokov neskôr ale R. B. Kershner z Johns Hopkins University oznámil, že našiel ďalšie tri typy päťuholníkov teselujúcich rovinu (použil metódu odlišnú od Reinhardtovej), a že spolu týchto osem typov nakoniec tvorí konečný zoznam [3].⁹ Aj toto rozšírenie sa neskôr ukázalo ako nie konečné.



Obr. 2 a) Štvoruholníková teselácia s protocelou v tvare nekonvexného štvoruholníka, b) príklad trojuholníkovej teselácie.



Obr. 3 Pre súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom štvoruholníku platí: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

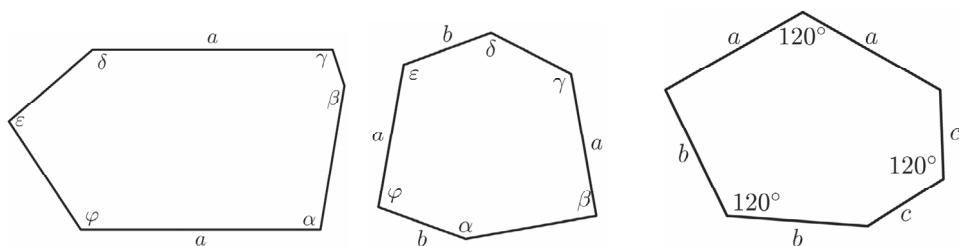
⁵ Teselácie sú obsahom aj 18. Hilbertovho problému, v ktorom sa rieši otázka vyplnenia priestoru bez medzier kongruentnými polyédrami. Časť tohoto problému vyriešil práve L. Bieberbach, časť týkajúcu sa anizodrálnych konvexných mnohoúhelníkov K. A. Reinhardt v roku 1928 (Reinhardt K.: *Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin, Physikalisch-Mathematische Klasse, 1928, 150–155), časť zostala nevyriešená.

⁶ V skutočnosti Reinhardt odvodil 8 typov teselujúcich päťuholníkov, ale prvé 3 typy sú považované za špeciálne prípady 3 typov teselujúcich konvexných šesťuholníkov a je možné z nich dané šesťuholníky vytvoriť vložení ďalšieho vrcholu na jednu stranu [3]. Pre ostatných päť typov päťuholníkov to neplatí.

⁷ Heinrich Heesch (1906–1995), nemecký matematik, zaoberal sa teóriou grafov a teseláciami (po ňom sú pomenované aj pojmy ako Heeschova cela alebo Heeschovo číslo).

⁸ Heesch H., Kienzle O.: *Flächenschluss*. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.

⁹ Kershner napísal, že jeho dôkaz je príliš namáhavý, a že ho bude publikovať čo najskôr niekde inde. (Pozn. autora: Podľa informácií, ktoré som našla, Kershner už tento dôkaz nepublikoval.)



Obr. 4 Tri typy šesťuholníkov vytvárajúcich monoedrálne rovinné teselácie. Podmienky, ktoré musia niektoré strany spĺňať, sú vyznačené v obrázku (strany s rovnakými dĺžkami sú označené rovnakými písmenami), podmienky pre veľkosti vnútorných uhlov sú nasledujúce: a) $\beta = \pi - \alpha - \gamma$, $\varepsilon = \pi - \delta - \varphi$, b) $\gamma = \pi - \delta - \varphi$, $\varepsilon = \pi - \alpha - \beta$, c) veľkosť troch vnútorných uhlov je 120° .

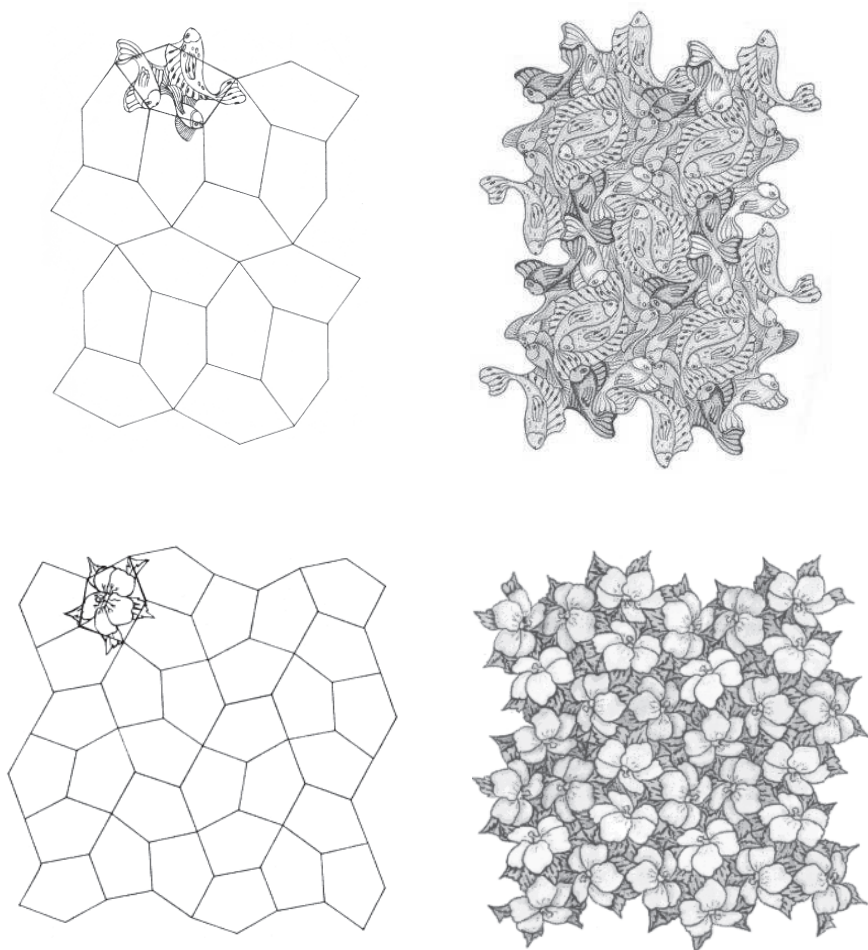
V roku 1975 v júlovom čísle časopisu *Scientific American* M. Gardner¹⁰ vo svojej rubrike publikoval Kershnerov zoznam ôsmich typov teselujúcich päťuholníkov. Vďaka tomu tento problém znovuoťvoril a oboznámil s ním širokú čitateľskú verejnosť, vrátane mnohých amatérov – matematikov. Prvým aktívnym čitateľom, ktorý Gardnerovi poslal svoje výsledky, bol Richard James, počítačový vedec z Kalifornie. Ten sa rozhodol už po prečítaní prvej časti článku otestovať svoje schopnosti a bez pomoci Kershnerovho zoznamu nájsť nejaké z päťuholníkových teselácií. Našiel päťuholník, ktorý v Kershnerovom zozname chýbal a M. Gardner ho publikoval. Jednou z ďalších aktívnych čitateľov bola Marjorie Riceová¹¹, ktorá čítala synom predplatnený časopis a článok o Jamesových objavoch v *Scientific American* z decembra 1975 v nej vzbudil pozornosť. Tiež ju zaujal júlový článok o päťuholníkových teseláciách a už vtedy si myslela, aké zaujímavé to muselo byť pre Kershnera objaviť nové typy päťuholníkových ciel. Ale až po objave Richarda Jamesa jej záujem natoľko vzrástol, že sa rozhodla zistiť, či je schopná nájsť nejaký ďalší teselujúci päťuholník [6]. Marjorie si najprv spísala všetky informácie o daných deviatich typoch a snažila sa nájsť spoločné vzťahy, ktorým vyhovovali dané päťuholníky a príslušné teselácie. Vianoce v roku 1975 boli pre ňu veľmi náročné, pretože sa tomuto problému venovala aj pri práci v kuchyni, pričom sa snažila, aby to nikto nezistil a nemusela tak svoju činnosť nikomu vysvetľovať. V polovici februára 1976 Marjorie poslala svoje nákresy M. Gardnerovi. V tom čase sa začala vzájomná korešpondencia a priateľstvo medzi Marjorie a Doris Schattschneiderovou¹², ktorá sa stala nielen jej priateľkou ale aj konzultantkou. Doris posielala Marjorie články, ktoré sa v danom čase objavovali k danej problematike v odborných časopisoch a Marjorie sa snažila napríklad šesťuholníkové cely rozdeliť tak,

¹⁰ Martin Gardner (1914), americký popularizátor matematiky. Počas 25 rokov (1956–1981) viedol rubriku *Matematické hry* v časopise *Scientific American*, vďaka ktorej priblížil krásu matematiky verejnosti a mnohých inšpiroval k práci nad matematickými problémami. Téma teselácií sa venoval niekoľkokrát vo svojej rubrike i v mnohých svojich knihách (je autorom viac než 60 kníh).

¹¹ Marjorie Riceová (1923), matka piatich detí a žena v domácnosti zo San Diega. Po ukončení strednej školy, sa stala sekretárkou a neskôr sa vydala za svojho šéfa. Pri hľadaní teselujúcich päťuholníkov si vytvorila svoj vlastný systém označovania vyjadrujúci podmienky a vzťahy medzi stranami a uhlami teselujúcich útvarov.

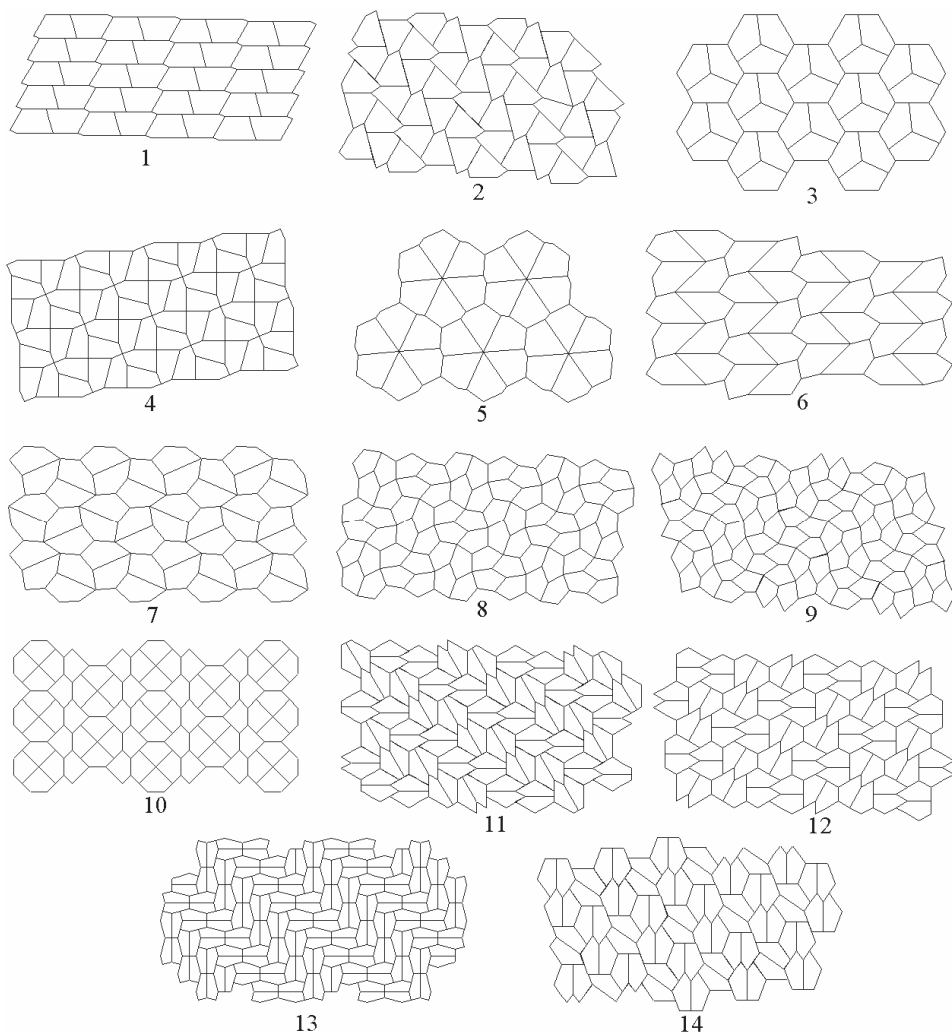
¹² Doris Schattschneiderová získala doktorát na Yaleskej univerzite v roku 1966. Učila na Northwestern University a University of Illinois v Chicago Circle, a od roku 1968 na Moravian College. Tu ju jej záujem o umenie priviedol k myšlienke vytvoriť kurz s názvom *Teselácie: Matematické umenie*. O tejto téme napísala veľa. Spolupracovala s grafikmi – umelcami na vytvorení knihy a kolekcie jedinečných geometrických modelov M. C. Eschera – *Kaleidocycles* (Schattschneider D., Walker W.: *Kaleidocycles*. Pomegranate Publications, Petaluma, CA, 1987).

aby získala päťuholníkové. Bez formálneho matematického vzdelania, ale s nadšením, sa jej podarilo počas obdobia dvoch rokov nájsť štyri nové typy teselujúcich päťuholníkov, pričom vzniknuté teselácie ešte dokreslila napríklad kvetinovým alebo zvieracím ornamentom, a viac než šesťdesiat rôznych teselácií. Podrobný opis ako R. James alebo M. Riceová našli teselujúce päťuholníky, je možné nájsť napríklad v [6].



Obr. 5 Teselácie vytvorené opakovaním konvexných päťuholníkov, ktoré objavila a dokreslila zvieracím či rastlinným motívom Marjorie Riceová.¹³

¹³ Obrázky sú prevzaté zo stránky M. Riceovej home.comcast.net/~tessellations/tessellations.htm.



Obr. 6 Štrnásť typov päťuholníkov vytvárajúcich monoedrálnu teseláciu, ktoré sú v súčasnosti známe; teselácie 1–5 odvodil K. Reinhardt (1918), R. B. Kershner teselácie 6–8 (1968), R. James teseláciu 10 (1975), M. Riceová teselácie 9, 11–13 (1976–1977), R. Stein teseláciu 14 (1985).¹⁴

¹⁴ Obrázky sú prevzaté z internetovej stránky www.mathpuzzle.com/tilepent.html. Podmienky pre dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov jednotlivých typov sú nasledujúce (A, B, C, D, E – vnútorné uhly päťuholníka, a, b, c, d, e – strany päťuholníka; takéto označenie je napríklad použité v článku [5]): **typ 1:** $D + E = 180^\circ$, **typ 2:** $C + E = 180^\circ$, $a = d$, **typ 3:** $A = C = D = 120^\circ$, $a = b$, $d = c + e$, **typ 4:** $A = C = 90^\circ$, $a = b$, $c = d$, **typ 5:** $C = 2A = 120^\circ$, $a = b$, $c = d$, **typ 6:** $C + E = 180^\circ$, $A = 2C$, $a = b = e$, $c = d$, **typ 7:** $2B + C = 360^\circ$, $2D + A = 360^\circ$, $a = b = c = d$, **typ 8:** $2A + B = 360^\circ$, $2D + C = 360^\circ$, $a = b = c = d$, **typ 9:** $2E + B = 360^\circ$, $2D + C = 360^\circ$, $a = b = c = d$, **typ 10:** $E = 90^\circ$, $A + D = 180^\circ$, $2B - D = 180^\circ$, $2C + D = 360^\circ$, $a = e = b + d$, **typ 11:** $A = 90^\circ$, $C + E = 180^\circ$, $2B + C = 360^\circ$, $d = e = 2a + c$, **typ 12:** $A = 90^\circ$, $C + E = 180^\circ$, $2B + C = 360^\circ$, $2a = c + e = d$, **typ 13:** $A = C = 90^\circ$, $2B = 2E = 360^\circ - D$, $c = d$, $2c = e$, a **typ 14:** $D = 90^\circ$, $2E + A = 360^\circ$, $C + A = 180^\circ$, $B + D + E = 360^\circ$, $2e = 2c = a$.

3 Záver

Zoznam trinástich typov teselujúcich päťuholníkov sa objavil už v roku 1978 v *Mathematics Magazine* v článku Doris Schattschneiderovej [5]¹⁵ a D. C. Hunt a M. D. Hirschhorn v roku 1983 tvrdili, že dokázali jeho kompletnosť. Dôkaz dvojica publikovala v roku 1985.¹⁶ V roku 1985 objavil ďalší, štrnásty, teselujúci päťuholník Rolf Stein, študent z Univerzity v Dortmunde, ktorý vyhlásil (nepoučený zo skúseností Reinhardta

a Kershnera), že daný problém je vyriešený raz a navždy. Prehľad doteraz známych typov päťuholníkov vytvárajúcich teselácie s príslušnými teseláciami je na Obr. 5.

Literatúra

- [1] Grünbaum B., Shephard G. C.: *Some Problems on Plane Tilings*. In: Klarner D. (ed.): *The Mathematical Gardner*. Prindle, Weber, and Schmidt, Boston, MA, 1981, 167–196.
- [2] Grünbaum B., Shephard G. C.: *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman, New York, 1987.
- [3] Kershner, R. B.: *On Paving the Plane*. *American Mathematical Monthly* 75(1968), 839–844.
- [4] Niven I. M.: *Maxima and Minima Without Calculus*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [5] Schattschneider D.: *Tiling the Plane with Congruent Pentagons*. *Mathematics Magazine* 51(1978), 29–44.
- [6] Schattschneider D.: *In Praise of Amateurs*. In: Klarner D. (ed.): *The Mathematical Gardner*, Prindle, Weber, and Schmidt, Boston, MA, 1981, 140–166.

Adresa

RNDr. Lucia Ilucová
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
110 00 Praha 1
e-mail: ilucova@gmail.com

¹⁵ Tento zoznam 13 teselujúcich typov päťuholníkov uviedli v svojom článku [1] aj B. Grünbaum a G. C. Shephard, ktorí napísali jednu z najrozsiahlejších a najkomplexnejších publikácií o teseláciách [2].

¹⁶ Hirschhorn M. D., Hunt D. C.: *Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane*. *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A 39, 1(1985), 1–18. Autori tvrdia, že rovnostranný konvexný päťuholník vytvára teseláciu v rovine vtedy a len vtedy, ak má súčet dvoch uhlov rovný 2π alebo je to jednoznačne určený päťuholník so špeciálnymi uhlami. Ich dôkaz je založený na preskúmaní všetkých bodov prieniku 100 kriviek. V článku O. Bagina *Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons* (*Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A 105, 2(2004), 221–232) autor predvádza alternatívny dôkaz tvrdení o päťuholníkoch, a to založený na Eulerovej vete pre rovinné grafy.

HRABĚ DE BUFFON A HRA FRANC-CARREAU

ANNA KALOUSOVÁ

Abstract: The Buffon's problems are well known and are presented in almost all books about the geometric probability. In most of them the problems are translated into the recent mathematical language. We would like to present clean tile problems and their solution in a way as their author made it.

1 Úvod

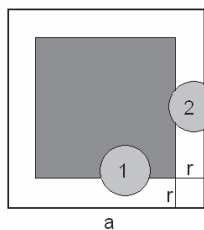
Georges-Louis Leclerc, hrabě de Buffon (1707–1788), je znám především jako přírodovědec a autor rozsáhlé encyklopedie *Histoire naturele générale et particulière* (36 dílů vyšlo ještě za jeho života, dalších 8 publikoval Lacépède až po Buffonově smrti). Na počátku Buffonovy vědecké dráhy ale stála matematika. V roce 1733 bylo ve francouzské *Académie royale des sciences* čteno jeho pojednání *Solutions de problèmes sur le jeu du franc-carreau* (záznam o tom je v [2]), reference byly velmi pochvalné a Buffon byl následujícího roku jmenován *adjoint* v sekci mechaniky. Rozšíření pojednání z roku 1736 se nezachovalo, nicméně v roce 1777 bylo spolu s dalšími matematickými texty zahrnuto do *Essai d'arithmétique morale* [1].

Buffonovy úlohy byly mnohými matematiky dále zobecňovány a staly se základem nového oboru – geometrické pravděpodobnosti. Jsou uvedeny snad v každé knize zabývající se tímto tématem. Většinou jsou ale „přeloženy“ do řeči moderní matematiky. Cílem tohoto článku je ukázat, co a jak řešil v úlohách o hře *franc-carreau* sám jejich autor, a opravit nepřesnosti, jichž se dopustil.

2 Franc-carreau

2.1 Franc-carreau v *Solutions de problèmes sur le jeu du franc-carreau*

Hra *franc-carreau* byla údajně oblíbená mezi šlechtici na francouzském královském dvoře. Hráť se mohla v místnosti, jejíž podlaha byla vydlážděna stejnými pravidelnými dlaždicemi. Do vzduchu byla vyhozena mince a hráči sázeli na její konečnou polohu.

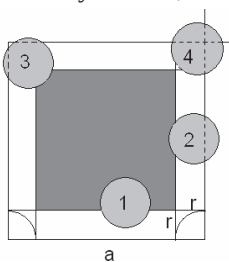


První sázel na to, že bude po dopadu ležet celá na jedné dlaždici (pozice *franc-carreau*), druhý na to, že bude ležet na více dlaždicích, tedy protne nějakou spáru. Buffon v [2] vyšetřuje pouze případ, kdy jsou dlaždice čtvercové. Vybere jednu z nich a vepíše dovnitř další čtverec, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami původního čtverce a jsou od nich vzdáleny o poloměr mince r . Je zřejmé, že pokud střed mince dopadne do tohoto vnitřního čtverce, mince leží celá na vybrané dlaždici, pokud vně (Buffon to nazývá *couronne*), protne nějakou spáru. Buffon se dále zabývá otázkou, kdy je hra vyrovnaná (*égal*). K tomu je zřejmě třeba, aby obsah vepsaného čtverce byl stejný jako obsah *couronne*. V [2] je uveden pouze výsledek, totiž že poloměr mince musí být roven přibližně jedné šestině délky strany čtverce. Pokud tomu tak není, je hra nevyrovnaná. V závěru je ještě připomenuto, že podobný postup nelze použít v případech, že má mince jiný tvar (např. čtverec).

2.2 Franc-carreau v *Essai d'arithmétique morale*

Buffon zde nabízí rozšíření problému. Dlaždice nemusí být jen čtvercové, mohou mít libovolný tvar. Buffon zkoumá kromě čtverce ještě rovnostranný trojúhelník, kosočtverec s úhlem $\pi/3$ a pravidelný šestiúhelník, protože jsou to podle něj jediné tvary, které mohou vyplnit plochu, aniž by vznikly mezery. Přidává také další hráče. První hráč opět sází na to, že mince neprotne žádnou spáru, druhý sází na to, že protne jednu spáru, třetí na to, že protne dvě spáry a čtvrtý na to, že protne tři (v případě pravidelného šestiúhelníka), čtyři (v případě čtverce a kosočtverce) nebo šest (v případě rovnostranného trojúhelníka) spár. Buffon zkoumá šance jednotlivých hráčů a počítá, jaký musí být poměr mezi stranou obrazce a průměrem mince, aby byla hra pro daného hráče vyrovnaná; to znamená, aby pravděpodobnost, že vyhraje, byla stejná jako pravděpodobnost, že prohraje. V zadání úlohy je sice uvedeno, že druhý, resp. třetí hráč sází na to, že mince protne jednu, resp. dvě spáry, Buffon však vyšetřuje případy, kdy mince protne **aspoň** jednu, resp. **aspoň** dvě spáry. Postup je podobný dříve popsanému. Dovnitř obrazce vždy vepíše obrazec, jehož strany jsou od stran původního obrazce vzdáleny o poloměr r (polovinu průměru d) mince, a prodlouží je, až se dotýkají stran původního obrazce. Nejprve zkoumá šance prvního a druhého hráče. Je zřejmé, že první hráč vyhraje právě tehdy, když druhý hráč prohraje. Podmínky pro vyrovnanou hru jsou tedy pro tyto dva hráče stejné.

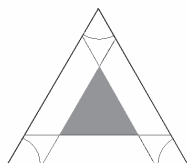
Nejprve se zabývá případem, kdy jsou dlaždice čtvercové. Má-li být hra pro první dva hráče vyrovnaná, musí být jejich šance na výhru stejná jako na prohru, to znamená, že



musí platit $(a-d)^2 = a^2 - (a-d)^2$, tedy $a = \sqrt{2}(a-d)$. Poměr strany čtverce k průměru mince musí být $a:d = 1:(1-\sqrt{1/2})$. Strana čtverce má být zhruba 3,5-násobkem průměru mince. Třetí hráč vyhraje, pokud střed mince leží v jednom ze čtyř čtverců o stranách $r = d/2$. Celkový obsah těchto čtyř čtverců je $4 \cdot (d/2)^2 = d^2$. Má-li být hra vyrovnaná, musí být $d^2 = a^2 - d^2$, tedy $a = \sqrt{2} \cdot d$. Poměr strany čtverce k průměru mince je

$a:d = 1:\sqrt{1/2}$, strana čtverce má být zhruba 1,4-násobkem průměru mince (Buffon uvádí, že strana čtverce má být o necelou třetinu delší než průměr mince). Čtvrtý hráč vyhraje, pokud střed mince leží v jednom ze čtyř čtvrtkruhů s poloměrem stejným, jako má mince. Celkový obsah těchto čtvrtkruhů je $\pi d^2/4$. Má-li být hra vyrovnaná, musí být $\pi d^2 = 4a^2 - \pi d^2$, tedy $2a^2 = \pi d^2$. Buffon předpokládá, že poměr obvodu kruhu k jeho průměru (tedy π) je $22/7$. Poměr strany čtverce k průměru mince potom musí být $a:d = 1:\sqrt{7/11}$ (v článku je nesprávně uvedeno $a:d = 1:\sqrt{11/7}$) a strana čtverce má být zhruba 1,25-násobkem průměru mince (Buffon uvádí, že strana čtverce má být o něco víc než čtvrtinu delší než průměr mince).

Podobně Buffon postupuje u ostatních obrazců. Mají-li dlaždice tvar rovnostranného trojúhelníka o straně a , vyhrává první hráč, pokud střed mince leží uvnitř vepsaného



trojúhelníka o straně $a - (\frac{d}{\sin(\pi/3)} + d \cot(\pi/3)) = a - \sqrt{3}d$ a obsahu

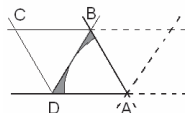
$1/2(a - \sqrt{3}d)^2 \cdot \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/4 \cdot (a - \sqrt{3}d)^2$. Hra je vyrovnaná, pokud

$a:d = 1:\frac{\sqrt{3}/2}{3+3\sqrt{1/2}}$. Strana trojúhelníka má být 5,9-násobkem průměru mince (Buffon uvádí, že je téměř 6-násobkem). Třetí hráč

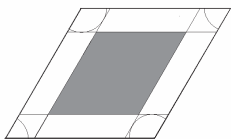
vyhraje, pokud střed mince leží v jednom ze tří kosočtverců o straně $\frac{r}{\sin(\pi/3)}$, jejich

celkový obsah je $3 \cdot \frac{d^2}{2\sqrt{3}}$. Hra je vyrovnaná, pokud $a:d=1:1/2$. Strana trojúhelníka je dvojnásobkem průměru mince. Čtvrtý hráč vyhraje, pokud střed mince leží v jedné ze tří šestin kruhu o poloměru $d/2$, jejich celkový obsah je $3\pi d^2/24 = \pi d^2/8$. Hra je vyrovnaná, pokud $a:d=1:\sqrt{\frac{7\sqrt{3}}{22}}$. Strana trojúhelníka má být 1,3-násobkem průměru

mince (Buffon uvádí, že strana je o něco víc než třetinu delší než průměr mince). Může ale nastat ještě jeden případ, o kterém Buffon vůbec neuvažuje. Mince totiž také může protnout tři spáry. Na obrázku je znázorněno okolí jednoho z vrcholů trojúhelníka (je označen A). AB a AD jsou části stran trojúhelníka, CD a CB jsou části rovnoběžek s těmito stranami. Mince protne tři spáry, pokud její střed leží v tmavě vybarvené oblasti. Pokud leží v trojúhelníku ABD, protne aspoň tři spáry. Hra je vyrovnaná, pokud $a:d=1:\sqrt{1/2}$. Strana trojúhelníka je 1,4-násobkem průměru mince.



Mají-li dlaždice tvar kosočtverce o straně a a s úhlem $\pi/3$, vyhrává první hráč (a prohrává druhý), pokud střed mince leží uvnitř vepsaného kosočtverce, který má stranu $a - \frac{d}{\sin(\pi/3)} = a - \frac{2d}{\sqrt{3}}$ a obsah $(a - \frac{2d}{\sqrt{3}})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Hra je vyrovnaná, pokud $a:d=1:\frac{\sqrt{3}/2}{2+\sqrt{2}}$, strana kosočtverce je tedy 3,9-násobkem průměru mince (Buffon uvádí, že je téměř čtyřnásobkem). Třetí hráč vyhraje, pokud střed mince leží

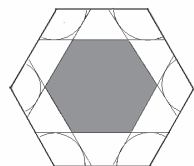


v jednom ze čtyř kosočtverců o straně $\frac{r}{\sin(\pi/3)}$. Jejich celkový

obsah je $\frac{4d^2}{2\sqrt{3}} = \frac{2d^2}{\sqrt{3}}$ a hra je vyrovnaná, pokud $a:d=1:\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}}$.

Strana kosočtverce je tedy 1,63-násobkem průměru mince (Buffon uvádí, že je větší přibližně o 2/5). Čtvrtý hráč vyhraje, pokud střed mince leží v jedné z částí kruhu se středem ve vrcholech čtyřúhelníka a poloměrem stejným, jako má mince. Tyto čtyři části dohromady tvoří kruh s poloměrem $d/2$, jehož obsah je $\pi d^2/4$. Hra je vyrovnaná, pokud $a:d=1:\sqrt{\frac{7\sqrt{3}}{22}}$, stejně jako v případě rovnostranného trojúhelníka.

Mají-li dlaždice tvar pravidelného šestiúhelníka o straně a , vyhrává první hráč, pokud



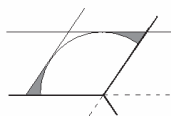
střed mince leží uvnitř vepsaného šestiúhelníka o straně $a - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Obsah tohoto šestiúhelníka je $3(a - \frac{d}{\sqrt{3}})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ a hra je vyrovnaná,

pokud $a:d=1:\frac{\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{1/2}}$, tedy strana šestiúhelníka je 1,97-násobkem

(podle Buffona téměř dvojnásobkem) průměru mince. Třetí hráč podle Buffona vyhraje, pokud střed mince leží v jednom ze šesti kosočtverců o straně $d/\sqrt{3}$. Jejich celkový

obsah je $6 \cdot \frac{d^2}{2\sqrt{3}} = \frac{3d^2}{\sqrt{3}}$ a hra je vyrovnaná, pokud $a : d = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tento výsledek ale není správný. Pokud totiž střed mince padne do tmavě vybarvené oblasti na obrázku, protne mince jen jednu spáru. Protne také myšlené prodloužení druhé spáry (na obrázku je vyznačeno přerušovanou čarou) na sousední dlaždici, ale ne další spáru. Obsah těchto



ploch je třeba odečíst, získáme $\frac{3d^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right)$ a hra je vyrovnaná,

pokud $a : d = 1 : \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \pi}}$. Strana šestiúhelníka je 1,13-násobkem

průměru mince. Čtvrtý hráč vyhraje, pokud střed mince leží v jedné ze šesti třetin kruhu se středy ve vrcholech šestiúhelníka a poloměrem stejným, jako má mince. Celkový obsah je $6 \cdot \frac{\pi d^2}{12} = \frac{\pi d^2}{2}$ a hra je vyrovnaná, pokud $a : d = 1 : \sqrt{\frac{21\sqrt{3}}{44}}$.

Strana šestiúhelníka je 1,1-násobkem průměru mince (podle Buffona větší přibližně o třináctinu).

V závěru Buffon připomíná, že je možné hledat řešení i v dalších případech (mince protne jen jedinou spáru, právě dvě, ...) a také lze použít minci jiného tvaru (španělská pistole) nebo třeba tyčku či jehlu. Pak uvádí známou úlohu o jehle.

3 Závěr

Je zřejmé, že požadavky na to, aby hra byla vyrovnaná, jsou v běžných podmínkách většinou nesplnitelné. Průměr mince by leckdy musel být téměř stejný jako strana dlaždice. Je proto otázkou, proč je Buffon zkoumá. Snad aby podpořil své dříve uvedené varování před hazardními hrami. V literatuře často Buffonovy úlohy o hře *franc-carreau* nebývají uvedeny, protože jsou považovány za lehké. Pokud uvedeny jsou, pak jsou většinou omezeny jen na úlohy, které zkoumají šance prvního a druhého hráče (např. [3]), a to mnohdy jen pro případ čtverce. Více prostoru je věnováno úlohám o jehle a jejich zobecněním, které mají mnohá další uplatnění.

Literatura

- [1] Buffon, G.-L. Leclerc de: *Essai d'arithmétique morale*. Histoire naturelle, générale et particulière, servant de suite à l'Histoire naturelle de l'Homme, Supplément, tome IV., Imprimerie Royale, Paris, 1777, 46–148.
- [2] Fontenelle, B. le B. de: *Histoire de l'Académie royale des sciences, en 1733*. Imprimerie Royale, Paris, 1735, 43–45.
- [3] Mathai, A. M.: *An Introduction to Geometric Probability*. Gordon and Breach Science Publishers, 1999.

Adresa

RNDr. Anna Kalousová
Katedra matematiky, FEL ČVUT
Technická 2
166 27 Praha 6
e-mail: kalous@math.feld.cvut.cz

METODIKA SOUDOBÝCH DĚJIN MATEMATIKY NA PŘÍKLADU RIEMANNOVY HYPOTÉZY

JAN KOTŮLEK

Abstract: With unsuccessful attempts on the proof of the Riemann Hypothesis we illustrate the features of the new types of sources for the contemporary history of mathematics. We particularly emphasize their (in)accessibility, promptness of publishing, huge amount of the data, possibility of study the psychological aspects or inevitability of careful account and revealing the pseudo-science.

1 Úvod

Od konce 20. století prochází způsob publikování výsledků výzkumu v matematice dramatickým vývojem. S tím souvisí i rozrůstání pramenů základny pro studium soudobých dějin matematiky. Vědci, a mezi nimi především matematici a fyzikové, brzy pochopili výhody publikování na Internetu. Zřejmě jako reakce na rychlost (resp. spíše pomalost) publikování a velkou moc editorů a recenzentů v etablovaných vědeckých časopisech se elektronické publikování stalo v matematice standardem již koncem 90. let 20. století.

Nové typy pramenů dostupných na Internetu vyžadují nový přístup. Ve třetí kapitole uvádíme jednotlivé druhy nových pramenů a rozebíráme jejich základní charakteristiky (kapitola 3.1). Zejména se zaměříme na jejich (ne)dostupnost, rychlost publikování a možnosti vyrovnání se s obrovským objemem dat. Dále upozorňujeme na nutnost obezřetné kritiky pramenů a odhalování pseudovědy (kapitola 3.2). Příklad důkazů Riemannovy hypotézy je v tomto ohledu obzvlášť ilustrativní.

Na druhou stranu nabízejí tyto prameny nové možnosti, například umožňují studovat různé psychologické aspekty vzniku prací nebo vědeckých sporů (kapitola 3.3).

2 Riemannova hypotéza (RH)

Po dokázání Velké Fermatovy věty a zařazení Riemannovy hypotézy mezi tzv. *Millennium Problems* spojené s premií milion dolarů za její vyřešení, viz [1], se stala RH mediálně nejznámějším problémem současné matematiky. Tomu také odpovídá vlna zájmu mezi matematiky i laickou veřejností. Od roku 2002 vyšlo minimálně pět popularizujících knih o Riemannově hypotéze [2], proběhlo několik vědeckých konferencí, několik sérií veřejných přednášek, a také se začínají množit „laické“ pokusy o důkaz RH [3].

3 Elektronické prameny pro soudobé dějiny matematiky

Soudobé dějiny matematiky se dají časově ohraničit rozvojem Internetu, tedy počátkem 90. let 20. století. Po prvních nesmělých pokusech se statickými webovými stránkami, elektronickou poštou a s archivy preprintů dochází zhruba od přelomu tisíciletí k dramatickému rozmachu možností, které Internet nabízí. Tehdy se začala objevovat hotová řešení pro potřeby vědeckých uživatelů Internetu, což umožnilo publikovat online bez znalosti jazyka HTML.

3.1 Heuristika: Jaké máme zdroje o Riemannově hypotéze?

Webové stránky bez interaktivity jsou vlastně jen texty obohacené přímými odkazy na jiné texty, poznámky, či obrázky. Od klasických archivních pramenů se liší asi jen tím, že je často velmi těžké zjistit jejich autora a datum vzniku, a také tím, že se jejich obsah může velmi často měnit. Přes obrovské množství materiálu se na Internetu vyhledává mnohem rychleji než v archivech, vyvinula se totiž celá věda o vyhledávání, tzv. *data mining*.

Další překážkou je zveřejňování matematických vzorců na internetu. Existuje na to několik způsobů, leč každý z nich má své menší či větší nedostatky. Především je to stále velmi pracné a ani vizuální výsledek většinou není uspokojivý. Jedinou spolehlivou metodou je nadále umisťování celých článků ve formátu PDF. Naděje vkládané do jazyka MathML se zatím ukázaly být plané. Stránky American Institute of Mathematics o RH [4] jsou toho smutným důkazem: nejsou kompletní a od června 2004 nebyly vůbec aktualizovány.

V roce 1991 vznikl při laboratoři v Los Alamos elektronický archiv preprintů. Dnes je tzv. *arXiv* součástí knihovny Cornellovy univerzity a obsahuje přes půl milionu preprintů [5]. Na rozdíl od vědeckých časopisů je publikování v *arXivu* rychlé a všem dostupné (žádné poplatky za publikaci ani za prohlížení). Obliba *arXivu* ukazuje, že jsou to velmi podstatné výhody. Publikace v *arXivu* nepodléhají recenzím, ani nejsou v referativních časopisech, nedá se pro ně počítat tzv. *impact factor*, slouží tedy opravdu především k rychlému zveřejnění výsledků před zasláním práce do kvalitního časopisu.

Elektronické publikování zamezilo nekalému ovlivňování původnosti vědeckých výsledků ze strany recenzentů a editorů vědeckých časopisů. Spory o původnost výsledků se změnily na spory o jejich korektnost. V neposlední řadě znamenal úspěch *arXivu* také vytvoření tlaku na rychlost recenzního řízení a publikační doby v klasických časopisech.

Seznam významných *digitálních knihoven* uvedený v [6] bych rád doplnil o službu Google books, která je největší digitální knihovnou na světě (přes 7 milionů výtisků). Je celá indexována (tj. umožňuje pokročilé vyhledávání v knihách) a propojena s mnoha velkými knihkupectvími a katalogy kamenných knihoven po celém světě. U knih chráněných autorskými právy má služba nasmlouvané poskytování náhledů vybraných stránek.

Rozvoj *elektronické pošty* úplně vytlačil klasickou korespondenci. Ovšem způsob práce s e-maily jako pramenem se neliší od práce s klasickými dopisy. Je to výborný zdroj informací, ale problémem může být zejména jejich (ne)dostupnost, resp. vůbec zachování materiálu. Pokud jsou totiž vůbec e-maily archivovány (ať již kvůli autocenzuře autora či nedbalosti v archivaci u instituce), zpřístupní se nejdříve po 30 letech, tj. nejdříve od roku 2020. Po tolika letech navíc zřejmě vyvstanou problémy s přečtením datových pásek a diskových záloh.

Velmi podobný charakter měly a mají elektronické konference neboli newsgroups. Jak známo, jde o hromadné rozesílání e-mailů všem členům dané skupiny. Výhodou je, že kopie e-mailů jsou archivovány správcem a jsou veřejně dostupné. Tyto konference se doplňováním uživatelského komfortu postupně mění v plnohodnotná diskusní fóra, kde se nekomunikuje prostřednictvím e-mailu, ale příspěvky se tvoří přímo ve „wysiwyg“ editoru v prohlížeči. Výhodou je pak možnost zakomponovat do textu matematické formule a vzorce [7].

Velmi vhodným formátem pro publikování na Internetu jsou *Wiki* [8], např. Wikipedie. Jde o velmi povedený jednoduchý formát dokumentů, kde se vkládání informací podobá známým wysiwyg editorům, tedy není třeba učit se jazyk HTML. Navíc obsahuje diskusi k jednotlivým článkům a historii změn v článcích. Bohužel se stále používá spíše pro výuku než pro prezentaci vědy.

Velmi zajímavým pramenem jsou *blogy*. Jedná se o velmi oblíbené interaktivní deníkové záznamy, které obsahují bezprostřední osobní komentáře a postřehy. Co bychom dali za osobní deník například Hilberta, Schrödingera, Turinga nebo Gödela, a to i s případnými komentáři jejich kolegů a známých!

Relativně nejpomaleji se rozvíjela digitalizace fotografií a filmů. Zhlédnout online videozáznamy přednášek či televizních pořadů je možné zhruba od roku 2000, kvalita záznamu se velmi rychle zlepšovala, rozvoj však brzdila dostupnost dostatečně rychlého připojení k Internetu. Rychlý rozvoj nastal s nástupem tzv. streamovaného videa zhruba od roku 2005, zejména díky službě youtube.com, takže si například můžeme pustit záznam přednášek T. Gowerse, G. Tatea a M. Atiyaha z Millenium event v Paříži [9], kde byly vyhlášeny již zmíněné Millennium Problems.

3.2 Kritika: Jaké informace můžeme z nalezených zdrojů vyvodit?

Od vyhlášení Millennium Problems se již objevilo minimálně deset důkazů platnosti RH a navíc ještě několik důkazů její neplatnosti. Na jednotlivé pokusy se snaží upozorňovat na svých stránkách M. R. Watkins z University of Exeter [3]. Většina z nich je vystavena v arXivu vedle seriózního výzkumu, a často je velmi těžké je rychle odhalit. V předinternetovém věku by se tyto pokusy na veřejnost asi těžko dostávaly.

Mezi 23. a 25. březnem 2009 byly v arXivu publikovány hned dva důkazy Riemannovy hypotézy [10], [11]. Poznamenejme jen, že oba autoři jsou emeritními profesory, ale ani jeden není číselným teoretikem.

Článek „An analytic proof of the RH“, který zaslal 25. 3. montrealský ekonom *Jon Breslaw*, vyvolal větší rozruch. O den později (26. 3. v 17:03) zorganizoval *Luboš Motl* soutěž o to, kdo nejrychleji vyvrátí Breslawův důkaz RH [12]. Jelikož sám Motl soutěž přesně za půl hodiny vyhrál (odstavec nazvaný „At 5:33 PM: Sorry, I won“), reagoval Breslaw zanecháním komentáře na blogu a svůj článek promptně přepracoval (verze 2 byla zaslána 26. 3. v 19:19 středoevropského zimního času). Motl reagoval během další hodiny třemi komentáři, přičemž v druhém z nich (přesně 30 minut od zaslání Breslawovy publikace do arXivu) opět našel protipříklad. Breslaw reagoval za tři dny (verze 3 z 29. 3.) a již jen změnou názvu na „Towards a statistical proof of the RH“ uznal, že jeho práce plný důkaz RH neobsahuje. Motl diskusi ukončil poznámkou, že článek byl přepracován, obsahuje skromnější tvrzení a důkaz stále nemáme.

Pro historika matematiky je stále složitější posuzovat význam speciálních studií, zejména v tak složitých otázkách jako je RH. Často je třeba vnímat drobné náznaky, které předem nabádají k obezřetnosti. Z potřeby odhalovat pseudovědecké studie vznikl tzv. „crackpot index“, tedy seznam indicií, ze kterých se dá odhalit nevědecká práce. Jeho nejznámější verzi sepsal *John Baez*. Zajímavé také je, že i L. Motl má na blogu svou verzi [13].

Jako příklad náznaků, které musí kritický badatel vnímat, uvádím okolnosti související s druhým důkazem, který publikoval arizonský fyzik *Raghunath Acharya*. Podivné je, že napsal již v roce 2008 dva články, v nichž tvrdí, že dokázal RH. Tento je třetí. Také vždy tvrdí, že důkaz plyne z jisté dřívější práce. V roce 2006 publikoval také

v arXivu řešení dalšího z Millennium Problems. Přestože nikdo zatím nenalezl v jeho článcích chybu, nezdá se, že by mu Clayův Matematický Institut chtěl vyplatit slíbenou prémii.

Nakonec je třeba upozornit na možné využití historie matematiky ve výuce. Vyvracením nesprávných výsledků se totiž studenti mohou dobře naučit matematické „řemeslo“.

3.3 Interpretace: Cesta do hlubin Motlovy duše

Osobní zpovědi jako jsou blogy [12] přímo lákají k psychologickým exkurzům. Můžeme si tedy klást velmi zajímavé otázky, například:

- Je Motlova soutěž rytířským soubojem s hloupostí a omezeností nebo spíše bojem s jeho vlastním egem?
- Z čeho pramení tak razantní nesouhlas s navrženým důkazem a arogantní výsměch Jonu Breslawovi?

Podrobnosti k těmto otázkám a pokusy o odpovědi lze nalézt v [14].

Od dob školy Annales převládá v (post)moderní historiografii názor, že interpretace zahrnuje také vhodnou formu zpracování díla. Klade se důraz na zajímavé a poučné vyprávění příběhů, ovšem podložených precizními fakty. Je to tedy návrat k Ciceronově tezi *Historia magistra vitae est*. Tento trend se uplatňuje i v historii matematiky, vhodným příkladem souvisejícím s RH je přednáška Marcuse du Sautoy [15].

Literatura

- [1] *Millennium Problems, Riemann Hypothesis*. Clay Mathematics Institute, [online, cit. 15. 6. 2009], <http://www.claymath.org/millennium/>.
- [2] Devlin K. J.: *The Millennium Problems*. Basic Books, New York, 2002. Česky *Problémy pro třetí tisíciletí*. Dokořán & Argo, Praha, 2005. Sabbagh K.: *The Riemann Hypothesis*. Strauss and Giroux, 2003. du Sautoy M.: *The Music of the Primes*. Harper Collins, 2003. Rockmore D.: *Stalking the Riemann Hypothesis*. Pantheon Books, 2005. Derbyshire J.: *Prime Obsession*. Penguin Books, 2004. Česky: *Posedlost prvočísly*, Academia, Praha, 2007.
- [3] Watkins M. R.: *Proposed (dis)proofs of the Riemann Hypothesis*. [online, cit. 15. 6. 2009], <http://secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/RHproofs.htm>.
- [4] *The Riemann Hypothesis*. The American Institute of Mathematics, [online, cit. 17. 6. 2004], <http://www.aimath.org/WWN/rh/>.
- [5] *arXiv.org, open access to 543,328 e-prints in Physics, Mathematics, Computer Science, Quantitative Biology, Quantitative Finance and Statistics*. [online, cit. 15. 6. 2009], <http://arXiv.org>.
- [6] Bečvář J., Bečvářová M.: *Práce historika matematiky*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22.–26. 8. 2008, Matfyzpress, Praha, 2008, 73–90.
- [7] Konference *math-his* na serveru Masarykovy univerzity v Brně, <https://mailman.muni.cz/mailman/listinfo/math-his> je více informativní než diskusní. Konference *math-history-list* provozovaná Mathematical Association of America na

serveru Drexel University, <http://mathforum.org/kb/forum.jspa?forumID=193> se již více podobá diskusnímu fóru, ale uživatelským komfortem neopývá.

- [8] Wikipedie (otevřená encyklopedie): *Wiki*. [online, poslední revize 23. 4. 2009, cit. 15. 6. 2009], <http://cs.wikipedia.org/wiki/Wiki>.
- [9] *Millennium Ebeny*. College de France, Paris, May 24, 2000, [online, cit. 15. 6. 2009], <http://www.msri.org/communications/video/index6.html>.
- [10] Acharya R.: *Concerning Riemann Hypothesis*. arXiv:0903.3973.
- [11] Breslaw J.: *Towards a statistical proof of the Riemann Hypothesis*. arXiv:0903.4227v3, [online, 29. 3. 2009]. Breslaw J.: *An analytic proof of the RH*. arXiv:0903.4227v1, [online, 25. 3. 2009].
- [12] Motl, L.: *Jon Breslaw: a Riemann Hypothesis proof speed contest*. [online, cit. 15. 3. 2009], <http://motls.blogspot.com/2009/03/jon-breslaw-riemann-hypothesis-proof.html>.
- [13] Wikipedie (The Free Encyclopedia): *Crackpot index*. [online, poslední revize 10. 5. 2009, cit. 15. 6. 2009], <http://cs.wikipedia.org/wiki/Wiki>. Baez J.: *The Crackpot Index* (1998). [cit. 15. 6. 2009], <http://math.ucr.edu/home/baez/crackpot.html>. Motl L.: *Common crackpots' errors*. [online, poslední revize 19. 8. 2005, cit. 15. 6. 2009], <http://motls.blogspot.com/2005/08/common-crackpots-errors.html>.
- [14] Kotůlek J.: *Riemannova hypotéza v 21. století*. [online, cit 15. 6. 2009], <http://homel.vsb.cz/~kot31/RH/>.
- [15] du Sautoy M.: *The Music of the Primes*. Clay Public Lecture, May 8, 2008, [online, cit. 15. 6. 2009], http://www.claymath.org/public_lectures/dusautoy.php.

Adresa

RNDr. Jan Kotůlek
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
VŠB – TU v Ostravě
17. listopadu 15
708 33 Ostrava-Poruba
e-mail: Jan.Kotulek@vsb.cz

MATEMATIKA A JEJ JAZYK

LADISLAV KVASZ

Abstract: We discuss different kinds of changes of language in the history of classical mathematics. We introduce parameters as *logical*, *expressive*, *explanatory* and *integrative* power and use them in the analysis of the linguistic innovations in mathematics.

1 Úvod

Vývoj matematiky je úzko spätý so zmenami jej jazyka. Rôzne jazykové inovácie otvárajú často radikálne nové možnosti pre myslenie. V knihe *Patterns of Change* ([5]) som sa usiloval opísať základné typy lingvistických inovácií, ku ktorým došlo v dejinách matematiky. Pri výklade prvého typu zmien, nazvaného **re-representácie**, sú zavedené pojmy **logická, expresívna, explanatorická a integratívna sila**, pričom vývin matematiky je vyložený ako nárast logickej, expresívnej, explanatorickej a integratívnej sily jej jazyka. Matematika je teda schopná postupne dokázať stále *silnejšie vety*, dokáže opísať stále *zložitejšie objekty*, dokáže vysvetliť stále *jemnejšie súvislosti* a vo svojom univerze odкрýva stále *vyšší stupeň jednoty*. Vývin matematiky v rovine re-representácií vykazuje teda znaky pokroku.

Cieľom tohto príspevku je aj pre druhý typ zmien vo vývine matematiky, nazývaný **objektácie**, nájsť podobné parametre, ktoré by mohli pomôcť porozumieť dynamike tohto typu zmien podobne, ako pojmy logická či expresívna sila jazyka pomáhajú porozumieť re-representáciám. Pri objektáciách navrhujem hovoriť o **abstrakčnom, diferenciacnom, explikačnom, a unifikačnom potenciáli**. Použitím slova *potenciál* chcem naznačiť, že zmeny jazyka zviazané s objektáciami už nie sú tak prevratné ako *sily*. Potenciál neprináša niečo úplne nového. Vedie iba k obohateniu možností, ktoré sú v jazyku implicitne už prítomné. Ako príklad možno uviesť objav neeuklidovských geometrií. Nepopieram, že to bol objav prvoradého významu, ale nemožno tvrdiť, že by neeuklidovská geometria priniesla úplne nové univerzum tvarov, zrovnateľné s tým, ktoré priniesla analytická geometria. Väčšina objektov neeuklidovskej geometrie je známa z euklidovského sveta. Samozrejme, v neeuklidovskej geometrii objekty získavajú rad nových vlastností, ale ich súvis s euklidovskými objektmi nie je prerušený. Napríklad kosínusová veta má v neeuklidovskej geometrii odlišný tvar ako v euklidovskej geometrii, ale stále je to kosínusová veta, t.j. veta umožňujúca určiť veľkosť uhla v trojuholníku pomocou dĺžok jeho strán. Navyše kosínusová veta euklidovskej geometrie je limitným prípadom kosínusovej vety neeuklidovskej geometrie. Teda aj keď jazyk neeuklidovskej geometrie má väčší *abstrakčný, diferenciacný, explikačný* a *unifikačný* potenciál než jazyk euklidovskej geometrie, čo sa týka *logickej, expresívnej, explanatorickej a integratívnej* sily, majú ju obe geometrie rovnakú.

2 Náčrt potencialít re-representácií

Vo vývine geometrie možno rozlíšiť tri reprezentácie (*syntetická geometria, analytická geometria, fraktálna geometria*) a ďalšie tri reprezentácie možno rozlíšiť vo vývine symbolického jazyka (*elementárna aritmetika, algebra, diferenciálny a integrálny počet*). Analýzou týchto príkladov možno získať pojem re-representácie ako zmeny jazyka, ktorá sa odohrala pri prechode od syntetickej k analytickej geometrii, alebo pri prechode od elementárnej aritmetiky k algebre a ktorá spočíva v zásadnej zmene spôsobu generovania

termov jazyka. Jazyk aritmetiky pracuje s konkrétnymi číslami, algebra priniesla ako zásadnú inováciu symbol pre premenné, jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu priniesol funkcionálne symboly. Podobne v geometrii syntetická geometria generuje svoje obrázky pomocou konštantných útvarov (kružníc a priamok), analytická geometria používa pri generovaní svojich obrázkov premenné kým fraktálna geometria používa pri generovaní svojich obrázkov iterovanie určitého zobrazenia. Každú z uvedených reprezentácií možno charakterizovať pomocou nasledujúcich štyroch potencialít:

1. *logickej sily*, ktorá ukazuje nakoľko zložité formuly je možné v jazyku dokázať
2. *expresívnej sily*, ktorá ukazuje, čo nového, čo sa v predošlých štádiách vymykalo vyjadreniu, teraz jazyk umožňuje vyjadriť
3. *explanatorickej sily*, ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vysvetliť zlyhania jazyka ktoré boli na predošlom štádiu nepochopiteľné
4. *integratívnej sily*, ktorá ukazuje, ako nový jazyk umožňuje vidieť jednotu a poriadok tam, kde na báze predošlého jazyka sa ukazovali len navzájom nesúvisiace prípady

Podrobný výklad týchto potencialít jazyka spolu s ilustráciami z dejín matematiky môže čitateľ nájsť v knihe *Patterns of Change*.

3 Potenciality objektácií

Zdá sa, že pre objektácie možno zaviesť potenciality jazyka, ktoré sú analogické s logickou, expresívnou, explanatorickou a integratívnou silou jazyka. Sú to abstrakčný, diferenciačný, explikačný a unifikačný potenciál. Jednotlivé potenciality objektácií budem ilustrovať na vybranom príklade a ukážem ako sa líši od zodpovedajúcej sily jazyka, ktorá stojí na príslušnom mieste v zozname potencialít re-representácií.

3.1 Abstrakčný potenciál jazyka

Abstrakčným potenciálom jazyka nazývam schopnosť jazyka reprezentovať určitú situáciu ako špeciálny prípad niečoho všeobecného. Abstrakčný potenciál úzko súvisí s objektáciami, a môže slúžiť pri opise objektácií podobne ako logická sila jazyka slúži pri charakterizácii re-representácií. Príkladom *nárastu abstrakčného potenciálu* jazyka pri objektácii je Kleinov *Erlangenský program*. Klein vďaka prechodu od interpretatívnej k integratívnej forme jazyka dokázal predložiť klasifikáciu geometrických systémov. Urobil to tak, že jednotlivé geometrie vnoril do projektívnej roviny, ktorá slúžila ako neutrálna báza. Každá z geometrií sa stala určitou štruktúrou, ktorú Klein identifikoval s jej grupou transformácií a potom klasifikoval tieto grupy. Vnoreníe, báza a štruktúra sú aspekty jazyka, pomocou ktorých je kleinovská objektácia opísaná v *Patterns of Change* ([5], s. 133–143; resp. [2], s. 127–132). Teraz ide o to, že prechodom k integratívnej forme sa diskurz dostáva na vyššiu úroveň abstrakcie. Prejavom vyššej úrovne abstrakcie je Kleinova definícia geometrie ako štúdia invariantov grúp transformácií. Tento pokrok bol umožnený prechodom k jazyku s vyšším abstrakčným potenciálom.

Je dôležité poukázať na súvis a na rozdiel medzi nárastom **abstrakčného potenciálu** pri objektácii a nárastom **logickej sily** pri re-representácii. Nárast logickej sily jazyka pri re-representácii je spravidla spojený s radikálnou zmenou syntaxe, keď pribudne nový typ premenných (objektové premenné v algebre, funkcionálne premenné v diferenciálnom a integrálnom počte). Naproti tomu nárast abstrakčného potenciálu jazyka pri objektácii nemení syntax jazyka, nepribúda žiaden nový typ výrazových prostriedkov.

3.2 Diferenciačný potenciál jazyka

Ako druhú potencialitu jazyka spojenú s objektáciami možno uviesť **diferenciačný potenciál**. Jeho nárast si vidno na objave neeuklidovskej geometrie, t.j. na prechode od projektívnej k interpretatívnej forme jazyka syntetickej geometrie ([5], s. 124–133; resp. [2], s. 115–123). V euklidovskej geometrii splýva pojem *priamky* (primitívny pojem geometrie, t.j. pojem vystupujúci v axiómach) a *ekvidištanty* (množina bodov ležiacich v jednej polrovine určenej priamkou v rovnakej vzdialenosti od nej). Rozsah týchto pojmov je v euklidovskej geometrii identický, a tak si matematici často neuvedomovali rozdiely medzi nimi. Viaceré chybné dôkazy piateho postulátu sa zakladali na tom, že ich autori zostrojili ekvidištantu a ďalej s ňou pracovali ako s priamkou. Ale predpokladať, že ekvidištanta je priamka je ekvivalentné s piatym postulátom.

Interpretatívna forma jazyka, ktorú zaviedli Gauss, Bolyai a Lobačevskij, prináša možnosť rozlíšenia medzi priamkou a ekvidištantou. Tieto objekty majú v neeuklidovskej geometrii rôzny tvar. Pritom rozdiely medzi nimi sú tým väčšie, čím väčšia je krivosť priestoru. V euklidovskej rovine, ktorej krivosť je nulová, tieto objekty splývajú a vzniká dojem, že ide o objekt jediný. Odlíšenie priamky a ekvidištanty je posun typický pre objektácie a súvisí s nárastom diferenciačného potenciálu jazyka.

Podobne ako vyššie, aj teraz je poučné porovnať **diferenciačný potenciál jazyka** so zodpovedajúcou potencialitou jazyka na úrovni re-prezentácií, ktorou je **expresívna sila**. Pri náraste *expresívnej sily* pri re-prezentácii jazyk získa schopnosť vygenerovať termy úplne nového druhu, termy, ktoré na predošlých štádiách boli nepredstaviteľné. Tak algebra priniesla mocniny ľubovoľného stupňa, čo aritmetika ani syntetická geometria nedokázali. Nárast expresívnej sily jazyka súvisí s novými syntaktickými pravidlami, ktoré riadia prácu s týmto druhom termov. Naproti tomu pri náraste *diferenciačného potenciálu jazyka* objekty, ku ktorých odlíšeniu dôjde, už existovali. Ekvidištanty sú bežné objekty euklidovskej geometrie – sú vygenerované podľa pravidiel jej syntaxe. Na ich získanie nemusíme meniť syntax jazyka. Problém je len, že v euklidovskej geometrii splývajú s priamkami. Nárast diferenciačného potenciálu jazyka, spojený s prechodom k interpretatívnej forme jazyka teda neprináša nové objekty, prináša však *jasné rozlíšenia tam, kde prv rôzne objekty splývali*.

3.3 Explikačný potenciál jazyka

Explikačným potenciálom rozumiem schopnosť jazyka vysvetliť postupy, ktoré prv figurovali ako triky bez akéhokoľvek vysvetlenia. Explikačný potenciál umožňuje urobiť explicitným niečo, čo prv nebolo možné vyložiť, niečo, čo bolo iba *ad hoc*. Napríklad keď Cardano vyriešil rovnicu tretieho stupňa, použil pri tom *ad hoc* trik. Pomocou šťastného predpokladu o tvare výsledku sa mu podarilo previesť úlohu o riešení rovnice tretieho stupňa na úlohu o riešení pomocnej rovnice druhého stupňa ([5], s. 167–172; resp. [4]). Podobne postupoval Ferrari, ktorému sa podarilo previesť úlohu o riešení rovnice štvrtého stupňa na riešenie pomocnej rovnice tretieho stupňa. V oboch prípadoch bola redukcia stupňa rovnice dielom *náhody*. Zakladala sa na *ad hoc* trikoch, pre ktoré chýbalo konceptuálne porozumenie.

Pri prechode na kompozitívnu formu jazyka sa Lagrangeovi podarilo vysvetliť, prečo zdanlivo náhodné triky viedli k úspešnému vyriešeniu úlohy. Ukázal, že to nebola náhoda. Pochopil, že Cardanov a Ferrariho triky majú spoločné jadro, ktoré vyjadril pojmom *rezolventa*. Ukázal, že pre každú rovnicu tretieho a štvrtého stupňa nevyhnutne existujú výrazy (vytvorené ako kombinácie koreňov), ktoré redukujú stupeň rovnice. Takto prechod ku kompozitívnej forme jazyka, teda k forme s vyšším explikačným potenciálom, umožnil racionálne vyložiť postupy, ktoré sa prv, teda na štádiách s nižším explikačným potenciálom javili ako náhodné. Ďalšou charakteristickou črtou objektácií

teda je, že umožňujú explikovať postupy, ktoré sa prv javili ako *ad hoc* triky. To ukazuje, že prítomnosť *ad hoc* postupov v určitej teórii je príznakom nedostatočného explikačného potenciálu jej jazyka, a môže byť predzvesťou ďalšej objektácie.

3.4 Unifikačný potenciál jazyka

Ako poslednú potencialitu jazyka spojenú s objektáciami chcem uviesť **unifikačný potenciál** jazyka. Je to schopnosť jazyka vytvoriť jednotiaci pohľad tam, kde predtým existovali rôzne nesúvisiace či dokonca navzájom si protirečiace opisy. Ako príklad možno uviesť Kleinovo zjednotenie geometrií. Pred Kleinom boli euklidovská a neeuklidovská geometrie považované za navzájom sa vylučujúce. Ak je priestor euklidovský, nemôže byť neeuklidovský, a naopak. Klein prešiel k integratívnej forme jazyka geometrie. Vďaka tomu dokázal jednotlivé geometrie vyložiť z jednotného hľadiska ako geometrie patriace k rôznym *podgrupám projektívnej grupy*. Pojem projektívnej grupy vniesol jednotu do systému geometrií, keď každej geometrii vyčlenil náležité miesto v podobe podgrupy projektívnej grupy. Kleinov *Erlangenský program* sme už spomínali pri výklade abstrakčného potenciálu. Tam sme však kládli dôraz na abstraktnosť jeho chápania geometrie, pri ktorom tá-ktorá geometria vzniká ako *špeciálny prípad* niečoho všeobecného. Pri výklade unifikačného potenciálu jazyka chceme upozorniť na ďalší aspekt, ktorý je s týmto novým chápaním geometrie spojený, totiž na samotnú projektívnu grupu a jej schopnosť vyložiť *vzájomné vzťahy* medzi jednotlivými geometriami a tým ich začleniť do jednotného systému. Teraz nejde o to, že grupa transformácií tej-ktorej geometrie vzniká zúžením projektívnej grupy, t.j. konkrétnou voľbou určitých parametrov. Dôraz je teraz na tom, že projektívna grupa umožňuje jednotlivé geometrie zaradiť do jednotného systému a skúmať ich vzájomné vzťahy.

Literatura

- [1] Kvasz L.: *History of Geometry and the Development of the Form of its Language*. Synthese 116(1998), 141–186.
- [2] Kvasz L. : *Gramatika zmeny*. Chronos, Bratislava, 1999.
- [3] Kvasz L.: *Changes of Language in the Development of Mathematics*. Philosophia Mathematica 8(2000), 47–83.
- [4] Kvasz L.: *History of Algebra and the Development of the Form of its Language*. Philosophia Mathematica 14(2006), 287–317.
- [5] Kvasz L.: *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

Adresa

Doc. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: kvasz@fmph.uniba.sk

PodĎakovanie

Príspevok je súčasťou grantového projektu VEGA 1/0453/09 *Vedecká racionalita, jej historické predpoklady a filozofické medze*.

HISTORIE VYBRANÝCH PROBLÉMŮ Z POČÁTKŮ TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

MILENA KVASZOVÁ¹

Abstract: The paper discusses two cases of erroneous reasoning taken from the history of probability theory. It shows that even so great mathematicians as Newton made mistakes in the explanation of probabilistic events. To realize this is important for the education of probability theory, where we should lay much more emphasis on the discussion and qualitative understanding of the probability of real situations.

1 Úvod

Při výkladu nové látky často začínáme definicemi a větami, ve kterých přesně vymezujeme zkoumané jevy a vztahy mezi nimi na základě teorie „vypilované“ v průběhu několika staletí zástupem matematiků. Nezdržujeme se slepými cestami a odbočkami, které vývoj příslušné teorie provázely, protože dnes už jsou bezvýznamné. Neuvědomujeme si, že studenti se potřebují nejdříve se zkoumanými jevy seznámit, pojmenovat si je a „objevit“ vztahy mezi nimi. Domníváme se, že stačí látku příměřeně zjednodušit, ilustrovat ji na několika jednoduchých příkladech a že studenti látku pochopí a předkládané teorie přijmou za své. Když však nahlédneme do historie teorie pravděpodobnosti, najdeme řadu úloh, které byly ve své době řešeny nepřesně, a přesto přispěly k rozvoji teorie pravděpodobnosti. Domnívám se, že bychom měli studentům dát prostor, aby si mohli látku „osahat“, řešit úlohy svým, i když leckdy chybným, způsobem, aby si uvědomili, co je podstatou problému. Pokud jim předkládáme již hotové „vzorce spadlé z nebe“, naučí se sice počítat příklady, ale nenaučí se řešit úlohy. Ve své přednášce se budu věnovat kombinatorickým úlohám týkajícím se hry v kostky, které se našly v korespondenci mezi Newtonem a Pepysem, dále v korespondenci mezi Pascalem a Fermatem. Zaměřím se především na nepřesnosti a omyly v řešení těchto úloh.

2 Pravděpodobnostní úlohy

2.1 Newtonova odpověď na Pepysovu otázku

V roce 1693 se Samuel Pepys v dopise obrátil na Isaaca Newtona s problémem z pravděpodobnosti. Pepys (1633–1703) je v současné době nejvíce znám svými posmrtně vydanými deníky obsahujícími podrobnosti z jeho života v průběhu let 1660–1669. Newton ho však znal jako bývalého tajemníka Admirality, který byl také prezidentem Royal Society v Londýně v letech 1684 až 1686, tedy v době, kdy Newtonova práce *Principia* byla představena Royal Society a připravovala se k tisku. Pepysův dopis se však netýkal vědeckých záležitostí, ale žádal o radu v oblasti her. Newton napsal Pepysovi o tomto problému tři dopisy, které vedle patrně první úlohy z geometrické pravděpodobnosti² představují téměř vše, co je známo o vztahu Newtona

¹ Práce vznikla za podpory grantu GAAV IAA100110502.

² Newton I. In Whiteside DT (ed.): *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. Vol. I., Cambridge University Press, Cambridge, 1967, 61–62.

k problematice náhodných jevů. Newtonovy dopisy byly citovány a komentovány v řadě prací známých autorů (např. G. Chrystal, D. Pedoe, F. N. David, E. D. Schell, T. W. Chaundy, J. E. Bullard, F. Mosteller, J. Gany). Je pozoruhodné, že si nikdo z nich nevšiml, že část Newtonova řešení je chybně. Chyba vrhá zajímavé světlo na to, jak Newton uvažoval o problému. Až Stephen M. Stigler ve svém článku *Isaac Newton as a Probabilist* rozebírá Newtonovu mylnou úvahu. Pepys zadal Newtonovi následující úlohu:

Který z následujících tří případů má největší pravděpodobnost?

A. Šest spravedlivých kostek je nezávisle hozeno a nejméně jedna šestka se objeví.

B. Dvanáct spravedlivých kostek je nezávisle hozeno a nejméně dvě šestky se objeví.

C. Osmnáct spravedlivých kostek je nezávisle hozeno a nejméně tři šestky se objeví.

Jak vyplývá z korespondence, Pepys zpočátku myslel, že třetí z možností (C) je nejpravděpodobnější, ale když ho Newton po opakovaných dotazech přesvědčil, že skutečně (A) je nejpravděpodobnější, Pepys ukončil korespondenci a oznámil, že nesplatí dříve uzavřenou sázku. Newton správně vypočítal, že případ A ($p = 0,665$) je pravděpodobnější než případ B ($p = 0,619$), a pro případ C uvedl, že se hodnota pravděpodobnosti bude stále snižovat. Newtonovo přesné číselné vyjádření bylo elegantní a bezchybné. V současnosti můžeme řešení nalézt pomocí binomického rozdělení. Binomické rozdělení $Bi(N, p)$ je charakterizováno pravděpodobností elementárního jevu p a počtem opakování N tohoto elementárního jevu. V našem případě je elementární jev „při hodu kostkou padne šestka“ a $p = 1/6$, počet opakování je po řadě $N = 6, 12$ a 18 v případech A, B a C. Pravděpodobnost, že sledovaný jev při počtu opakování N nastane k -krát, vypočítáme podle vzorce $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$.

Hledané pravděpodobnosti vypočítáme následovně:

A. Šest spravedlivých kostek je nezávisle hozeno a nejméně jedna šestka se objeví. V tomto případě se jedná o $Bi(N = 6, p = 1/6)$. Pravděpodobnost tohoto případu vypočítáme jako doplněk jevu, že „žádná šestka se neobjeví“:

$$P(X \geq 1) = 1 - P_0 = 1 - (5/6)^6 = 31031/46656 = 0,665.$$

B. Dvanáct spravedlivých kostek je nezávisle hozeno a nejméně dvě šestky se objeví. Jedná se o $Bi(N = 12, p = 1/6)$. Pravděpodobnost vypočítáme jako doplněk jevu, že „žádná nebo jedna šestka se objeví“:

$$P(X \geq 2) = 1 - P_0 - P_1 = 1 - (6/5)^{12} - 12 \cdot 1/6 \cdot (5/6)^{11} = 1346704211/2176782336 = 0,619.$$

C. Osmnáct spravedlivých kostek je nezávisle hozeno a nejméně tři šestky se objeví. Jedná se o $Bi(N = 18, p = 1/6)$. Pravděpodobnost vypočítáme jako doplněk jevu, že „žádná nebo jedna nebo dvě šestky se objeví“:

$$P(X \geq 3) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - (6/5)^{18} - 18 \cdot 1/6 \cdot (5/6)^{17} - 153 \cdot (1/6)^2 \cdot (5/6)^{16} = 60666401980916/101559956668416 = 0,597.$$

Přestože vypočítané hodnoty jsou správné, Newtonova argumentace správná není. Ve svém třetím dopise personifikoval situaci A hráčem Petrem a situaci B hráčem Jakubem. Případ B si však rozložil na dva následné případy A a požadoval, aby v obou z nich padla šestka. Uvádí, že Petr musí vyhrát tak často, jak často hodí nějakou šestku, ale Jakub může hodit šestku (v jednom hodu), a přesto nevyhrát nic. Když Petr hodí šestku např. čtyřikrát v osmi hodech, musí určitě čtyřikrát vyhrát, ale Jakub při „stejném štěstí“ může hodit šestku osmkrát v šestnácti hodech, a přesto nic nevyhrát. Jinými slovy, Jakub

vyhrává pouze ve dvojicích hodů, ve kterých v obou padne šestka. Tato úvaha je však nesprávná. Stigler (2006) vysvětluje, v čem se Newton mýlil: Přestože v prvním dopise výslovně stanovil, že „hodit šestku“ musí být chápáno jako „hodit alespoň jednu šestku“, ve své argumentaci zaměňuje tato dvě tvrzení. Jeho argument bude platit v případě, že „hodit šestku“ znamená „hodit právě jednu šestku“, ale to pak neodpovídá situaci, kterou s Pepysem řešili. Petr rozhodně nebude s každou šestkou zaznamenávat zisk: v případě, že má dvě nebo více šestek v prvním hodu, vyhraje stejně, jako s právě jednou šestkou. Newton redukoval problém na jednotlivé hody, kde každý hod má binomické rozdělení $Bi(N = 6, p = 1/6)$, a ztratil ze zřetele násobné výsledky, které mohou vést k výhře. Spousta Petrových výher (ty, ve kterých padnou alespoň dvě šestky, které se objevují v téměř 40 % výher) by vedla také k výhře pro Jakuba. A v některých Jakubových výhrách (těch s alespoň dvěma šestkami v jedné polovině hodů a žádné ve druhé polovině, okolo 28 % z Jakubových výher) by Petr nedopadl tak dobře při „stejném štěstí“ (vyhrál by pouze v polovině případů).

Uvedený příklad ukazuje, že i jeden z významných matematiků, Isaac Newton, se při interpretaci svých správných výsledků dopustil chyby. Řešení se pokusil redukovat na jednoduchý princip, že každá výhra Jakuba je současně výhrou i pro Petra. Při hlubší analýze se však ukáže, že úloha je složitější, než se jeví při zběžném pohledu. Teprve chybné řešení nám odhalí hlubší souvislosti. Proto bychom měli studentům umožnit, zformulovat jejich chybná řešení, nezamítat je předčasně, ale jejich podrobnější analýzou nechat studenty odhalit hlubší souvislosti problému.

2.2 Korespondence mezi Pascalem a Fermatem

Za první úspěšný pokus o studium pravděpodobnosti a náhody z matematického hlediska byla dlouho považována korespondence mezi významným francouzským matematikem a filosofem Blaisem Pascalem (1623–1662) a vynikajícím matematikem Pierrem Fermatem (1601–1665), kteří v roce 1654 řešili ve své korespondenci problémy týkající se hry v kostky a známé úlohy o rozdělení sázky³. Současný výzkum historie matematiky ukazuje, že úvahy týkající se pravděpodobnosti se objevují v dílech, která jsou o mnoho staletí starší (Saxl, 2008). Jedná se zejména o náboženské a soudní texty, ve kterých nacházíme celou řadu odhadů pravděpodobnosti různých událostí. Důležitou oblastí, ve které se vyskytují pravděpodobnostní úvahy, jsou hazardní hry. Ty jsou doloženy už ze starověku, a týkala se jich také úloha, kterou řešili Pascal s Fermatem.

Představte si, že opakovaně házíte kostkou a chcete, aby alespoň jednou padla např. šestka. Jaké jsou vaše šance? Hodíte-li jednou, pravděpodobnost, že padne šestka, je $1/6$. Teď si ale představte, že hodíte čtyřikrát. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň při jednom z těchto čtyř hodů padne šestka? Mnoho lidí si myslí, že odpověď musí být $4/6$. Vycházejí při tom z toho, že pravděpodobnost, že padne šestka při některém ze čtyř hodů, musí být čtyřikrát větší než pravděpodobnost pouze při jednom hodu. Tak to ale být nemůže. S takovou logikou by pak pro šest hodů byla pravděpodobnost, že alespoň jednou padne šestka, rovna $6/6$, neboli jistota. Všichni víme, že to není pravda (dokonce

³ I pro vývoj pravděpodobnostního myšlení zcela zásadní úloha o rozdělení sázky byla úspěšně vyřešena již počátkem XV. století ve dvou italských rukopisech nalezených L. Toti Rigatelli ve florentských archivech roku 1985 a Raffaella Franci v archivu vatikánském roku 2002. Jejich překlady do francouzštiny s podrobným komentářem viz Meusnier N.: *Le problème de partis bouge ... de plus en plus*. Journ@l Electronique d'Histoire des probabilités et de la Statistique 3(2007), No. 1, 1–27. (<http://www.jehps.net/>)

ani dvacet hodů nám nezaručí, že šestka skutečně padne). Správný způsob, jak spočítat pravděpodobnost, že při čtyřech hodech kostkou padne alespoň jednou šestka, je následující. Pravděpodobnost, že šestka nepadne při jednom hodu, je $5/6$. Při čtyřech hodech je $5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = 0,482$. Pravděpodobnost, že padne, je tedy $1 - 0,482$, což je 51,8 % (pro dvacet hodů je to stále pouze 97,4 %).

Ve Francii sedmnáctého století, podle příběhu, který je často uváděn v literatuře z historie matematiky (a podle současných historiků je spíše legendou), vydělával mazaný hráč jménem Antoine Gombaud, rytíř de Méré, nemalé částky tím, že se s lidmi sázel, že při čtyřech hodech kostkou padne alespoň jedna šestka; což má, jak víme, šanci vyšší než 50 %. *Zákon velkých čísel* mu tak při dlouhodobém sázení zajišťoval zisk. Pak se snažil sázku upravit tak, že při 24 hodech dvěma kostkami padne alespoň jednou dvojice šestek. Pravděpodobnost výhry opět určíme jako doplněk k jevu, že nepadne žádná dvojice šestek, a tedy se rovná $1 - (35/36)^{24} = 0,491$; což je méně než 50 %. De Méré se chybně domníval, že obě hry mají stejnou pravděpodobnost. V první uvažoval pravděpodobnost $4 \cdot 1/6 = 4/6$ a ve druhé $24 \cdot 1/36 = 4/6$. Chudák rytíř začal prodělavat a zmatený se obrátil na Pascala; ten pak tento problém diskutoval s Fermatem.

Příběh de Méréa ukazuje, že spontánní intuice (pravděpodobnost opakovaného jevu je násobkem pravděpodobnosti jednotlivého jevu) jsou často mylné, avšak jejich nesprávnost se nemusí vždy projevit (při čtyřech hodech de Méré vyhrával v souladu se svojí představou). Až konfrontace se složitější situací (24 hodů) ukáže chybu a odhalí tak nesprávnost původní intuice. Proto je důležité, aby učitel znal často se opakující chybné intuice studentů a měl připravenou zásobu vhodných příkladů, které studentům umožní pochopit, v čem se mýlili.

3 Závěr

Uvedené příklady ukazují, že kvalitativní porozumění pravděpodobnostním jevům je náročné. Proto při vyučování teorie pravděpodobnosti je důležité věnovat velkou pozornost promýšlení úloh a kvalitativním diskuzím před tím, než přejdeme k přesným matematickým formulacím. Inspiraci můžeme čerpat v knihách jako [1] nebo [2]

Literatura

- [1] Aczel A. D.: *Náhoda*. Dokořán, Praha, 2008.
- [2] Rosenthal J. S.: *Zasažen bleskem. Podivuhodný svět pravděpodobností*. Academia, Praha, 2008.
- [3] Saxl I.: *Pravděpodobnost před Pascalem a Fermatem*. In Bečvář J., Bečvářová M.: 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2008, 49–72.
- [4] Stigler S. M.: *Isaac Newton as a Probabilist*. Statistical Science 21(2006), 400–403.

Adresa

Mgr. Milena Kvaszová
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: milena.sp@centrum.cz

POVÁLEČNÁ DEVASTACE FINANČNÍ MATEMATIKY

MARTIN MELCER

Abstract: This article is devoted to the analysis of the financial mathematics position and the catastrophic changes with regards to the above which took place at Czech secondary schools after 1948 when the Communist Party took over the government in our country existing great influence for over forty years on every sphere of political, social and cultural life as well as on the educational system.

1 Požadavky z oblasti obchodu, finančnictví a pojišťovnictví kladené na běžného občana naší republiky před rokem 1948

Po absolvování měšťanské nebo střední školy měl být každý občan naší země schopen plánovat své základní finanční operace a počítat standardní finanční úlohy.

Předpokládalo se, že se naučí:

- ukládat peníze a vypočítat si úrok z nich plynoucí;
- vypočítat budoucí hodnotu dlouhodobého pravidelného strádání;
- sestavit umořovací plán dluhu;
- vypočítat vstupní hodnotu a stanovit základ důchodu;
- pracovat bravurně s procenty.

Každý obchodník se měl také dobře orientovat ve zboží světového obchodu, v dopravném, v drahých kovech, v mincích, v devizách a v dalších souvisejících oblastech.

2 Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky II.

Československý stát od svého vzniku dbal na výchovu občanů v oblasti finančnictví. Za První republiky byla sepsána a užívána řada nových učebnic a příruček, některé byly převzaty ještě z dob Rakouska-Uherska. Například v roce 1947 vyšlo desáté opravené vydání druhého dílu dvoudílné učebnice Josefa Ježka nazvané *Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky* ([1]), jejíž první vydání je datováno již roku 1911. První díl obsahoval všechny druhy výpočtů, které se používaly v hospodářské praxi. V roce 1947 se dočkal třetího vydání, což bylo dostačující, neboť tato část nebyla tolik náchylná na společenské změny. Druhý díl (256 stran) se skládá ze dvou odlišných částí; z rozsahu druhé části (180 stran) je vidět širší záběr požadovaná po obchodnících.

2.1 Tabulky

V první části druhého dílu se nachází větší množství tabulek. Jedná se o pomůcky užívané v kupecké aritmetice (převody metrických i anglických měr a vah, převody ceny zboží, pásmový čas, úrok za jeden den, ...), ve finanční aritmetice (úročitelé, odúročitelé, stradatelé,

zásobitelé a umořovatelé při úrokování anticipativním, tj. předlhůtním, a dekursivním, tj. polhůtním), v pojistné aritmetice (úmrtnostní tabulka, základní čísla pro pensijní pojištění) a pětimístné logaritmické tabulky.

2.1.1 Hledání v tabulkách

Každému typu finanční úlohy odpovídá určitá tabulka. Její použití je velmi snadné a připojený komentář objasňuje podstatu jednotlivých výpočtů.

Například tabulka III. D. *Strádatelé při úrokování dekursivním* (polhůtním) (viz [1], str. 26) se využije při úlohách s dlouhodobým střádáním. Vyhledáme-li ve sloupci pro 4 % na 10. řádku hodnotu 12,486351, znamená to, že při ukládání 1 000 Kč po dobu 10 let, nastrádáme celkem 12 486,351 Kč.

2.2 Obchodní zvyklosti

Druhá část druhého dílu, autorem označená jako *obchodní zvyklosti*, poskytuje přehled nejdůležitějších problémů z oblastí, v nichž se obchodník a také každý člověk ve styku s obchodem, tj. téměř každý občan, potřebuje orientovat. Je členěna do 22 kapitol, které se dají rozdělit na dvě samostatné skupiny.

První skupina (10 kapitol) přináší cenné encyklopedické informace – míry, váhy, peněžní jednotky, drahé kovy, mince, cizozemská platidla, eskont směnek, devizy, cenné papíry, zboží světového obchodu a námořní dopravné.

Druhá skupina (12 kapitol) obsahuje výklad matematiky – procentový počet, úrokový počet, lhůtný počet, úroky z vkladů na knížky, kontokorenty, základy algebry, finanční aritmetika, pojistná aritmetika, planimetrie, stereometrie, základy trigonometrie a základy analytické geometrie v rovině.

3 Aritmetiky pro střední školy

V prvních poválečných letech se matematika na našich školách vyučovala převážně podle upravených učebnic, které vyšly ještě před válkou nebo v jejím průběhu. Nové učebnice matematiky se začaly pomalu objevovat od konce roku 1945; jednalo se především o aritmetiky, sbírky úloh a matematické přehledy pro obecné, měšťanské a střední školy. Od roku 1945 do roku 1952 vyšlo několik desítek nových učebnic a sbírek. České verze sepsali Jan Bílek (1907–1972), Bohumil Bydžovský (1880–1969), Eduard Čech (1893–1960), Otokar Maška (1886–1977), Metoděj Ostrý (1888–1974); slovenské Anton Dubec (1906–1975), Josef Kroupa (1910–1975), Ján Štalmašek (1905–1965).

3.1 Aritmetika pro druhou třídu středních škol – 1950

V roce 1950 kolektiv autorů z Výzkumného ústavu J. A. Komenského vedený Eduardem Čechem vydal ve Státním nakladatelství v Praze druhý díl třídílné řady učebnic *Aritmetika pro střední školy* ([2]). V něm je obsažena samostatná podkapitola *Úrok* (11 stran), v níž se tehdejší středoškoláci poprvé seznamovali se základy finanční matematiky.

Úlohy v ní uvedené jsou však velmi triviální, textově chudé a procvičují jen jednoduché úrokování. Většina z nich byla převzata z dřívějších Čechových učebnic pro české střední školy vydávaných od roku 1943, tj. za Protektorátu Čechy a Morava, nebo z jejich dalších tisků uveřejněných do roku 1948.

Podkapitola ani rozsahem, ani obsahem již nedosahuje úrovně prvorepublikových učebnic, natož kvality učebnic z rakousko-uherského období.

Úloha A

Pomocí vyloženého vzorce vypočtete úrok z 21 734 Kčs za dobu od 17. června do 5. září při 5 %.

([2], 1950, výsledek: 232,40 Kč)

3.2 Aritmetika pro třetí třídu gymnázií – 1951

V roce 1951 vyšlo první vydání učebnice *Aritmetika pro třetí třídu gymnázií* ([3]), kterou připravil kolektiv pod vedením E. Čecha. V kapitole *Posloupnosti* (22 stran) je připojena krátká podkapitola *Užití geometrických posloupností* (6 stran), do níž autoři zařadili také peněžní úlohy, tj. poukázali na aplikace aritmetické posloupnosti při jednoduchém úrokování a geometrické posloupnosti při složeném úrokování. Objasnili, kdy se uložená jistina chová jako člen aritmetické, resp. geometrické posloupnosti.

Teorie, řešené příklady a úlohy na procvičení jsou vyloženy na necelých šesti stránkách. Rozsah uvedeně látky již zdaleka nedosahuje úrovně prvorepublikových učebnic, přestože je tematický záběr více než dvacetí cvičení dosti bohatý.

Úloha B

Jakým obnosem, vloženým počátkem prvního roku, se zajistí fond ročních 1 000 Kčs splatných vždy na konci každého roku po dobu 10 let? (Úrokování 2 %.)

([3], 1951, výsledek: 8 982,60 Kč)

4 Situace finanční matematiky na středních školách po roce 1953

Po nástupu komunistů k moci se výuka finanční matematiky na našich školách během padesátých let drasticky změnila. Výrazně negativní vliv měla také měnová reforma, která v naší zemi proběhla v roce 1953. Úlohy s finanční tematikou byly odsunuty na vedlejší kolej, na některých typech středních škol zcela vymizely (např. zemědělské, technické nebo zdravotnické školy). V učebnicích se zachovalo jen několik zcela triviálních úloh sloužících k procvičení vlastností geometrických posloupností (např. na středních průmyslových školách, viz [5], [7]), které se více méně jen s nepatrnou změnou opakovaly až do 80. let 20. století. Náročnější úlohy se nacházely jen v učebnicích pro střední všeobecné vzdělávací školy a později pro gymnázia (viz [4]).

Klasická finanční matematika byla vyučována ve větším rozsahu pouze na středních ekonomických školách a nástavbovém pomaturitním studiu ekonomického směru (viz [8]), protože ani komunistický stát si nemohl dovolit ztratit finanční a bankovní odborníky.

Úbytek úloh s finanční tematikou musel být nějak kompenzován, neboť studenti ztratili vhodnou oblast na procvičování poslušnosti. Alternativa se našla v rozšíření již existující skupiny úloh s jinou než finanční problematikou, tj. od této doby se ve větším počtu začaly objevovat úlohy s fyzikální tematikou. Nejlépe to vidíme ve sbírce [5], kde se kromě „budovatelských“ úloh vyskytly úlohy s tlakem vzduchu ubývajícím se stoupající výškou, s břemenem, kladkami, jejich počtem a účinnostmi, se zmenšováním průměru drátu tažením, s osmi-rychlostním soustruhem, s míčem dopadajícím a odrážejícím se na vodorovné podložce a s řadou dalších témat zejména z optiky.

Procento úloh procvičujících poslušnosti a věnujících se finanční matematice kleslo v porovnání s učebnicemi a sbírkami Rakouska-Uherska a První republiky z řádově 80 % na přibližně 10 %. Tento stav se nezměnil ani v osmdesátých letech 20. století během zavádění tzv. nové koncepce.

5 Ukázky úloh ze středoškolských učebnic z období 1955 až 1980

Úloha 1

V SSSR bylo r. 1935 sklizeno 5,5 miliard pudů obilí, v r. 1937 už 7 miliard pudů. Vypočítejte průměrné roční procento růstu produkce v těchto letech. (1 pud = 16,38 kg) ([4], 1956, výsledek: 12,8 % ročně)

Úloha 2

Výroba vzrostla v prvním roce pětiletky o 7 %; v druhém o 10 %; ve třetím o 12 %; ve čtvrtém o 15 % a v pátém roce o 16 %. Jakému pravidelnému vzrůstu v % odpovídá tento nepravidelný vzrůst? ([5], 1966, výsledek: 11,95 %)

Úloha 3

JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že je splatí dvěma stejnými splátkami, z nichž první je splatná za dva roky a druhá za čtyři roky ode dne vypůjčení. Jak velké budou splátky při 2% složeném úrokování? ([6], 1968, výsledek: 53 050 Kč)

Úloha 4

Jednotné zemědělské družstvo si vypůjčilo 150 000 Kčs a zavázalo se je zaplatit v sedmi stejných ročních splátkách. První splátku zaplatí po třech letech. Jak velké budou splátky, je-li procentová míra $p = 2\frac{1}{2}\%$? ([7], 1971, výsledek: 24 820,30 Kč)

Úloha 5

Někdo si ukládá do spořitelny po 15 let počátkem každého roku Kčs 600. Po uplynutí této lhůty chce nastrádanou částku vybrat v dalších 10 letech (počínaje počátkem 16. roku). Jaký bude jeho roční důchod při 4 % p. a.? ([8], 1979, výsledek: 1 481,20 Kč)

Literatura

- [1] Ježek J.: *Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky část II.* 10. opravené vydání, Česká grafická unie a. s., Praha, 1947, 256 stran.
- [2] Čech E. a kol.: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol.* 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1950, 132 stran.
- [3] Čech E. a kol.: *Aritmetika pro třetí třídu gymnázií.* 1. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 178 stran.
- [4] Holubář J., Hradecký F., Hruša K.: *Algebra pro jedenáctý postupný ročník.* 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1956, 124 stran.
- [5] Kriegelstein E. a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ.* 2. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1966, 364 stran.
- [6] Benda P., Daňková B., Skála J.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky.* 4. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1968, 188 stran.
- [7] Pospíšil A., Kejla F., Kriegelstein E., Pelant V.: *Matematika pro II. ročník SPŠ a SZTŠ.* 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971, 292 stran.
- [8] Zahradník J.: *Matematika pro I. a II. ročník studia absolventů středních všeobecně vzdělávacích škol (gymnázií) na středních ekonomických školách.* 3. nezměněné vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979, 352 stran.

Adresa

Mgr. Martin Melcer
Zdravotní 114
285 04 Uhlířské Janovice
e-mail: martin.melcer@ujop.cuni.cz

SEZNÁMENÍ S JAKUBEM FILIPEM KULIKEM

LUBOŠ MORAVEC

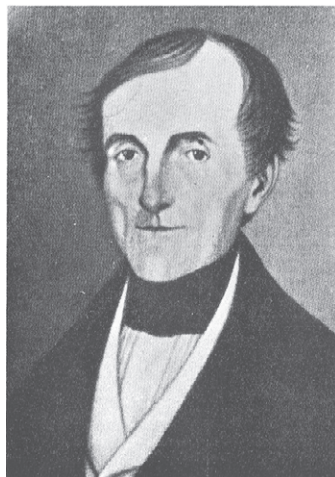
Abstract: Jakub Filip Kulik (1793–1863) was born and studied in Lvov. In 1814 he became full professor of elementary mathematics at Lyceum of Olomouc, later the professor of physics of Lyceum of Steyer Graz and the most part of his life he spent in Prague as professor of higher mathematics at university. In his work he paid attention to number theory, especially to creating tables of divisors and prime numbers.

1 Úvod

V 19. století pracovalo v našich zemích několik významných matematiků. Nejznámějším z nich je nejspíše Bernard Bolzano,¹ jiní naopak zůstávají zapomenuti – např. Wilhelm Matzka² nebo Jakub Filip Kulik.

V současnosti jsou mi o J. F. Kulikovi (kromě základních informací v bibliografických slovnících [1, 4, 8, 9, 10, 12]) známy pouze dva monografické články, první z nich [6] je věnován pouze jeho práci v teorii čísel, druhý [11] kromě této tematiky poskytuje i některé životopisné údaje.

Cílem tohoto příspěvku je připomenutí osobnosti Jakuba Filipa Kulika a podání základních informací o jeho životě a díle.



Obr. 1 – Jakub Filip Kulik

2 Život a pedagogické aktivity

2.1 Studium

Jakub Filip Kulik se narodil dne 1. května 1793 ve Lvově³ v polské rodině.⁴ Zde také navštěvoval základní školu (Hauptmustervolkschule) a gymnázium, které absolvoval v roce 1809.

¹ Bernard Bolzano (1781–1848) byl český matematik, filosof a katolický kněz. Hlavními proudy jeho zájmu byly matematická analýza, teorie množin a matematická logika. Spisem *Paradoxien des Unendlichen* ovlivnil Georga Kantora (zakladatele moderní teorie množin), svými současníky však zůstal nepochopen. Více viz Hykšová M.: *Karel Rychlík (1885–1968)*, Dějiny matematiky 22, Prometheus, Praha, 2003.

² Wilhelm Matzka (1798–1891) byl dělostřelcem rakouské armády a profesorem matematiky na pražské univerzitě. Věnoval se především algebře, analytické geometrii, infinitesimálnímu počtu a trigonometrii. Více viz Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) a jeho práce z teorie determinantů*. In Bečvářová M. (ed.): 28. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2007, 41–44.

³ Lvov (něm. Lemberg, ukr. Lviv) je největším městem západní Ukrajiny. Historicky je kulturním centrem Haliče, která byla v 19. století součástí Rakouska-Uherska. Více viz Wikipedie (Otevřená encyklopedie): Lvov [online], <http://cs.wikipedia.org/wiki/Lvov>.

⁴ Otec Štěpán Kulik (lvovský úředník), matka Konstancie z Berezowskich.

Přáním otce bylo, aby se ze syna stal právník. Proto nastoupil na Lvovskou univerzitu, kde navštěvoval nejprve fakultu filosofickou (do r. 1811) a následně právnickou (1812 až 1814). Studium práv však nedokončil. Po celou dobu se totiž také věnoval matematice, která se stala jeho hlavním zájmem.

2.2 Olomouc, Štýrský Hradec

Bez vědomí rodičů se v roce 1814 J. F. Kulík přihlásil do konkursu na místo profesora elementární matematiky na olomouckém lyceu.⁵ I přes svůj nízký věk prokázal nejlepší znalosti, konkurs vyhrál a 14. listopadu 1814 byl v jedenadvaceti letech jmenován řádným profesorem.

Přednášky z elementární matematiky pro první ročník vedl v latině v rozsahu 7 hodin týdně podle Appeltaueryovy učebnice.⁶ Kromě těchto přednášek vypisoval také výběrové přednášky z vyšší matematiky.

V Olomouci J. F. Kulík strávil pouze dva roky, poté se přesunul do Štýrského Hradce, kde byl dne 24. října 1816 jmenován profesorem fyziky na tamní univerzitě a od roku 1817 působil také jako profesor astronomie na polytechnice tamtéž. Roku 1822 zde získal doktorát z filosofie za disertační práci *De phaenomenis Iridis* a již v akademickém roce 1822/23 působil jako rektor univerzity ve Štýrském Hradci.

2.3 Praha

Největší část života J. F. Kulík strávil v Praze, kam přišel v roce 1826 poté, co zde byl jmenován profesorem vyšší matematiky⁷ na univerzitě, a kde setrval až do smrti. Vytvořil zde také značnou část díla a vychoval děti.⁸

Kulikovy německy vedené přednášky tvořily dvouletý kurz v rozsahu tří hodin týdně. První rok přednášel matematiku, druhý rok mechaniku. Každoročně probíhaly oba kurzy, počet studentů se postupně zvyšoval (ve 40. letech jich bylo okolo 40), většina z nich však byla z pražské polytechniky. Zpočátku byla doporučenou literaturou Ettingshausenova učebnice,⁹ po roce 1839 J. F. Kulík uváděl jako vzor přednášek vlastní knihu *Lehrbuch der höheren Analysis* (viz dále).

⁵ Lyceum v Olomouci vzniklo z tamní univerzity, která byla založena v roce 1569. V roce 1778 byla tato univerzita přesunuta do Brna, o čtyři roky později se vrátila zpět do Olomouce, ale jen jako tříleté lyceum. Více viz [5].

⁶ Appeltauer I.: *Elementorum matheseos pureo*, Vídeň a Terst, 1814–1817. Ignaz Appeltauer (1769–1829) byl profesorem matematiky na vídeňské univerzitě.

⁷ Na pražské univerzitě byly v první polovině 19. století dvě stolice matematiky – stolice elementární matematiky (kde do r. 1857 působil prof. L. Jandera), která zajišťovala povinný kurs elementární matematiky pro filosofickou fakultu, a stolice vyšší matematiky, kde byly vyhlašovány výběrové přednášky z vyšší matematiky. Více viz [2, 7].

⁸ J. F. Kulík se dne 4. listopadu 1828 ve Lvově oženil s Kateřinou Deglovou, dcerou zámožného Lvovského občana Václava Degla a jeho ženy Barbory rozené Grindlové. Z tohoto manželství vzešly dvě děti – Justin (pražský advokát) a Angela (provdána za Antonína Randu, profesora občanského práva na pražské univerzitě, viz [3]).

⁹ Ettingshausen A.: *Vorlesungen über die höhere Mathematik*, Vídeň, 1827. Andreas Freiherr von Ettingshausen (1796–1878) byl profesorem vyšší matematiky na vídeňské univerzitě a profesorem fyziky na univerzitě v Innsbrucku. Jako první sestrojil elektrický generátor využívající elektromagnetické indukce. Více viz *Österreichisches Biographisches Lexikon 1815–1950*, Vídeň, 1957.

V roce 1829 byl J. F. Kulík děkanem filosofické fakulty. Dne 24. dubna 1831 se stal mimořádným a dne 4. března následujícího roku řádným členem matematické sekce Královské české společnosti nauk,¹⁰ kde později působil v různých funkcích – jako knihovník (1833–40), direktor (1833–40, 1860) a pokladník (1861–63). Jeho zásluhy byly dne 7. února 1851 oceněny udělením titulu císařského dvorního rady.

Zemřel dne 26. února 1863 v Praze a pohřben je na hřbitově v Košířích.

2.4 Dobročinné aktivity

J. F. Kulík byl velkým donátorem. Studenti na něj vzpomínají jako na vlídného učitele, který jim často darovával své knihy.

Dary knih však nesměřovaly jen ke studentům, ale i k různým institucím. Když našel 25 chyb ve Vegových logaritmických tabulkách,¹¹ jejich lipský vydavatel mu jako poděkování zaslal několik desítek výtisků těchto tabulek. Devatenáct z nich J. F. Kulík daroval českým gymnáziím a mnoho dalších vídeňské akademii věd.

V roce 1840 věnoval každému gymnáziu v Haliči (tj. cca 20 škol) soubor obrázků řeckých a egyptských starožitností. Na vlastní náklady také roku 1842 vydal 400 exemplářů *Praktické školy kreslení*, kterou rozeslal do mnoha škol po celé monarchii. Byl to stolistový soubor obsahující návodné nákresy pro výuku kresby lidského těla, krajiny a metody stínování.

Kvůli povstání lidu proti císaři byl Lvov dne 1. listopadu 1848 ostřelován rakouskou armádou a radnice i univerzitní knihovna čítající 60 000 svazků lehly popelem. J. F. Kulík v reakci na tuto smutnou událost v jeho rodišti zaslal knihovně 498 prací v 1 000 svazcích. Při této příležitosti také obdaroval haličská gymnázia deseti obsáhlými soubory knih.

Těsně před smrtí v roce 1863 věnoval velkou část své knihovny Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky.¹² Po jeho smrti získal Spolek od dědiců i zbytek jeho knihovny. Celkem se jednalo o 800 svazků.

O jeho dobrosrdečnosti svědčí i to, že byl členem Lvovského Spolku pro dětské opatrovny.

3 Dílo

Kulikovo latinsky a německy psané dílo lze rozdělit do tří základních skupin – učebnice, aplikovaná matematika a ostatní matematické spisy, které jsou většinou

¹⁰ *Königliche böhmische Gessellschaft der Wissenschaften* – vznikla kolem roku 1770 jako Učená společnost, soukromý spolek malého počtu vědců, který měl za cíl přírodovědecký průzkum Čech. Postupně však vzniklo několik sekcí, včetně matematické. Více viz Petrůň, J.: *Královská česká společnost nauk. Místo České učené společnosti v dějinách a v proudu vědy*, Vesmír 11(1995), 632.

¹¹ Vega J.: *Thesaurus logarithmorum completus*, Lipsko, 1794. Jurij Vega (1754–1802) byl slovinský matematik a profesor matematiky na dělostřelecké škole ve Vídni. Více viz *MacTutor biography* [online], <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Vega.html>.

¹² *Vereins für freie Vortraege aus Mathematik und Physik* – studentský spolek založený 22. 7. 1861, jehož cílem bylo zlepšení výuky matematiky a fyziky a podpora rozvoje těchto věd. V roce 1869 byl přeměněn na Jednotu českých matematiků a roku 1912 na Jednotu českých matematiků a fyziků, jejíž činnost trvá dodnes. Více viz Posejpal J.: *Dějepis jednoty českých matematiků*, JČM, Praha, 1912.

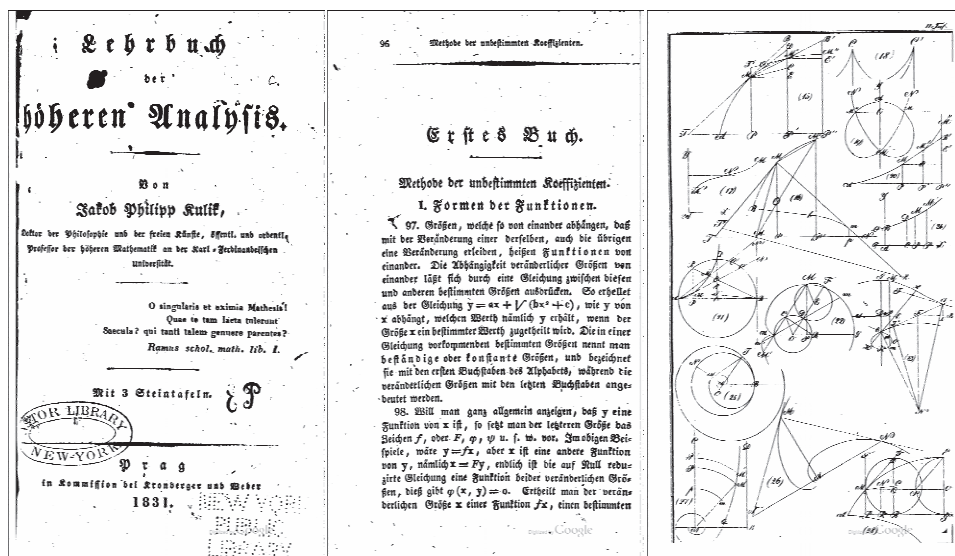
zaměřeny na teorii čísel. Kromě knih (kterých je mi v tuto chvíli známo cca 15)¹³ publikoval delší práce také v časopisech *Zeitschrift für Physik und Mathematik*, *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* a *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*.

3.1 Učebnice

Nejznámější Kulikovou učebnicí je zřejmě *Lehrbuch der höheren Analysis*,¹⁴ která byla doporučenou studijní literaturou k jeho přednáškám na pražské univerzitě. První vydání o 470 stranách vyšlo v Praze roku 1831 a je rozděleno do čtyř základních kapitol – *Methode der unbestimmten Koeffizienten*, *Differential- und Integralrechnung*, *Die Kurven mit einfacher Krümmung* a *Flächen und Kurven mit doppelter Krümmung*.

Roku 1843 v Praze vyšlo druhé, přepracované a rozšířené vydání, které se skládá ze dvou asi čtyřsetstránkových svazků pojmenovaných *Lehrbuch der höheren Algebra* a *Die Integralrechnung und die analytische Geometrie*.

J. F. Kulík v tomto spisu neprezentuje žádné vlastní výsledky, pracuje s eulerovskou představou „nekonečně malé veličiny“ a jen zřídka doplňuje výklad novějšími myšlenkami. Sám zdůrazňoval, že cílem knihy je především srozumitelně podat partie matematiky nutné pro další studium mechaniky.



Obr. 2 – Vybrané stránky z prvního vydání *Lehrbuch der höheren Analysis*

Oblíbenou Kulikovou učebnicí fyziky byla kniha *Lehrbuch der höheren Mechanik* (Lipsko, 1846), kterou sepsal jako výsledek dvacetileté zkušenosti s výběrovými přednáškami z vyšší mechaniky.

¹³ Toto číslo pravděpodobně není konečné, vychází z informací v bibliografických slovnících.

¹⁴ První vydání této knihy je dostupné elektronicky na internetovém serveru Google Books (odkud jsou také snímky na Obr. 2): <http://books.google.com/books?id=ZQcAAAAAMAAJ&printsec=titlepage&hl=cs>

Její zaměření je opět spíše praktické a je přizpůsobena i začátečníkům. S minimálním matematickým aparátém je zde představena technická mechanika.

3.2 Aplikovaná matematika

Z této oblasti Kulikovy tvorby je možné zmínit např. *Der tausendjährige Kalender* (Praha, 1831 a 1843, třetí vydání v roce 1861 pod názvem *Die Jahresformen der christlichen Zeitrechnung*). Jedná se o univerzální kalendář – křesťanský (julíanský i gregoriánský), židovský a turecký.

Po úvodu, který podává návod k použití kalendáře, je uvedena tabulka pro roky 400 až 2366 (a odpovídající roky židovského a tureckého kalendáře). V ní lze nalézt číslo kalendáře pro patřičný rok – např. gregoriánský kalendář pro rok 2009 nalezneme pod číslem 12 (viz Obr. 3). U každé varianty kalendáře je dvakrát zapsán leden a únor, aby zbytek kalendáře mohl sloužit i pro přestupné roky (označené v první tabulce hvězdičkou).¹⁵ Celkem je zde 35 variant (každá na jedné straně) křesťanského, 56 variant (4 na jedné straně) židovského a 35 variant (4 na jedné straně) tureckého kalendáře.

Žid. Kal.	Žid. Kal.	Žid. Kal.	Žid. Kal.	Žid. Kal.	Žid. Kal.
1959	29 29	6 0 5720	27 8	6 0 1870	18 2 2
1960	4 17	93 6 5721	14 6	25 3 1889	17 1 7
1961	17 2	11 5722	30 7	14 1841	16 0 4
1962	10 25	20 0 27	4 8	1842	15 1 1
1963	1 19	10 5723	14 6	24 M 1843	14 0 6
1964	20 20	7 5724	40 5	12 1844	13 4 3
1965	12 18	27 5725	0 1	1 1845	12 7 7
1966	29 10	15 5726	51 3	21 A 1846	11 0 9
1967	17 23	5 5727	10 9	10 1847	10 6 2
1968	8 14	25 5728	18 8	20 1848	9 0 1
1969	31 6	13 5729	20 3	10 1849	8 0 4
1970	13 20	1 5730	13 5	5 1850	7 0 1
1971	5 11	18 5731	16 5	26 3 1851	6 1 6
1972	27 2	9 5732	0 1	16 1852	5 1 3
1973	10 22	27 5733	23 2	3 1853	4 0 7
1974	1 14	17 5734	10 1	24 3 1854	3 1 5
1975	21 20	6 5735	54 4	13 1855	2 1 2
1976	12 18	25 5736	6 9	5 1856	1 2 7
1977	24 16	13 5737	15 2	22 1857	15 1 4
1978	11 4	2 5738	18 2	11 1858	14 0 1
...					
2000	13 63	30 5769	11 4	9 1859	1 8 4
2001	6 12	19 5770	26 4	28 1860	35 7 1
2002	32 4	9 5771	60 7	7 1861	34 6 3
2003	11 24	29 5772	16 8	20 1862	32 5 7
2004	2 8	17 5773	2 11	14 1863	31 4 4
2005	18 21	5 5774	50 8	4 1864	30 3 8
2006	7 20	25 5775	13 9	22 1865	29 2 6
2007	25 5	14 5776	47 14	13 1866	28 1 4
2008	13 17	3 5777	1 7	2 1867	27 0 1

Aug.	Aug.	Aug.
1. Pfingstmontag.	1. Pfingstmontag.	1. Pfingstmontag.
2. Trinitatis.	2. Trinitatis.	2. Trinitatis.
3. Ascensionis.	3. Ascensionis.	3. Ascensionis.
4. Pentecostes.	4. Pentecostes.	4. Pentecostes.
5. Corpus Christi.	5. Corpus Christi.	5. Corpus Christi.
6. Trinitatis.	6. Trinitatis.	6. Trinitatis.
7. Heil. Dreif.	7. Heil. Dreif.	7. Heil. Dreif.
8. Michaelis.	8. Michaelis.	8. Michaelis.
9. Petri u. Pauli.	9. Petri u. Pauli.	9. Petri u. Pauli.
10. Martinus.	10. Martinus.	10. Martinus.
11. Bonifatius.	11. Bonifatius.	11. Bonifatius.
12. Stephanus.	12. Stephanus.	12. Stephanus.
13. Augustus.	13. Augustus.	13. Augustus.
14. Hieronymus.	14. Hieronymus.	14. Hieronymus.
15. Petrus u. Paulus.	15. Petrus u. Paulus.	15. Petrus u. Paulus.
16. Hieronymus.	16. Hieronymus.	16. Hieronymus.
17. Augustus.	17. Augustus.	17. Augustus.
18. Hieronymus.	18. Hieronymus.	18. Hieronymus.
19. Augustus.	19. Augustus.	19. Augustus.
20. Hieronymus.	20. Hieronymus.	20. Hieronymus.
21. Augustus.	21. Augustus.	21. Augustus.
22. Hieronymus.	22. Hieronymus.	22. Hieronymus.
23. Augustus.	23. Augustus.	23. Augustus.
24. Hieronymus.	24. Hieronymus.	24. Hieronymus.
25. Augustus.	25. Augustus.	25. Augustus.
26. Hieronymus.	26. Hieronymus.	26. Hieronymus.
27. Augustus.	27. Augustus.	27. Augustus.
28. Hieronymus.	28. Hieronymus.	28. Hieronymus.
29. Augustus.	29. Augustus.	29. Augustus.
30. Hieronymus.	30. Hieronymus.	30. Hieronymus.
31. Augustus.	31. Augustus.	31. Augustus.

Obr. 3 – Vlevo tabulka roků, vpravo část kalendáře č. 12

Jinou zajímavou aplikací matematiky jsou Kulikovy tabulky pro stanovování objemu válcových a kuželových nádob *Tafeln zur Bestimmung des Inhalts cylindrischen und conischer Gefäße in Bierbrauereien und Branntweinbrennerien* (Lvov, 1836).

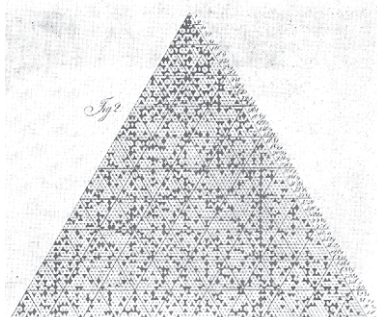
3.3 Teorie čísel

Hlavním Kulikovým zájmem byla teorie čísel. Soustředil se především na sestavování různých tabulek prvočísel a dělitelů přirozených čísel. Snažil se nalézt různé metody pro zjišťování prvočísel a nejmenších dělitelů. V Královské české společnosti nauk měl dokonce přednášku o svém unikátním pokusu nalézt grafické metody stanovování prvočísel, který byl ovšem neúspěšný (došel pouze k závěru, že rozložení prvočísel

¹⁵ Tento zvláštní systém byl použit kvůli úspore místa. Pokud by byl leden v konkrétní variantě kalendáře pro přestupný i nepřestupný rok stejný a následně byly uvedeny dvě varianty pro únor, zbytek kalendáře (od března dále) by se lišil v posunu o jeden den. J. F. Kulik proto místo dvou variant jedenácti měsíců (únor až prosinec) uvádí dvě varianty dvou měsíců (leden a únor).

vypovídá o hlubší souvislosti). I přes rozsáhlost svého díla v teorii čísel obecnějších výsledků nedosáhl.

Už jedno z prvních Kulikových děl – *Handbuch mathematischer Tafeln* (Štýrský Hradec, 1824) – se zabývá touto tematikou. Nalezneme zde tabulky nejmenších dělitelů čísel do 67 100 (a všech prvočíselných dělitelů čísel do 21 500), druhých a třetích mocnin do 100, druhých a třetích odmocnin do 1 000, tabulky goniometrických funkcí, atd. Tabulky z této knihy J. F. Kulik postupně rozšiřoval.



Obr. 4 – Kulikův pokus o nalezení grafické metody určování prvočíslel

O rok později publikoval tabulky dělitelů čísel do jednoho milionu (*Divisores numerorum decies centena milia non excedentium*, Štýrský Hradec, 1825) obsahující všechny dělitele čísel 1–21 516 a nejmenší dělitele čísel 21 500–1 000 000 kromě čísel dělitelných 2, 3, 5 a 11 a kompletní tabulky druhých a třetích mocnin čísel do 100 000 nazvané *Tafeln der Quadrat und Kubikzahlen aller natürlichen Zahlen bis Hundert Tausend* (Štýrský Hradec, 1825), které jsou doplněny výkladem o jejich tvorbě a různými doplňkovými tabulkami (např. tabulka násobků čísla π do 100 s přesností na 30 desetinných míst).

O 26 let později J. F. Kulik vydal tabulky s názvem *Neue Multiplikationstafeln* (Lipsko, 1851), pomocí kterých lze násobit až pěticiferná čísla. Využívá zde převedení tohoto složitého úkonu na součet a rozdíl daných čísel za pomoci vzorce $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

220

221

54										55										56										57										58										59																																																																																																																			
N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷	N⁸	N⁹	N¹⁰	N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷	N⁸	N⁹	N¹⁰	N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷	N⁸	N⁹	N¹⁰	N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷	N⁸	N⁹	N¹⁰	N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷	N⁸	N⁹	N¹⁰	N	N²	N³	N⁴	N⁵	N⁶	N⁷	N⁸	N⁹	N¹⁰																																																																																																										
51	2601	12767	531441	21707529	1088382625	53144100000	2684354560000	134217728000000	6761239040000000	52	2704	12916	548800	22397440	11220185600	56390517760	2824295360000	141214784000000	7060748160000000	353037417600000000	53	2809	132681	57178329	23259817600	1179018240000	60522176000000	305078956800000000	15255800694400000000	76255974880000000000	387420584000000000000	1968303968000000000000	98415196800000000000000	492075984000000000000000	2460379920000000000000000	12301899600000000000000000	615094980000000000000000000	3075474960000000000000000000	15377374800000000000000000000	768765968000000000000000000000	38438298400000000000000000000000	192193274000000000000000000000000	9609664720000000000000000000000000	48048323600000000000000000000000000	2402416180000000000000000000000000000	120120809000000000000000000000000000000	6006040450000000000000000000000000000000	3003020225000000000000000000000000000000	15015101125000000000000000000000000000000	750755056250000000000000000000000000000000	37537752812500000000000000000000000000000000	187688764062500000000000000000000000000000000	9384438203125000000000000000000000000000000000	469221910156250000000000000000000000000000000000	23461095507812500000000000000000000000000000000000	1173054775390625000000000000000000000000000000000000	58652738769531250000000000000000000000000000000000000	2932636938476562500000000000000000000000000000000000000	14663184692382812500	733159234619140625000	3665796173095703125000	18328980865478515625000	9164490432739257812500	458224521636962890625000	229112260818481445312500	1145561304092207226562500	57278065204610361328125000	286390326023051806640625000	1431951630115259033203125000	7159758150576295166515625000	357987907878814783328125000	1789939539394071916651562500	894969769697035958328125000	447484884848517979166515625000	2237424424242599895832812500	1118712212121299947916651562500	559356106060994895832812500	279678053030497447916651562500	13983902651524872395832812500	6991951325762437197916651562500	349597566288121859895832812500	1747987831440609497916651562500	87399391572030474895832812500	43699695786015237447916651562500	2184984789300761872395832812500	1092492394650380937197916651562500	54624619732519046958328125000	2731230986625952348958328125000	13656154933129761979166515625000	6828077466564880937197916651562500	341403873328244046958328125000	1707019366641220234895832812500	8535096833206101197916651562500	42675484166030505937197916651562500	2133774208301525296895832812500	10668871041507626484479166515625000	533443552075381224223958328125000	26672177603769061211979166515625000	13336088801884530605937197916651562500	666804440094226530296895832812500	333402220047113265147916651562500	166701110023556578958328125000	833505550117782894895832812500	416752775058891447447916651562500	208376387529445723723958328125000	104188193764722861895832812500	520940968823614294895832812500	260470484411807397447916651562500	130235242205903693723958328125000	65117621102951846895832812500	325588105492759234479166515625000	16279405274637961723958328125000	813970263731898086147916651562500	406985131865949043723958328125000	2034925659329745218958328125000	10174628296648726094895832812500	50873141483243630474479166515625000	254365707416218152372395832812500	12718285370810907618958328125000	63591426854054538094895832812500	31795713427027269047447916651562500	15897856713513634523723958328125000	7948928356756817261895832812500	397446417837840863723958328125000	1987232089189204304374479166515625000	9936160445946021521895832812500	4968080222973010761895832812500	248404011148650538094895832812500	1242020055743252690474479166515625000	62101002787162634523723958328125000	3105050139358126761895832812500	155252506967906338094895832812500	77626253483953169047447916651562500	38813126741976584523723958328125000	194065633709882927618958328125000	970328168549414638094895832812500	4851640842747073190474479166515625000	2425820421373536590474479166515625000	12129102106867682952372395832812500	606455105343384147618958328125000	30322755267169207380948958328125000	1516137763358460369047447916651562500	75806888167923018452372395832812500	379034440839615092261895832812500	1895172204198075561474479166515625000	9475861020990377807380948958328125000	473793051049518890369047447916651562500	23689652552475944523723958328125000	118448262762379722618958328125000	59224131381189861474479166515625000	29612065690594930738094895832812500	148060328452974653690474479166515625000	7403016422648732684523723958328125000	3701508211324366341474479166515625000	1850754105662183170738094895832812500	925377052831091585369047447916651562500	462688526415545782684523723958328125000	231344263207772791369047447916651562500	115672131603886385369047447916651562500	5783606580194294268452372395832812500	2891803290097147134147447916651562500	1445901645048573570738094895832812500	722950822524286785369047447916651562500	361475411262143392684523723958328125000	1807377056310716963414

Největším Kulikovým dílem jsou impozantní tabulky nejmenších dělitelů čísel 3 033 001 až 100 330 201 pojmenované *Magnus Canon divisorum pro omnibus numeris per 2, 3 et 5 non divisibilibus et numerorum primorum interjacentium ad milies centena milia accuratius ad 100 330 201*, na kterých pracoval od počátku 40. let 19. století.

V 19. století vycházely tabulky prvočísel a dělitelů od různých autorů, avšak jejich rozsah byl v řádech jednotek milionů. Kulikovo dílo je tak svým rozsahem naprosto jedinečné. Vzhledem k jeho rozsáhlosti nemohlo být vydáno (tabulky jedenáctého milionu¹⁶ vyšly tiskem až v roce 1951) a zůstalo pouze v podobě rukopisu, který je uložen ve vídeňské akademii věd. Celá tato práce sice vznikla v Praze, ale J. F. Kulík si přál, aby byla po jeho smrti převezena do Vídně a byla zde k dispozici dalším vědcům. Pravděpodobně při tomto převozu došlo ke ztrátě druhého svazku (čísla od 12 642 601 do 22 852 799).

Tabulky pokrývají 4 212 stran velikosti 30×37 cm rozdělených do osmi svazků. Každá strana je rozdělena na tabulku o 80 řádcích (určujících jednotky a desítky) a 77 sloupcích (určujících vyšší řády), v každém poli tabulky je pak uveden nejmenší dělitel daného čísla. Na každé straně je tak zaznamenáno 6 160 čísel, ale protože jsou v tabulkách zaznamenána pouze čísla nedělitelná 2, 3 a 5, každá strana obsahuje čísla v rozsahu 23 100.¹⁷ Počet sloupců není náhodný, díky němu jsou čísla, jejichž nejmenším dělitelem je 7 nebo 11, na stále stejných místech, což umožnilo jejich snadný záznam.

Pro zápis čísel je zaveden speciální úsporný systém, kdy jsou dvojice čísel nahrazovány písmeny.¹⁸ Čísla 10–34 jsou reprezentována písmeny *a–z*, vyšší dvojciferná čísla pak pomocí velkých písmen. Např. zápis *r9* odpovídá číslu 269.

Ještě složitější pak byl způsob zápisu dělitelů. Číslo 7 označovalo, že nejmenším dělitelem je opravdu 7, prvočísla od 11 do 109 jsou reprezentována jednotlivými písmeny, prvočísla od 113 do 163 jsou zapisována jako 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 0. Vyšší prvočísla jsou zaznamenávána pomocí dvojic písmen (např. *ca* odpovídá číslu 179, *mf* číslu 1 039 apod.).

Další zajímavostí těchto tabulek je postupný zápis na levé a až po jejich zaplnění na pravé strany svazků. V prvním svazku jsou na levých stránkách čísla z intervalu 3 033 001–7 837 799, na pravých čísla 7 837 801–12 642 599. U některých dalších svazků je toto pravidlo aplikováno dokonce napříč svazky, tj. např. pokračování z poslední levé strany šestého svazku nalezneme na první pravé stránce třetího. Totéž platí pro sedmý a osmý svazek.

Ačkoli J. F. Kulík na těchto tabulkách pracoval přes dvacet let (nejintenzivněji pravděpodobně ve čtyřicátých letech), zůstaly nedokončeny. Kompletní se zdá být pouze první svazek. Na začátku třetího svazku již chybí dělitelé větší než 1 061 a tato hranice se dále postupně snižuje.

¹⁶ Kulík, Poletti, Porter: *Liste des nombres premiers du onzième million*, Amsterdam, 1951.

¹⁷ Pokud z 23 100 po sobě jdoucích přirozených čísel odebereme čísla dělitelná 2, 3 nebo 5, zbude nám právě 6160 čísel – každá strana Kulikova rukopisu tak odpovídá intervalu 23 100.

¹⁸ Tento způsob zápisu byl použit i v tabulkách dělitelů z roku 1825.

Kulikova pozůstalost ve Vídni obsahuje kromě výše zmíněného rukopisu také rukopisy další, např. některé pomocné tabulky a komentáře o tvorbě tabulek apod.

4 Závěr

Přestože již dnes není Jakub Filip Kulik v české matematické komunitě všeobecně známý, patří k našim nejvýznamnějším matematikům devatenáctého století.

Literatura

- [1] *Allgemeine deutsche Biographie*. Verlag von Duncker und Humblot, 17. svazek, Lipsko, 1883, 361.
- [2] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. Dějiny matematiky 34, Matfyzpress, Praha, 2008.
- [3] Klika J.: *Rod JUDr. Antonína rytíře Randy a Dr. mont. h. c. Otokara rytíře Kruliše-Randy*. I. Rodopisná galerie, Příloha časopisu Rodové společnosti v Praze, Praha, 1940.
- [4] *Masarykův slovník naučný*. Československý kompas, 4. svazek, Praha, 1929, 236.
- [5] Navaříková L.: *Historie matematiky na olomoucké univerzitě*. (Dostupné elektronicky na adrese <http://navarikp.sweb.cz>).
- [6] Nový L.: *On Kulik's Tables of Divisors*. Acta Hist. Rerum Nat. necnon Tech. Special Issue 16, Praha, 1981, 327–343.
- [7] Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*. Praha, 1961.
- [8] *Österreichisches Biographisches Lexikon 1815–1950*. Vídeň, 1969, 341.
- [9] Otto J.: *Ottův slovník naučný*. Praha, 1900, 345.
- [10] Poggendorff J. C.: *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*. Verlag von Johann Ambrosius Barth, Lipsko, 1898, 757.
- [11] Porubský Š.: *Jakob Philipp Kulik – ein vergessener Rechenkünstler*. Tagung zur Geschichte der Mathematik, Augsburg, 2004, 307–328.
- [12] Würzbach C. von: *Biographisches Lexikon des Kaiserthum Oesterreich*. 13. svazek, Druck und Verlag der k. k. Hof- und Staatsdruckerei, Vídeň, 1865, 356–358.

Adresa

Mgr. Luboš Moravec
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: lubos.moravec@mff.cuni.cz

LADISLAV JANDERA – SOUČASNÍK BERNARDA BOLZANA

MIROSLAVA OTAVOVÁ

Abstract: Ladislav Jandera, the professor at Prague University in the years 1805 – 1857. He was the student and follower of Stanislav Vydra and contemporary and colleague of Bernard Bolzano. On contrary with Bolzano he was concentrated on teaching of mathematics at faculty of philosophy. In 1812 he published the textbook of “calculus exponentialis”.

1 Život a dobové souvislosti

Josef Jandera se narodil roku 1776 v Hořicích v Podkrkonoší. Podobně jako jeho krajan a velký vzor Stanislav Vydra vystudoval gymnasium v Hradci Králové a pokračoval na filosofické fakultě v Praze. Zde se spřátelil s o pět let mladším Bernardem Bolzanem a Janem Stoppanim, s nímž v roce 1800 vstoupil do premonstrátského kláštera na Strahově. Při oblažce přijal řeholní jméno Ladislav a od té doby se píše podle řádových zvyklostí Ladislav Josef Jandera. Po dvou letech skládá slavné sliby pro strahovskou kanonii a je vysvěcen na kněze. Nepřestává se však věnovat studiu matematiky a dále spolupracuje se svým učitelem S. Vydrou. Okamžitě po Vydrově oslepnutí v roce 1803 nastupuje jako suplent a pokračuje v jeho přednáškách. Roku 1804 skládá rigorosum a je promován doktorem filosofie. Po smrti S. Vydry na sklonku téhož roku se spolu s Bolzanem uchází o stolicí matematiky (Bolzano souběžně žádá i o nově ustavenou stolicí teologie). Oba uchazeči byli shledáni způsobilými, řádným profesorem matematiky byl roku 1805 jmenován starší a již suplující Jandera, Bolzano se stal prozatímním a po dvou letech definitivním profesorem náboženství. Lze se jen domýšlet, jaký dopad na další dění na universitě by měla opačná alternativa, pokud by před poněkud konzervativním Janderou dostal přednost originální myslitel Bolzano.

Na rozdíl od Bolzana, který byl pod vlivem politického uduvačství svých nepřátel do Vídně i Říma ze svého místa v roce 1819 sesazen, čekala Janderu vcelku poklidná univerzitní kariéra. Byl dvakrát děkanem filosofické fakulty, roku 1828 byl zvolen rektorem university. Až do své smrti v roce 1857, tj. více než padesát let, přednášel matematiku v 1. ročníku filosofického studia (tzv. logika). Je na místě připomenout, že v té době bylo absolvování filosofie ještě nutným předstupněm pro studium ostatních oborů (teologie, právo, medicína). Každý rok měl Jandera ve svém kurzu v průměru 300 posluchačů, celkový počet studentů se odhaduje na 16 tisíc (mezi nimi např. K. H. Mácha a K. J. Erben). Dle svědectví jiného jeho žáka J. Durdíka byl Jandera výraznou a všestrannou osobností. Durdík vzpomíná na jeho jasné a srozumitelné přednášky a oceňuje i jeho další aktivity mimo universitu – řádný člen Královské české společnosti nauk třídy historicko-filologické (shromažďování archivních pramenů dějin východočeského regionu), iniciátor určení přesné astronomické polohy města Hořic a – řečeno dnešním jazykem – ochránce krajiny a ekolog, který ve svém rodišti zabránil odtěžení pískovcového vrchu sv. Gottharda a financoval obnovení tamní pokácené lipové aleje.

2 Janderovo pojetí výuky matematiky

Jandera pokračoval v tradici svého předchůdce. Roku 1806 vydal jeho první českou učebnici Počátkové arytmyky, kterou Vydra již poslepu diktoval svým posluchačům. O šest let později vydal Jandera vlastní latinsky psanou učebnici *Prima calculi exponentialis elementa nova partim methodo in usum auditorum suorum proposita*. Jandera musel při svých přednáškách respektovat závazně předepsanou literaturu, již byla učebnice Ignáce Appeltauera. Stejně poměry panovaly v té době i na ostatních katedrách a byly projevem státního dozoru nad universitní výukou – stačí připomenout štvaniči na Bolzana, který odmítal přednášet bez úprav podle schválené Frintovy učebnice náboženství, která obsahovala chyby. Ve svém učebním textu je Jandera tedy konzervativní, poměřujeme-li jej provinční pražské poměry přesahující osobností Bolzanovou. Zároveň je mu však třeba přiznat dílčí inovace, které opatrně inseruje v obširném latinském názvu, a především preciznost výkladu, kdy na rozdíl od Appeltauera pojmy přesně definuje a všechna tvrzení jsou důsledně dokazována (např. pasáž věnovaná logaritům [1]). Jeho důkladnost lze přirovnat z novodobých autorů k výkladům Jarníkovým. Z dnešního pohledu místy působí těžkopádně, protože zbytečně rozlišuje a popisuje případy, které jsou reprezentací téhož jevu. To lze však chápat jako úlitbu posluchačům bez rozvinuté schopnosti abstrakce, kteří se na matematiku nespecializovali, kde si Jandera dle vlastních slov kladl za cíl spíše obecné vybroušení ducha. Učebnice vyšla v roce 1830 znovu v německé verzi, mírně rozšířená. O některých partiích knihy referuje František Balada ve svém článku [2] věnovaném Janderovu výročí v 50. letech.

Přesnější představu o Janderově učitelském působení lze získat z jeho vlastních rukopisů přednášek. Jeho *Vorlesungen* nejsou textem, který by byl určen posluchačům, ale patrně vznikl jako příprava přednášejícího v samostatných sešitech, které byly později svázány. Neobsahují tedy souvislý výklad, jsou psány spíše heslovitě, nepřiliš čitelně, obsahují škrty i přepisy z nepozornosti. Svazek [3] je cenný tím, že na rozdíl od [1] obsahuje výklad diferenciálního a integrálního počtu. Jandera měl prokazatelně přehled o soudobé literatuře k tématu, na okraj textu si dělá poznámky o srovnání s jinými autory (uvádí přesné citace např. na Fischera, Bittnera, Kulika). Jeho konzervativnosti odpovídá, že při zavedení derivace ani v náznaku neužívá pojem limity, ale pracuje prostředky připomínajícími metody diferenčního počtu, jako je např. pevný diferenční krok. Současnému čtenáři ztěžuje situaci občasná absence závorek i neobvyklé značení, nejkřiklavější je patrně použití symbolu (bez komentáře!) y' , resp. y'' pro funkční hodnotu zkoumané funkce v bodě x zvětšeném o diferenční krok, resp. jeho dvojnásobek.

Podobně jako v [1] Jandera akcentuje stránku početního kalkulu na úkor diskuse předpokladů (alespoň ve svém rukopise), ale slouží mu ke cti, že všechny formule podrobně odvozuje (včetně linearity derivace a vzorce pro derivaci podílu, kde užívá substituci). Výklad je ilustrován velkým množstvím výstižně zvolených příkladů, např. pro pochopení rozdílu mezi derivováním součinu a složené funkce, pomocí protipříkladu také upozorňuje na riziko chybného použití studované formule. Na početní úrovni Jandera krom algebraických funkcí dále obsáhne obvyklá témata derivování exponenciálních, logaritmických funkcí o libovolném přípustném základu (zde se opírá o důkladný rozbor jejich vlastností v [1]), funkcí goniometrických a cyklotrických včetně důkazů. Zařazuje též zmínku o Taylorově polynomu (rozvoji?). Část věnovaná integrálnímu počtu je daleko stručnější, v rukopise vlastně nenajdeme definici integrálu.

Při výkladu početních algoritmů se krom substituce (v daném kontextu je pěkné její použití pro odvození integrálu exponenciální funkce o libovolném přípustném základu) velice často objevuje nahrazení integrované funkce jejím Taylorovým rozvojem, např. u integrálu logaritmu. V dalším textu se získané znalosti aplikují při studiu kuželoseček a semestr končí (30. 7.) výkladem sférické trigonometrie.

3 Další perspektivy zkoumání

Začátkem 90. let minulého století byly v rámci restitucí knihovního fondu do klášterní knihovny vráceny pozůstalosti příslušníků strahovské kanonie. V případě Ladislava Jandery k tomu došlo jen částečně. Jeho rukopisy jsou zde k dispozici pouze v případě, že byly dodatečně svázaný (jako např. [3]) a katalogizovány jako „knižní jednotka“. Ve fondu Literárního archivu PNP v Praze se patrně nachází podstatná část Janderovy pozůstalosti v rozsahu sedmi kartonů, která dosud nebyla obsahově zpracována. Podle popisu [4] provedeného v 70. letech Pavlem Křivským by měla obsahovat další universitní přednášky, matematické spisy a zejména Sbírku úloh z matematiky v rozsahu přes 1600 listů rukopisu. V době uzávěrky konferenčního sborníku strahovská knihovna zahájila jednání o jejím dodatečném navrácení.

Zpřístupnění těchto spisů veřejnosti by umožnilo dokreslit postavu Bolzanova současníka, který sice nebyl tvůrčím matematikem sensu stricto, ale svým universitním působením v době, v pražských poměrech politicky nepříliš příznivé výrazným osobnostem a svobodě akademického bádání, se snažil po svém kultivovat myšlení řady generací studentů všech oborů.

Literatura

- [1] Jandera L. J.: *Prima calculi exponentialis elementa nova partim methodo in usum auditorum suorum proposita*. Pragae, 1812.
- [2] Balada F.: *Před sto lety zemřel prof. Josef Jandera*. Matematika ve škole 8(1958), 49–56.
- [3] Jandera L. J.: *Vorlesungen über Mathematik in Sommersemester 1853*. [rukopis z pozůstalosti].
- [4] Křivský P.: *Písemná pozůstalost – Ladislav Jandera (1776–1857)*. Literární archiv PNP v Praze, Praha, 1976.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky VŠE
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: otavova@vse.cz

O FAREYOVÝCH ZLOMCÍCH

PAVLA PAVLÍKOVÁ

Abstract: Farey fractions have a little bit curious history. They are named after British geologist John Farey, Sr. (1766–1826) and have many interesting properties (for example geometrical interpretation in terms of lattice points and Ford circles) and useful applications (rational approximations, solving of Diophantine equations, etc.).

1 Úryvky z historie

V roce 1816 zaslal britský geolog John Farey starší (1766–1826) do redakce časopisu *Philosophical Magazine* krátký dopis nazvaný *On a curious property of vulgar fractions*. Z jeho znění citujeme (viz [2]):

If all the possible vulgar fractions of different values, whose greatest denominator (when in their lowest terms) does not exceed any given number, be arranged in the order of their values, or quotients; then if both the numerator and the denominator of any fraction therein, be added to the numerator and the denominator, respectively, of the fraction next but one to it (on either side), the sums will give the fraction next to it ... I am not acquainted, whether this curious property of vulgar fractions has been before pointed out; or whether it may admit of some easy or general demonstration; which are points on which I should be glad to learn the sentiments of some of your mathematical readers ...

Aniž by tušil, zapsal se tak do historie matematiky, i když matematika nepatřila mezi hlavní cíle jeho zájmu. První důkaz pravdivosti jeho hypotézy podal Augustin Louis Cauchy (1789–1857) poté, co si přečetl francouzský překlad výše citovaného dopisu. Je zajímavé, že danou vlastnost těchto zlomků popsal v [5] C. Haros již v roce 1802 (viz např. [4], str. 36), avšak jeho výsledek zůstal dlouho nepovšimnut, a tak popsané posloupnosti zlomků dodnes nesou Fareyovo jméno (někdy bývají označovány jako Haros-Fareyovy).

2 Definice a vlastnosti Fareyových zlomků

Fareyovým zlomkem řádu n rozumíme každý zlomek $0 \leq p/q \leq 1$ v základním tvaru, kde p, q jsou přirozená čísla taková, že $q \leq n$. Např. pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dostáváme následující posloupnosti Fareyových zlomků (řadíme je vzestupně dle velikosti):

$$F_1 = \{0/1, 1/1\}$$

$$F_2 = \{0/1, 1/2, 1/1\}$$

$$F_3 = \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\}$$

$$F_4 = \{0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1\}$$

$$F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}.$$

Obecně lze konstatovat, že posloupnosti Fareyových zlomků téhož řádu mají spoustu zajímavých vlastností. Jestliže např. a/b a c/d jsou dva sousední Fareyovy zlomky téhož řádu, pak

$$|ad - bc| = 1.$$

Vlastnost (tzv. „mediánová“), která upoutala pozornost Johna Fareye, by se dala vystihnout takto: jsou-li a/b , c/d , e/f tři po sobě bezprostředně následující Fareyovy zlomky téhož řádu, pak platí

$$c/d = (a+e)/(b+f).$$

3 Kde se Fareyovy zlomky vyskytují?

Přestože se jedná o velmi jednoduše pochopitelný matematický pojem, nachází bohaté uplatnění v širokém spektru matematických aplikací. Uvedeme některé z nich: možnosti zajímavé geometrické interpretace Fareyových zlomků („Ford circles“) ukázal Lester Randolph Ford starší (1886–1975) v článku [3]. Na souvislost s Pickovou větou o mřížových bodech v rovině upozornil mimo jiné článek [1]. Souvislostmi Fareyových zlomků s Riemannovou domněnkou o nulových bodech ζ funkce se zabývali i čeští matematici Miloš Kössler (1884–1961) ve svých denících a Jiří Kopřiva (1925) v [6], [7]. Při hledání Fareyových zlomků vyšších řádů se ukazuje jako výhodné použít řetězové zlomky a tzv. Fareyovy stromy. Fareyovy zlomky je také možné dobře aplikovat v teorii racionálních aproximací, při řešení jistých typů diofantických rovnic či v teorii chaosu (např. při konstrukci fraktálů).

Literatura

- [1] Bruckheimer M., Arcavi A.: *Farey Series and Pick's Area Theorem*. The Mathematical Intelligencer 17(1995), 64–67.
- [2] Farey J.: *On a curious property of vulgar fractions*. Philosophical Magazine 47(1816), 385–386.
- [3] Ford L. R.: *Fractions*. American Mathematical Monthly 45(1938), no. 9, 589–601.
- [4] Hardy G. H., Wright E. M.: *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5. vydání, Oxford University Press, 1979.
- [5] Haros C.: *Tables pour évaluer une fraction ordinaire avec autant de decimals qu'on voudra; et pour trouver la fraction ordinaire la plus simple, et dui a approche sensiblement d'une fraction décimale*. Journal de l'École Polytechnique 4(1802), 364–368.
- [6] Kopřiva J.: *O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových bodech funkce ζ* . Časopis pro pěstování matematiky 78(1953), 49–55.
- [7] Kopřiva J.: *Příspěvek ke vztahu Fareyovy řady a Riemannovy domněnky*. Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), 77–82.

Adresa

RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.
 Ústav matematiky
 Fakulta chemicko-inženýrská, Vysoká škola chemicko-technologická
 Technická 5
 166 28 Praha 6 – Dejvice
 e-mail: Pavla.Pavlikova@vscht.cz

SLOVNÍ ÚLOHY O DĚLITELNOSTI 1850–1950

KAREL PAZOUREK

Abstract: Between the years 1850 and 1950, teaching of divisibility was concentrated on acquiring of basic algorithms, but the word problems can be found in contemporary textbooks. However, they were developed mainly after the Marchet's reform of secondary education. Some types of problems disappeared from the textbooks, others were modified and are presented in the present secondary school books.

1 Úvod

V učebnicích a sbírkách matematiky pro střední školy se slovní úlohy objevují v partiích věnovaných dělitelnosti. V tomto článku se zaměříme na česky psané texty z let 1850 až 1950, a to na algebry a aritmetiky pro gymnázia, reálky, reálná gymnázia a další příbuzné typy škol. Navíc se budeme z níže patrných důvodů věnovat zvláště učebnicím pro nižší a vyšší oddělení těchto středních škol.

2 Slovní úlohy v učebnicích

2.1 Slovní úlohy v učebnicích pro nižší oddělení středních škol

V prvních českých učebnicích pro nižší oddělení, aritmetikách, vydaných po prvním jejich rozmachu v 60. letech 19. století, se slovní úlohy nevyskytují. Teprve až ve třetím vydání Starého aritmetiky [13] najdeme první nesmělé pokusy. Dvě úlohy jsou uvedeny na závěr kapitoly v souhrnném opakování, procvičují pojmy násobek a dělitel:

Země probíhá na své dráze kolem slunce za 3 hodiny skorem 43866 zeměp. mil; kolik mil probíhá za 1 minutu, kolik za 1 vteřinu?

V pozdějším šestém vydání z roku 1893 se změnil údaj 43866 *zeměp. mil* na 325503 *km*.¹ Druhá úloha se týká spočtení celkové ceny zakoupených jízdenek, je-li znám počet jízdenek do první, druhé a třetí třídy.

Slovní úlohy, které se více dotýkají dělitelnosti, najdeme až v Tůmově aritmetice [14]:

*Když každý čtvrtý rok dle křesťanského počtu jest rokem přestupným, která léta ve století 19. budou ještě přestupná?*²

*Udejte, která z let 1213, 1694, 1724, 1802, 1848, 1852, 1854, 1866, 1868, 1870 byla přestupná.*³

¹ V Rakousko-Uhersku zákonem ze dne 2. března 1872 měla se osnova metrová na počátku roku 1873 dobrovolně zavádět; počátkem roku 1876 bude se výhradně jen nových měr a vah užívat. ([8], str. 6) Je proto zvláštní, že učebnice z roku 1877 pracuje s mílemi. Na druhou stranu je možné, že by si žáci vzdálenost v nových jednotkách jen obtížně představovali.

² Chybí poznámka o nepřestupných rocích dělitelných 400. Na druhou stranu v té době tato podmínka nebyla aktuální a zbytečně by zatemnila příklad.

³ Opět se Tůma vyhýbá problematickým datům.

Úlohy o přestupných rocích a kalendáři se pak vyskytují často, uvedl je například Sommer ve svých učebnicích [12] ad.

Do Marchetovy reformy se tak slovní úlohy o dělitelnosti vyskytují vzácně. Jejich rozmach přichází po roce 1909.

Marchetova reforma podstatně změnila tvář učebnic. Zjevně je z nich patrná snaha zaujmout žáky samotnými problémy přiblížením k situacím ze skutečného života. Zajímavou učebnicí z tohoto pohledu jsou učebnice Bendla a Muka [1], ve kterých celý výklad dělitelnosti probíhá na praktických příkladech (hromádkách zrn, rozlévání do nádob). Že s tímto přístupem neměli autoři příliš zkušeností, ukazuje celá řada chyb, které byly opravovány v dalších vydáních, stejně tak celé řady následujících změn. Je však třeba zdůraznit, že aritmetiky těchto autorů měly značný inspirační vliv na další autory. Často Bendlovy a Mukovy úlohy byly pak přebírány a upravovány.

Pole mající tvar pětiúhelníku abcde, jehož strany jsou $ab = 112$ m, $bc = 80$ m, $cd = 64$ m, $de = 108$ m, $ef = 128$ m, má se osázeti stromy tak, aby v každém vrcholu a v každém bodu, jenž půlí stranu, byl strom. Který je nejmenší počet stromů, mají-li být od sebe stejně vzdáleny?

V druhém vydání [2] už je opravena chyba v popisu poslední strany, malá písmena označující vrcholy pětiúhelníku byla nahrazena velkými, navíc bylo dovysvětleno, že stromy se mají „sázeti po obvodu“ pole. Délka poslední strany byla změněna na 256 m.

V Mukově aritmetice [9] z roku 1932 přibývá poznámka: *Narýsujte!* To se zdá značně problematické, neboť z daných vlastností nelze pětiúhelník zkonstruovat. Pro zjednodušení úlohy však vypadává podmínka na stromy uprostřed stran. Úloha pak byla přebrána do učebnice [3] Bílka a kol. z roku 1950, s menší úpravou:

Pole má tvar pětiúhelníka ABCDE, který má strany $AB = 12$ m, $BC = 80$ m, $CD = 64$ m, $DE = 128$ m, $EA = 156$ m. Pole se má po obvodu osázet stromy tak, aby v každém vrcholu byl strom. Který je nejmenší počet stromů, mají-li být od sebe stejně vzdáleny?

Podobnou roli jako aritmetiky Bendla a Muka měly i Červenkovy aritmetiky ([6] ad.), v nichž zadání bývají lépe formulována.

2.2 Slovní úlohy v učebnicích pro vyšší oddělení středních škol

V učebnicích pro vyšší oddělení nalezneme slovní úlohy o dělitelnosti jen zřídka. Jsou pro to dva důvody: První slovní úlohy se objevují pozdě, s výjimkou uvedenou níže. Dále dělitelnost se probírala po Marchetových reformách někdy i ve čtvrté třídě místo v páté⁴. Navíc se v těchto učebnicích pro čtvrtou třídu slovní úlohy téměř nevyskytují, přednost dostává rozšíření dělitelnosti na mnohočleny.

Do roku 1908 tak máme pouze jednu výjimku, na kterou už nebylo navázáno. Jsou jí Šimerkovy algebry [10], [11] z let 1863 a 1868. Jedná se tedy o jedny z nejstarších slovních úloh v českých středoškolských učebnicích vůbec. Jsou zde uvedeny tři úlohy, první kompletně vyřešená, ostatní pouze s návodem a řešením, všechny se zabývají problémy, které v současnosti řešíme jako úlohy o společné práci. Jde tak o elegantní způsob vyhnutí se práci se zlomky:

⁴ Osnovy v nařízení z 20. března 1909 č. 11662 a z 8. dubna 1909 č. 14741 stanovují ve čtvrté třídě probrat *míry, násobky, zlomky*; v páté třídě požadují *rozšiřování a doplňování aritmetického učiva předchozí třídy*. Čtvrtá a pátá třída tvořily tzv. střední oddělení, přechod mezi oddělením nižším a vyšším.

Nádržka které má tři trouby, a naběhne první trubou za 20 hodin, druhou za 24, a třetí za 30. Jak brzo naběhne všemi trubami na jednou otevřenými?

Odpověď'. Nejm. sp. nás. těchto čísel jest 120, a nic nevadí, proč by nesmělo vzít se za obsah nádržky 120s (asi sudů neb nějakých jiných měř). Pak nateče za hodinu 1n1 trubou 6s, druhou 5s, třetí 4s. Tedy všemi třemi za hodinu 15s, a nádržka naběhne za $120s : 15s = 8$ hodin.

Naběhla-li by nádržka jednotlivými ze čtyř trub po sobě v 18, 20, 30, 36 hodinách, kdy naběhne všemi trubami najednou?

Odpověď': Za 6 hodin.

Někdo má práci jakousi, a zavolá si na ni tři dělníky. První ji hodlá za 12, druhý za 15 a třetí za 20 dní udělati. Jak brzo má práce ta býti hotova, když všichni tři zároveň pracují?

Odpověď': Mají-li dělati příkop 60s dlouhý, vykonají to za 5 dní.

Zde je třeba si povšimnout, že samotné zadání úlohy je obecné, řešení je pak převedeno na kopání příkopu, tedy na konkrétní úkon.

2.3 Slovní úlohy ve sbírkách úloh

První sbírka [7] úloh vyšla v roce 1876, jejími autory jsou Hromádka a Strnad. Další autorský kolektiv Bydžovský, Vojtěch (v pozdějších vydáních se k nim připojují Teplý a Vyčichlo) vydává svoji sbírku [4] poprvé roku 1912. Jsou to sbírky určené vyšším oddělením středních škol. Na konci 20. let se objevily i další sbírky, v nich se však slovní úlohy o dělitelnosti neobjevily.

Ve sbírce Hromádka a Strnada nalezneme pouze jednu slovní úlohu:

Těleso nějaké pohybuje se rovnoměrně rychlostí 14^m v kruhové dráze, jejíž obvod jest 90^m . Jak daleko bude od počátku vzdáleno za 5 minut?⁵

Bydžovský a Vojtěch na závěr partie věnované dělitelnosti dávají celkem sedm slovních úloh, například:

Otec kráčí se synem. Délka kroku otcova je 80 cm, délka kroku synova je 55 cm. Vykročí-li oba v určitém okamžiku současně, po kolika krocích zase dostoupnou jejich nohy současně? A kterou nohou dostoupne v tomto okamžiku každý z nich, jestliže původně vykročili oba levou nohou?⁶

Ve světnici je slyšet tikot dvojích hodin. Doba kyvu jedné je 8, druhých 12 desetin vteřiny. Po jaké vždy době splyne tikot obou hodin?⁷

Přední kolo vozu má obvod 25 dm, zadní kolo obvod 32 dm. Po kolika otočkách mají vždy totéž vzájemné postavení?⁸

⁵ Značení není v učebnici vysvětleno, index ^m snad v prvním případě značí, o kolik metrů za jednotku času (minutu?) se těleso pohne po kruhové dráze.

⁶ Srovnej s úlohou z Červenkovy aritmetiky [6].

⁷ Srovnej s úlohou z Červenkovy aritmetiky [6].

⁸ Srovnej s úlohou z aritmetiky Bendla a Muka [1].

3 Závěr

Slovní úlohy se v partiích učebnic o dělitelnosti objevují pozvolna, po Marchetově reformě se pevně zakotvují v učebnicích. Některé pracují s kalendářem, ozubenými koly a dalšími praktickými předměty a situacemi, díky nim je dělitelnost propojována s dalšími oblastmi matematiky, např. geometrií.

V uvedeném období pak jednotlivé úlohy byly přebírány dalšími autory, měněny, některé typy úloh vymizely docela. Přesto svou pozici si slovní úlohy o dělitelnosti ve středoškolských učebnicích udržely až do současnosti.

Literatura

- [1] Bendl R., Muk J.: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních*. Díl II. Ústřední spolek českých profesorů, Praha, 1910.
- [2] Bendl R., Muk J.: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních*. Díl II. Druhé vydání. Vydavatelské družstvo českých profesorů, Praha, 1921.
- [3] Bílek J.: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol*. SPN, Praha, 1950.
- [4] Bydžovský B., Vojtěch J.: *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol*. JČM, Praha, 1912.
- [5] Bydžovský B., Teplý S., Vyčichlo F.: *Aritmetika pro IV. třídu středních škol*. JČMF, Praha, 1934.
- [6] Červenka L.: *Arithmetika pro II. třídu středních škol*. JČM, Praha, 1910.
- [7] Hromádka F., Strnad A.: *Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol*. JČM, Praha, 1879.
- [8] Jarolímeček Č.: *Počítárství pro prvou třídu nižších i vyšších škol reálných, jakož i pro vyšší třídy škol občanských*. I. díl. Kober, Praha, 1873.
- [9] Muk J.: *Aritmetika pro nižší třídy středních škol*. Díl II. Čtvrté vydání. Profesorské nakladatelství a knihkupectví v Praze, společnost s r. o., Praha, 1932.
- [10] Šimerka V.: *Algebra čili počítárství obecné pro vyšší gymnasia*. Grégr, Praha, 1863.
- [11] Šimerka V.: *Algebra čili počítárství obecné pro vyšší gymnasia a reálné školy*. Druhé vydání. Grégr, Praha, 1868.
- [12] Sommer J.: *Arithmetika pro nižší gymnasium*. Tempský, Praha, Vídeň, 1894.
- [13] Starý V.: *Arithmetika pro nižší třídy gymnasií a reálných gymnasií*. Třetí vydání. Tempský, Praha, 1877.
- [14] Tůma F.: *Arithmetika pro prvou a druhou třídu škol gymnasiálních*. Tůma, Praha, 1887.

Adresa

Mgr. Karel Pazourek
Katedra didaktiky matematiky
MFF UK v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: pazourek@karlin.mff.cuni.cz

AKO RÝCHLO VIEME A MÔŽEME NÁSOCI

ŠTEFAN PORUBSKÝ

Abstract: In the paper we shall review some methods used for the multiplication in the past, compare them with the usual algorithm, and show their influence on the analysis of complexity of arithmetic operations.

1 Z histórie pojmu a používania násobenia

Násobenie je jedna zo základných aritmetických operácií, medzi ktoré dnes počítame sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie a umocňovanie. Presný počet základných aritmetických operácií bol rôzny v rôznych dobách a u rôznych autorov. Ako operácie s číslami sa v priebehu vývoja najčastejšie udávalo týchto 5 operácií: numerácia¹, sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie. Sacrobosco (asi 1195 – asi 1256) vo svojom diele *Algorismus* (zvanom tiež *Algorismus de integris* alebo *Algorismus vulgaris*²) rozoznáva dokonca 9 aritmetických operácií: numerácia, sčítanie, odčítanie, pólenie, zdvojovanie, násobenie, delenie, sčítanie aritmetických postupností (operácia zvaná *progressio*), druhú a tretiu odmocninu.³ Táto kniha bola úvodom do elementárnej aritmetiky a prakticky prvou univerzitnou učebnicou zavádzajúcou indicko-arabské číslce a počítanie a hojne sa používala v stredoveku (dielo malo niekoľko vydaní medzi rokmi 1488 a 1582).

Latinské slovo *multiplicatio* vzniklo zložením slov *multus* (mnohý, početný) a *plicare* (zložiť). Ide o latinskú formu gréckych slov *πολυπλασιάζειν* alebo *πολλαπλασιάζειν*. Prvé z nich používal Euklid a Diofant, druhé Herón, ale napr. Pappus používal obidva výrazy. V latinských textoch je násobenie avizované pomocou *ducere in* (vtiahnuť do) a v taliančine pomocou *multiplicare via* [G, zv. II, str. 216]. Tieto výrazy sa postupom času zredukovali na *in* alebo *via*. Napríklad F.Viète zapisuje súčin *A* a *B* pomocou „*A in B*“. Podľa [16] *násobení v mathematice jest základní úkon početní, kterým hledáme součet dvou n. několika čísel stejné velikosti*. Z etymologického hľadiska pod slovom *násobiť* nájdeme v [20], že *násob* je staročeské *krát*, a že *násobeno* vzniklo z pôvodného *na sobě*, a tak *trojnásobný* je vlastne *trojí na sobě*. Podľa [15] toto slovo vyjadruje *vzájemný poměr mezi aspoň dvěma předměty, jako by ležely „na sobě“, ve stejné podobě ve 2, 3 at. exemplářích*.

V tzv. trevízkej aritmetike⁴ *Arte dell'Abbaco* je násobenie definované takto: *pochopiť ho [tj. násobenie] je nutné vedieť, že násobiť jedno číslo samo sebou, alebo iným číslom,*

¹ Napr. v renesancii operácia numerácie zahrnovala aj proces učenia sa číselných symbolov, čo bolo typické pre obdobie zavádzania indicko-arabského spôsobu zapisovania čísel a počítania, viď tiež [13].

² Sacrobosco odôvodňuje názov diela nasledovne: *Hanc igitur scientiam numeraci compendiosam eidam philosophus edidit nomine ALGUS, unde et Algoritmus nunciatur, vel ars numeraci, vel ars inductia in numerum interpretatur* (tu *ALGUS* znamená *Al Chvárizmí*).

³ Na Sacroboscov *Algorismus* úzko naväzuje napr. aj najstarší zachovalý čisto matematický rukopis českého pôvodu *Algorismus prosaycus* [13], ktorý obsahuje aritmetické výklady Křišťana z Prachatic jedného z najvýznamnejších profesorov pražskej univerzity konca 14. a prvej polovice 15. stor.

⁴ Asi najstaršia známa tlačaná kniha „kupeckých počtov“, ktorá propaguje indicko-arabský spôsob počítania. Vyšla v r. 1478 a je napísaná v benátskom dialekte.

znamená nájsť z dvoch daných čísel tretie, ktoré obsahuje jedno z týchto čísel toľkokrát, koľko je v tom druhom jednotiek.

Znak $\times$ pre násobenie sa po prvýkrát⁵ objavuje v r. 1631 v diele *Clavis mathematicae* od Williama Oughtreda (1574–1660). Bodka ako znak pre násobenie sa objavuje v liste Leibniza Johannovi Bernoullimu zo dňa 29.7.1698, ale používala sa príležitostne už aj predtým, napr. Th. Harriot v *Artis analyticae praxis* z r. 1631 píše $aaa - 3 \cdot bba = +2 \cdot ccc$.

2 Niektoré historické formy násobenia

2.1 Egypťské násobenie

Písmo sa objavilo asi 4000 rokov pr.n.l. v Mezopotámii a asi 3200 rokov pr. n. l. v Egypte [24]. Najjednoduchší systém na zapisovanie čísel je unárny systém. V tomto systéme je každé prirodzené číslo reprezentované odpovedajúcim počtom istých symbolov, napr. |. Systém tohto typu je vhodný len pre zaznamenávanie malých čísel. Pre zaznamenanie väčších hodnôt sa potom používajú zvláštne symboly pre isté hodnoty a konkrétne hodnoty sa potom zaznamenávajú aditívne pomocou zoskupovania takýchto symbolov⁶. Typickým predstaviteľom takéhoto tzv. *aditívneho systému* je systém používaný v starom Egypte. Aditívny systém zápisu čísel je vhodný najmä pre operácie sčítania a odčítania. Násobenie, ktoré je vo svojej podstate skrátená forma opakovaného sčítania, je možné v jeho najprimitívnejšej forme realizovať tak, že symboly reprezentujúce násobencu⁷ zopakujeme v počte odpovedajúcom násobiteľovi, a vo vzniknutom zoskupení znakov potom zoskupíme a v prípade potreby ich preskupíme postupne do vyšších rádov. V násobení, ktoré demonštrujú egypťskí pisári je použitý skrátený spôsob, v ktorom počet odpovedajúci násobiteľovi sa získava pomocou zdvojovania, alebo dokonca pomocou päť- alebo desaťnásobku (pre detaily viď. napr. [1], str. 41).

Prirodzená otázka je, ako bolo možné takýto spôsob násobenia objaviť. Jedna veľmi prirodzená teória dáva toto násobenie do súvisu s vážením na rovnoramenných váhach [11]. Takéto váhy sú známe už z predhistorických dôb a môžeme ich nájsť aj na staroegyptských reliéfoch ako nástroj na váženie duší po smrti. Najjednoduchším spôsobom ako dostať závažie hodnoty $a2^{n-1}$ je nasledujúci: položíme do jednej misky závažie váhy a v druhej ho vyvážíme do rovnováhy. Preložíme závažie do druhej misky a po vyvážení na druhej strane máme váhu $2a$. Opakovaním postupu dostaneme postupne závažia $a, 2a, 4a, 8a, \dots, 2^{n-1}a$. V tomto štádiu odvážíme akúkoľvek váhu ab , kde b má n (binárnych) cifier výberom patričnej kombinácie závaží zo skupiny $a, 2a, 4a, 8a, \dots, 2^{n-1}a$, ktorá dáva v súčte b . Od tejto praktickej skúsenosti k egypťskému násobeniu je len krôčik.

Egypťská forma násobenia je pravdepodobne veľmi stará a násobenie pripisované Egypťanom, sa u mnohých autorov nazýva *etiópskym násobením*, pretože s týmto spôsobom

⁵ Všeslovanké spojenie *-krát* je odvodené od praslovanského slova *kert*, ktoré pôvodne označovalo *sekať*, a používalo sa aj v zmysle *vrub*, pomocou ktorého sa v minulosti zaznamenával počet [7], [20].

⁶ Nie je bez zájmovosti poznamenať, že 5 nezapisovali v tvare |||| ale ||| || alebo ||.

⁷ V latinských dielach sa činitele nazývali: *numerus multiplicandus*, *numerus multiplicans* a výsledok *numerus productus*. Pozdejšie sa slovo *numerus* z týchto väzieb vytratilo.

násobenia oboznámili Egypt'anov údajne tzv. etiópske kmene (o roli Ethiopians vid' napr. [9]). Operáciu zdvojovania a pólenia uvádza ako samostatné operácie aj Al Chvárizmí vo svojom diele *Algoritmi de numero Indorum*⁸. Ján (Juan) zo Sevilly (Johannes Hispalensis alebo Johannes Hispaniensis), ktorý žil v 12. stor. (zomrel asi r. 1153 [6]) poukazuje na to, že zdvojovanie je druh násobenia a pólenie je druh delenia, ale ich uvedenie ako samostatných operácií je zdôvodniteľné skutočnosťou, že výpočet druhej odmocniny vyžaduje zdvojovanie a pólenie [3], [10].

Trošku sofistikovanejšie je tzv. *ruské (sedliacke) násobenie*⁹. V tomto prípade nie je nutné hľadať riadky, ktorých mocniny dvojky v prvom dávajú násobiteľ'a, ale postup je zautomatizovaný pomocou tzv. pólenia, tj. delenia dvomi, pričom v prípade delenia nepárneho čísla sa výsledok berie len podiel a zvyšok 1 sa neberie do úvahy, a sčítajú sa dvojnásobky odpovedajúce riadkom s neúplným delením. Napr. [18], pri výpočte súčinu 13×15 postup vyzerá nasledovne¹⁰

egyptský spôsob			ruský spôsob		
\	1	15	\	13	15
	2	30		6	30
\	4	60	\	3	60
\	8	120	\	1	120
		195			195

Aj keď sa tento spôsob násobenia sa zdá jednoduchší, než ten čo používame v súčasnosti v bežnom živote my, je matematická zložitosť obidvoch metód rovnaká [11].

2.2 Indicko-arabské násobenie

Masové rozšírenie papiera približne od 12. stor. sa prejavilo aj v spôsobe prevádzania výpočtov. Písaná forma umožňujúca zachovať pred očami celý postup výpočtu a tým i jeho kontrolu, prispela, aj keď veľmi pomaly, k presadeniu sa pozičného zápisu pomocou arabských číslíc. V počiatočných etapách narážali indicko-arabské číslice, akože pochádzajúce od muslimov a židov¹¹, najmä na odpor cirkvi, aj keď aj tu existovali výnimky. Napr. pápež Silvester II¹² (946–1003) presadzoval arabskú vzdelanosť a vedomosti, aj keď nie s veľkým úspechom.

Propagácia indického pozičného zápisu a výpočtu (tzv. *modus Indorum*) čísel v Európe je obvyčajne spojovaná s Fibonaccioho *Liber Abbaci*. Ovšem jeden z prvých

⁸ Toto dielo Al Chvárizmího sa zachovalo len v latinskom preklade a nemá názov. Názov *Algoritmi de numero Indorum* mu dal Baldassarre Boncompagni v r. 1857.

⁹ Ruské preto, lebo po rozšírení vzdelanosti a indicko-arabského spôsobu násobenia, ktoré sa dnes učíme v škole, západná časť Európy na tento spôsob násobenia zabudla, a s „veľkým“ prekvapením ho znovu objavila v 19. stor. v Rusku, kde ho bežne používali muži. Uvedomme si, že toto násobenie nevyžaduje znalosť malej násobilky, ktorú nás naučila povinná školská dochádzka.

¹⁰ Toto násobenie nájdeme aj v spomínanom rukopise *Algorismus prosycusi*.

¹¹ Pomenovanie *arabské číslice* podľa Sartona [21], zv. 2, str. 618, bolo odvodené od Sacroboscovej poznámky v *Algoritme*: Sinistrorsum autem scribimus in hac arte arabico sive iudaico, huius scientiae inventum. (Píšeme tu doľava podľa spôsobu Arabov alebo Židov objaviteľov tejto vedy).

¹² Mimo chodom prvý pápež francúzskeho pôvodu. Študoval v Španielsku v Barcelone a u arabských učiteľov v Cordobe a Seville. Napísal niekoľko vedeckých traktátov a údajne vynášiel kyvadlové hodiny.

popisov indického pozičného systému v Európe je v knihe *Liber algorismi* od Jána zo Sevilly¹³ [3]. Popis ako násobili starí Indovia nájdeme v [23].

Nie je možné na tomto mieste uviesť všetky formy násobenia, ktoré sa v minulosti používali. Napr. Luca Pacioli (1445–1517) vo svojej *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita* (vyšla 1494 a 1523) uvádza 8 spôsobov násobenia pomocou indicko-arabských cifier, a Pietro Antonio Cataldi (1548–1626) v diele *Prima Parte della Pratica Aritmetica* z r. 1602 uvádza ďalšie tri spôsoby.

2.3 Cauchyho komplementárne násobenie

Podľa Cauchyho je možné súčin dvoch čísel xy vypočítať najpohodľnejšie pomocou tzv. *komplementárneho násobenia* [4]: najprv vytvorme súčet $x+y$ a tento rozložíme iným spôsobom na súčet dvoch čísel $x+y = x' + y'$. Potom $xy = x'y' + (x-x')(y-y')$ a tiež $xy = x'y' + (x-y')(y-y')$. S využitím týchto vzťahov napr. súčin 23×67 môžeme spočítať takto: $23+67 = 30+60$ a tento rozklad vedie na postup $23 \times 67 = 30 \times 60 + (23-30)(67-30) = 1800 - 7 \times 37 = 1800 - 259 = 1541$ (skúste rozklad $23+67 = 40+50$).

Špeciálnym prípadom komplementárneho násobenia je nasledujúca forma: Napíšme $x = z + a$, $y = z + b$ a zvolíme v predchádzajúcom postupe $x' = 2z$, $y' = a + b$, čím dostaneme $xy = 2z(a+b) + (z-a)(z-b)$.

V prípade voľby $z=5$ dostaneme pravidlo zvané *regula ignavi*, t.j. vzorec $(5+a)(5+b) = 10(a+b) + (5-a)(5-b)$, ktoré nám umožňuje redukovať malú násobilku 10×10 na znalosť „menšej“ násobilky 5×5 . V interpretácii pomocou počítania na prstoch dostaneme tzv. cigánske násobenie, napr. $7 \times 8 = 10(2+3) + (5-2)(5-3)$.

2.4 Kulikovo dvojciferné násobenie

Ak zvolíme $z=100$ v predchádzajúcej forme násobenia, potom pre súčiny do veľkosti 200×200 nám stačí mať k dispozícii tabuľky súčinov do 100×100 . Je okamžite jasné, že pokiaľ by sme vedeli naspamäť namiesto malej násobilky, „veľkú“ násobilku 100×100 budeme schopní analogickým spôsobom k tomu, čo používame na násobenie násobiť ľubovoľne veľké čísla tak, že budeme násobiť po dvojiciach s využitím sady tabuliek umiestnených na 13 stranách, ktoré vydal J. Ph. Kulik knižne [14]¹⁴. Princíp použitia je v tom, že namiesto toho aby sme vynásobili dve 2-miestne čísla (čo vyžaduje 4 násobenia a 3 sčítania) vezmeme výsledok z tabuliek. Napr. ak chceme vynásobiť 1743×37 môžeme postupovať takto (každý medzivýsledok v riadku je vzatý z tabuliek):

$$\begin{array}{r} 43 \times 37 = 1591 \\ 17 \times 37 = 629 \\ \hline 630591 \end{array}$$

¹³ Dielo je rozšíreným spracovaním Al Chvárizmího *Algoritmi de numero Indorum*. Rozšírenie je možno skoršieho dáta. Podľa [5] v Erfurte existuje rovnaký rukopis, kde ako prekladateľ je uvedený Gerhard z Cremony (Gherardo da Cremona alebo Gerard Cremonensis, žil 1114–1187) [10].

¹⁴ Knižička sa predávala za tretinu toliara a zisk z predaja šiel na podporu obyvateľov Krakova poškodených požiarom 18. a 19. júla 1850.

Kulik samozrejme udáva aj postup, ako môžeme pomocou týchto tabuliek deliť. „Energetická“ úspora pri počítaní je „akumulovaná“ v pripravených tabuľkách. Tabuľky tohto druhu sa potom na prelome 19. a 20. stor. objavili v podstatne väčšom rozsahu.

2.5 Tabuľky štvrt'kvadrátov

Už starí Babylóňania poznali tieto algebraické vzorce $ab = \frac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2)$ a $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$. Ich moderný matematický význam z hľadiska analýzy zložitosti násobenia ukazuje, že zložitosť násobenia sa rovná zložitosti umocňovania na druhú. To znamená, že keby sme boli schopný rýchle umocňovať, môžeme aj rýchle násobiť (a samozrejme aj naopak). J. Ph. Kulik v druhej časti knihy [14] zostavil tabuľky, o ktorých v úvode píše: *Usporiadanie druhej tabuľky je založené na doposiaľ nepoužitom šikovnom nápade, pomocou ktorého sa súčin dvoch čísiel prevedie na rozdiel dvoch čísiel získaných z tabuľky. K tomu, aby sme pre dva dané čísla pomocou tabuľky našli ich súčin, musíme ich najprv sčítať a jedno od druhého odpočítať. Dostaneme dve nové čísla, na ktoré použijeme tabuľku, a preto ich nazveme argumenty tabuľky.* (Pre nedostatok miesta odkazujeme čitateľa buď na [14] alebo na [19] pre ďalšie podrobnosti.)

Kulik tvrdí, že jeho nápad je nový a doposiaľ nepoužitý. V úvode píše, že o nápade, na ktorom sú tabuľky založené po prvýkrát informoval už v r. 1833. Je síce možné, že o tom naozaj nevedel, ale skutočnosť je pre neho krutá. Podľa úvodu v [2] *Aj keď Ludolf už v r. 1680 vo svojej Tetragonometrii a po ňom C. Séguin v Paríži v r. 1801 dávajú návod, ako využiť tabuľky štvorcov pre účely násobenia, trvalo to ďalších 15 rokov kým inžinier Anton Voisin v Nismes vydal v r. 1816 prvé multiplikačné tabuľky tohto druhu.*¹⁵

3 Efektívnejšie formy násobenia

História a každodenná skúsenosť ukazujú, že násobenie je náročná operácia, či už na počet úkonov, ktoré si vyžaduje, ale aj na „priestor“ ktorý zaberá. Okrem toho vyžaduje prípravné vedomosti, napr. znalosť násobenia dvomi, alebo malú násobilku, a pod. Preto sa ľudia snažili v celej histórii nájsť jeho čo najjednoduchšiu formu. V nasledujúcich riadkoch si uvedieme len zlomok z takýchto nápadov. Prirodzená otázka, ktorá pritom vyvstane znie, je historický vývoj aj cestou k väčšej efektívnosti? Inými slovami je tá forma násobenia, ktorá sa presadí voči staršej „menej namáhavá“? Jedným z veľmi zaujímavých poučení, ktoré nám priniesol rozvoj výpočtových metód je poznatok, že efektívnosť foriem základných algoritmov, ktoré používame (a učíme) pre takú základnú operáciu ako násobenie, je veľmi malá. V jazyku modernej matematiky má školské násobenie¹⁶ dvoch n -miestnych čísiel zložitosť $O(n^2)$. V nasledujúcich riadkoch naznačíme myšlienky, ktoré otvorili cestu k metódam, pomocou ktorých dnes vieme vynásobiť dva takéto čísla so zložitou $O(n(\log n)(\log \log n))$. Podrobnejšiu analýzu rôznych foriem násobenia nájde čitateľ napr. v [12].

3.1 České násobenie

Trošku nepovšimnuté zostalo násobenie navrhnuté Svobodom a Valachom [22] a Kolmogorovom pomenované ako *české* [11]. Neskoršie bolo nezávisle objavené

¹⁵ Žiaľ, je tu aj odkaz, že Kulikove tabuľky obsahujú 30 chýb.

¹⁶ T.j. ten známy spôsob násobenia, ktorý sa učíme v školách

Garnerom v r. 1959 (viď [12]). Jedná sa formu násobenia, ktorú dnes nazývame *modulárnym násobením*. Činitele sa zredukujú modulo vhodne zvolených modulov, získané hodnoty sa vynásobia a pomocou čínskej zvyškovej vety sa získaný súčin „zdvihne“ do hodnoty skutočného súčinu. Aj keď sa táto myšlienka zdá komplikovaná, v celkovom hodnotení jej zložitosti je výhodnejšia než štandardne používané násobenie. Pre detaily čitateľa odporúčame na [11], [12], [22].

3.2 Karacubovo násobenie

Na jeseň r. 1960 na seminári na moskovskej univerzite zopakoval Kolmogorov svoju hypotézu, že zložitost' násobenia je $O(n^2)$. V priebehu 1 týždňa mladý poslucháč A. A. Karacuba s použitím veľmi jednoduchej myšlienky našiel spôsob násobenia, ktorého zložitost' bola $O(n^{\log_2 3})$. Keďže $\log_2 3 = 1,5849... < 2$, Kolmogorova hypotéza bola vyvrátená [11]. Myšlienka dôkazu bola extrémne jednoduchá. Súčin dvoch $2n$ -miestnych binárnych čísiel vynásobíme nasledovne: $(2^n a_1 + a_2)(2^n b_1 + b_2) = (2^{2n} + 2^n) a_1 b_1 + 2^n (a_1 - a_2)(b_2 - b_1) + (2^n + 1) a_2 b_2$. To znamená, že potrebujeme vynásobiť len tri namiesto štyroch n -miestnych čísiel!!! Objav odštartoval novú éru v analýze efektívnosti základných aritmetických operácií a v metódach používaných na násobenie veľkých čísiel.

Literatura

- [1] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Dějiny matematiky, zv. 23, Prometheus, Praha, 2003.
- [2] Blater J.: *Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200 000 welche die Ausführung von multiplikationen, Quadrirungen und das Ausziehen der Quadratwurzel bedeutend erleichtert und durch vorzügliche Correctheit fehlerlose Resultate verbürgt*. Wien, 1887.
- [3] Boncompagni B.: *Tratatti d'Aritmtica publicati da Baldassare Boncompagni. I. Algoritmi de numero indorum. II. Joanni Hispalensis liber algorismi de practica Arismetrice*. Roma, 1857.
- [4] Cauchy A.-L.: *Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques*. Comp. Rendus 11(1840), 431–442
http://mathdoc.emath.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_CAUCHY_1_5.
- [5] Eneström G.: *Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen «Liber algorismi de practica arismetrice»*. Bibliotheca mathematica, série 3, zv. VI, 1905, str. 114.
- [6] Gericke H.: *Mathematik in Antike und Orient*. Fourier Verlag GmbH, Wiesbaden, 2004.
- [7] Holub J., Lyer S.: *Stručný etymologický slovník jazyka českého*. SPN, Praha, 1978.
- [8] Al Chvárizmí: *Aritmetický a algebraický traktát*. Edícia Prameny evropské vzdělanosti, OPS, 2009.
- [9] Jackson J. G.: *Ethiopia and the origin of civilization*. [cit. 7. 6. 2009]
http://www.africawithin.com/jgjackson/jgjackson_ethiopia_and_the_origin.htm.

- [10] Juškevič A. P., Rozenfeld B. A.: *Poznámky k aritmetickému traktátu* (rusky). In Muhammad ibn Musa al-Chorezmi, *Matematické traktáty*, Vydavatel'stvo FAN Uzbekkej SSR, Taškent, 1983.
- [11] Karacuba A. A.: *The complexity of computation*. Proc. Steklov Inst. Math. 211(1995), 169–183.
- [12] Knuth D. E.: *The Art of Computer Programming volume 2: Seminumerical algorithms*. (3rd ed.) Addison-Wesley, Boston etc., 1998.
- [13] Křišťan z Prachatic: *Základy aritmetiky*. Oikoymenh, Praha, 1999 (Edícia latinského textu *Algorismus prosaycus* s českým prekladom, českou a nemeckou úvodnou štúdiou a s poznámkami Z. Silagiovej).
- [14] Kulik J. Ph.: *Neue Multiplikations-Tafeln*. Ein unentbehrliches Hülfsmittel für Jedermann, um schnell, sicher und ohne Ermüdung zu rechnen. Leipzig, 1851, XII + 56 stran.
- [15] Machek, V.: *Etymologický slovník jazyka českého a slovenského*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1957.
- [16] *Ottův slovník naučný*. Praha, 1900.
- [17] Pope Sylvester II, Catholic Encyclopedia.
<http://www.newadvent.org/cathen/14371a.htm> [cit. 8. 6. 2009]
- [18] Porubský Š.: *Peasant Multiplication. Interactive Information Portal for Algorithmic Mathematics*. Institute of Computer Science of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic, web-page
<http://www.cs.cas.cz/portal/AlgoMath/NumberTheory/Arithmetics/Multiplication/PeasantMultiplication.htm>.
- [19] Porubský Š.: *Jakob Phillip Kulik – ein vergessener Rechenkünstler*. In ALGORISMUS 43. *Tagung zur Geschichte der Mathematik* (Roloff H., Weidauer M. (eds.)), Rauner, Augsburg, 2004, 307–328.
- [20] Rejzek J.: *Český etymologický slovník*. Leda, 2008.
- [21] Sarton G.: *Introduction to the History of Science*. Carnegie Institution, Washington, Baltimore, 1927–1948.
- [22] Svoboda A., Valach M.: *Operátorové obvody*. Stroje na zpracování informací 3(1955), 247–295.
- [23] Sýkorová, I.: *Násobení ve středověké Indii*. In Historie matematiky. 29. Mezinárodní konference, Velké Meziříčí, 22. – 26. 8. 2008, 161–165.
- [24] Wikipedia (The free encyclopedia): *Writing* [online]. Posledná revízia 25. mája 2009 o 09:09 [cit. 5. 6. 2009]. http://en.wikipedia.org/wiki/Writing#cite_note-8.

Adresa

Prof. RNDr. Štefan Porubský, DrSc.
Ústav informatiky AV ČR, v.v.i.
Pod Vodárenskou věží 2
182 07 Praha 8 – Libeň
e-mail: porubskys@cs.cas.cz

PARACELSUS A JEHO DÍLO

IVAN SAXL

Abstrakt: The life, ideas and works of Paracelsus as well as some recent activities inspired by him are shortly presented and reviewed.

*Alterius non sit, qui suus esse potest.*¹

1 Úvod

Pozornost věnovaná v současné době Paracelsově osobnosti u nás i v řadě dalších zemí je zcela mimořádná a patrně má smysl se nad ní zamyslet. V Německu, Rakousku a Švýcarsku existují aktivní společnosti věnující se studiu, vydávání a rozborům Paracelsova díla.² Jednotlivým aspektům Paracelsova učení je věnována řada článků i knih, paracelsovskou tematiku obsahují současné doktorské disertace, výstavy věnované Paracelsovi probíhají v Evropě i v Americe a o současném významu celé paracelsovské problematiky jsou pořádána symposia.³

2 Paracelsův život

Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim – Paracelsus⁴ se narodil jako syn Wilhelma Bombasta von Hohenheim⁵ (1493–1541), lékaře místního kláštera ve švýcarském Einsiedelnu. V roce 1502 otec přesídlil na pozvání rodiny Fuggerů do korutanského města Villach, kde byl městským lékařem a učil na hornické škole. Fuggerům patřily stříbrné a měděné doly ve Schwazu a Fuggerau, Paracelsus patrně docházel do důlních laboratoří a zde se seznámil se základy chemického zpracování

Práce vznikla za podpory výzkumného záměru MSM 0021620839 a grantu GAAV IAA100110502.

¹ Kdo může být svůj, ať nepatří jinému. Heslo připisované Paracelsovi vyjadřuje samostatnost nejen osobní, ale i vědeckou, tj. nezávislost na autoritách.

² *DEUTSCHE BOMBASTUS-GESELLSCHAFT* se sídlem v Drážďanech (www.bombastus-ges.de), *Internationale PARACELSUS Gesellschaft (IPG)* v Salzburku (www.paracelsusgesellschaft.at), *Swiss Paracelsus Society* (www.paracelsus-gesellschaft.ch) v Einsiedelnu atd. Společnosti jsou velmi aktivní; drážďanská vydává od roku 1991 *Manuskripte, Thesen, Informationen* (ke stažení na výše uvedené adrese, tč. 26 sešitů), rakouská společnost vydává *Salzburger Beiträge* (obsah na výše uvedené adrese, tč. 41 sešitů, lze objednat e-mailem), švýcarská společnost vydává *Nova Acta Paracelsica* (obsah opět na výše uvedené adrese) atd. Za zmínku stojí také internetový katalog téměř dvou set prací z let 1529–1793, umístěných v knihovně University Glasgow: <http://special.lib.gla.ac.uk/exhibns/paracelsus/index.html>.

³ Např. symposium *The Transformation of Paracelsianism 1500–1800: Alchemy, Chemistry and Medicine*, Glasgow 1993, viz [2].

⁴ Vysvětlení, podle něž Paracelsus znamená „lepší než“ nebo „převyšující“ římského encyklopedistu a lékaře Aulua Cornelie Celsa (asi 25 př. Kr.–50 po Kr.), autora lékařské encyklopedie *De Medicina* (vyšla kolem roku 30 po Kr.), není dostatečně opodstatněné, protože Paracelsus se o Celsovi nezmiňuje a soupeří především s Galénem, Hippokratem a Avicennou. Podle druhého vysvětlení se jedná o řecko-latinský opis slova Hohenheim, podle třetího dohadu je to přízvisko získané ve společnosti přátel a kamarádů při pitkách a jiných společenských událostech. Jméno se objevuje se až po Paracelsově odchodu z Basileje a je jím podepsán nejprve prognostický spis *Practica D. Theophrasti Paracelsi i...* vycházející v roce 1529, a také *Velké ranhojičství* vydané roku 1536 je podepsáno Theophrastus von Hohenheim, zvaný Paracelsus.

⁵ Rodina Bombastů z Hohenheimu pocházela z Württemberska a do roku 1409 jí patřil hrad Hohenheim v blízkosti Stuttgartu (dnes zámek ve městě). V XV. století zchudla, titul však její členové užívali dále včetně Paracelsova otce, přestože byl nemanželského původu.

rud. V letech 1509–1511 začal studovat chemii a lékařství ve Vídni (nebo v Basileji?), ale bakalářský titul asi nezískal. Léta 1513–1516 tráví studiem ve Ferrafe, zda však získal nějakou akademickou hodnost, není bezpečně známo.⁶ V letech 1517 až 1524 se účastnil řady válek v Nizozemí, Skandinávii, Prusku, jižním Rusku a také v zemích pod benátským vlivem; v roce 1522 byl vojenským chirurgem v benátských službách. V pozdějších letech se pokouší vybudovat si lékařskou praxi v různých městech jižního Německa a Švýcarska, až se mu to podaří ve Štrasburku v letech 1526–1527. Jeho úspěšná praxe měla za následek pozvání do Basileje v roce 1527, zřejmě také díky přímluvě Johanna Froben⁷, Erasma Rotterdamského a vlivných měšťanů Amerbachových.⁸ Paracelsus přijímá nabídku městské rady stát se městským lékařem s právem vyučovat na universitě. Protože se však odmítl účastnit povinné veřejné disputace a nepředložil žádné diplomy, přístup na universitu mu byl odepřen. Proto pořádal veřejné přednášky (v němčině!) a kritizoval současné lékařské názory. Tím vyvolal obecný odpor mezi lékaři a lékárníky a po smrti svého příznivce Froben⁷ byl nucen Basilej opustit. Poté až do své smrti cestuje po Evropě a je všeobecně uznáván jako lékař a spisovatel.

V letech 1537 až 1538 žil v Moravském Krumlově.⁹ Umírá (snad na rakovinu nebo cirhózu jater) roku 1541 v Salcburku, kam jej pozval místní biskup; podle některých (patrně sporných) pramenů byl otráven svými nepřáteli. O jeho životě existuje nepřetržitě množství materiálů různým způsobem se vyrovnávajících se skutečnostem, že hlavním zpravodajem byl Paracelsus sám ve svých spisech a že lze obtížně určit, co je pravda a co osobní propagace či posmrtný dohad. Doporučit lze především knihu [5], která je poměrně stručná a v níž jsou různé všeobecně kolující údaje nejen uvedeny, ale zároveň je posouzena i jejich důvěryhodnost. Podrobnou studii Paracelsova života, učení a celé tehdejší doby je kniha [1].

⁶ Za svého pobytu ve Štrasburku v roce 1526 byl členem cechu obchodníků s obilím, mlynářů, výrobců škrobu a ranhojičů. Středověké cechy často zahrnovaly velmi rozmanitá povolání, např. Froben byl v Basileji členem *šafránového cechu* sdružujícího obchodníky s kořením a tiskaře.

⁷ Johann Froben (1466–1527), basilejský nakladatel a průkopník knihtisku, zvláště kursivního tisku a kapesních vydání. Vydával touto formou Lutherův německý překlad Nového zákona i bibli, což přispělo k jejich značnému rozšíření; zatímco kolem roku 1480 odpovídala cena bible dvěma měsíčním výdělkům řemeslníka, po roce 1520 ji bylo možno počítat za cenu dvou králíků. Paracelsus Froben⁷ úspěšně léčil.

⁸ Významná basilejská rodina, jejíž zakladatel Johannes Amerbach (1443–1513), tiskař a nakladatel, patřil k vedoucím osobnostem rozvíjející se renesanční vzdělanosti. Jeho společníkem a pokračovatelem byl Johann Froben, spolu s Amerbachovými syny Brunem a Basilem. Slavné je jejich devítisvazkové vydání *Opera omnia* sv. Jeronýma (asi 347–asi 420), dokončené roku 1516 za spoluúčasti Erasma Rotterdamského.

⁹ Když v roce 1536 pobýval v Augsburgu, navštívil jej Václav ze Žerotína a požádal o vyšetření. Paracelsus se ujal léčení Žerotínovy dny, následků mrtvice a zánětu pohrudnice. Když následujícího roku onemocněl Jan z Lipé, pán na Moravském Krumlově, a jeho lékaři mu nemohli pomoci, obrátil se na radu pána ze Žerotína na Paracelsa a ten přijel v dubnu 1537 na moravskokrumlovský zámek. Léčení pána z Lipé nebylo snadné, snad se jednalo o malárii se zvětšením sleziny a vodnatelností, žaludeční potíže a žlučníkovou koliku. O Paracelsově léčbě se zachovaly podrobné záznamy, stav pána z Lipé se zlepšil a dokonce Paracelsa přežil. Paracelsus v Moravském Krumlově dokončil *Astronomia Magna oder Philosophia Sagax* a zanechal spis *Konsilium*. Jeho náhlý odjezd po šesti měsících úspěšného léčení Jana z Lipé je vysvětlován krizí související s Paracelsovým léčením manželky Jana III. ze Žerotína na Strážnici, nejvyššího moravského komořího. Po použití jeho léku Jana z Pernštejna zemřela. Poté Paracelsus odjel v září do Bratislavy a do Vídně. Koncem července roku 1530 vyšel první a brzy na to druhý díl učebnice chirurgie *Die grosse Wundartznei*. Marň se pokoušel o vydání trojdílného spisu *O Francouzích* (o syfilidě), v němž propagoval léčbu rtutí.

(Podle [7] a stránky http://www.knihovnazn.cz/index.php?option=com_content&task=view&id=1052&Itemid= Městské knihovny v Moravském Krumlově pro listopad 2008.)

3 Paracelsovo dílo

Navzdory téměř pětisetletému úsilí není Paracelsovo dílo stále kompletně známé a uspořádané nebo v nějaké formě vydané. Patrně první tištěný text je několikastránkový pamflet *Practica D. Theophrasti Paracelsi, gemacht auff Europen, anzufahen in dem nechstkunfftigen Dreyssigsten Jar, Biß auff das Vier und Dreyssigst nachvolgend* z roku 1529. *Von der Frantzösischen krankheit Drey Bücher* vychází v Norimberku v roce 1530, avšak pouze dva díly. Dále ještě za Paracelsova života snad vyšlo *Die grossenn Wundatrzney* [Velké ranhojičství] v Aušpurku a Frankfurtu v roce 1536, *Vom Holz Guaico* (1529), *Vonn dem Bad Pfeffers in Oberschwytz gelegen* (1535) a *Prognostications* (1536). V roce 1559 je Paracelsus katolickou církví prohlášen za kacíře a celé jeho dílo zařazeno do seznamu *Libri prohibiti*. V čase reformace to však mnoho neznamenal a jeho díla vydávají Švýcar Adam z Bodensteinu (1528–1577), Belgičan Gerhard Dorn (asi 1530–1584) a Němec Michael Toxites (1515–1581). Spolu s Paracelsovým dílem vydávají knihy výkladů jeho prací pod názvem *Onomastica* (Dorn 1583) a *Onomastica Theophrasti* (Bodenstein 1575). Především však v roce 1585 pověřuje kolínský arcibiskup Arnošt Johanna Husera (kolem 1545–1600) posbíráním všech Paracelsových prací. Výsledky své práce Huser vydal v letech 1589–1591 v jedenácti svazcích, které jsou obecně považovány za nejlepší vydání (jeho celkový rozsah je přibližně 2600 stran). Je však třeba poznamenat, že původnost mnoha knih připisovaných Paracelsovi je problematická. Jistou část svého díla napsal sám, často však po nocích diktoval svým žákům a pomocníkům; podle jejich tvrzení nezřídka nikoliv střízlivý. Písemné materiály rovněž zanechával v místech svého pobytu, která musel často spěšně opouštět, protože mu hrozilo zatčení.

V roce 1998 byl na Universität Zürich ve spolupráci s Institut für Geschichte der Medizin zahájen *Das Zürcher Paracelsus-Projekt* s cílem shromáždit důležité (především teologické) Paracelsovy rukopisy a zpřístupnit je na Internetu, kde jsou již nyní vystavena vybraná díla z Huserovy edice (http://www.paracelsus.uzh.ch/index_g.html). Projekt navazuje na edici vydávanou Kurtem Goldammerem v letech 1952–1986; z plánovaných 12 až 14 svazků jich vyšlo jen 6. Obsahují komentáře ke Starému zákonu a k žalmům, traktáty o společenské etice, mateřství, křtu a náboženských dogmatech. Zároveň je průběžně zpracováván *Das Paracelsus Lexikon* se současnými překlady Paracelsových švýcarsko-německých výrazů.

Vynikající stručnou studii Paracelsova díla je stať Carla Gustava Junga, napsaná u příležitosti pětisetletého výročí jeho smrti a posléze podstatně rozšířená (obě práce jsou společně publikovány v [4]). Je zde zdůrazněn zvláštní rozpor mezi Paracelsovou věrností tradičním církevním pravdám (nikdy se nepřiklonil k Lutherovu učení) a jeho vysoce kritickým přístupem k tehdejšímu lékařství (byl nazýván Lutherem lékařství); Jung poznamenává, že by patrně stejně tvrdě kritizoval i naše současné lékařské doktriny. Z knihy *Paragranum* jsou v [4, české vydání str. 17, 19] uvedeny následující citáty:

Takže co je to lékařovo umění? To, že ví, co je nevnímateľným věcem užitečné a co protivné, co je příjemné a co nepříjemné beluis marinis [mořským obludám], co rybám a co zvířatům, co je pro ně zdravé a co nezdravé – to je umění, jež se týká přirozených věcí ...

Dále Paracelsus uvádí, že lékař se musí učit ze všeho, co kolem sebe vidí, z přírodních jevů, i těch, které s člověkem nesouvisejí.

A když nevědí, co dělá měď a co rodí vitriolata, nevědí ani z čeho je malomocenství. A když nevědí, co dělá rez na železe, nevědí ani, co dělá vředy;

a když nevědí, co dělá zemětřás, nevědí ani, co chladné bolesti. Vnější věci ukazují, co způsobuje lidské nemoci, člověk sám neukazuje svoje nemoci nejlíp.

Citáty vystihují základní Paracelsovu myšlenku příbuznosti všeho reálně existujícího; není u něj žádné dělení (je ostatně oprávněné?) na organický a anorganický svět. Jeho podpora alchymie se opírá o známé a neomezené možnosti změn: jestliže kyseliny mění kovy v soli, železo může rezavět a naše tělo komplikovaně zpracovává nejrůznější potravu a dovede si z ní brát, co potřebuje, pak se také železo může změnit ve zlato (i když tento cíl tehdejší alchymie jej vůbec nezajímal). Paracelsův svět je daleko širší než to, co je hmatatelné. Patří do něj i celý kosmos, neboť „*ruka, která oddělila světlo a tmu, a ruka, co stvořila nebesa i zemi, udělala i dole v mikrokosmu: vzala shora a uzavřela do kůže člověka všechno, co nebe obsahuje. A tak je v nás vnější nebe ukazatelem nebe vnitřního.*“

Z těchto základních Paracelsových myšlenek vyplývají jeho díla věnovaná lékařství. Lékař musí být kromě alchymisty a astrologa také filosofem, ovšem ve specifickém pojetí filosofie, která je podle Paracelsa poznáním přírody, vlivů v ní skrytých a také sil a vlastností všech věcí na zemi i ve vodě. Velmi důležitá je také „ctnost“, pod níž se rozumí souhrn lékařských znalostí. Základem lékařství je však „láska“, tj. úzký vztah k pacientovi, snaha jej pochopit a uzdravit.

3.1 Paracelsovo lékařství

Lékařská praxe v době Paracelsové byla převážně založena na hippokratovsko-galénovské humorální patologii¹⁰, podle níž jsou nemoci způsobeny poruchami v rovnováze mezi základními kapalinami v lidském těle a jejich špatným mísením (diskrasie, porucha charakterizovaná přítomností monoklonálního imunoglobulinu v krevním séru a moči). Léčení spočívalo v ustavení porušené rovnováhy klystýry, projímadly, pouštěním žilou, teplými a studenými zábaly apod. Nemoc byla považována za objektivně resp. materiálně zjištělnou a tak také léčitelnou. Za takovou ji považovala i podstatně pokročilejší medicína Avicennova. O Paracelsových postupech v jeho vlastní léčebné praxi existuje jen velmi málo pramenů; podle nich bylo spíše konvenční a nevyhýbalo se ani postupům a doporučením humorální patologie. Nicméně dosahoval dobrých výsledků tam, kde jiní lékaři neuspěli a získal pověst zázračného lékaře. Hlavním zdrojem jeho názorů jsou nicméně pouze jeho spisy. Velmi podrobnou a současnou studii Paracelsových lékařských idejí zaměřenou na široký okruh čtenářů je kniha [6].

Paracelsus zastával názor, že nerovnováha šťáv je až důsledkem skutečných příčin choroby – pěti jsoucenců – *entií*, z nichž každá je schopna vyvolat libovolnou chorobu, takže máme pět morů, pět chřipek atd.; nemoci jsou stejné, ale příčiny různé. Entie objektivně existují a mají neomezenou moc nad tělem, jejich soulad je zdraví, nesoulad nemoc. První entie je *ens astrale*, představující sílu a povahu hvězd a jejich vládu nad tělem. Další je *ens venenis*, způsobující otravu organismu vyvolanou způsobem našeho života a jedovatými látkami, toxiny, které jsou přítomny v každé potravě. Naše orgány jsou schopny je přeměňovat v látky neškodné, ale tuto schopnost mohou částečně ztratit a pak podle Paracelsa dochází k otravě, kterou nazývá *vnitřním hnitím*. Třetí entie je *ens*

¹⁰ Humorální patologie je jedna z prvních ucelených koncepcí medicíny, vytvořená Hippokratem. Rozlišovaly se podle ní čtyři tělesné tekutiny (šťávy): krev, žlutá žluč, černá žluč (tj. sražená krev) a hlen. Dodnes se užívá označení lidských povah odvozených od těchto šťáv: cholerik (řec. *chole* žluč), sanguinik (lat. *sanguis* krev), melancholik (řec. *melaina chole* černá žluč) a flegmatik (řec. *flegma* hlen). (Podle *Velkého lékařského slovníku On-line*: <http://lekarske.slovníky.cz/>.)

naturale, při níž je důvodem choroby běžná činnost konkrétního těla, které se samo poškozuje (dnes bychom řekli, že příčiny jsou genetické). Poslední dvě entie jsou povahy duchovní. *Ens spirituale* odpovídá působení duchů nejrůznějšího typu, psychosociálním a psychosomatickým vlivům a také na ni může působit magie. Čtyři vyjmenované entie nazýval Paracelsus pohanskými, protože se uplatňují u lidí všech vyznání. *Ens dei* však působí pouze na křesťany; je způsobena jejich Bohem, který na ně posílá nemoc jako formu očistění a pokání, díky níž se jejich duše kultivují.

Z Paracelsových představ o příčinách chorob vyplývají jeho požadavky na léčebné postupy. Chorobu je třeba léčit podle jejích příčin, nikoliv podle vnějších příznaků. Nemoc způsobenou hvězdnými vlivy nebo Božím záměrem nemá smysl léčit materiálními přípravky, duchovné prostředky jsou naopak neúčinné u chorob vyplývajících z tělesného ustrojení (*ens naturale*) či otravy (*ens venena*). Tělo je schopno se léčit samo a choroba vzniká, když *vnitřní lékař* je v koncích. Odtud Paracelsův výrok:

Je-li ochráněna přirozenost, pak je to ona sama, kdo léčí všechny nemoci, neboť dobře ví, jak na to. Lékař to vědět nemůže, a proto jeho úloha spočívá jedině v tom, že tuto přirozenost ochraňuje.

Základem léčby je pět pilířů: profylaxe (preventivní ochrana před určitou nemocí), regenerace, přivedení životní energie (zvláště u *ens astrale*), odstranění jedu z těla a obnovení porušené látkové výměny (u *ens venena*), léčení stavu těla a psychiky (u *ens naturale*) a sebeuvědomění pacienta (*ens dei*).

Další pravidla pro lékaře jsou celoživotní studium, respekt před věděním druhých, vlastní dobrá životospráva a ze všech nejdůležitější je zkušenost, kterou se rozumí znalost toho, co je ověřeno. K ní pak vede sedm cest: i) poslušnost hlasu vyšších bytostí (přicházejí samy a my je vnímáme jako své myšlenky, nápady či obavy), ii) pozornost k mínění ostatních s vědomím, že může být chybné, iii) vlastní zkušenost s vědomím, že je náhodná, iv) pozornost k vnuknutím od vyšších bytostí s vědomím, že sice vědí, ale rády klamou. Poslední tři cesty jsou tzv. *signatury*: v) chiromantie, vi) rozbor a pochopení fysiognomie pacienta, vii) tvarové vyjádření jeho substance. Konečně čtyřmi pilíři lékařského učení jsou filosofie, astronomie (přesněji astrologie), alchymie a „ctnost“, již se rozumí lékařova vysoká zručnost a integrita myšlení.

3.2 Paracelsova alchymie¹¹

Evropská alchymie byla v XV. století pod silným arabským vlivem. Složení všech látek bylo považováno za výsledek kombinace dvou principů: síry představující hořlavost a sestávající z ohně a vzduchu, a rtuti reprezentující tavitelnost a zahrnující vodu a zemi. Síra je zobrazována jako Slunce a vedle ohně obsahuje také mužský princip. Rtuť má svůj obraz v Luně a odpovídá jí ženský princip a živel vody. Vzácnost kovu je dána poměrem obou těchto komponent, který nabývá ideální hodnoty ve zlatu. Tuto teorii Paracelsus narušuje svou představou o třech rozhodujících složkách: k síře a rtuti přidává ještě sůl resp solí obohacenou „minerální“ vodu. Sůl u něj označuje vše pevné a nehořlavé. V českém vydání Pokladu alchymistů (viz Dodatek B) pak čteme:

všichni filosofové přede mnou vyslali své šípy, avšak daleko se odchýlili od terče pravdy, neboť se domnívali, že rtuť a síra jsou matkami všech kovů. O něčem třetím se jim nezdálo ani ve snu. Tvrdím, že v tomto nerostu se nalézají tři

¹¹ Etymologie slova alchymie je nejasná; do Evropy se dostalo z arabského světa jako *al-kímijá*, *al* je větný člen a na *kímijá* se snad podílelo řecké slovo *χημα*, tj. lít či slévat, a egyptské *kem* (chem) – černý.

podstaty a látky, totiž rtuť, síra a minerální voda, kterou tyto látky jsou od přírody vázány k sobě.

Paracelsův příspěvek k praktické alchymii se týká především jejích tehdejších farmaceutických aplikací. V nich se jedná zejména o oddělení účinných látek od nečistot; Paracelsus zavádí termín *spagyrie*, kombinující řecké *σπάω* (oddalovat) a *σύνω* (spojovat) a zahrnující extrakci, sublimaci a destilaci. Hojně užívá také termínů *iatrochemie* (využití chemie lékařem) a *chemiatrie* (chemie produkující léčiva). Všechny tyto procesy byly ovšem známy v řecké i rané arabské alchymii, Paracelsovou zásluhou je však jejich intenzivní propagace ve farmacii, zatímco transmutaci neušlechtilých kovů v ušlechtilé kritizuje.¹² Paracelsus mezi léčebné prostředky zahrnuje i různé jedy, přičemž vychází z myšlenky, že jedem může být cokoliv, jestliže organizmu konkrétního pacienta škodí, a zároveň záleží na dávce, takže např. sůl je nezbytná, ale jen v omezených dávkách. Slavný je jeho výrok:

Všechny věci jsou jed a nic není bez jedu; pouze dávka způsobuje, že věc nepůsobí jako jed....

3.3 Výběr z Paracelsových spisů

3.3.1 Díla publikovaná za Paracelsova života

Vom Holz Guaico. ???, 1529.

Wunderbarer unnd mercklicher Geschichten, so in vier Jaren nach einander, Biß man zelet M. D. unnd XXXIII. Jar zukünfftig. Prognostication. Theophrasti Paracelsi. Egenolff, Straßburg, 1530.

Ußlegung de Commeten erschynen im Hochbirg, zü mitlem Augsten, anno 1531. Zürich, 1531.

Die große Wundartzney [Velké ranhojičství]. Ulm, 1536 (Hans Varnier); Augsburg (Haynrich Stayner), 1536; Frankfurt/ M. (Georg Raben/ Weygand Hanen), 1536.

Vonn dem Bad Pfeffers in Oberschwytz gelegen, Curych, 1535.

3.3.2 Díla publikovaná posmrtně

Das Büch Paragranum. Christian Egenolffs Erben, Franckfurt am Meyn, 1565.

Opus Paramirum, (napsáno 1531).

Wundt unnd Leibartznei. Frankfurt/ M., 1549 (Christian Egenolff); 1555 (Christian Egenolff); 1561 (Chr. Egenolff Erben).

Von der Wundartzney: Ph. Theophrasti von Hohenheim, beyder Artzney Doctoris, 4 Bücher. (Peter Perna), 1577.

Von den Krankheiten so die Vernunft Berauben. Basel, 1567.

Kleine Wundartzney. Basel (Peter Perna), 1579.

Opus Chirurgicum. Bodenstein. Basel, 1581.

Huser quart edition (medicinal and philosophical treatises). Basel, 1589.

Chirurgical works. (Huser), Basel, 1591 und 1605 (Zetzner).

Kleine Wund-Artzney. Straßburg (Ledertz), 1608.

Opera omnia medico-chemico-chirurgica. Genevae, 1658.

Philosophia magna, tractus aliquot. Köln, 1567.

Philosophiae et Medicinae utriusque compendium. Basel, 1568.

Liber de Nymphis, sylphis, pygmaeis et salamandris et de caeteris spiritibus. 1566?

¹² V knize *Paragranum* Paracelsus píše: „Není to tak, jak se říká, že alchymie má získávat zlato a stříbro: tady se jedná o to: vyráběj arkána [tj. co nejčistší léky] a směřuj je proti nemocem; tedy je třeba se ubírat, to je ten základ.“

3.3.3 České překlady Paracelsa

Filosofie okultní. Praha, 1932 (nové vydání Trigon, Praha, 1990).

Thesaurus Thesaurorum Alchymistarum tj. Poklad alchymistů. Universalia, společnost československých hermetiků v Praze, 1936 (též jako jeden z textů v publikaci *Pět traktátů*, vydané nakladatelstvím Trigon, Praha, 1986).

Podivuhodné proroctví o papežství. Půdorys, Praha, 1994.

Archidoxa magica aneb Základy magie. Trigon, Praha, 2001.¹³

Elementární bytosti. Dobra, Praha, 2001.

Azoth – o stromu neboli linii života. Půdorys, Praha, 2007.

4 Závěr

V roce 1993 bylo na Universitě v Glasgow pořádáno výše zmíněné symposium (viz pozn. 3) věnované Paracelsovi a dílům jeho interpretů v následných stoletích. Jeho výsledky shrnuje kniha [6].¹⁴ Rozsáhlé dílo, zahrnující tematiku lékařskou, alchymickou, filosofickou, sociální a náboženskou¹⁵, navíc značně kontroverzní, napsané s vášnivostí, neukázněností a názorovou proměnlivostí pro autora typickou, nebylo za jeho života z velké části publikováno a následné edice vycházely z porůznu zanechaných rukopisů. Díky těmto rysům je Paracelsovo dílo mimořádně otevřené nejrozličnějším, pozitivním i negativním interpretacím autorů, vyjadřujících do značné míry především své vlastní názory. Paracelsova osobnost i jeho dílo se tak stávají historickými konstrukcemi, z nichž je obtížné určit, co je původní a co smýslenka. Nesporným však zůstává Paracelsův vliv přetrvávající až do dnešní doby a uplatňující se v nejrozličnějších duchovních hnutích od nábožensko-sociálních přes mystiku až po psychosomatické odvětví lékařství, hledající souvislosti mezi mikrokosmem a makrokosmem. Skutečnost, že Paracelsovo dílo je ještě po pěti stoletích stále živé a inspirující, je nesporně nejvyšším oceněním jeho komplikované a nespoutané osobnosti.

Dodatek A

Konsilium sepsané za pobytu v Moravském Krumlově

Zpráva a sdělení doktora Theophrasta z Hohenheimu jak jednal s blahorodým pánem Janem z Lipé na Moravském Krumlově, nejvyšším dědičným maršálkem království Českého v roce 1537, též životospráva a pořádek, dle kterého se má jeho Milost dále řídit:

Jedná se o čtyři choroby:

- a) předně zimnice (malárie) se zvětšením sleziny a vodnatelku,
- b) za druhé znečištění žaludku a žluče, což vede k břišním kolikám a ochromení končetin,
- c) dále nahromadění táloviny ve střevech, což působí velkou plynatost,
- d) a konečně zacpání jater a porušení moče.

Vaše Milost je od přirozenosti zdravého založení, v němž horkokrevnost je ve správném poměru s chladnokrevností, avšak i dobrou komplexi možno zkazit nevhodnými pokrmy, nečasným uléháním, nebo dlouhým vyspáváním za dne a brzkým ženěním.

¹³ Podle Huserova komentáře v *Opera omnia medico-chemico-chirurgica*, Genevae 1658, není Paracelsovo autorství jisté.

¹⁴ Recenze knihy byla napsán E. Lundem a je publikována v *Church History* 68(1999), 997–999 (je dostupná na adrese <http://www.jstor.org/stable/3170236>).

¹⁵ Viz plánovanou osmidílnou edici *Die Neue Paracelsus Edition* s jednotlivými díly *Vita Beata – Vom seligen Leben, Natur und Evangelium I–III*, *Gegen Papst Clemens VII, Über die Jungfrau Maria – Briefkommentare*, *Die Predigten I–II*, *Vom Abendmahl – Wandlung zum neuen Menschen* ve spolupráci s Medizinhistorisches Institut und Museum der Universität Zürich (http://www.paracelsus.uzh.ch/theologica/theol_uned.html).

Mládež má býti držena do 24 let od žen a denně cvičit, aby se tělo povyrazilo. Protože tomu zde tak nebylo, vyrostla Vaše Milost ve špatném ovzduší a jelikož nebyla od přírody zrovna nejsilnější a nepořádně spala, jedla a pila, upadla do nemoci.

Je proto nutno zachovati tato pravidla:

1. přesně chodit spát v devět hodin a ráno nezůstávat na lůžku po šesté hodině,
2. po celý den pak se zaměstnávat procházkami, jízdou na koni nebo voze a vyhýbat se odpolednímu spánku,
3. jíst jen o desáté hodině a v půl šesté navečer maso mladé, ne tučné, proto ne hovězí ani vepřové, bez koření s výjimkou šafránu, skořice a květu muškátového ořechu a vše jen mírně soleno,
4. k pití je nejlepší staré víno, červené i bílé, ne silné, řidčeji pivo,
5. každých čtrnáct dní brátí potní lázeň a každý měsíc pouštět žilou na zádech na dvě baňky, v květnu a na podzim na noze ve znamení Vozu, Berana nebo ubývajícího měsíce.

Pro zachování zdraví je dále nejpřednější, aby se Jeho Milost zdržovala rok nebo během léta a zimy od žen. Jen tak lze zase nabýti životní síly a odvrhnouti slabé přirození, které bylo příčinou všech nemocí. Důvěřuji se v Boha, že jsem se o Vás postaral a dolehne-li opět něco na Vás, dejte mi zprávu a já chci slušně a čestně léčení dokončit.

Nyní se však chci s Vámi rozloučit a s Vaším dovolením dále cestovat. Jestliže mě Vídeň vlídně nepřijme, budu hledět delší čas u Vás zůstat.

Z Vašich služeb provždy nerozlučný: Aureolus Theophrastus von Hohenheim“

(http://www.knihovnazn.cz/index.php?option=com_content&task=view&id=1529&Itemid=212)

Dodatek B

Thesaurus Thesaurorum Alchymistarum to jest POKLAD ALCHYMISTŮ Filipa Theofrasta Bombasta řečeného Paracelsa Velikého

Příroda plodí nerosty v útrokách země. Těchto nerostů jsou dva druhy. Nalézají se na četných místech Evropy. Nejlepší z oněch, které se mi kdy dostaly do ruky, a jež jsem při svých pokusech shledal zvláště výborným, nalézá se na obraze makrokosmu ve východní hvězdě sféry sluneční. Druhý, na jižní hvězdě, jest teprve v prvním květu. Protlačují jej zemské útroby svým povrchem a při svém prvním roztavení jeví se býti rudým. V něm jsou ztajeny všechny barvy a květy nerostů. O tomto nerostu Filosofové mnoho napsali. Je povahy chladné, vlhké a odpovídá vodnímu živlu. Co se týče samotného poznání a zkoumání, všichni filosofové přede mnou vyslali své šípy, avšak daleko se odchýlili od terče pravdy, neboť se domnívali, že rtuť a síra jsou matkami všech kovů. O něčem třetím se jim nezdálo ani ve snu. A přece rozložíme-li spagyricky vodu, jasně se nám ukáže pravda, kterou ovšem ani Galenus, ani Avicenna nepoznali.

Kdybych však měl podávati na způsob našich vynikajících fysiků pouze jména a složení, způsob jeho rozkládání a tavení, jak si počínala na počátku světa Příroda při růstu svých částí, nestačil by mi rok k ústnímu výkladu a kdybych chtěl podati výklad písemný, stoh knih by mi nepostačoval.

Tvrdím, že v tomto nerostu se nalézají tři podstaty a látky, totiž rtuť, síra a minerální voda, kterou tyto látky jsou od přírody vázány k sobě. Spagyrickým uměním jest možno ji oddělit od vlastního suchého jádra, ovšem jen tehdy, když dozraje v pravý svůj podzim tak jako plod na stromě. Strom obsahuje plod již v sobě a dovolí-li Příroda a hvězdy nebeské, vyžene strom v březnu lístky, pak vyrazí pupeny a po jejich prasknutí objeví se květ; tak vše postupuje až k dozrání plodu na podzim stromu. Právě tak jest tomu i u nerostů. Tyto stejně tak tlačí se z útroby zemských. Na to musí jmenovitě pamatovati alchymisté, kteří hledají poklad pokladů. Abych jim ukázal cestu, popíši v tomto pojednání počátek, střed i konec díla, vodu jemu vlastní, síru i balsám. Rozkladem a tavením těchto tří vyvine se hmota jediná.

O cinabaritu.

Vezmi cinabarit a takto jej připrav: Vař jej v dešťové vodě v kamenné nádobě po tři hodiny; pak jej pečlivě očisti a rozpust' v lučavce královské, která budiž složena z jednoho dílu kyseliny sírové, ledku draselnatého a čpavku, nebo z kyseliny sírové, ledku draselnatého, hliníku a soli. Destiluj pak alembíkem a po druhé přelij. Dbej, aby čisté od nečistého se oddělilo. Po dobu jednoho měsíce dej všemu kvasiti v koňském hnoji. Potom sloučeninu takto rozkládej: dovolí-li příznivé znamení, destiluj ji alembíkem při ohni prvního stupně. Tím vyprchá voda a vzduch a v nádobě zůstane oheň a země. Potom po druhé tyto živly spoj a dej, aby se pražily v ohni. Tak po druhé zmizí voda a vzduch. Rovněž zmizí i živel ohnivý, což ostatně i zkušeným artistům bylo známo. Na dně nádoby zbyde země. Tehdy nalezněš tam to, co mnozí hledali, avšak co jen někteří našli.

Tuto mrtvou zemi v hmoždýři dovedně zpracuj a pak ji zahřívaj na ohni prvního stupně po pět dní a pět nocí. Když jsi to vykonal, udržuj oheň na druhém stupni a stejně postupuj po tolikéž dní a nocí. Konečně nalezněš prchavou sůl, tak jako jemný alkal, obsahující astrům ohně i země. Tento smíchej s dříve uschovanými látkami, odpovídajícími živlu vodnímu a vzdušnému. Po druhé vlož do popele na 8 dní a nocí, abys našel to, čeho mnozí artisté zanedbali. Jak je ti dobře známo, pak vše spagyricky rozlož a nalezněš bílou zemi, ze které byla vytažena její tinktura. Pak slučuj ohnivý živel a zemské soli a vše rozlož v pelikánu v essenci. Tak vznikne ti opět země, kterou opět musíš rozložit.

O rudém lvu.

Pak vezmi Lva zpracovaného v pelikánu. Nalezne se tehdy po prvé, jakmile jsi uviděl jeho tinkturu, když oheň stál nad vodou, vzduchem a zemí. Třením odděl ji od nejspodnějšího a tak budeš mít pitné zlato. To oslad' přilítím vinného alkoholu a destiluj alembíkem tak dlouho, až shleďáš, že nezbylo ostré chuti po lučavce královské. Tento sluneční olej uzavři za vhodného znamení hermeticky do své retorty. Odlož ji k vykvašení tak, aby se vypařil a zdvojnásobil ve svém stupni. Potom takto uzavřenou nádobu vlož na studené místo. Tímto počinem se nerozloží, nýbrž ztválí. Po druhé odlož k vykvašení a slití; to vše opakuji asi třikráte. Sluneční tinktura bude tím ve svém stupni hotova. Ušchovej ji na vhodném místě.

O zeleném lvu.

Po druhé vezmi k dokonalosti připravený vitriol Venušin a přidej z dřívějšíka uschovaný živel vodní a vzdušný. Rozlož a jak jsem řekl, zaveď kvašení na jeden měsíc. Po skončení kvašení vyčkej znamení živlů. Rozlož a ihned uztříš dvě barvy, bílou a rudou. Rudá bude bílou převyšovati. Rudá tinktura vitriolová je tak mocná, že všechna bílá tělesa dotykem promění v rudé, anebo rudá tělesa všechna vybělí, což je podivuhodné.

Praž tuto tinkturu v retortě a uvidíš vycházeti černou hmotu. Tuto opět zpracuj v retortě a tolikrát opakuj, dokud zbývá bílá. Spěchej, avšak nezoufej nad dílem. Pracuj dokud nenalezněš pravého, jasného, zeleného Lva, o němž poznáš, že jest těžký a mohutný. Tato tinktura jest ryzím zlatem. Uvidíš, že znaky tohoto Zeleného Lva jsou podivuhodné, takže žádný poklad Lva římského jej nemůže koupiti. Dobře tomu, kdo jej dovede nalézt a jeho tinktury nabýti.

Toto jest pravý a výtečný balsám, balsám nebeských hvězd, který tělu nedovoluje shnít, takže se v něm nemůže zakořeniti lepra, podagra a vodnatelnost. Podává se v dávce jednoho gránu po vykvašení se síranem zlata.

Ach, Karle Germáne, kde je tvůj poklad, kde jsou tvoji fysikové, kde tvoji učenci, kde jsou kuchaři dřeva, kteří umějí pouze čistiti a rozpouštět! I tvoje nebe je převrácené, tvoje hvězdy opouštějí dráhu a zabloudily na okraj bažin, neboť tvé oči jsou oslepeny vředy a věcmi na pohled krásnými a příhodnými. A což, kdyby tvoji artisté věděli, že Galenus, kníže (jak nikoho jiného nenazývají), vězí v pekle, odkud mně poslal dopis! Pak by se znamenali křížem a smáli by se sami sobě! Podobně i Avicenna sedí v předsíni brány pekelné, ten

Avicenna, s kterým jsem rozmlouval o svém pitném zlatu, o tinktuře filosofů, o mithridatiku a theriakku.

Ach, vy hipokratovci, kteří jste pohrdali pravdou skutečného lékaře, který byl poučen přírodou a osvícen samým Bohem. Nuže, dejte pozor a poslyšte, vy, kteří pohrdáte autoritou nejvyšších míst. Po mé smrti vytáhnou moji žáci vás na světlo, vás hipokratovce i s vašimi černými kuchyněmi a dílnami, v nichž jste ke smrti přivedli knížata a nepřemožitelné šlechtice křesťanského světa! Běda vašim hlavám v den soudný! Já však vím, že moje bude království, moje také čest i sláva. Nechválím se snad sám! Mne chválí sama příroda, ze které jsem se zrodil a kterou také následuji. Příroda zná mne a já znám ji. Uviděl jsem v ní světlo, které je v ní ztajeno a které jsem zkoušel na člověku, a které také nalézám v jeho úrovni. Nyní se však obrátím ke své práci, abych splnil žákům slib, což činím rád, zvláště, jsou-li obeznámeni s přírodním světlem a zkušenosti astrologové a dobří filosofové, neboť filosofie nám poskytuje poznání veškeré přírody. Vezmi 4 díly minerální vody, 2 díly rudé sluneční země, 1 díl sluneční síry, vlož všechno do pelikánu, tluc a asi třikrát rozlož. Tak budeš mít tinkturu alchymistů. O její hodnotě nepiši, neboť to jsem vyložil v knize o „Přeměnách“.

Ten, kdo má unci slunečního astra, má unci tisíce, neboť toto i zlato tinguje.

Máš-li astrum Merkura, můžeš stejně tingovati všechnu obecnou rtuť. Máš-li astrum Venuše, podobně může tingovati v nejlepší kov všechnu obecnou měď. Toto vše je dokázané a jisté. Totéž se rozumí ovšem i u všech astrech ostatních planet, Saturna, Jupitera, Marta, Luny. Neboť i z těchto dají se připravit tinktury. O tom však zde ničeho nevykládám, poněvadž jsem dosti pověděl o nich v knihách o „Povaze věcí“ a v „Archidoxe“. Tam také jest dostatečně vysvětlena alchymistům prapodstata kovů i nerostů zemských, aby mohli nalézt alchymickou tinkturu.

Dílo alchymické tinktury nemusí býti hotovo v devíti měsících. Můžeš je rychle a neškodně urychlit spagyricky tak, že ve 40 alchymických dnech můžeš extrahovati, exaltovati, kvasiti, fermentovati, v kámen sloučiti a produkovati alchymického Fénixe.

Musíš však věděti, že cinabarit jest létavý orel, jehož křídla bez větru odlétají a nesou fénixe do původního hnízda, kde jest vyživován ohnivým živlem a kde mláďata jeho oči sama vyklouvají. Odtud vynoří se bělost, rozdělená ve své sféře do života a sféry svého srdce, do balsámu svých útrob, jak jest v Kabbale obvyklé.

KONČÍ SE POKLAD ALCHYMISTŮ.

(Toto Paracelsovo dílo po prvé do češtiny přeložené Jaroslavem Novákem, věnuje k novému roku 1936 svým členům a příznivcům Universalia, společnost československých hermetiků v Praze. – Výtisk číslo 231.)

L. Loužecký

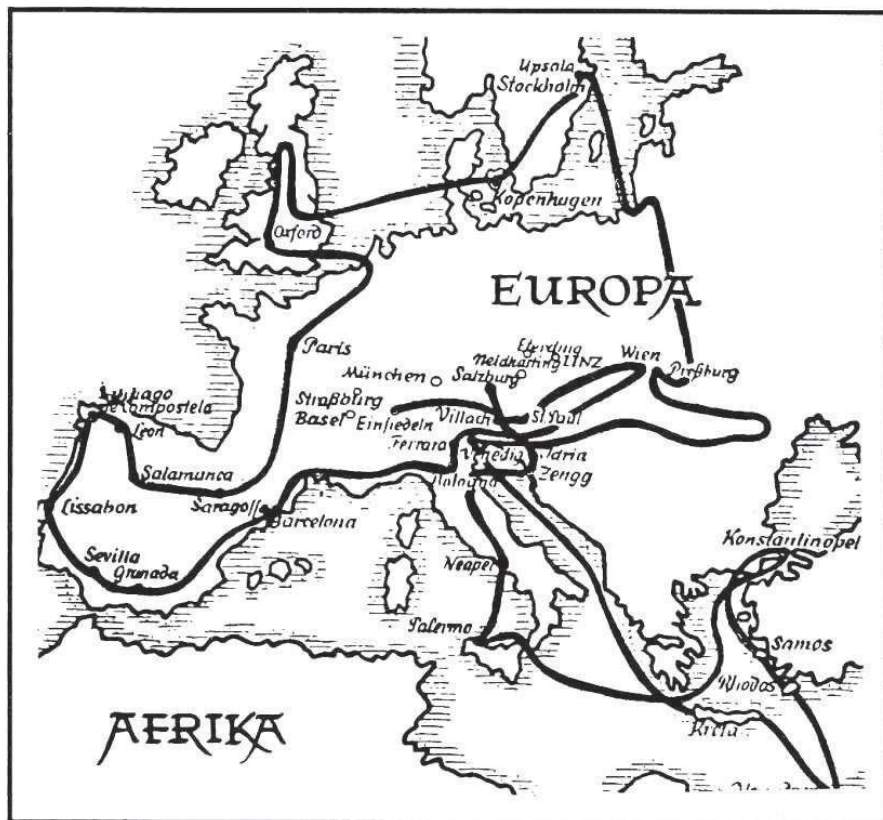
Literatura

- [1] Ball P.: *The Devil's Doctor: Paracelsus and the World of Renaissance Magic and Science*. William Heinemann Ltd., Londýn, 2006. [Český překlad: *Ďáblův doktor*. Academia, Praha, 2009.].
- [2] Grell O. P. (Ed.): *Paracelsus: The Man and His Reputation: His Ideas and Their Transformation*. Studies in the History of Christian Thought, Vol 85. Brill Academic Publishers, Leiden, 1998.
- [3] Haage B. H.: *Alchymie im Mittelalter*. Artemis & Winkler Verlag, Düsseldorf und Zürich, 2000. [Český překlad: *Středověká alchymie*. Vyšehrad, Praha, 2001.].
- [4] Jung C. G.: *Paracelsica. Zwei Vorlesungen über Arzt und Philosophen Theophrastus*. Rascher Verlag, Curych, 1942. [Český překlad: *Paracelsica. Dvě studie o renesančním myslitelci a lékaři*. Vyšehrad, Praha, 2002.].

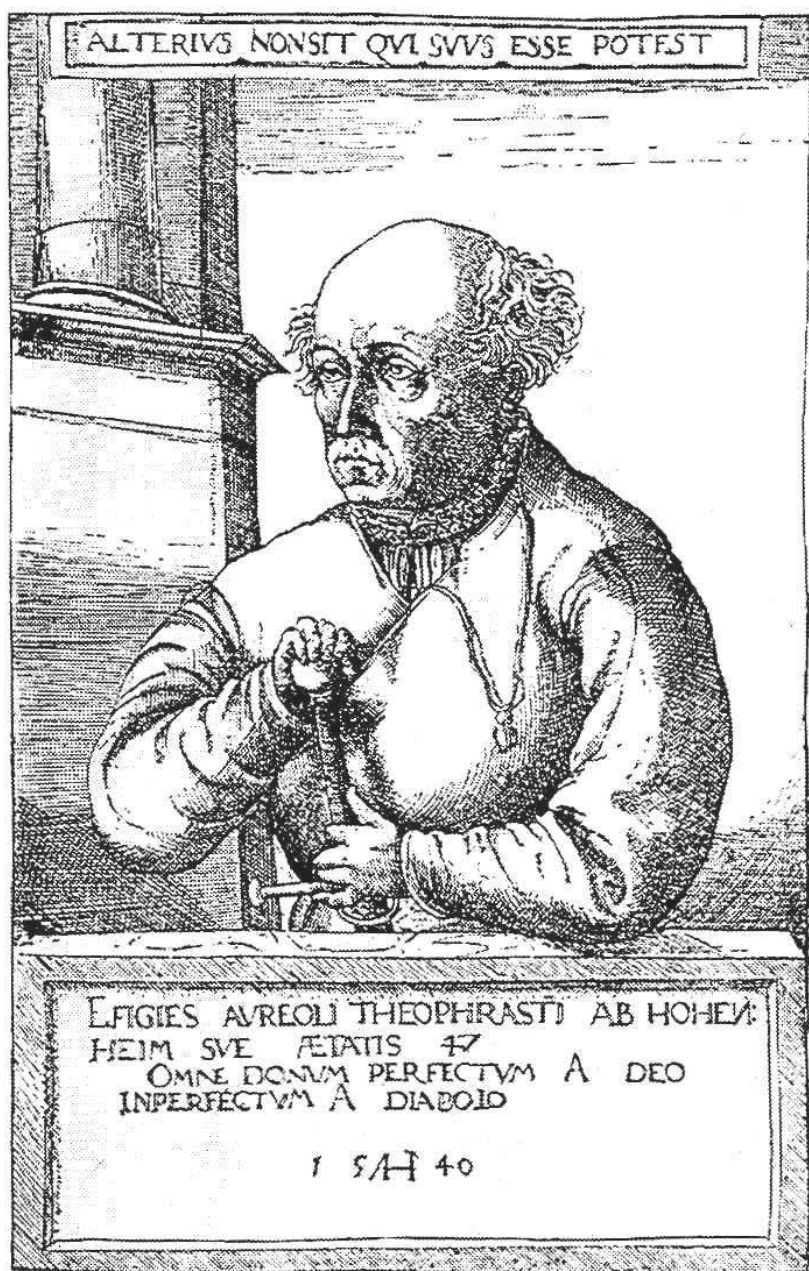
- [5] Kerssenbrock F.: *Der höchste Grund der Arznei ist die Liebe. Leben u. Zeit des Paracelsus*. Styria, Wien, 2005. [Český překlad: *Paracelsus: jeho život a doba*. Ikar, Praha, 2008.]
- [6] Rippe O., Madejsky M., Amann M., Ochsner P., Rättsch Ch.: *Paracelsus Medizin. Alles Wissen in der Heilkunst von heute*. AT Verlag, Farau, 2001. [Český překlad: *Paracelsovo lékařství: filosofie, astrologie, alchymie, léčebné postupy*. Volvox Globator, Praha, 2004.]
- [7] Zapletal V. *Paracelsus a Moravský Krumlov r. 1537: jeho činnost*. 1. vyd. Znojmo, Jihomoravské muzeum, 1966.

Adresa

RNDr. Ivan Saxl, DrSc.
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: saxl@math.cas.cz



Obr. 1 Paracelsovy cesty.



Obr. 2 Paracelsův portrét z roku 1540, údajně od Augustina Hirschvogela (1503–1553), německého grafika, matematika a kartografa.

MATEMATIKA V DOBĚ PARACELSOVĚ

IVAN SAXL

Abstract: The lifes of five mathematicians, Nicolas Chuquet, Étienne de la Roche, Johannes Widmann, Adam Ries and Albrecht Dürer, are described and their main mathematical achievements consisting in writing textbooks of different kind are discussed.

1 Úvod: Evropa v letech 1493 až 1541

Paracelsus¹ žil v letech 1493 až 1541. Byla to doba objevování a kolonizace nových zemí a rozvíjející se třetí renesance², projevující se především ve výtvarném umění a architektuře, ale také doba téměř nepřetržitých válek v Evropě i periodicky se šířících epidemií (intenzita morových onemocnění díky rostoucí imunitě slábne, nejrozšířenější a nejobávanější epidemií se stává varianta syfilis přivezená patrně z Ameriky). V letech 1525–6 probíhají v Německu selské bouře, koncil ve Wormsu (1521) přispívá k rychlejšímu šíření reformace. Dochází také k postupnému utužování nevolnictví a oslabování rytířského stavu, provázenému centralizací vlády a růstem vlivu nejvyšší šlechty.

1.1 Dějiny

Hlavním politickým děním této doby je formování habsburského impéria zahrnujícího podstatnou část západní a střední Evropy.³ Války o království neapolské probíhaly v Itálii po celé XVI. století a účastnily se jich Francie, Španělsko, Benátská republika, přední italské rody, římscí císařové, všichni s proměnlivou podporou papežů. Anglie se za prvních Tudorovců zotavuje z válek dvou růží. Rusko je ještě pod vlivem Tatarů.

První portugalské osady v západní Africe vznikají po roce 1405 a poté jsou systematicky zakládány podél celého pobřeží. Objevení Ameriky roku 1492 zahajuje období zámořských objevů a válek. Roku 1500 zabírají Portugalci také východní pobřeží Jižní Ameriky, Mexiko dobývá F. Cortéz roku 1519, Peru F. Pizarro roku 1532 a Magalhãesova výprava se po prvním obeplutí zeměkoule vrací do Evropy v roce 1522.

1.2 Náboženství, věda a umění

Lutherovým vyhlášením jeho tezí roku 1517 začíná reformace a následuje řada církevních i císařských pokusů o potlačení či smír končící až roku 1555 augšpurským mírem v říši podle zásady *cuius regio, eius religio*. Mezitím přijímá reformaci Švédsko (1527) a Dánsko (1537), anglikánská církev vzniká roku 1534, roku 1541 se do Ženevy

Práce vznikla za podpory výzkumného záměru MSM 0021620839 a grantu GAAV IAA100110502.

¹ Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim, zvaný Paracelsus (1493–1541), lékař, alchymista, mystik a spisovatel.

² První renesance, tj. intenzivní poznávání a studium antické vědy a kultury, nastává v době Karla Velikého kolem roku 800, druhou renesancí probíhající v XI. a XII. století je šíření poznatků prostřednictvím arabsko-židovského vlivu z Iberského poloostrova.

³ Roku 1493 se ujímá vlády v Římské říši Maxmilián I., který od roku 1482 vládl v Nizozemí (získal je sňatkem s Marií Burgundskou). Po smrti Ferdinanda Aragonského (sjednotitele Španělska a manžela Isabely Kastilské) se Maxmiliánův vnuk Karel stává králem španělským a od roku 1517 císařem Římské říše (Karel V.). Nástupem Karlova bratra Ferdinanda na český trůn po bitvě u Moháče (1526) se Habsburkové stávají nejmočnějším evropským panovnickým rodem (Ferdinand je říšským králem od roku 1531, císařem od roku 1556).

vrací Kalvin (vyhnáný roku 1438) a zakládá svou teokracii. Jezuitský řád je založen Ignácem z Loyoly roku 1540.

Patrně jediným mimořádně významným momentem v rozvoji vědy v této době byla roku 1543 publikace knihy Mikuláše Koperníka (1473–1543) *De Revolutionibus Orbium Celestium*.

Z literatury je třeba připomenout Lodovica Ariosta (1474–1533) a jeho *Zuřivého Rolanda* (vychází poprvé roku 1516, v definitivním znění 1532), Niccolò Machiavelliho (1469–1527) a jeho *Vladaře* (1532), Françoise Rabelaise (kolem 1494–1553), jehož *Gargantua a Pantagruel* vychází postupně v letech 1532 až 1552, a konečně Desideria Erasma Rotterdamského (1466/9–1536), autora *Chvály bláznovství* (vychází roku 1509).

Oblast renesančního výtvarného umění je do té míry obecně známá, že stačí uvést jména nejslavnějších Paracelsových současníků: Hieronymus Bosch (1450–1516), Leonardo da Vinci (1452–1519), Matyáš Grünewald (1475?–1528), Albrecht Dürer (1471–1528), Lukáš Cranach (1472–1553), Raffael Santi (1483–1520), Tizian (1473/90–1576), Hans Holbein mladší (1497–1543).

2 Evropská matematika v letech 1493 až 1541

Z významných matematiků této doby⁴ je vybráno pět osobností, z nichž čtyři jsou méně známé a pátá se proslavila především svými úspěchy v jiné oblasti.

2.1 Nicolas Chuquet a Étienne de La Roche

Podle zápisu o zaplacených daních a městských poplatcích se do Lyonu v roce 1480 přistěhoval *Maistre Nicolas, escriptvain*. Počínaje rokem 1485 je na stejné adrese zapsán *Nicolas Chuequet, alorist*, který po roce 1488 ze zápisů mizí. Kromě několika slov⁵ na konci jeho rukopisu *Triparty en la science des nombres*⁶, nalezeného a posléze v roce 1880 publikovaného Aristidem Marre [1], toho o Nicolasu Chuquetovi více nevíme. Marreův objev ve své době nevzbudil velkou pozornost; té se dočkal až téměř o sto let později v řadě prací francouzských i anglických badatelů. Dnes se domníváme, že se v Lyonu Chuquet živil opisováním soudních a obchodních dokumentů a vyučováním běžnému finančnímu počítání. Pro své žáky napsal výše citovaný rukopis (datovaný rokem 1484) a jeho velká část byla po staletí známá a oceňovaná, nikoliv však pod Chuquetovým jménem. V blízkém sousedství Chuquetova bydliště žil také Pierre Villefranche, který zemřel v roce 1483 a zanechal po sobě třináctiletého syna jménem Étienne de La Roche (1470–1530). Lze tedy předpokládat, že jej Chuquet znal a učil [2]. Étienne byl v Lyonu později znám jako dlouholetý učitel komerční aritmetiky a v roce

⁴ Další významné matematiky připomeňme alespoň jmény: Luca Pacioli (1445–1517), Scipione del Ferro (1465–1526), Johann Werner (1468–1522), John Maior (1469–1550), Charles de Bouvelles (1471–1553), Cuthbert Tunstall (1474–1559), Juan de Ortega (1480–1568), Gaspar Lax (1487–1560), Michael Stifel (1487–1567), Francisco Maurolico (1494–1575), Oronce Fine (1494–1555), Petrus Apianus (1495–1552), Christoff Rudolff (1499–1545), Gerolamo Cardano (1501–1576), Niccolò Fontana Tartaglia (1499/1500–1557).

⁵ Podle nich Chuquet pocházel z Paříže a byl bakalářem lékařství.

⁶ *Triparty* patrně značí tři části, takže volný překlad by byl *Věda o číslech ve třech dílech*. Rukopis má 147 listů, tj. 294 stran. O jeho existenci se dozvěděl Baldassare princ Boncompagni, vydavatel *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, prvního italského časopisu plně věnovaného historii matematiky a založeného roku 1868. Požádal Aristida Marre o úpravu rukopisu a komentáře s cílem publikace v *Bollettino*. Celý Chuquetův rukopis, dnes uložený v Bibliothèque Nationale v Paříži, je však více než dvojnásobný (má přes 300 listů) a obsahuje příklady (listy 148–210), geometrii (listy 211–262), komerční aritmetiku (listy 264–321) a tabulky [2]. Podle katalogu z roku 1868 byl vždy kompletní. Anglický překlad podstatné části *Triparty* s komentáři vyšel v roce 1984 [3], geometrickou část Chuquetova rukopisu vydal roku 1979 L'Huillier [4].

1520 publikoval knihu *Larismethique*, až do Marreova objevu považovanou za velmi kvalitní a originální dílo. Srovnáním s Chuquetovým rukopisem (opatřeným patrně Éstiennovými poznámkami) se však ukázalo, že *Larismethique* je z poměrně velké části doslovným opisem Chuquetovy *Triparty*.

Triparty se skládá ze třech částí doplněných sbírkou příkladů z aritmetiky i geometrie. Pozornost vzbuzuje v první řadě originální notace. První část je věnována celým číslům i zlomkům, posloupnostem, dokonalým číslům, úměrnostem a jejich vlastnostem. Ve druhé části jsou probírány odmocniny, ve třetí části pak rovnice, exponenciály a pravidla o exponentech, např. $x^m + x^n = x^m \cdot x^n$. Chuquet již zavádí znaky pro druhou a třetí odmocninu – $\mathfrak{R}^2$ a $\mathfrak{R}^3$ – a pro celočíselné exponenty. Pro odečítání užívá symbol $\overline{m}$ (minus), pro sčítání symbol $\overline{p}$ (plus), x , x^2 , x^3 značí 1^1 , 1^2 , 1^3 , avšak $7x^2$, $9x^3$ píše 7^2 , 9^3 . Rovnítko se ještě nepoužívalo, takže $x^2 + 4x = 12$ je $1^2 \overline{p} 4^1$ egaulx à [je rovno] 12. Užívá i záporné exponenty, takže $x + \frac{1}{x}$ bude $1^1 + 1^1 \overline{m}$. Složená odmocnina $\sqrt{2 + \sqrt{7}}$ je u Chuqueta $\mathfrak{R}^2 2 \overline{p} \mathfrak{R}^2 7$.

Za svůj důležitý výsledek považuje Chuquet nerovnost (tzv. Fareyovy zlomky⁷)

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

kterou často využívá, např. při výpočtech racionálních aproximací iracionálních odmocnin. Jako příklad jejího využití si z *Triparty* uveďme výpočet $\sqrt{6}$, která zřejmě leží mezi čísly 2 a 3. Začneme s $2 \frac{1}{3}$ a $2 \frac{1}{2}$, z nichž čtverec prvního je $6 - \frac{5}{9}$ a čtverec druhého $6 + \frac{1}{4}$. Správné číslo leží mezi nimi a v intervalu $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ najdeme v prvním přiblížení $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$. Avšak čtverec $2 \frac{2}{5}$ je $6 - \frac{6}{25}$, tedy opět málo. Další volba bude $\frac{2+1}{5+2} = \frac{3}{7}$, což opět nestačí a ani $2 \frac{4}{9}$ není dost velké. Teprve následná volba $\frac{4+1}{9+2} = \frac{5}{11}$ vede k překročení čísla 6, neboť $(\frac{27}{11})^2$ je již o $\frac{3}{121}$ převyšuje. Takže nyní hledáme číslo mezi $2 \frac{4}{9}$ a $2 \frac{5}{11}$ a tak pokračujeme dále, až se desátým krokem dostaneme k číslu $2 \frac{89}{198}$, jehož čtverec převyšuje 6 pouze o $\frac{1}{39204} \approx 0.0000255$. Pokud ještě nejsme spokojeni, najdeme mezi $2 \frac{40}{89}$ a $2 \frac{89}{198}$ po několika dalších krocích číslo $2 \frac{881}{1960}$, jehož čtverec již převyšuje 6 už jen o $\frac{1}{3841600} \approx 0.00000026$.

V diskusi o mocninách dvojky se Chuquet již blíží představě logaritmu o základu 2 a při řešení kvadratických rovnic i k pojmu komplexního čísla.⁸ Patrně poprvé se u něj objevuje nula jako číslo [5]. I když na jednom místě *Triparty* píše, že nula „neznamená nic ... a proto se nazývá číslem bez hodnoty“, posléze s ní jako s číslem zachází a píše $0 \overline{m} 12$ pro $0-12$ a $0 \overline{p} 12$ pro $0+12$ a dále ji používá jako exponent, tj. 9^0 je $9x^0$, tj. 9. Na jiném místě v tabulce mocnin dvojky začíná jednotkou, tj. 2^0 . V souladu s dlouholetými zvyklostmi nebyla nula (stejně jako čísla iracionální a záporná) považována za řešení rovnice, avšak Chuquet v jednom případě konstatuje, že hledané řešení je 0.

⁷ Zlomek $(a+c)/(b+d)$ se v literatuře nazývá *medianta* zlomků a/c a b/d , v české terminologii to však není běžné a používá se jen v hudební nauce pro třetí tón diatonické stupnice mezi tónikou a dominantou. V matematice se posloupností postupně vytvářené mediantami na intervalu $[0,1]$ nazývají Fareyovy, podle britského geologa Johna Fareye, který na ně upozornil v roce 1816 článkem ve *Philosophical Magazine*, na nějž reagoval Cauchy a odvodil o členech posloupností důležitou větu. Posloupnost však použil již C. Haros v roce 1802.

⁸ Konkrétně se jednalo o neznámou, jejíž trojnásobek se rovná čtverci zvětšenému o 4 (3^1 egaulx à $1^2 \overline{p} 4$). Když Chuquetovi vyšlo $\frac{3}{2} \overline{p} \mathfrak{R}^2 \overline{m} \frac{7}{4}$ a $\frac{3}{2} \overline{m} \mathfrak{R}^2 \overline{m} \frac{7}{4}$, konstatoval, že řešení neexistuje.

V části rukopisu obsahující příklady je řešena také *úloha o neznámém dědictví*⁹: neznámá částka se dělí mezi syny tak, že první si vezme jednu minci a část zbytku, druhý dvě mince a nějakou část zbytku atd., až poslední si vezme, co na něj zbylo. Ukáže se, že všichni mají stejně a otázka zní, jak velké bylo dědictví a kolik je synů.

Významnou částí rukopisu jsou příklady z tehdejší komerční aritmetiky, která podle dochovaných pramenů koncem XV. století právě vznikala [8, 9]. První tištěnou matematickou knihou byla *Treviso Arithmetic* anonymního autora vydaná v Trevisu roku 1478. Zahrnuje měnové převody, platby při směně zboží a výplatu podílů ze zisku v obchodních společenstvích (s ohledem na církevně stíhanou lichvu). V té době vedle italských obchodních center vznikala i další střediska a právě Lyon se svými trhy s kořením a pod královskou ochranou (ustavenou dekretem Ludvíka XI. z roku 1464) mezi ně patřil. Odezvy této situace v díle Chuquetově jsou tedy zcela přirozené.¹⁰ Za zmínku ještě stojí, že Chuquet je z velké části autorem našeho pojmenování mocnin desítky.¹¹

Současné hodnocení [10, 11] Éstienna de La Roche je méně přísné než jeho obecné odmítnutí jako plagiátora bezprostředně po objevu a publikaci Chuquetovy *Triparty*. Její obecný vliv by byl patrně menší než vliv *Larismethique*, protože nebyla psána pro širší veřejnost, ale pouze pro svého autora jako příprava pro vyučování. Éstiennne de La Roche ostatně Chuqueta vedle Pacioliho jako svůj zdroj uvádí. Rozšiřování knižtisku zásadně změnilo situaci ve srovnání s dobou vzniku *Triparty*. Již v roce 1515 vyšel v Lyonu překlad knihy Juana de Ortega¹² o aritmetice, který pro Éstienna de La Roche mohl být inspirací. Oprávněnou výtkou však může být, že nepřevzal všechny Chuquetovy novinky z oblasti notace, ale snaha psát pro širší veřejnost se zde patrně prosadila. Zápis mocnin neznámé však převzat byl, i když s komickým důsledkem, že v XIX. století byl mylně interpretován.¹³ *Larismethique* se v XVI. století stala obecně známou, byla znovu

⁹ Objevuje se poprvé asi u Fibonacciho, poté u Jacopa da Firenze (rukopis *Tractatus algorismi* z roku 1307) a řady dalších matematiků až po Eulera, podrobně viz [6, 7]. Jednoduché řešení u Jacopa da Firenze se týká počtu pomerančů trhaných kolemjdoucími v sadu, kde kolem 81 plodů projde 9 návštěvníků [6]; řešení je ovšem mnoho a zobecněný problém patří do teorie čísel.

¹⁰ Uvedme alespoň jeden příklad: Obchodník půjčil jinému obchodníkovi jistou částku s úrokem 10 %, úrok mu náležel jako zaměstnavateli na konci každého roku. A tak se stalo, že na konci třetího roku dlužník dlužil celkovou sumu 100 livrů ... urči, kolik mu bylo půjčeno v prvním roce. Chuquet úlohu správně řeší složeným úrokováním.

¹¹ Slovo milion pro 10^6 se používalo již kolem roku 1270, francouzský matematik na dvoře Ludvíka XI. Jehan Adam (XV. století) použil v roce 1475 termíny *bymillion* a *trimillion* pro 10^{12} a 10^{18} . Avšak teprve Chuquet ve své *Triparty* zavádí 10^6 jako charakteristický interval a termíny *byllion* pro 10^{12} , *tryllion* pro 10^{18} , *quadrillion* pro 10^{24} , *septyllion* pro 10^{30} atd. Toto názvosloví je převzato i v *Larismethique*. V roce 1549 cituje básník a matematik Jacques Peletier du Mans (1517–1582) termín *milliart* údajně již používaný pro 10^9 . Po roce 1688 je nahrazen slovem *milliard* a v XVII. století vzniká jemnější dělení s charakteristickým intervalem 10^3 a s výrazy *billiard* pro 10^{15} , *trilliard* pro 10^{21} atd. Tato stupnice zvaná *krátká* [*l'échelle courte*] na rozdíl od původní Chuquetovy *dlouhé* [*l'échelle longue*] byla přijata v USA, avšak s jinými termíny, konkrétně *billion* je 10^9 , *trillion* je 10^{12} , *quadrillion* je 10^{15} , takže např. 10^{24} je *septillion* v USA a *quadrillion* v Evropě. Největší komplikací je ovšem americký termín *billion* pro evropskou miliardu.

¹² Juan de Ortega (1480–1568), dominikánský mnich, pověřený řádovými představiteli výukou komerční matematiky v Aragonii. V roce 1512 vydává úspěšnou knihu *Tractado subtilissimo d'arithmetica y da geometria*, jejíž překlad byl první francouzskou tištěnou knihou o komerční matematice.

¹³ Francouzský matematik Michel F. Chasles (1793–1880) ve třech pracích o historii algebry přednesených v roce 1841 v Akademii věd považoval Chuquetův výraz 2^2 za mocninu dvojky a nikoliv za $2x^2$.

vydána v roce 1538 i několikrát citována různými autory a je pravděpodobné, že Chuquetův rukopis by pro svou obtížnost této popularity nedosáhl.

Závěrem připomenutí obou lyonských matematiků je otázka, kde jsou kořeny jejich příspěvků k aritmetice, algebře a geometrii, a pocit, že při studiu historie matematiky musíme podstatně prohloubit své dosavadní znalosti o XIV. a XV. století, zvláště v Itálii, k níž naši pozornost obrací řada již nalezených, ale dosud nezpracovaných rukopisů [12], nemluví o těch, které jsou dosud skryty v různých neprozkoumaných archivech.

2.2 Johannes Widmann, Adam Ries

Johannes Widmann se narodil v Chebu kolem roku 1460, datum a místo jeho úmrtí není známo, ale obecně se uvádí po roce 1498 v Lipsku. Zde dosáhl titulu mistra svobodných umění v roce 1485 (podle některých údajů 1486) a poté na lipské univerzitě přednášel jako první v německých zemích algebru. Další údaje o jeho životě neexistují, zachovaly se však poznámky jednoho z jeho studentů, podle nichž používal běžně znaménka $+$, $-$, počítal i s iracionálními čísly a uváděl řešení rovnic vyšších stupňů. Jméno v dějinách matematiky Widmannovi zajišťuje jeho učebnice komerční matematiky *Behende vnd hubsche Rechnung auf allen kauffmanschafft* [Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce], která byla vytištěna v Lipsku roku 1489. Kniha se stala velmi populární a byla opakovaně vydána v letech 1508, 1519 a 1526.¹⁴ Poprvé v tištěném textu jsou v ní použita znaménka $+$, $-$. Widmann tuto notaci neuvádí jako svůj vynález, pouze ji vysvětlí. Tvar $+$ byl údajně vymyšlen pro svou podobnost se způsobem psaní latinské spojky *et* (tj. a), existují však i jiné výklady (viz např. [13], [20]).¹⁵ V první části Widmannovy učebnice je probráno počítání s celými čísly a zlomky, druhá část se zabývá úměrnostmi (trojčlenkou) a rovnicemi, třetí je věnována geometrii. Cantor v [13] podrobně rozebírá zdroje Widmannova výkladu. V případě geometrie to jsou řecké (především Eukleidés) a arabské zdroje. Počítány jsou plochy různých n -úhelníků, poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku, připomenuta je Heronova formule a je uveden také pozoruhodný vzorec pro výpočet poloměru kružnice opsané trojúhelníku obecnému ze znalosti základny, výšky na ní kolmé a úseku základny výškou vytčeného.

Za současné oživení zájmu vděčí Widmann Barbaře Gärtnerové, autorce rozsáhlého (678 stran) spisu [15]. V jeho první části vedle Widmannova životopisného přehledu jsou zmíněny jeho dva latinské tisky (*Regula Falsi* a *Tractatus proportionum*) a popsány okolnosti vydání německé učebnice. Další kapitola se zabývá především jazykovou analýzou *Rechenbuch* v obecných podmínkách tehdejší doby a z hlediska snahy o vytvoření obecně přístupného textu. Zde autorka shledává, že požadavky na čtenáře jsou dosti vysoké, patrně ovlivněné Widmannovým univerzitním působením. Přesto, že se kniha snažila být populární a byla i vícekrát vydána, Riesovy učebnice (viz dále) ji postupně zcela vytlačily. Třetí část knihy B. Gärtnerové přináší komentovaný přepis původního vydání s opravenými chybami, zjednodušenými obrázky a tabulkami doplněnými indexem. Widmannova kniha je tak po více než 500 letech přístupná současným zájemcům.

V některých pramenech je Widmannovi připisován latinský spis *Algoritmus Linealis* vytištěný v Lipsku roku 1489, v němž je údajně nejstarší popis práce s počítadlem

¹⁴ Widmannově učebnici předcházely dva tisky podobného účelu vydané v Bamberku v letech 1482 (pouze devět listů, autorem byl Ulrich Wagner – † asi 1490) a 1483 (77 listů, tzv. *Babenberger Rechenbuch* s nejspíše autorem, kterým byl možná opět Ulrich Wagner), z nichž Widmann výrazně čerpal.

¹⁵ Ze starších prací je třeba zmínit podrobnou analýzu Widmannova díla v [13, str. 209–229].

publikovaný v Německu. Knihu podrobně rozebírá i Cantor [13], avšak bez udání autora a s letopočtem vydání 1490. Za zmínku stojí, že je v ní uveden prakticky současný algoritmus pro násobení vícemístných čísel v desítkové soustavě.

Adam Ries se narodil v Staffelsteinu (u Bamberka) roku 1492, resp. 1493, v rodině mlynáře. Údaje o jeho dětství zcela chybějí, po roce 1509 žije s mladším bratrem ve Cvikově [Zwickau]. O jeho vzdělání není nic známo, avšak v roce 1518 zakládá v Erfurtu matematickou školu, udržuje styky s místní univerzitou a píše své první dvě knihy. V roce 1522 (1523?) odchází do saského Annabergu s nově otevřenými stříbrnými doly. Postupně pracuje v různých komerčních úřadech v Annabergu a Norimberku a roku 1529 je jmenován saským dvorním matematikem. Hlavním zdrojem jeho příjmů bylo vydávání mimořádně úspěšných učebnic matematiky, jejichž cílem bylo šíření základních matematických znalostí v celé populaci. Své knihy postupně upravoval při jejich dalších vydáních; poslední učebnice je z roku 1550. Jeho popularita je až do dnešních dnů nesmírná a jeho jméno se stalo součástí školských úsloví typu 5×7 , *das macht nach Adam Ries* 35 [5×7 , to je podle Adama Riese 35]. Důvodem je kvalita a přístupnost jeho učebnic napsaných v době, kdy se základní aritmetické úkony staly díky rostoucímu obchodu obecnou potřebou. Johannes Widmann byl bezpochyby Riesovým předchůdcem, ale jeho učebnice byly orientovány na středoškolské a vysokoškolské studenty. O Riesovi však lze jen s mírnou nadsázkou říci, že už téměř před 500 lety naučil celý německý národ počítat. Z tohoto hlediska je jeho postavení v historii matematiky zcela unikátní. Adam Ries umírá v roce 1559, místo jeho hrobu však není známo.

Dále jsou uvedeny Riesovy knihy se stručnými charakteristikami.

- 1) *Rechnung auff der linihen* [Počítání na linách] vychází poprvé v Erfurtu roku 1518 a dočkala se ještě tří dalších vydání.¹⁶ Podle Riesova úvodu byla učebnice určena především dětem a obsahuje sčítání, odčítání, násobení a dělení, práci se zlomky a převody různých měnových, váhových a jiných jednotek.
- 2) *Rechnung auff der Linihen und Federn* [Počítání na linách a cifrách] je obsahově širší (zahrnuje úměrnosti a rovnice a dokonce i magické čtverce) a je určena komerčním kruhům. První vydání je z roku 1522 a do roku 1656 vyšla učebnice ve 108 vydáních.¹⁷
- 3) Další kniha s názvem *Coss* zůstala v rukopise z roku 1524 až do svého prvního vydání v roce 1992.¹⁸ Druhou verzi dokončenou v roce 1550 odkázal Ries svým synům, z nichž Abraham ji upravil a přepsal jeho verze i faksimile její části vyšly v roce 1999.¹⁹
- 4) *Ein Gerechent Büchlein/ auff den Schöffel Eimer vnd Pfundtgewicht* byla napsána roku 1533, vydána 1535 a obsahuje převodní tabulky různých měr. Podle Riesova

¹⁶ Kopii jejího druhého vydání z roku 1522, doplněnou úvodem a komentáři, vydal v Mnichově roku 1992 Institut für Geschichte der Naturwissenschaften pod názvem *Das 1. Rechenbuch von Adam Ries*.

¹⁷ Pod titulem *Das 2. Rechenbuch von Adam Ries*, doplněnou úvodem a komentáři, učebnici vydal Institut für Geschichte der Naturwissenschaften v Mnichově roku 1991.

¹⁸ Coř. Faksimile und Kommentar. Teubner Verlag, Leipzig, 1992. Pro popularizaci Riesova jména mezi anglickými čtenáři byla vydána kniha autorů Luderer B., Kauzner W., Wussing H., Ries A.: *Adam Ries and his "Coss": a contribution to the development of algebra in 16th century Germany*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2004.

¹⁹ *Die Coss von Abraham Ries*. Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, München, 1999. Slovo *Coss* znamenalo v němčině algebra; termín je odvozen od italského slova *cosa* [tj. věc, rozumí se neznámá]. Jsou jím označovány aritmetické spisy XV. až XVI. století, obsahující kromě numerických příkladů i obecné algebraické problémy a používající postupně zaváděné matematické symboly.

úvodního slova měla „pomoci obyčejným chudým lidem vyhnout se ožizení při nákupu chleba“.

- 5) *Rechenung nach der lenge/ auff den Linihen vnd Feder* [Podrobné počítání na linách a cifrách] je doplněná a přepracovaná verze Riesovy početnice z roku 1522 vycházející v roce 1550; je památná tím, že na jejím titulním listě je jediný dochovaný portrét Adama Riese.

2.3 Albrecht Dürer

Poslední autor Paracelsovy doby, kterému se budeme věnovat, světově proslul v jiném oboru než matematice, jeho přínos ke geometrii s oblastí jeho hlavní činnosti však úzce souvisí.²⁰ Albrecht Dürer se narodil v Norimberku roku 1471 jako třetí dítě (z osmnácti) klenotníkovi stejného jména.²¹ Neobyčejné nadání pro malířství projevoval od dětství, o čemž svědčí jeho autoportrét nakreslený ve věku 13 let. Po učednických letech u norimberského malíře Michaela Wohlgemuta se v roce 1490 vydává na čtyřletou cestu po Německu a koncem roku 1494 opět odchází na cesty, tentokrát především do Verony a Benátek. Zde poznal zobrazovací metody benátského malířství a seznámil se s jejich tehdejší předním reprezentantem Giovannim Bellini (snad i s jeho žáky Giorgionem a Tizianem). Patrně se zde setkal také s Jacopem de Barbari²², který kolem roku 1500 strávil rok v Norimberku a s Dürerem byl tehdy v úzkých vztazích. Po návratu do Německa zvolna roste Dürerova pověst, zvláště po jeho úspěšném portrétu saského kurfiřta Frederika Moudrého z roku 1496. Již tehdy se Dürer začíná intenzivně zajímat o matematické principy kresby, studuje Eukleidovy *Základy* a Vitruviovy knihy o architektuře, v nichž ho zaujala především teorie lidských proporcí, které se pak věnuje až do konce svého života. V letech 1505 až 1507 navštěvuje Itálii podruhé a snad se kromě s Barbarim setkává i s Lucou Pacioli; při této návštěvě se věnuje především prohloubení svých matematických znalostí. Zbývajících 20 let svého života (s výjimkou krátké návštěvy Nizozemí) tráví již v Německu a věnuje se jak malbě, tak geometrii. Jeho zdravotní stav se postupně zhoršuje a umírá roku 1528. Dnes je považován za zakladatele německé malířské školy a jeho pozoruhodné perokresby, dřevoryty, lepty a obrazy jsou stálým zdrojem obdivu²³, o čemž svědčí řada monografií (např. [19, 20]) i jejich mimořádně obsažná prezentace na internetu.

Dürerův přístup k matematice vyplývá z jeho chápání umění jako kombinace schopnosti (řemeslné, umělecké) a znalosti teorie²⁴ a za tuto pro umělce nezbytnou teorii považoval právě geometrii. Shrňme proto z tohoto hlediska stručně situaci světově nejpokročilejšího italského malířství v počátcích renesance. Důležitost geometrie byla uznávána i ve středověku a existovala řada děl věnovaných odpovídajícím problémům a napsaných v XIII. až XV. století, ale uváděná pravidla byla čistě praktická bez jakéhokoli odůvodnění či zobecnění. Kromě toho středověká malba se nesnažila zobrazovat objekt, ale jeho představu v umělcově mysli nebo také odraz malby jiného tvůrce v malířových představách. Renesanční malíř má naopak podle Dürerových slov

²⁰ Není to zdaleka poprvé, kdy se Albrecht Dürer objevuje na konferencích o historii matematiky a v edici Dějiny matematiky, viz např. [16, 17, 18].

²¹ Dürerův otec přišel do Německa se jménem maďarské vesnice Antos (dveře), z níž pocházel. Jméno si změnil na Tür, později Tüer, jeho syn je pak změnil na Dürer.

²² Jacopo de Barbari (1440–1515), významný benátský malíř a rytec, první známý autor klasického zátíší.

²³ Připomeňme jeho *Růžencovou slavnost*, patrně nejceněnější obraz naší Národní galerie.

²⁴ Tento význam skutečně původně mělo latinské slovo *ars*: 1) dovednost, 2) souhrn pravidel, teorie.

vědět, že „čím více se mu podaří napodobit skutečnost, tím lepším a umělečtější se jeho dílo stane“.²⁵ Zároveň v této souvislosti připomíná díla řeckých a římských sochařů.

Z hlediska perspektivy v malířství bylo v Dürerově době již leccos objasněno, např. zmenšování vzdalujících se objektů, konvergence kolmic k rovině pozorování do jediného bodu atd. Východiskem byly Eukleidovy *Základy* a práce římských autorů převzaté a západnímu světu předané Araby. O jejich další rozšíření se postarali mj. R. Grosseteste a R. Bacon a základem byla představa, že objekty jsou viděny přímými světelnými paprsky končícími v lidském oku. Tyto teoretické principy však nebyly aplikovány na grafickou reprezentaci objektů. Podle našich znalostí byl prvním, kdo se pokusil o aplikaci geometrických principů na grafickou reprezentaci objektů, Filippo Bruneleschi.²⁶ Přišel s myšlenkou, že mezi oko a objekt umístíme průhlednou desku, poté provedeme eukleidovskou konstrukci paprsků mezi okem a objektem a jejich průsečíky s průhlednou plochou nám vytvoří obraz objektu. Myšlenku o něco později podrobně popsal Piero della Francesca²⁷ v traktátu *De prospectiva pingendi* [O perspektivě v malířství] napsaném kolem roku 1480, avšak vytištěném až v roce 1899. Metoda používaná v architektuře a spočívající v konstrukci perspektivních pohledů ve dvou na sebe kolmých směrech zde byla aplikována na lidské tělo (tzv. *construzione legittima*).

Dürer se do dějin matematiky zapsal svými dvěma knihami v německém jazyce, které jsou výsledkem jeho dlouholeté práce a vyšly až na sklonku jeho života. Snažil se v nich napsat to, co by podle jeho názoru z geometrie měli vědět ti, kteří se zabývají výtvarným uměním všeho druhu – od malby a grafiky až po užité umění. Pro jejich napsání si musel především vytvořit vlastní nomenklaturu, protože geometrická tematika byla v tomto období rozvíjena jenom v Itálii. První knihou bylo čtyřdílné *Vnderweysung [Underwderweysung] Messung mit dem Zirckel uñ Richtscheyt in Linien, Ebenen unnd gantzen Corporen* [Pojednání o měření kružítkem a pravítkem na přímkách, v rovinách a tělesech], vydané v Norimberku v roce 1525 (upravené posmrtné vydání je z roku 1538, latinská vydání jsou z let 1532, 1535 a 1605).²⁸ Podrobný rozbor obsahu je uveden v [19, 21].

První část je věnována jednorozměrným objektům, tj. algebraickým křivkám, spirálám, epicykloidám, konchoidám aj. Pozoruhodný je jeho přístup k elipse, parabole a hyperbole, jež důsledně zavádí jako hranice rovinných řezů kuželu a odtud odvozuje jejich konstrukci.²⁹ Také druhá část se zabývá matematikou, konkrétně dvourozměrnými obrazci, především pravidelnými n -úhelníky, a uvádí jejich přesné či přibližné konstrukce pro $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16$. Uvedeny jsou i přibližné metody trisekce úhlu a kvadratury kruhu. Obsahuje i ornamenty a mozaiky, zřejmě s přihlédnutím k vlivu arabského ornamentálního umění. Na ni navazuje čtvrtá část věnovaná trojrozměrné geometrii, projekcím a perspektivě, rozvíjející výše zmíněné italské metodiky. V jejím úvodu je probráno pět platónských těles, devět polopravidelných těles archimédovských a osm těles Dürerovy vlastní konstrukce. Pouze třetí část je orientována prakticky a pojednává o aplikacích geometrie v architektuře, dekoracích a dalším užitém umění.

²⁵ Podle [19], str. 243.

²⁶ Filippo Bruneleschi (1377–1446), florentský sochař a především architekt, proslavený mnoha svými stavbami, zvláště pak dokončením chrámu Santa Maria del Fiore ve Florencii.

²⁷ Piero della Francesca (asi 1415–1492), významný italský malíř, známý též svým zájmem o matematiku a využití geometrie v malířství.

²⁸ Všech 186 obrázků z prvního vydání Dürerovy knihy je vystaveno na internetové adrese digital.slub-dresden.de/sammlungen/titeldaten/27778509X/

²⁹ Jeho slavná a již Keplerem komentovaná chyba s vejcovitou elipsou je dobře známá. Správnou konstrukci Dürer lehce poopravil na základě svého pevného přesvědčení, že řez a tedy ani elipsa nemají dvě osy symetrie.

Vyskytují se zde návrhy pomníků, staveb (pozoruhodné jsou střechy s malým sklonem ostře kontrastující s gotickou architekturou) a slunečních hodin (i se třemi navzájem kolmými číselníky), ale dnes jsou z ní nejčastěji připomínány navržené geometrické konstrukce ozdobných latinských i gotických (zcela originální Dürerovy návrhy) písmen.

Druhá Dürerova matematická kniha *Vier Bücher von menschlicher Proportion* [Čtyři knihy o lidských proporcích], Norimberk, 1528, vyšla až půl roku po jeho smrti a její závěr tvoří nekrolog napsaný Dürerovým dlouholetým přítelem W. Pirckheimerem³⁰. Jejím obsahem je rozbor proporcí lidského těla a je částečně ovlivněna autorovým obdivem k Vitruviově *De Architectura* a také dílem Leonarda da Vinci. Dürerova kniha je však podstatně podrobnější a matematicky exaktnější. Dürer proměřil postavy vysokého počtu mužů, žen i dětí a výsledky zpracovává dvěma způsoby. První přístup spočívá v proměření vzájemných vzdáleností několika pevně definovaných bodů lidského těla znormovaných výškou postavy. V druhém přístupu rozdělil výšku na šest stejných dílů a podle nich vyjadřoval své výsledky. Jejich zpracování je obsahem prvních dvou částí díla. Ve třetí části jsou údaje přetransformovány na případy osob velmi tlustých nebo naopak extrémně štíhlých a dále je velká pozornost věnována proporcím lidských hlav. V poslední části je studován pohyb lidských postav a jsou konstruovány i jimi vrhané stíny. Jako celek je kniha první studií lidských postav z estetického hlediska. V řadě svých maleb i studií Dürer zachytil i různá zvířata a rostliny a jeho vztah k realitě vystihuje následující citát z knihy o proporcích: *Opravdové umění je pevně zachyceno v Přírodě. Úspěšný je pouze ten, komu se je v ní podaří objevit.*

3 Závěr

Příspěvek byl věnován životům a dílu pěti osobností, které jsou ještě po 500 letech vzpomínány a jejichž díla jsou znovu objevována, studována a vydávána. Spojuje je jeden společný cíl: učit matematiku své spoluobčany. Dürerovo úsilí se obrací k výtvarníkům všech typů, Chuquet a de la Roche připravují své žáky pro uplatnění v komerční sféře, Widmann se obrací ke svým středoškolským a vysokoškolským studentům, a Ries ke všem občanům, včetně nejchudších vrstev. Je zřejmé, že dobře učit matematiku je také jedna z cest, jak vstoupit natrvalo do jejich dějin.

Literatura

- [1] Marre A.: *Notice sur Nicolas Chuquet et son „Triparty en la science des nombres“*. Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche 13(1880), 555–814.
- [2] L’Huillier H.: *Éléments nouveaux pour la biographie de Nicolas Chuquet*. Revue d’histoire des sciences 29(1976), 347–350.
- [3] Flegg G., Hay C., Moss B.: *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician*. Springer, 1984.
- [4] L’Huillier H.: *La géométrie: première géométrie algébrique en langue française (1484)/ Nicolas Chuquet*. J. Vrin, Paris, 1979.
- [5] Boyer C. B.: *Zero: The Symbol, the Concept, the Number*. National Mathematical magazine 18(1944), 323–330.

³⁰ Willibald Pirckheimer (1470–1530), významný humanista a překladatel z latiny a řečtiny; Dürerovi pomáhal s klasickými texty.

- [6] Høyrup J.: *The „unknown heritage“: trace of forgotten locus of mathematical sophistication*. Archive for History of Exact Sciences 62(2008), 613–654.
- [7] Høyrup J.: *Jacopo da Firenze and the Beginning of Italian Vernacular Algebra*. Historia Mathematica 33(2006), 4–42. Viz též *Jacopo da Firenze, Tractatus algorismi*. [http://forskning.ruc.dk/site/research/jacopo_da_firenze_tractatus_algorismi\(1811273\)](http://forskning.ruc.dk/site/research/jacopo_da_firenze_tractatus_algorismi(1811273))
- [8] Benoit P.: *The commercial arithmetic of Nicolas Chuquet*. In Hay C. (ed.): *Mathematics from manuscript to print 1300–1600*. Oxford, 1988, 96–116.
- [9] Poitras G.: *From Commercial Arithmetic to Life Annuities and Joint Stocks: The Early History of Financial Economics, 1478–1776*. Edward Elgar Publishing Ltd., Cheltenham, 2000 (viz http://www.bus.sfu.ca/homes/poitras/FIN_HIS3.pdf).
- [10] Flegg G.: *Nicolas Chuquet – an introduction*. In Hay C. (ed.): *Mathematics from manuscript to print 1300–1600*. Oxford, 1988, 59–72.
- [11] Moss B.: *Chuquet's mathematical executor: could Étienne de La Roche have changed the history of algebra?* In Hay C. (ed.): *Mathematics from manuscript to print 1300–1600*. Oxford, 1988, 117–126.
- [12] Franci R., Toti Rigatelli L.: *Fourteenth-century Italian Algebra*. In Hay C. (ed.): *Mathematics from manuscript to print 1300–1600*. Oxford, 1988, 11–29.
- [13] Cantor M.: *Vorlesungen über Geschichte der Matematik*. Bd. 2., Teubner Verlag, Lipsko, 1892.
- [14] Bečvářová M.: *Středověké početní algoritmy*. In Bečvář J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Edice Dějiny matematiky, svazek 19, Prometheus, Praha, 2001, 231–263.
- [15] Gärtner B.: *Johannes Widmanns 'Behende und hupsche Rechenbuch: Die Textsorte 'Rechenbuch' in der Frühen Neuzeit. Reihe Germanistische Linguistik 222*. Tübingen, Niemeyer, 2000.
- [16] Šarounová A.: *Geometrie a malířství*. In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Historie matematiky I*. Edice Dějiny matematiky, svazek 1, JČMF, Brno, 1994, 190–219.
- [17] Šarounová A.: *Kánony krásy*. In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Historie matematiky II*. Edice Dějiny matematiky, svazek 7, Prometheus, Praha, 1997, 120–156.
- [18] Lomtatidze L.: *Historický vývoj pojmu křivka*. Edice Dějiny matematiky, svazek 30, Nadace universita v Brně, Brno, 2007.
- [19] Panofsky E.: *The Life and Art of Albrecht Dürer*. Princeton University Press, 1945 (2. upravené vydání, 2005).
- [20] Brion M.: *Albrecht Dürer: his life and work*. Thames and Hudson, London, 1960.
- [21] Scriba C. J., Schreiber P.: *5000 Jahre Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.

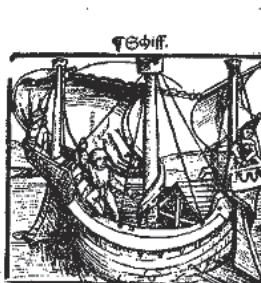
Adresa

RNDr. Ivan Saxl, DrSc.
 Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
 Matematicko-fyzikální fakulta UK
 Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
 e-mail: saxl@math.cas.cz

preder ¶ Item son dort fauer que vng million vault
 mille milliers de vntes. et vng byllion vault mille
 milliers de millions. et tryllion vault mille milliers
 de byllions. et vng quadrillion vault mille milliers de
 tryllions et ainsi des autres. Et de ce en est pose vng
 exemple nombre d'oise et punitoye ainsi que denant est
 dit. tout lequel nombre monte .744324. tryllions.
 804300. byllions. 700023. millions. 644321.
 Exemple. 7443248043000700023644321.
 Addition.

Obr. 1 Úryvek z Chuquetovy Triparty zavádějící terminologii pro násobky 10^6 .

72
 4 + 5 Wie du das wylt
 4 — 17 sen oder desgleys
 3 + 30 chen/So sumier
 4 — 19 die zentner vnd
 3 + 44 lb vnnnd was auff
 3 + 22 ist/das ist mi
 Zentner 3 — 11 lb nus dz seg beson
 3 + 50 der vnnnd werdent
 4 — 16 4539 lb (So
 3 + 44 du die zentner
 3 + 29 zu lb gemacht
 3 — 12 hast vnnnd das /
 3 + 9 + das ist meer
 daru Addierest vnd 75 minns. Nun
 soledu für Holz abschlahen allweeg für
 ein legel 24 lb. Vnd das ist 13 mal 24.
 vnd mache 312 lb daru addier das
 das ist 75 lb vnd werden 387. Dye süß
 erahier von 4539. Vnd bleyben 4152
 lb. Nun sprich 100 lb das ist ein zentner
 pro 4 ft wie kinnen 4152 lb vnd kumē
 171 ft 5 84 heller? Vñ ist reche gemacht
 Pfeffer 23

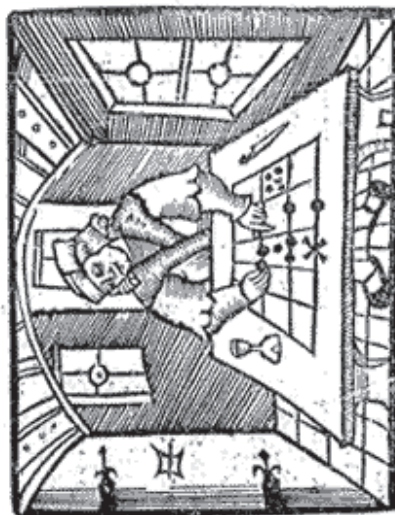


89
 ¶ Schiff.
 Item es gieng ein Schiff vñ Alferen gen
 tinopel das hat 3 segel/wu mēde gedie seg
 gieng es zu monat/wu de andern 3 vñ mē
 kleinste 4. nūst die frag wā man all 3 seg
 rff gesant vñ doch in einē wint/in wie vil n
 ster feur das Schiff dahin. sind ain zal mit 8
 hast 2 $\frac{1}{3}$ vñ ist 12/nun $\frac{1}{2}$ von 12
 vñd $\frac{1}{3}$ von 12 ist 4 $\frac{1}{4}$ vñ 12 ist 3/abdr die
 facit 13/seg 12/monero facit 27 tag $\frac{9}{13}$
 ist reche

¶ Angwer
 In einē kauff zu eudig 465 lb ingwe
 der kinnen 100 lb für 24 ducet mit sülen vñd
 mit allen dingen ist gen nūderg kum vñ
 kauffet den ingwer zu nūderg 1 lb für 15
 gr. Vñ ist die frag was er gewonnet vers
 er an 465 lb. vñ solt mercken das alweg
 so pfund zu nūderg. we gen 100 zu vñedig
 vñd 100 ducet. n gete 130 storen vñ ist ma
 so alforware wie vil die 456 pfund von De
 edgingen. Vñ sprich 100 pfundt geben
 44 ducaten was geben mir dan 456 lb facit
 995 ducet vñd $\frac{3}{25}$ facit 1423 storen $\frac{164}{250}$ nun
 rart auch wie vil die 456 lb von Venedig
 nach zu nūderg/vñd sprich 100 lb von
 nedig geben 60 lb zu nūderg was geben
 463 lb facit 2737 lb $\frac{4}{5}$ nun wart wie vil
 2737 $\frac{4}{5}$ bringen ye 1 lb für 13 gr dz hast
 der kauff facit 1977 ft 5 gr. dz mach gewun
 vñd ist 12 $\frac{2}{3}$ storen $\frac{2}{3}$ storen
 vñd
 ¶ Dñ
 in einer kaufft 37 ict 32no zu Eger/ye 1 et
 10 ft $\frac{2}{3}$ vñd kost zu sülen vñd sol biß gen

Obr. 2 Tři stránky z Widmannova Behende vnd hubsche Rechnung auf allen kauffmanschaft; na levé z nich je zavedení znamének + a —.

Rechnung auff der linihen
gemacht durch Adam Riesen vonn Staßfel/
steyn/ in massen man es pfligetz zu lern in allen
rechneschulen grunlich begriffen anno 1518.
vleysiglich vberlesen/ vnd zum andern mal
in trug vnsfertiget.



¶ Gernacht zu Erfordt zum
Schwarzen Horn.
1525.

Rechnung auff
der Linihen vnd Federn/
Auff allerley handierung gemacht/
durch Adam Riesen.



Zum andern mal vberlesen
vnd gendert.
Anno 33. d. 1533.

Obr. 3 Titulní stránky Riesových *Rechnung auff der Linihen* (1525) a *Rechnung auff der Linihen und Federn* (1533).

10000	6	Hundert tausend
5000	3	Fünffsig tausend
1000	5	Zehen tausend
500	X	Fünff tausend
100	3	Zausend
50	3	Fünff hundert
10	2	Hundert
5	2	Fünffzig
1	1	Zehen
1	1	Fünff
1	1	Eins
1	1	Ein halbe.

Addiren oder

Summiren

Eist außamen thun / Lehrer wie man viel
vnd mancherley gablen von gülden/gro-
schen/pfenning vnd hellern in eine sum-
ma bringen soll. Zu ihm also: Mache für dich
Linien/die theil in so viel feld/als Münz vorhan-
den/lege die st. besonder/gro. allein/ d. vnd hel-
ler auch jeztlich allein / hie. vnd dr. mach zu gro.
was kompt leg zu den gro. Als dann mach die
gro. zu st. leg es zu den andern gülden/nach art
eines jeglichen Landes.

Durch soltu mercken/wenn fünff dr. auff einer
Linien liegen/das du sie auff hebhest/vñ den fünff
ten in das nechst spactum darüber legest.

A III D.

Rechenung nach der Lenge/ auff den Linien vnd Feder.

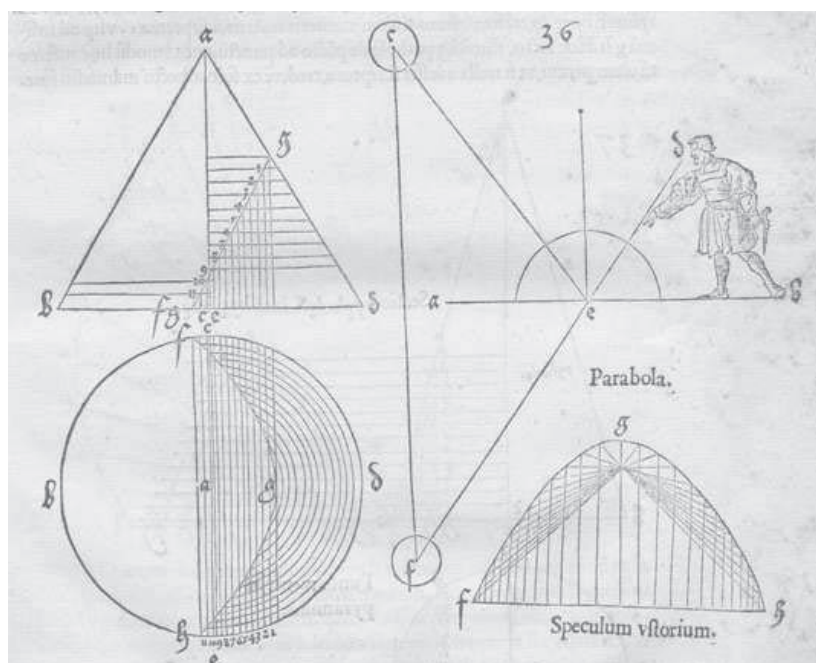
Darzu forcel vnd bechenbigkeit durch die Proportio-
neo/ Practica genant/ Mit gründlichem
vnterricht des vfficiums.

Durch Adam Riesen.
im 150. Jar.

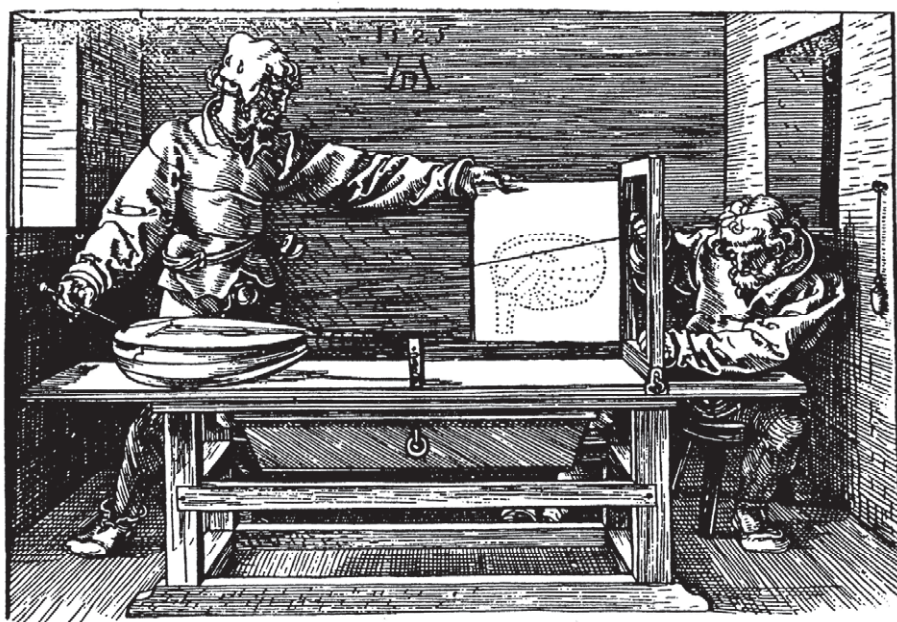


Cum gratia & privilegio
Caesareo.

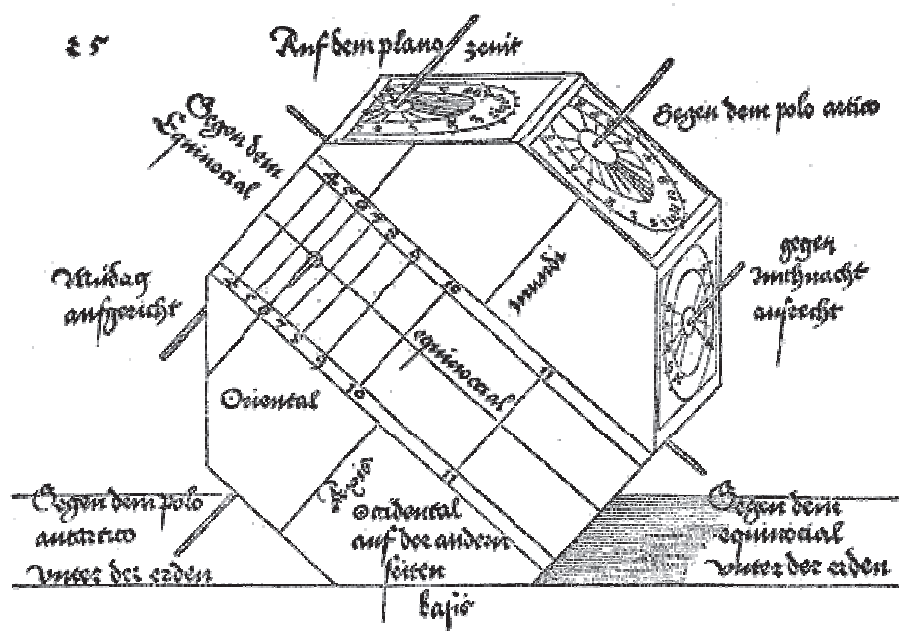
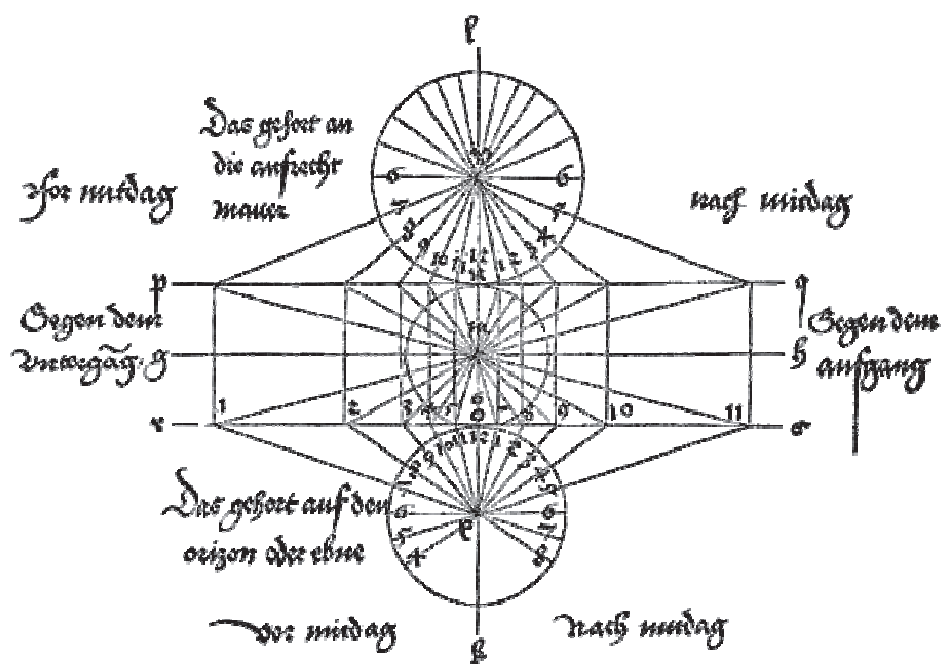
Obr. 4 Stránka z *Rechnung auff der Linihen und Federn* (1522) a titulní stránka *Rechnung nach der lenge auff den Linihen vnd Feder* (1550) s jediným soudobým portrétem Riese.



Obr. 5 Konstrukce paraboly jako řezu kuželem z I. části *Underweysung* (1525).



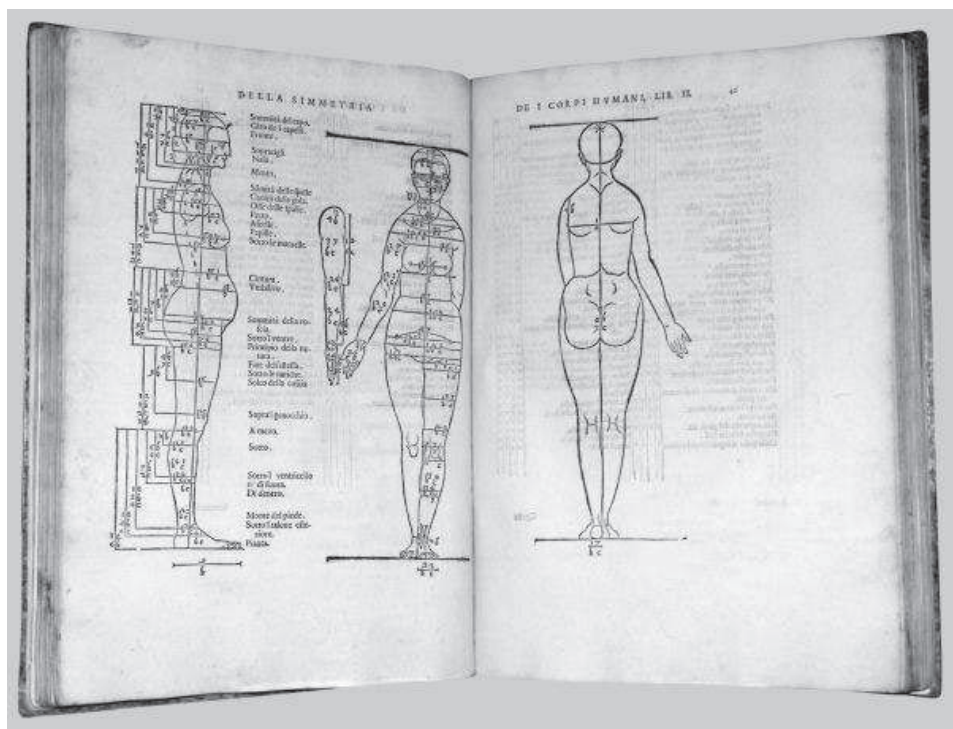
Obr. 6 Perspektivní malba loutny ze IV. části *Underweysung*.



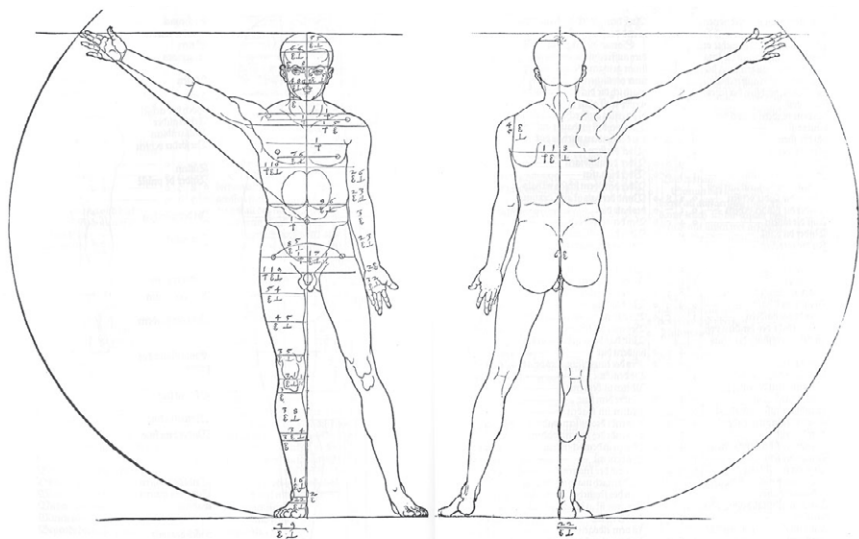
Obr. 7 Náčrt konstrukce slunečních hodin a polygonální sluneční hodiny ze třetí části Underweysung.



Obr. 8 Ukázka geometrických konstrukcí písmen ze třetí části *Underweysung*.



Obr. 9 Ukázka z italského vydání *Della Simmetria Dei Corpi Humani, Libri Quattro*. Presso Domenico Nicolini, Benátky, 1591.



Obr. 10 Ukázka z *Vier Bücher von menschlicher Proportion*. Norimberk, 1528.

O BINOMICKÉ VĚTĚ S RACIONÁLNÍMI A REÁLNÝMI EXPONENTY

ANTONÍN SLAVÍK

Abstract: This contribution focuses on the history of the general binomial theorem with rational or real exponents. The theorem was discovered by Gregory and Newton in the 17th century and was an essential tool in the subsequent development of analysis. Nevertheless, the first correct proof due to Abel appeared as late as in the 19th century.

1 Objev zobecněné binomické věty

Klasická binomická věta byla známa již ve středověku, speciální případy dokonce již ve starověku. Historii tohoto tvrzení se zde nebudeme věnovat a případné zájemce odkazujeme např. na článek [1]. První písemnou zmínku o možnosti zobecnění binomické věty najdeme v práci Jamese Gregoryho z roku 1670. Text není na první pohled příliš srozumitelný; Gregory pracuje se zadanými čísly a, b, c, d, e , která splňují $\log b = e$, $\log(b+d) = e+c$, a hledá číslo, jehož logaritmus je $e+a$. Bez dalšího vysvětlení tvrdí, že toto číslo lze získat jako součet řady

$$b + \frac{a}{c} \cdot d + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{d^2}{b} + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{a-2c}{3c} \cdot \frac{d^3}{b^2} + \dots$$

Protože platí

$$e+a = e + \frac{a}{c}(e+c-e) = \log b + \frac{a}{c}(\log(b+d) - \log b) = \log \left(b \left(1 + \frac{d}{b} \right)^{a/c} \right),$$

lze Gregoryho výsledek přepsat ve tvaru

$$b \left(1 + \frac{d}{b} \right)^{a/c} = b \cdot \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{d}{b} + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{a-2c}{3c} \cdot \frac{d^2}{b^2} + \dots \right),$$

což je binomická věta pro racionální exponenty.

Isaac Newton dospěl k podobnému objevu již v roce 1665, své výsledky však popsal až roku 1676 v dopise Henrymu Oldenburgovi. Newton se nejprve snažil o výpočet integrálů typu

$$f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^{n/2} dt,$$

kde n je přirozené číslo. Z klasické binomické věty snadno plyne, že pro n sudé platí

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \binom{n/2}{m} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Pro lichá n dospěl Newton nepříliš korektními úvahami k analogickému vztahu

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n/2}{m} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Derivováním podle x pak obdržel speciální případ binomické věty:

$$(1-x^2)^{n/2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n/2}{m} x^{2m}.$$

Následně usoudil, že bude platit

$$(1-x^2)^q = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{q}{m} x^{2m}$$

pro každé racionální číslo q , a nakonec dospěl k obecné binomické větě. Newton si uvědomoval, že prakticky nic nedokázal, a snažil se některé speciální případy binomické věty ověřit jiným způsobem (umocnil např. formálně rozvoj pro $(1-x^2)^{1/2}$ na druhou a zkontroloval, že opravdu vyjde $1-x^2$).

Zobecněná binomická věta hrála klíčovou roli při hledání mocninných řad elementárních funkcí, objevuje se např. v Newtonově odvození řady pro arkus sinus (odtud pak lze získat řadu pro sinus) nebo v Eulerově odvození řad pro exponenciálu a logaritmus.

2 Pokusy o korektní odvození binomické věty

Gregory ani Newton neuvedli, za jakých předpokladů binomická věta platí (Newton však u jednoho z rozvojů poznamenává, že řadu je možné užít jen pro dostatečně malé hodnoty x).

Všimněme si nyní základní myšlenky, na které jsou založeny pozdější důkazy binomické věty u Eulera, Cauchyho a Abela. Zvolíme-li pevně číslo x a označíme-li

$$f(a) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{a}{m} x^m,$$

lze dokázat, že pro každou dvojici reálných čísel a, b platí $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. Jestliže navíc uvážíme, že $f(1) = 1+x$ a f je spojitá funkce, pak předchozí funkcionální rovnice má jednoznačně určené řešení $f(a) = (1+x)^a$.

Tato úvaha je samozřejmě korektní jen v případě, že výše uvedená řada konverguje. Cauchy ve své práci z roku 1821 pomocí podílového kritéria dokázal, že to platí pro $|x| < 1$. Následně se však dopustil chyby, když prohlásil, že funkce f jako součet řady spojitých funkcí musí být spojitá. Na tuto chybu upozornil Abel, který roku 1826 uveřejnil opravený důkaz binomické věty, kde dokonce uvažoval i komplexní exponenty.

3 Závěr

K sepsání tohoto příspěvku mě podnítila diplomová práce [2], kterou jsem vedl, a kde je i seznam další literatury. Informace o historii zobecněné binomické řady jsme čerpali především z monografie [3]. Některá zajímavá fakta týkající se Abelova důkazu binomické věty a jeho protipříkladu k větě o součtu řady spojitých funkcí lze najít v článku [4] a v 16. kapitole knihy [5].

Literatura

- [1] Coolidge J. L.: *The Story of the Binomial Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 56, No. 3. (Mar., 1949), 147–157.
- [2] Ibl V.: *Taylorovy řady elementárních funkcí*. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 2009. http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/vaclav_ibl/taylorovy_rady.pdf
- [3] Edwards C. H.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [4] Sørensen K. H.: *Exceptions and counterexamples: Understanding Abel's comment on Cauchy's Theorem*. Historia Mathematica 32(2005), 453–480.
- [5] Stedall J.: *Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540–1900*. Oxford University Press, 2008.

Adresa

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz

STŘEDOVĚKÝ ZROD TRIGONOMETRICKÝCH VELIČIN

RADKA SMÝKALOVÁ

Abstract: In this text we will talk about the birth of the trigonometric functions such as sine, cosine, tangent and cotangent in the Middle Ages.

1 Úvod

Přibližně tisíc let středověku prošly at' už existující, či nově vznikající oblasti matematiky velkým vývojem (jazyk, pojmy, postupy, symbolika). Nejinak tomu bylo i v oblasti našeho zájmu, v trigonometrii. Tabulky třetiv, díky nimž byli starověcí astronomové schopni dopočítat úhly i délky stran pravoúhlého trojúhelníku, ustupovaly do pozadí. Objevovaly se vhodnější trigonometrické veličiny (jako například sinus nebo tangens), které byly po řadu staletí chápány jako délky, později jako poměry, podíly čísel (zlomky) a konečně jako čísla. I názvy a symboly pro nové trigonometrické veličiny prošly složitým vývojem. Málokdo ví, že až učenci raného novověku dali těmto veličinám označení, které přetrvalo až do dneška.

Velké uplatnění v astronomii a kartografii a potřeba stále přesnějších tabulek motivovaly mnohé středověké vzdělance k novým a stále hlubším zkoumáním, jaké obecné vlastnosti mají závislosti, které trigonometrické veličiny vyjadřují. Jejich výsledky pak na přelomu patnáctého a šestnáctého století vedly ke vzniku teorie goniometrických funkcí, které se analytickou cestou definitivně odpoutaly od svých staletých nositelů – délek stran a velikostí úhlů trojúhelníků. Pro geometrické výpočty se význam těchto funkcí nijak nesnížil, ba naopak. Analytické prostředky tyto výpočty (nadále v praxi vysoce potřebné a žádané) ještě více zefektivnily.

Zaměříme se nyní na dvě asijské oblasti a uvedené nejdůležitější stránky vývoje středověké trigonometrie doplníme o konkrétní přínosy jednotlivých osobností.

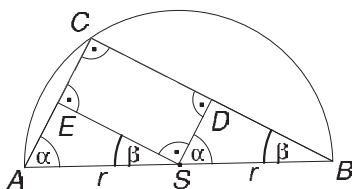
2 Trigonometrie v Indii

V oblasti trigonometrie se Indové opírali o práce helénistických autorů, ale přinesli také mnoho nového. Nejvíce čerpali z poměrně rozvinuté trigonometrie třetiv od Ptolemaia. Vzpomeňme, že jeho tabulka udává délku třetivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který vymezuje. Řešení libovolného rovinného trojúhelníku pomocí Ptolemaiovy tabulky bylo však velice zdoluhavé, což vedlo indické učence k zavedení nových trigonometrických veličin. První a nejdůležitější byla veličina sinus. Díky ní se již s třetivami při řešení trojúhelníků setkáváme velice málo, neboť poloviční délka třetivy oblouku φ je rovna sinu oblouku $\frac{1}{2}\varphi$. Ilustrujme nyní poloviční délky třetiv v kružnici o daném poloměru r pomocí obrázku. Za předpokladu, že poloměr kruhu se rovná jedné a při označení $\alpha = |\angle BAC|$ definujeme po vzoru Indů veličiny sinus a kosinus příslušné úhlu α rovnostmi

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} |BC| = |BD| = |SE|, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} |AC| = |AE| = |SD|.$$

Po zavedení úhlu $\beta = |ABC| = \frac{\pi}{2} - \alpha$ okamžitě dostáváme rovnosti
 $\sin \beta = \cos \alpha$ a $\cos \beta = \sin \alpha$.

Je nutné zdůraznit, že těmito dvěma novým délkovým veličinám, které Indové používali pouze pro úhly z intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, říkáme dnešním způsobem sinus a kosinus a jejich hodnoty značíme $\sin \alpha$, resp. $\cos \alpha$, i když to je korektní pouze v případě poloměru $r = 1$. Sami Indové pro tyto veličiny měli své názvy, které následně prošly dlouhým historickým vývojem.



Obr. 1

3 Trigonometrie v arabských zemích

Arabská matematika byla nejvíce ovlivněna matematikou mezopotámskou, řeckou a indickou. Z indické matematiky převzala zápis čísel a algoritmy pro písemné počítání, z řecké matematiky abstraktní geometrii a myšlenku axiomatické výstavby matematiky, z mezopotámského a egyptského světa převzala tradici numericky náročných výpočtů a především důraz na užití matematiky v praktickém životě. Desítkový poziční systém pronikal pomalu na Blízký východ a byl používán vedle domácích systémů.

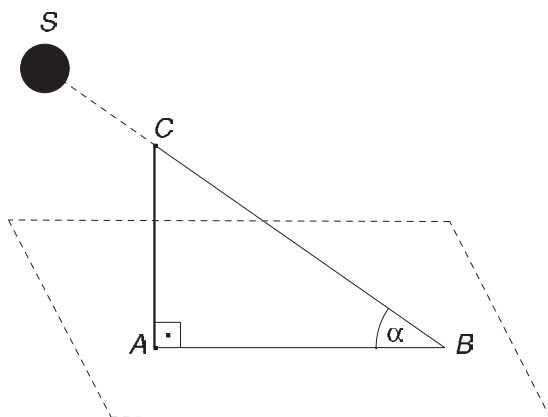
Pro rozvoj matematiky měla základní význam hlavní přírodní věda té doby – astronomie. Není tedy divu, že stejně jako v Indii, rovněž v islámských zemích byli matematikové většinou i astronomy. Článkem, který spojoval matematiku a astronomii, byla právě trigonometrie.

Základ arabských trigonometrických znalostí tvořila díla předchůdců starších kultur – jedna z indických Siddhántas, Ptolemaiovův Almagest a Menelaova Sférica. Inspirování jejich výsledky a metodami zavedli arabští učenci některé nové trigonometrické pojmy, prozkoumali vlastnosti trigonometrických veličin a vyřešili všechny případy rovinných a sférických trojúhelníků. Tím postupně propracovali trigonometrii jako samostatnou oblast matematiky.

Přistupme k tomu hlavnímu, čím konkrétním přispěli arabští učenci k rozvoji trigonometrie – zavedli nové veličiny tangens, kotangens a také sekans a kosekans. Tyto trigonometrické veličiny se v islámských dílech objevily v devátém století v souvislosti s gnómonikou, tedy nikoli v souvislosti s tětvami a oblouky vztahujícími se ke kruhu, jak

tomu bylo u veličin sinus a kosinus. Na obrázku vidíme Slunce S a tyč AC kolmou k povrchu Země. Tyč AC vrhá stín AB , z jehož konce B je vrchol C tyče vidět pod výškovým úhlem, který označíme α . Za předpokladu, že $|AC| = \text{jeden stupeň} = 60 \text{ minut}$, závisí délka stínu $|AB|$ i délka $|BC|$ slunečního paprsku mezi body B a C pouze na úhlu α . Tyto dvě Araby zavedené veličiny dnes nazýváme kotangens, respektive kosekans:

$$\cotg \alpha = |AB|, \quad \operatorname{cosec} \alpha = |BC|.$$



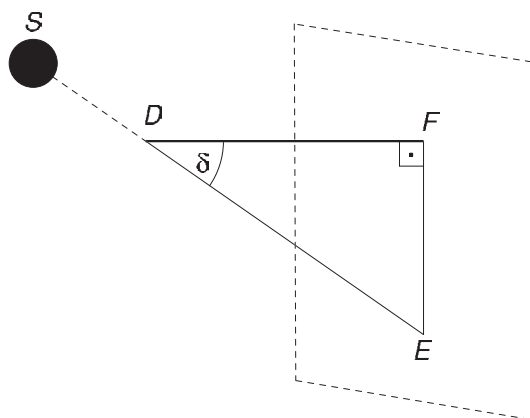
Obr. 2

Veličiny tangens a sekans definovali arabští učenci podobně. Tentokrát upevnili tyč DF kolmo na svislou zeď, aby byla vodorovná, tj. rovnoběžná se zemským povrchem (viz obr. 3). Tyč DF vrhá stín EF . Z vrcholu tyče D je konec E stínu vidět pod úhlem, který označíme δ . Za předpokladu, že $|DF| = \text{jeden stupeň} = 60 \text{ minut}$, závisí délka stínu $|EF|$ i délka $|DE|$ slunečního paprsku mezi body D a E pouze na úhlu δ . Tyto dvě veličiny dnes nazýváme tangens, respektive sekans:

$$\tg \alpha = |EF|, \quad \sec \alpha = |DE|.$$

Ještě jednou poznamenejme, že ve středověkých arabských zemích byly trigonometrické veličiny délky (kotangens se nazýval prvním, tangens druhým stínem), jejichž mírou byly (obloukové) stupně. Dnes jsou to samozřejmě čísla.

Zdůrazněme, že Arabové tyto veličiny přiřazovali pouze úhlům z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



Obr. 3

Literatura

- [1] Juškevič A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha, 1977.
- [2] Maor E.: *Trigonometric delights*. Princeton University Press, Princeton, 1998.
- [3] Červený M.: *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích – diplomová práce*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.
- [4] Boyer C. B.: *A history of mathematics*. John Wiley and sons, INC, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.
- [5] Katz V. J.: *A history of mathematics*. Addison Wesley, Menlo Park, New York, Harlow, Don Mills, Sydney, Mexico City, Madrid, Amsterdam, 1998.

Adresa

Mgr. Radka Smýkalová
 Ústav matematiky a statistiky
 Přírodovědecká fakulta MU
 Janáčkovo náměstí 2a
 602 00 Brno
 e-mail: smyky@seznam.cz

VÝVOJ VÝPOČETNÍ GEOMETRIE

PETRA SURYNKOVÁ

Abstract: This contribution deals with the major developments in computational geometry and computer graphics. It is focused on constructions of curves and surfaces that were developed for the automotive, aircraft and ship-building industry. Here, computer aided geometric design, a discipline dealing with computational aspects of geometric objects, replaced earlier methods of constructions using descriptive geometry.

1 Úvod

1.1 Rozvoj počítačové grafiky

V šedesátých letech 20. století se začaly vytvářet základy počítačové grafiky. Tehdy se tento obor zabýval zpracováním grafické informace pomocí počítače. Na začátku byly oblastmi jeho zkoumání otázky výstupu z počítače, vstup grafické informace do počítače nebo problémy související s vytvářením, manipulací a popisem grafické informace. Z rychle se vyvíjejícího vědního oboru se během sedmdesátých let 20. století začaly odštělovat nové podobory a mezi nimi i obor výpočetní geometrie (Computational Geometry). V současné době se s počítačovou grafikou setkáváme doslova na každém kroku, a to především díky růstu zobrazovacích možností osobních počítačů.

1.2 Výpočetní geometrie

Pojem výpočetní geometrie v roce 1971 poprvé zavedl *Archibald Robin Forrest*¹. Výpočetní geometrie zahrnovala geometrické teorie – např. teorie zabývající se transformacemi, zobrazením prostoru do roviny a teorie týkající se konstruování křivek a ploch pomocí počítače a grafického výstupu.

V dnešním pojetí je výpočetní geometrie obor zabývající se návrhem a analýzou efektivních algoritmů pro řešení geometrických problémů, určování vlastností a vztahů objektů v rovině a ve vícerozměrném prostoru. Tyto problémy mohou vycházet z aplikací například v počítačové grafice nebo prostorovém modelování. Hlavními oblastmi výpočetní geometrie jsou kombinatorická výpočetní geometrie (Combinatorial Computational Geometry) a numerická výpočetní geometrie, častěji známá pod názvem geometrické modelování nebo Computer Aided Geometric Design (CAGD). Právě tato oblast výpočetní geometrie bude předmětem našeho pojednání.

2 Křivky a plochy počítačové grafiky

2.1 Vývoj konstruování křivek a ploch

Geometrické modelování má ve skutečnosti velmi staré kořeny, jeho počátky sahají až do dob římského impéria. Z počátku se využívalo především v lodním stavitelství. Techniky, které se při stavbě lodí uplatňovaly, se poté nejvíce zdokonalovaly v období 13. až 16. století (především v Itálii). K tomu, aby byla základní geometrie lodí uchována, se využívaly malé dřevěné modely. Neexistovaly výkresy, které by tvar lodí popisovaly.

¹ Absolvent strojího inženýrství na University of Edinburgh, zakládající člen Computer-aided Design Group, později profesor na University of East Anglia. Konzultant u Rolls-Royce, Boeing, General Motors a dalších.

První známé zmínky o konstruktivní geometrii, pomocí níž se definovaly křivky užité v lodním průmyslu, pocházejí až z roku 1752.

V novodobé historii zaznamenalo geometrické modelování veliký pokrok v oblasti letectví. V roce 1944 publikoval Roy Liming² knihu *Analytical Geometry with Application to Aircraft*, ve které se poprvé objevilo klasické konstruování kombinované s výpočetními metodami (viz například [3]).

Konstruování křivek a ploch spočívalo v minulosti na metodách deskriptivní geometrie. Liming poprvé zavedl mnohem účinnější metody. Jako první začal popisovat křivky numericky. Výhody byly nesporné, neboť matematický popis je interpretován, na rozdíl od kresby či nákresu, vždy správně. Práce Liminga měla veliký ohlas a brzy se rozšířila i do dalších amerických společností pro výrobu letadel.

Kromě kružnic a kuželoseček, které se do té doby využívaly jak v lodním, tak v leteckém průmyslu, se začaly soustavně používat kubiky, plochy se rozdělily na části (tzv. pláty), které se definovaly matematickými rovnicemi. Na začátku šedesátých let 20. století James C. Ferguson³ matematicky popsal plochu s kubickými parametrickými křivkami, na místo ploch vytvářených do té doby graficky na základě oblouků kuželoseček.

V téže době dalším významným badatelem, který matematizoval technické výkresy povrchů letadel, byl Steven Anson Coons⁴. Pracoval na popisu obecných plátů ploch, které byly zadávány libovolnými okrajovými křivkami. Jeho teorie se staly základem pro definice ploch, které jsou dnes běžně užívány – např. B-spline nebo NURBS plochy.

V šedesátých letech 20. století se vyrábějí první počítače, které se využívají ve strojírenském průmyslu k řízení strojů. Postupně se tyto počítače rozšiřují do dalších odvětví. V této době však ještě nebyly známé metody, jak předávat počítačům data v numerické podobě. Limingova metoda se z počátku používala jen v leteckém průmyslu.

Technický vývoj grafického výstupu z počítače dovršují aktivní grafické obrazovky, jež napomáhají efektivnímu konstruování křivek a ploch.

V Evropě přispěli velkým dílem k rozvoji geometrického modelování (a to právě v předávání dat počítači) nezávisle na sobě Francouzi Paul de Faget de Casteljau a Pierre Etienne Bézier.

Casteljau (narozen 1930 v Besançon) pracoval pro francouzskou automobilovou firmu Citroën. K zadávání křivek používal kontrolní polygon. Do té doby tato metoda nebyla nikdy použita. V diferenciální geometrii sice existoval pojem kontrolního polygonu (od roku 1923), ovšem nenalezl své uplatnění v praxi. Místo toho, aby se tedy křivka nebo plocha zadávala pomocí bodů, které na ní leží, zadává se pomocí blízkých bodů. Změna křivky či plochy se zajišťuje změnou poloh bodů kontrolního polygonu, nemanipuluje se tedy přímo s křivkou nebo plochou. Postup, který Casteljau používal, je dnes známý jako *algoritmus de Casteljau*. Firma Citroën však jeho práci držela v tajnosti a i když Casteljau navrhl své postupy už v roce 1959, zveřejněny byly až na konci sedmdesátých let 20. století.

Konkurenční francouzskou automobilkou byla firma Renault, ve které působil Bézier. Bézier (narozen 1910 v Paříži, zemřel 1999 v Paříži) se na začátku šedesátých let stává vedoucím konstrukčního oddělení a zabývá se tím, jak počítačově reprezentovat křivky a plochy. Lze dokázat, že křivky, které vyvinul, jsou shodné s těmi, které popsal Castel-

² Analytik, pracoval pro North American Aviation (výrobce letadel), společně s konstruktérem a designérem Edgarem Schmuedem matematizoval povrchy letounů.

³ Analytik u amerického výrobce letadel Boeing.

⁴ Profesor na MIT (Massachusetts Institute of Technology) ve strojírenském inženýrství, zaměstnanec u amerického výrobce letadel Chance Vought.

jau. Dokonce je zcela nezávisle objeven také de Casteljau algoritmus. Bézierova práce byla velmi záhy publikována a R. A. Forrestem doplněna také o popis Bézierových křivek pomocí Bersteinových polynomů (Casteljau používal Bersteinovy polynomy již v padesátých letech). Díky tomu tyto křivky a plochy nesou jméno Béziera, přestože je Casteljau vyvinul mnohem dříve.

Kromě toho známý program UNISURF pro navrhování tvaru karosérií, který firma Renault používala, byl založen zcela na Bézierových křivkách a plochách.

Většina významných objevů v oblasti geometrického modelování byla až do sedmdesátých let 20. století izolována. Nakonec tyto snahy vyvrcholily vznikem nové vědní disciplíny CAGD. Bez zavedení počítačů do výroby by se ale tato disciplína jistě nemohla rozvinout.

Metody počítačového modelování se postupem času velmi zdokonalily a v současné době je k dispozici velmi kvalitní matematický aparát, který je stále aktivně rozvíjen. Výraznou změnu přineslo také používání racionálních Bézierových křivek a ploch a neuniformních racionálních B-spline křivek a ploch, tzv. NURBS. Tyto metody umožňují generovat klasické geometrické prvky (kuželošečky, kulové plochy, ...) za pomoci aproximace.

V posledních letech vývoj v oblasti geometrického modelování přinesl mnoho dalších typů křivek a ploch zaváděných k různým speciálním účelům.

2.2 Příklady křivek a ploch počítačové grafiky

Křivky a plochy můžeme popisovat různými způsoby – explicitně, implicitně či parametricky. Volba reprezentace křivky či plochy závisí na konkrétním účelu a aplikaci. V počítačové grafice se pro vyjádření křivek a ploch zřejmě nejčastěji používají parametrické rovnice. Nebudeme se nyní zabývat teorií parametrického popisu křivek a ploch, odkazují čtenáře na literaturu, např. [1] nebo [5].

Pro jednoduchost začneme s křivkami, poté přejdeme k plochám.

Základním druhem křivek v počítačové grafice jsou křivky *polynomiální*. Z těchto křivek lze skládat křivky *po částech polynomiální*, jejichž segmenty jsou polynomiální křivky. Nejčastěji používanými polynomiálními křivkami jsou *kubiky*, tedy křivky třetího stupně. Křivky vyšších stupňů se většinou nepoužívají, protože se nežádoucím způsobem zvlňují a jsou náročné na výpočet.

Modelování křivek se realizuje většinou tak, že je definováno několik řídicích bodů. Podle aplikace můžeme navíc přidávat další požadavky, např. hladkost navazování, tečné vektory. Existují dva základní způsoby zpracování vstupní množiny řídicích bodů, a to *interpolace* a *aproximace*. Při interpolaci výsledná křivka prochází zadanými řídicími body, při aproximaci se k nim pouze blíží. Interpolací metody nejsou v počítačové grafice příliš často používány. Uveďme si tedy příklady křivek aproximačních.

Patrně nejpobulárnější aproximační křivkou je *Bézierova křivka*, přičemž nejpobulárnější je opět kubika. Bézierova křivka n -tého stupně je určena $n + 1$ body řídicího polygonu (kubika je tedy určena 4 řídicími body). Z definice této křivky vyplývá, že prochází prvním a posledním bodem řídicího polygonu, ostatní body pouze aproximuje. Nevýhodou takové křivky je, že při změně polohy jednoho bodu řídicího polygonu dojde ke změně tvaru celé křivky. To se řeší dělením křivek na segmenty a jejich postupným napojováním. Více informací může čtenář nalézt v [2] nebo [4]. Další aproximační metodou jsou *Coonsovy kubiky*, které na rozdíl od Bézierových křivek neprocházejí krajními body řídicího polygonu. Dalším typem křivek jsou tzv. *B-spline* křivky. Ty se od předchozích liší tak, že se skládají z více segmentů. Například Coonsův kubický B-spline vznikne na-

pojováním Coonsových kubik. Obecnější křivky jsou potom tzv. NURBS – neuniformní racionální B-spline křivky.

Uvedené příklady křivek nejsou v žádném případě kompletní, odkazují čtenáře na literaturu, například [4], kde je možné nalézt další typy a podrobné popisy křivek.

Aparát konstruování křivek je rozšiřitelný do vyšší dimenze. Podobně jako u křivek, rozdělujeme i plochy na interpolační a aproximační. Opět se používají hlavně aproximační plochy, protože interpolace je ve vyšších dimenzích poměrně složitou úlohou. Plochy modelujeme pomocí zadávání sítě řídicích bodů, která tvoří v trojrozměrném prostoru mnohostěn. Opět můžeme přidávat další speciální podmínky.

Příkladem aproximačních ploch jsou *Bézierovy plochy*, *Coonsovy plochy* nebo *B-spline plochy*. Více typů může čtenář nalézt v [1], [2] nebo [4]. Bézierovy plochy $m \times n$ -tého stupně jsou definovány maticí řídicích bodů velikosti $(m+1) \times (n+1)$. Z definice této plochy vyplývá, že okrajovými křivkami plochy jsou křivky Bézierovy. Stejně jako u křivek se používají nejčastěji polynomy stupně tři.

Velmi zajímavou oblastí týkající se modelování ploch je jejich napojování (tzv. plátování), přičemž se požadují různé stupně hladkosti. Plátování se využívá při konstrukci složitějších tvarů a výhody jsou obdobné jako u křivek – změny poloh řídicích bodů ovlivňují výsledný tvar pouze lokálně.

3 Závěr

Geometrické modelování je obor, který se neustále vyvíjí. V současné době využívá počítačové modely prakticky každá oblast výroby. Rozvoj grafických editorů, tzv. CAD systémů, umožnil projektování na počítači v různých odvětvích průmyslu.

Podrobnější popis vývoje výpočetní geometrie a především geometrického modelování by mohl být zajímavým námětem například pro diplomovou práci.

Literatura

- [1] Drs L.: *Plochy ve výpočetní technice*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1984.
- [2] Farin G.: *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, USA, 2002.
- [3] Gerald E. F., Hoschek J., Kim M.: *Handbook of computer aided geometric design*. Elsevier Science B. V., Amsterdam, Netherland, 2002.
- [4] Mortenson M. E.: *Geometric Modeling*. Wiley Computer Publishing, New York, USA, 1997.
- [5] Žára J., Beneš B., Felkel P.: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, Praha, 1998.

Adresa

Mgr. Petra Surynková
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: petra.surynkova@mff.cuni.cz

ZLOMKY VE STARÉ INDII

IRENA SÝKOROVÁ

Abstract: The aim of this article is to inform about the oldest use of fractions in ancient India. Notational system and old Indian terms are described. Basic arithmetical operations with fractions and their mathematical properties are explained.

1 Úvod

1.1 Nejstarší zmínky o zlomcích

V Indii byly zlomky známy velmi dávno. Zmínky o zlomcích můžeme najít už v nejstarších védských textech, např. *Rgvéda* (asi 1000 př. n. l.) obsahuje pojmy *ardha* (jedna polovina) a *tri-páda* (tři čtvrtiny). V nejstarších indických dílech o geometrii, tzv. *Šulvasútrách*¹ (asi 500 př. n. l.), se vyskytují zlomky při popisu řešení úloh.

Na rozdíl od starých Egyptanů, kteří používali pouze zlomky s čitatelem rovným jedné (tzv. kmenné zlomky²), v Indii počítali i se zlomky s čitatelem větším než jedna. Zlomek tři čtvrtiny zmiňovaný v *Rgvédě* je pravděpodobně nejstarším známým zlomkem s čitatelem větším než jedna na indickém území.

Zlomky byly potřebné zejména při vyjadřování jednotek času, délky, váhy, objemu atd. Staré práce o aritmetice začínají uvedením různých jednotek a obsahují speciální pravidla na zjednodušení zápisu série měr pomocí vhodných zlomků. Systémy měr byly popsány slovy, která se lišila v jednotlivých oblastech i obdobích.

1.2 Zdroje

Kromě již zmiňovaných prací (*Rgvéda* a *Šulvasútry*) se zlomky objevily i v anonymním rukopise *Bakhshálí* (asi 200 n. l.). Pravidla pro zápis a práci se zlomky uvádí např. Brahmagupta (asi 598 až 670) v díle *Bráhma-sphuta-siddhánta* a Mahávíra (asi 800 až 870) v knize *Ganita-sára-samgraha*. K pozdějším autorům patří Bháskara II. (1114–1185), jehož práce o matematice *Lílávati* byla velmi oblíbená a později k ní bylo napsáno několik komentářů.

Existovaly i další matematické práce, v nichž byla pravidla pro počítání se zlomky popsána podobným způsobem.

¹ V *Šulvasútrách* jsou popsána pravidla pro konstrukci obětních oltářů a ohňů.

² Ve Staré říši byly používány i zlomky $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$; později se pracovalo pouze s kmennými zlomky, ke

kterým se ještě přidával zlomek $\frac{2}{3}$ (viz [1]).

2 Zlomky

2.1 Terminologie

Indové zlomek nazývali *bhinna*, což znamená zlomený. Další výrazy používané pro zlomek byly *bhāga* nebo *amśa* (část, díl), později se pro zlomek používal i termín *kalā*, který původně, ve védském období, znamenal jednu šestnáctinu. Ganeša, komentátor *Lílávati* (16. stol.), nazýval čitatele zlomku (to, co se mělo dělit) *bhāga*, *amśa*, *vibhāga* nebo *lava*, pro jmenovatele (to, čím se dělilo) uváděl názvy *hara*, *hāra*, *čheda* (viz [2]).

Ve védských dílech *Šulvasútrách* se kmenné zlomky vyjadřovaly základními číslovkami ve spojení se slovem *bhāga* nebo *amśa*. Tedy např. *pañca-daśa-bhāga* (patnáct dílů) znamená jednu patnáctinu. Často se se slovy *bhāga* nebo *amśa* spojovaly i řadové číslovky *pañcama-bhāga* (pátý díl) neboli jedna pětina. Dokonce i slovo *bhāga* se někdy vynechávalo, patrně kvůli metrice verše, tedy např. *šaṣṭa* (šestý) znamenalo jednu šestinu. Zlomky $\frac{3}{8}$ nebo $\frac{2}{7}$ se nazývaly *tri-aṣṭama* (tři osmé) nebo *dvi-saptama* (dvě sedmé). V rukopise *Bakhṣhālī* se zlomek $\frac{3}{8}$ nazývá *trajaṣṭa* (tři osmé) a smíšené číslo $3\frac{3}{8}$ je *trajastraṣṭa* (tři tři osmé) (viz [4]).

Protože neexistovala vhodná symbolika k tomu, aby bylo možné vyjadřovat aritmetické operace se zlomky, rozdělovaly se výrazy se zlomky do několika tříd, kterým se říkalo *džāti*. Existovala pravidla, podle nichž bylo možné tyto třídy vyjádřit pomocí vhodných zlomků. Jediným používaným symbolem byla tečka, která značila záporné číslo, resp. číslo, které se má odečíst. Někdy bylo slovo *bhinna* užíváno i pro celou třídu zlomků.

Asi od 2. stol. př. n. l. se zlomky zapisovaly podobným způsobem jako dnes – čítatel nad jmenovatelem, ale bez zlomkové čáry. Smíšená čísla měla celé číslo umístěné nad čitatelem zlomku. Pokud se v jednom problému vyskytovalo několik zlomků, oddělovaly se vodorovnými a svislými čarami.

2.2 Krácení zlomků

Před prováděním operací se zlomky se pokládalo za samozřejmé zlomky zkrátit. Tento proces se nazýval *apavartana*, ale sám nebyl považován za operaci. Nikde není popsán jako pravidlo, zřejmě se znalost předávala ústně. Určitě byl rozšířen v Indii na počátku našeho letopočtu, protože se o něm zmiňuje například i nematematická práce *Tattvārthadhigama-sútra-bhāṣja*, jejímž autorem je Umásvāti (kolem roku 150). Jedná se o přirovnání ve filozofické diskusi (viz [3]):

Nebo jako když odborník – matematik pro zjednodušení operací odstraní společného dělitele čitatele i jmenovatele zlomku, zlomek se nezmění, tak ...

2.3 Převedení na společného jmenovatele

Tato operace se nazývala *kalá-savarnama*, *savarnama* nebo *samačheda-vidhi*. Používala se, když bylo potřeba sečíst nebo odečíst zlomky. Tato úprava byla důležitá a vždy se připomínala spolu se sčítáním a odčítáním.

Mahávíra byl prvním z indických matematiků, který užíval pojem *niruddha* (nejmenší společný násobek), aby zjednodušil postup (viz [5]). Bháskara nepoužíval výraz *niruddha*, společného jmenovatele získal jako součin jmenovatelů. Existenci nejmenšího společného násobku zmínil takto (viz [2]):

Čítatel a jmenovatel mohou být šikovným počtářem násobené jiným jmenovatelem, který je zkrácený společným dělitelem.

3 Operace se zlomky

Před vlastním počítáním se smíšená čísla převedla na nepravé zlomky a pokud to bylo možné, tyto zlomky se zkrátily.

3.1 Sčítání a odčítání

Sčítání zlomků se nazývalo *bhinna-sankalita*, odčítání *bhinna-vjutkalita*. Tyto operace se prováděly až po převedení zlomků na společného jmenovatele. Pokud se sčítaly nebo odčítaly zlomky společně s celými čísly, celé číslo bylo považováno za zlomek se jmenovatelem rovným jedné.

3.2 Násobení

Výraz *bhinna-gunana* se užíval pro operaci násobení zlomků. Brahmagupta popsal součin zlomků (viz [2]) jako součin čítelů dělený součinem jmenovatelů. V pravidle pro násobení zlomků uvedl i poznámku, jak se před násobením nejprve smíšená čísla převedou na nepravé zlomky.

Ostatní autoři popisovali tuto operaci podobným způsobem, jen Mahávíra ještě odkazoval na krácení křížem, aby se zjednodušilo počítání (viz [5]). Při krácení křížem, pokud to je možné, se krátí čítel prvního zlomku se jmenovatelem druhého nebo čítel druhého zlomku se jmenovatelem prvního.

3.3 Dělení

Bhinna-bhága-hara byl název užívaný pro dělení zlomků. Dělení zlomků se provádělo stejně jako dnes – první zlomek se násobil převrácenou hodnotou druhého. V příkladu, který uvedl Brahmagupta (viz [2]), byla opět nejdříve převedena smíšená čísla na nepravé zlomky a potom teprve bylo provedeno dělení.

3.4 Umocňování a odmocňování

V Indii patřil mezi základní aritmetické operace i výpočet druhé a třetí mocniny a výpočet druhé a třetí odmocniny. Pravidla pro umocňování a odmocňování zlom-

ků nebývala uvedena v kapitolách o umocňování a odmocňování, ale v kapitolách o počítání se zlomky. Při výpočtu se využívala znalost vzorců $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, resp.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Podobně i pro třetí mocninu a odmocninu.

4 Třídy výrazů se zlomky

Indové z nedostatku vhodné symboliky dělili výrazy se zlomky do několika tříd.

a) *Bhága* neboli tvar $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \pm \frac{e}{f}\right)$ se obvykle zapisoval

a	c	e
b	d	f

,

případně

a	•c	•e
b	d	f

, kde je tečkami naznačeno odčítání.

b) *Prabhága* neboli součin $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ se zapisoval podobným způsobem

tem

a	c	e
b	d	f

.

c) *Bhágánubandha* znamenalo buď $\left(a + \frac{b}{c}\right)$, tzv. *rúpa-bhágánubandha*

(spojení přirozeného čísla a zlomku), v zápise

a
b
c

,

nebo $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)$, tzv. *bhága-bhágánubandha* (spojení zlomku a zlomku),

které se zapisovalo jako

a
b
c
d

.

d) *Bhágápaváha* mohlo znamenat $\left(a - \frac{b}{c}\right)$, tzv. *rúpa-bhágápaváha* (spojení

přirozeného čísla a zlomku), nebo $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)$, tzv. *bhága-bhágápaváha* (spojení zlomku a zlomku).

Této třídě zlomků odpovídal zápis

a
•b
c

, respektive

a
b
•c
d

Kromě těchto tříd popisují někteří autoři ještě další dva typy.

e) *Bhága-bhága*, tedy $\left(a : \frac{b}{c}\right)$ nebo $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)$. Zápis byl stejný jako pro třídu *bhágánubandha*. Je zajímavé, že v zápise se nikde neobjevoval symbol pro dělení. To, že se má dělit, vyplývalo ze zadání problému.³

f) *Bhága-mátr* neboli kombinace tvarů uvedených výše. Mahávíra poznamenal, že těchto kombinací může být 26. Zřejmě tedy už byly známé postupy na výpočet kombinací $(C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 26)$.

Při zápisu výrazů se zlomky je zřejmá nejednoznačnost:

Zápis $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ mohl znamenat $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$ stejně jako $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)$.

Podobně vyjádření $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ mohlo znamenat $\left(1 : \frac{1}{3}\right)$, ale také $1\frac{1}{3}$.

Pravidla pro zjednodušení prvních dvou tříd jsou pravidly pro sčítání nebo odčítání a násobení.

Úpravu výrazů třídy *rúpa-bhágánubandha* a *rúpa-bhágápaváha* najdeme např. u Bháskary (viz [2]), můžeme je vyjádřit jako $a \pm \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c \pm b}{c}$.

Pravidla pro zjednodušení třídy *bhága-bhágánubandha* a *bhága-bhágápaváha* popsal Brahmagupta (viz [2]). Tomuto pravidlu v současné symbolice odpovídá zápis

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot (d \pm c)}{b \cdot d}.$$

5 Kmenné zlomky

Mahávíra popsal několik pravidel, v nichž počítal s kmennými zlomky (viz [5]). Tato pravidla se nevyskytují v žádné jiné práci, snad proto, že je ostatní nepovažovali za užitečná a důležitá.

³ Pouze v rukopise *Bakhshálí* se někdy před nebo za příslušnou veličinu uváděl výraz *bhá* (zkratka vytvořená ze slova *bhádžana* nebo *bhágahára*, což byly výrazy pro dělení).

a) Vyjádření jedničky jako součtu n kmenných zlomků. V pravidle byla využita znalost vzorce pro součet $n - 2$ členů („střední“ sčítance v rozepsaném součtu) geometrické řady s prvním členem rovným $\frac{1}{3}$ a kvocientem také $\frac{1}{3}$.

b) Vyjádření jedničky jako součtu lichého počtu kmenných zlomků.

c) Vyjádření kmenného zlomku jako součtu určitého počtu zlomků, jejichž čitatelé jsou daní. Ve speciálním případě, kdy všichni daní čitatelé jsou rovni jedné, se jedná o vyjádření kmenného zlomku jako součtu určitého počtu kmenných zlomků.

d) Vyjádření libovolného zlomku jako součtu kmenných zlomků.

e) Vyjádření kmenného zlomku jako součtu dvou jiných kmenných zlomků.

6 Závěr

Zlomky měly v indické matematice důležité místo, pravidla pro počítání se zlomky byla pečlivě rozříděna a podrobně popsána.

Literatura

- [1] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Dějiny matematiky, svazek 23, Prometheus, Praha, 2003.
- [2] Colebrook H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara*. John Murray, London, 1817.
- [3] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics (part I)*. Molital Banarsidass, Lahore, 1935, 1938.
- [4] Kaye G. R.: *The Bakhshali Manuscript: a study in medieval mathematics (parts 1–2)*. Calcutta: Government of India Central Publication Branch, 1927–1933.
- [5] Rangacarya M.: *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English Translation and Notes*. Government Press, Madras, 1912.

Adresa

RNDr. Irena Sýkorová
Katedra matematiky
Vysoká škola ekonomická
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: sykorova@vse.cz

TEORIE AUTOMORFNÍCH FUNKCÍ

MIROSLAVA TIHLAŘÍKOVÁ

Abstract: One of the most significant results achieved in mathematics in the nineteenth century was creation of the theory of automorphic functions. It was also the first significant application of non-Euclidean geometry. The study of Riemann surfaces from this point of view eventually led to the proof of the famous uniformization theorem.

1 Zrod teorie automorfních funkcí

1.1.1 Inspirace

H. Poincarého (1854–1912) k objevu automorfních funkcí inspirovala práce německého matematika I. L. Fuchse (1833–1902), který se ve svých článcích (například viz [1]) z let 1880 a 1881 zabýval řešením lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. Funkce, které Poincarého zaujaly a jejichž vlastnosti začal zkoumat, se v práci Fuchse ovšem vyskytovaly jen okrajově.

1.1.2 Problémy s pojmenováním

Tyto funkce, které dnes nazýváme automorfní, tehdy Poincaré nazval podle Fuchse. To ale způsobilo problém, když F. Klein (1849–1925) upozornil na to, že v práci H. A. Schwarze¹ (1843–1921) se tyto funkce objevily dříve.

Poincaré uznal, že kdyby Schwarzovu práci znal, tak by tyto funkce pojmenoval jinak, ale odmítl zpětně funkce přejmenovat; označení *Fuchsovy funkce* se ale nakonec neujalo.

2 Rozvoj teorie automorfních funkcí

2.1.1 Soupeření Poincarého a Kleina

Poincaré si uvědomil, že transformace, které použil k definici automorfních funkcí, jsou totožné s transformacemi neeukleidovské geometrie. Rozpracoval teorii automorfních funkcí jako zobecnění trigonometrických a eliptických funkcí.

V červnu roku 1881, poté co Klein přečetl několik Poincarého článků na toto téma, začala korespondence mezi těmito matematiky obsahující matematické otázky, ale i problematiku pojmenování těchto funkcí (viz [2]).

Kleinovo úsilí o přispění k teorii automorfních funkcí skončilo podlomením jeho zdraví na podzim roku 1882.

2.1.2 Uniformizační teorém

Poincarého první pokus o důkaz uniformizačního teorému nebyl korektní². O důležitosti tohoto problému svědčí i to, že byl Hilbertem pod názvem „Uniformizace

¹ V jeho práci se poprvé objevily hyperbolické mozaiky kruhového disku.

² Dokázal pouze možnost uniformizace libovolné algebraické funkce dvou proměnných pomocí automorfních funkcí jedné proměnné.

analytických závislostí pomocí automorfních funkcí“ uveden jako 22. z jeho slavných 23 matematických problémů.

Uniformizační teorém říká, že každá jednoduše souvislá Riemannova plocha je konformně ekvivalentní s komplexní rovinou, Riemannovou sférou (= komplexní rovinou doplněnou bodem ∞), nebo otevřeným kruhovým diskem.

Korektní důkaz byl podán až v roce 1907, a to nezávisle na sobě Poincarém a Koebem.

3 Závěrem

3.1.1 Význam neeukleidovské geometrie

Uniformizační teorém klasifikuje všechny Riemannovy plochy podle jejich univerzálního pokrytí do tří skupin, a tím redukuje mnoho aspektů studia Riemannových ploch na studium roviny, sféry a disku. Z pohledu toho, jaké diskrétní grupy operují na těchto prostorech, je případ kruhového disku (tedy modelu neeukleidovské geometrie) nejzajímavější. Omezíme-li se na kompaktní Riemannovy plochy, potom komplexní rovina nakrývá pouze torus (= anuloid) a Riemannova sféra nakrývá pouze sama sebe. Všechny další kompaktní Riemannovy plochy (sféry s dvěma a více uchy) potom nakrývá otevřený kruhový disk. Význam neeukleidovské geometrie pro vznik teorie automorfních funkcí vyzdvihl J. Hadamard (1865–1963) (viz [3]).

Literatura

- [1] Fuchs L.-I.: *Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variablen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 89(1880).
- [2] Poincaré H.: *Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires. (Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein)*. Mathematische Annalen 1882, 52–53.
- [3] Hadamard J.: *Non-Euclidean geometry in the Theory of Automorphic Functions*. American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1999.

Adresa

Mgr. Miroslava Tihlaříková
Ústav matematiky
Fakulta lesnická, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita
Zemědělská 3
603 00 Brno
e-mail: tihlarik@mendelu.cz

MÖBIUV BARYCENTRICKÝ POČET A GEOMETRICKÉ TRANSFORMACE

DANA TRKOVSKÁ

Abstract: August Ferdinand Möbius was one of the leading German mathematicians of the 19th century. He developed the barycentric calculus containing the first important example of homogeneous coordinates. In this article we focus on geometric transformations and Möbius' contribution to the classification of geometries. At the end, circular transformations are shortly mentioned.

1 August Ferdinand Möbius

August Ferdinand Möbius se narodil dne 17. listopadu 1790 ve městě Schulpforta (Sasko-Anhaltsko, dnes Německo). Do svých třinácti let byl vzděláván doma, roku 1803 nastoupil na střední školu v Schulpfortě. Roku 1809 střední školu ukončil a odešel na univerzitu do Lipska. Na přání rodičů začal studovat práva, již po prvním semestru však dal přednost studiu matematiky, fyziky a astronomie.

Roku 1813 odjel A. F. Möbius na univerzitu do Göttingen, kde po celý rok studoval teoretickou astronomii u Carla Friedricha Gaussa (1777–1855), který v té době působil jako ředitel tamní hvězdárny. Poté, opět na rok, odjel na univerzitu do Halle, kde studoval u Johanna Friedricha Pfaffa (1765–1825) astronomii a hlavně matematiku. Roku 1815 sepsal již jako soukromý docent v Lipsku svou disertační práci o pozorování stálic a začal pracovat na své habilitační práci věnované trigonometrickým rovnicím. Obě tyto práce mu přinesly pověst teoretického astronoma. Roku 1816 byl přijat jako mimořádný profesor na stolicí astronomie a vyšší mechaniky.

V roce 1844 dostal A. F. Möbius pozvání na univerzitu v Jeně a patrně v důsledku toho mu univerzita v Lipsku nabídla místo řádného profesora vyšší mechaniky a astronomie. A. F. Möbius je zastával až do své smrti. Po celou dobu svého působení v Lipsku, tedy více než padesát let, působil také jako pozorovatel a od roku 1848 jako ředitel lipské hvězdárny (astronomické observatoře Pleissenburg). Zemřel dne 26. září 1868 v Lipsku.

A. F. Möbius byl v německých zemích významným představitelem algebraické geometrie, je považován za jednoho ze zakladatelů topologie, věnoval se také teorii čísel. V roce 1827 publikoval svou nejvýznamnější práci *Der barycentrische Calcul*¹, roku 1837 vydal dvoudílnou učebnici *Lehrbuch der Statik*. Ačkoliv jeho nejvýznamnější práce spadají do matematiky, sepsal také významné astronomické práce, např. *Die Hauptsätze der Astronomie* (1836) a *Die Elemente der Mechanik des Himmels* (1843).

Téměř všechny jeho matematické příspěvky byly publikovány v letech 1828 až 1858 v Crelleově časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Jedná se převážně o geometrické práce, většina z nich se zabývá rozvíjením a aplikacemi metody, jejíž základy byly položeny v Barycentrickém počtu. Möbiovy sebrané spisy byly publikovány ve čtyřech svazcích v Lipsku v letech 1885 až 1887 (viz [2]).

¹ Úplný název: *Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte*. Viz [1].

2 Barycentrické souřadnice

V knize *Der barycentrische Calcul* (1827) představil A. F. Möbius poprvé tzv. *homogenní (barycentrické) souřadnice*, které umožňují charakterizovat i nekonečně vzdálené body v projektivní rovině a operovat s imaginárními prvky. Základní myšlenka je následující. Uvažujme pevně daný trojúhelník. Za souřadnice libovolného bodu roviny pak A. F. Möbius označil hmoty m_1, m_2, m_3 , které musíme umístit ve vrcholech daného trojúhelníku tak, aby uvažovaný bod roviny byl těžištěm (barycentrem, v originále *Schwerpunkt*) těchto hmot. Pokud všechny tři hmoty vynásobíme stejnou konstantou, jejich těžiště se nezmění. Barycentrické souřadnice bodu proto nejsou určeny jednoznačně, jednoznačně je určen pouze jejich poměr $m_1 : m_2 : m_3$.

Homogenní souřadnice se brzy staly obecně používaným prostředkem algebraické projektivní geometrie. Möbiova myšlenka užití barycentrických souřadnic k popisu bodů projektivní roviny připoutala okamžitě pozornost celé matematické komunity. Vytvořením prvního významného příkladu homogenních souřadnic ukázal A. F. Möbius cestu, jak přenést Descartův analytický přístup do kontextu projektivní geometrie.

Inspiroval tím například Julia Plückera (1801–1868), který roku 1830 poprvé představil tzv. *trilineární souřadnice*. Postupoval však jinak než A. F. Möbius. Uvažoval pevně daný trojúhelník a za souřadnice libovolného bodu roviny vzal orientované kolmé vzdálenosti uvažovaného bodu od přímek, v nichž leží strany daného trojúhelníku. Tyto souřadnice opět nejsou určeny jednoznačně (závisí na volbě jednotky), jsou určeny až na násobek libovolnou konstantou. Obecné homogenní souřadnice projektivního prostoru, které se dnes běžně používají, pak získal jako speciální případ trilineárních souřadnic, který odpovídá situaci, kdy se jedna strana trojúhelníku stane přímkou v nekonečno.

3 Geometrické transformace

3.1 Geometrické transformace v Barycentrickém počtu

A. F. Möbius se v Barycentrickém počtu mimo jiné zaměřil na vyšetřování transformací zprostředkujících přechod od jednoho geometrického útvaru k druhému. Geometrickou transformaci, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení mezi dvěma objekty prostoru, nazýval A. F. Möbius termínem *Verwandschaft* (příbuznost). Základní „geometrické příbuznosti“ byly v dané době všestranně studovány, a proto se brzy objevila otázka jejich klasifikace, kterou se A. F. Möbius ve své knize zabýval.

V předmluvě vysvětluje, jak ho velké možnosti barycentrických souřadnic podnítily k přechodu od vyšetřování podobností ke studiu afinit, a jak tím zesílil jeho zájem o studium geometrických příbuzností vůbec. To jej vedlo k popisu mnoha dalších podobných vztahů mezi geometrickými útvary, a tak vznikla druhá část jeho knihy pojednávající o geometrických příbuznostech jako o nauce, která v sobě zahrnuje základy veškeré geometrie a která by byla jednou z nejobtížnějších, kdyby měla být zpracována v plné obecnosti a do všech důsledků.²

² *Man sieht augenblicklich, dass zwei solche Figuren einander nicht ähnlich sind, sondern in einer allgemeineren Beziehung zu einander stehen. ... Zugleich aber wurde ich dadurch bewogen, noch mehrere dergleichen Beziehungen zwischen Figuren auszumitteln, und somit entstand der zweite Abschnitt meines Buchs, welcher von den geometrischen Verwandschaften handelt, einer Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst, die aber auch eine der schwierigsten seyn möchte, wenn sie in völliger Allgemeinheit und erschöpfend vorgetragen werden soll.* ([1], str. ix–x)

Již v předmluvě k Barycentrickému počtu vyjmenovává A. F. Möbius z geometrických příbuzností *shodnost*, *podobnost*, *afinitu* a *kolineaci* a vysvětluje jejich vzájemný vztah.³ Shodnost a podobnost (jak praví A. F. Möbius) se podstatně neliší; toto tvrzení odpovídá vlastnostem tzv. *hlavní grupy* pozdějšího *Erlangenského programu*. Obecnější jsou afinity, které zahrnují shodnosti a podobnosti jako zvláštní případy – to odpovídá vztahu mezi afinní a hlavní grupou. Ještě obecnější jsou potom kolineace.⁴ Také zde A. F. Möbius předjímal, přirozeně bez užití termínu grupa a bez výslovného grupového uvažování, začlenění afinní geometrie do geometrie projektivní.

Barycentrický počet obsahuje řadu původních výsledků z oblasti afinní a projektivní geometrie. Barycentrické souřadnice umožnily autorovi popsat celou řadu afinních a projektivních vlastností dvou- a třídimenzionálních objektů. V této souvislosti je významná část jeho práce věnována afinním a projektivním transformacím, které jsou zde poprvé zapisovány analyticky v homogenních souřadnicích, dále shodnostem a podobnostem.

A. F. Möbius ve své práci mimo jiné ukázal, že se při afinních transformacích zachovávají poměry orientovaných délek, ploch i objemů a že kolineace roviny jsou určeny dvěma libovolnými čtveřicemi odpovídajících si bodů, z nichž žádné tři nejsou kolineární. Jako první dospěl k ucelené teorii dvojpoměru čtyř kolineárních bodů a k důkazu skutečnosti, že dvojpoměr je invariantní při projektivních transformacích. V Barycentrickém počtu je též obsažena abstraktní formulace *principu duality*. V dalších letech A. F. Möbius tyto základní myšlenky dále rozvedl a rozšířil na další příbuznosti. V roce 1858, tedy již v pokročilém věku, se obrátil k úvahám o tzv. *elementárních příbuznostech* (*homeomorfismech*), které jsou ještě obecnější než kolineace. Tyto úvahy dnes zařazujeme do topologie.

Nové algebraické metody obsažené v Barycentrickém počtu umožňují obecné řešení některých fundamentálních problémů, jako je určení kuželosečky procházející danými body, resp. dotýkající se daných přímek. Jedním z nejzajímavějších a nejpřekvapivějších numerických výsledků z teorie kuželoseček je teorém, podle něhož pravděpodobnost, že pět náhodně zvolených bodů projektivní roviny leží na hyperbole, je nekonečně větší než pravděpodobnost, že tyto body leží na elipse; poměr určený výpočty je druhá odmocnina z nekonečna ku jedné.

V první polovině 19. století se poprvé objevily významnější úvahy týkající se vícerozměrné geometrie. A. F. Möbius v této souvislosti ve svém Barycentrickém počtu poukázal na to, že geometrické objekty, které nelze ztotožnit v trojrozměrném prostoru, neboť jsou navzájem zrcadlovými obrazy, by mohly být ztotožněny ve čtyřrozměrném prostoru. Dále však tuto myšlenku zamítl a uvedl, že toto ztotožnění je nemožné, neboť takový prostor nelze uvažovat.

³ ... man scheint bisher bloss diejenigen gekannt zu haben, welche aus der Gleichheit und Aehnlichkeit, als der einfachsten Verwandtschaft, ihren Ursprung ziehen ... Die Aufgaben, zu denen die Aehnlichkeit allein führt, sind hiervon nicht wesentlich unterschieden. Wohl aber gelangt man zu Aufgaben ganz anderer Art durch die Affinität und durch die Gleichheit, welche letztere eine eben so specielle Art von der Affinität ist, als die Gleichheit und Aehnlichkeit von der Aehnlichkeit allein. Noch andere Aufgaben endlich bietet die noch allgemeinere Verwandtschaft der Collineation dar. ([1], str. x–xi)

⁴ Termín *afinní* zavedl Leonhard Euler (1707–1783) v díle *Introductio in analysin infinitorum* z roku 1748. Označení *kolineace* použil A. F. Möbius z podnětu svého přítele, filologa Benjaminu Gottholda Weiskeho (1788–asi 1842).

A. F. Möbiovi se za jeho práci v oblasti geometrie dostalo uznání dvou velkých matematiků. C. F. Gauss označil Möbiův nový, jednotící pohled na geometrii jako jednu z nejrevolučnějších intuicí v historii matematiky. Barycentrický počet umístil na stejnou úroveň jako svoji teorii kongruencí, diferenciální počet a Lagrangeův variační počet. Také Felix Klein (1849–1925), jako spoluvydavatel Möbiových sebraných spisů, ocenil roku 1926 Möbiův přínos ke klasifikaci geometrie, označil ho za svého předchůdce.⁵ Plného uznání se Möbiovu životnímu dílu v geometrii dostalo až později. Nedostatek formálního, zejména algebraického aparátu, kterým byly teorie grup a teorie invariantů, neumožnil A. F. Möbiovi uskutečnit jeho zamýšlené pojetí klasifikace geometrie. K tomu dospěl až F. Klein ve svém Erlangenském programu (1872).

3.2 Kruhové transformace

Kruhovými transformacemi rozumíme bodové transformace roviny, které zobrazují zobecněné kružnice (přímky nebo kružnice) opět na zobecněné kružnice. Nejjednodušší kruhovou transformací je kruhová inverze.⁶ A. F. Möbius byl prvním matematikem, který kruhové transformace systematicky studoval, a to čistě geometrickými prostředky. Teorii kruhových transformací roviny poprvé rozvinul ve své práci *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* z roku 1855.

Kruhové transformace patří mezi konformní zobrazení; analyticky je lze popsat jako lineární lomené transformace komplexní roviny. Podle tzv. *Möbiova faktorizačního teorému* lze každou vzájemně jednoznačnou transformaci eukleidovské roviny, která zobecněné kružnice zobrazuje opět na zobecněné kružnice, složit z kruhových inverzí a osových souměrností. Teorie kruhových transformací byla brzy zobecněna do třídímního prostoru. Více informací lze nalézt např. v [4].

Literatura

- [1] Möbius A. F.: *Der barycentrische Calcul*. Georg Olms Verlag, Leipzig, 1827.
- [2] Baltzer R., Klein F., Scheibner W. (eds.): *August Möbius, Gesammelte Werke*. Band I, II, III, IV, Hirzel, Leipzig, 1885, 1886, 1886, 1887.
- [3] Klein F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Teil I, Springer, Berlin, 1926.
- [4] Coolidge J. L.: *A History of Geometrical Methods*. Dover Publications, Mineola, New York, 2003.

Adresa

Mgr. Dana Trčková
 Katedra didaktiky matematiky
 Matematicko-fyzikální fakulta UK
 Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
 e-mail: trckova@karlin.mff.cuni.cz

⁵ Wenn auch Moebius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der „Verwandtschaft“ ein Äquivalent; Moebius wird dadurch genau zu einem Vorläufer des „Erlanger Programms“. ([3], str. 118)

⁶ Tuto transformaci poprvé uvedl a zkoumal Pappos z Alexandrie (asi 290–350). Od té doby ji znovu objevilo několik dalších matematiků, jedním z prvních byl asi švýcarský matematik Jacob Steiner (1796–1863).

Z HISTORIE ŘETĚZOVÝCH ZLOMKŮ

JIRÍ WIDŽ

Abstract: In this paper we give a short history of continued fractions. The history of continued fractions is long and it actually begins in a hidden form with approximation of quadratic irrationals in ancient cultures.

1 Nesouměřitelnost úseček

Historie řetězových zlomků je velice dlouhá a je úzce spjata se snahou o aproximaci kvadratických iracionalit pomocí čísel racionálních. Jedním z prvních, kdo se zabýval aproximací čísla $\sqrt{2}$, byl **Hippasus z Metapontu** (5. st. př. n. l.), který patřil k pythagorejské škole. Pro důkaz nesouměřitelnosti velikosti úhlopříčky a velikosti strany čtverce použil geometrickou konstrukci, která je blízká konstrukci řetězových zlomků.

Důkaz existence nesouměřitelnosti (iracionality) mohl souviset s hledáním největšího společného dělitele dvou přirozených čísel (nebo společné míry dvou veličin – délek, obsahů nebo objemů), a tedy s aplikací **Euklidova algoritmu** pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel.

Dělíme-li délku úhlopříčky čtverce u délkou strany a tohoto čtverce, dostaneme:

$$\frac{u}{a} = 1 + \frac{u-a}{a}.$$

Dále pokračujeme tak, že dělíme dělitele a zbytkem $(u-a)$, tj.

$$\frac{a}{u-a} = 2 + \frac{3a-2u}{u-a}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $u^2 = 2a^2$, dostaneme $\frac{3a-2u}{u-a} = \frac{u-a}{a}$.

Algoritmus je v tomto případě nekonečný a postupně vede k řetězovému zlomku:

$$\frac{u}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{u-a}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{u-a}{a}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$$

Protože platí $\frac{u}{a} = \sqrt{2}$, dostáváme tak vyjádření $\sqrt{2}$ pomocí nekonečného jednoduchého řetězového zlomku.

Známý důkaz nesouměřitelnosti délky strany a úhlopříčky čtverce sporem pochází z Euklidových *Základů* a bývá označován jako důkaz typu „sudé a zároveň liché číslo“. Tento důkaz můžeme najít v [3]. Užití „nekonečného“ Euklidova algoritmu pro důkaz nesouměřitelnosti není nikterak doloženo, nicméně **Aristarchos ze Samu** a **Platon** užili pro poměr délky úhlopříčky a strany čtverce hodnotu 7:5 a **Heron z Alexandrie** 17:12. K těmto aproximacím lze dospět však také jiným způsobem, viz [8].

Na základě některých pramenů vznikla hypotéza, že nejdříve byla objevena nesouměřitelnost úseček v pravidelném pětiúhelníku, který souvisel se znakem pythagorejské školy.

V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ platí: $|AC| : |AB| = |AB| : (|AC| - |AB|)$.

Zvolíme-li v pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ $|AB| = 1$, pak

$$|AC| = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}),$$

což je ale hodnota **zlatého řezu** (termín zavedl **Leonardo da Vinci** v 15. století).

Poměr zlatého řezu můžeme tedy vyjádřit nekonečným jednoduchým řetězovým zlomkem:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = 1 + \frac{|AC| - |AB|}{|AB|} = 1 + \frac{1}{\frac{|AC|}{|AB|}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [1; 1, 1, 1, \dots].$$

V historickém pozadí objevu řetězových zlomků má své nezastupitelné místo také **procedura (metoda) neúplných podílů**. Tuto metodu patrně rozvinuli starořeční učenci asi ve 4. století př. n. l., ale nemáme o tom žádné důkazy, pouze náznaky v knihách středověkých arabských matematiků. Tuto metodu můžeme označit jako raný pokus o *teorii proporcí* (Eudoxos z Knidu) a její souvislost s řetězovými zlomky má své trvalé místo v monografiích o *aproximaci čísel*.

Teorie řetězových zlomků je od svého vzniku těsně svázána s Euklidovým algoritmem pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. Někteří historikové matematiky tvrdí, že tento algoritmus byl znám již před Euklidem a poprvé se objevuje u **Eudoxa z Knidu**, který je autorem tzv. *exhaustivní* (vyčerpávající) *metody*, která je předchůdkyní pozdějších infinitezimálních úvah. Eudoxovu exhaustivní metodu významně rozpracoval **Archimedes ze Syrakus**, který bývá často nesprávně považován za jejího tvůrce.

2 Objev řetězových zlomků

První pokusy o explicitní obecnou definici řetězového zlomku můžeme najít u *Fibonacciho*. V jeho díle *Liber abaci* se objevuje vzestupný řetězový zlomek v následujícím tvaru zápisu:

$$\frac{e}{f} \frac{c}{d} \frac{a}{b} = \frac{adf + cf + e}{bdf} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \frac{1}{b} + \frac{e}{f} \frac{1}{b} \frac{1}{d},$$

který lze pomocí současné matematické symboliky vyjádřit takto:

$$\frac{a + \frac{c + \frac{e}{f}}{d}}{b}.$$

Fibonacci používal ještě další způsoby zápisu řetězových zlomků. Například zápis: $\frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \frac{8}{9} O$, by se dal vyjádřit slovy takto: „osm devítin z celku a šest sedmin z osmi devítin a čtyři pětiny ze šesti sedmin z osmi devítin a dvě třetiny ze čtyř pětín ze šesti sedmin z osmi devítin z celku“.

Pokud bychom přepsali tento slovní zápis do číselného výrazu, dostaneme:

$$\frac{8}{9} + \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{9} \cdot \left(1 + \frac{6}{7} \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \right) \right) \right) = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Tento zápis je ekvivalentní řetězovému zlomku:

$$\frac{8 + \frac{48 + \frac{192 + \frac{384}{3}}{5}}{7}}{9} = \frac{8 + \frac{48 + 64}{7}}{9} = \frac{8 + 16}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Opravdové objevení řetězových zlomků je připisováno dvěma matematikům z univerzity v Bologni, jedné z prvních evropských univerzit. Prvním z nich je **Rafael Bombelli** (1526–1572), který v roce 1579 vydal ve druhém vydání svoji knihu *L'Agebra Opera* (první vydání vyšlo v roce 1572 pod názvem *L'Algebra parte maggiore dell'arimetica divisa in tre libri*). V obou vydáních se objevuje algoritmus pro rozvoj čísla $\sqrt{13}$ do následujícího řetězového zlomku:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6} + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}}.$$

Bombelliho algoritmus analyzoval a zobecnil pro libovolné přirozené číslo A , které není druhou mocninou, **Ettore Bortolotti** (1866–1947).

Další způsob, jak vyjádřit $\sqrt{A}$ pomocí řetězového zlomku, je následující:

položíme-li $A - a^2 = (\sqrt{A} + a) \cdot (\sqrt{A} - a) = r,$

dostaneme: $\sqrt{A} = a + \frac{r}{a + \sqrt{A}}.$

Pokud bychom nyní dosadili do jmenovatele zlomku za $\sqrt{A}$ pravou stranou předcházející rovnosti a tento postup opakovali do nekonečna, dostaneme nekonečný řetězový zlomek:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \dots}}}.$$

Autorem tohoto postupu je **Pietro Antonio Cataldi** (1548–1626), který je druhým ze zakladatelů teorie řetězových zlomků. Cataldi rozvinul symboliku pro řetězové zlomky a popsal některé jejich vlastnosti.

K rozvoji teorie řetězových zlomků přispěl také holandský fyzik **Christiaan Huygens**, který v roce 1682 při navrhování modelu sluneční soustavy pomocí ozubených kol použil řetězové zlomky k aproximaci zlomků s velkým čitatelem i jmenovatelem (jednalo se o poměry oběžných drah planet).

3 Rozmach teorie řetězových zlomků

Sedmnácté století je stoletím začátků teorie řetězových zlomků, osmnácté století pak můžeme označit zlatým věkem řetězových zlomků. Mezi významné matematiky této doby, kteří se zabývali řetězovými zlomky, patřili **Johan Heinrich Lambert**, **Joseph Louis Lagrange** a nemůžeme opomenout jednoho z největších matematiků všech dob, **Leonharda Eulera**, který dokázal, že každé racionální číslo lze rozvinout do konečného řetězového zlomku a iracionální číslo lze vyjádřit nekonečným řetězovým zlomkem. Jako první použil rekurentní vztahy pro výpočet prvků řetězových zlomků a zabýval se převodem řetězových zlomků do řad. Ukázal, že nekonečné řady mohou být nahrazeny konvergentními nekonečnými řetězovými zlomky.

V roce 1655 vydal **John Wallis** knihu *Arithmetica infinitorum*, ve které se poprvé objevil název řetězový zlomek: *Nempe si unitati adjungatur fractio, quae denominatorem habeat continue fractum*.

Literatura

- [1] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003.
- [2] Beckmann P.: *Historie čísla π* . Academia, Praha, 1998.
- [3] Bečvář J.: *Hrdinský věk řecké matematiky*. In Bečvář, J., Fuchs, E. (ed.): *Historie matematiky I*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 1, JČMF, Brno, 1994.
- [4] Bečvář J., Fuchs E. (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 12, Prometheus, Praha, 1999.
- [5] Brezinski C.: *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [6] Cajori F.: *A History of Mathematical Notations: Two Volumes Bound as One*. Dover Publications, Inc., New York, 1993.
- [7] Hensley D.: *Continued Fractions*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 2006.
- [8] Houska J.: *Nejen o objevu nesouměřitelnosti (iracionality) ve starověkém Řecku*. Matematika, fyzika, informatika 4(2006), 193–203.
- [9] Chinčín A. J.: *Řetězové zlomky*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1952.
- [10] Ore Ø.: *Number Theory and Its History*. Dover Publications, Inc., Mineola, 1988.
- [11] Rosen K. H.: *Elementary Number Theory and Its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1993.
- [12] Servít F.: *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
- [13] Veselý J.: *Zlatý řez a co vše s ním souvisí*. Učitel matematiky 3(1998), 153–158.

Adresa

Mgr. Jiří Widž
Gymnázium Sokolov
Husitská 2053
356 11 Sokolov
e-mail: widz@centrum.cz

TOWARZYSTWO NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU (1870–1882)

WITOLD WIĘSŁAW

Abstract: We describe scientific and editorial activity of the Society of Exact Sciences in Paris (Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu) founded in Paris by Polish scientists, refugees from the country after uprising in 1863–64 (so called January Uprising).

1 Wstęp

Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu istniało formalnie w latach 1870–1882. Jednak okres jego działalności należy rozszerzyć na lata 1852–1882, gdyż pierwsze publikacje z matematyki w Paryżu finansował już Jan Działyński począwszy od 1852 roku.

2 Jan Kanty Działyński (28. IX 1829 – 30. III 1880)

Jan Działyński, w dzieciństwie nauczany w domu, wstąpił do Gimnazjum Marii Magdaleny w Poznaniu w 1843 roku. Uczestniczył w wydarzeniach 1846 roku. W 1848 roku, w czasie powstania, wstąpił do gwardii narodowej, tzn. straży obywatelskiej. Podobno wziął udział w bitwie pod Książem. Z dowodzącym powstaniem Ludwikiem Mierosławskim zapewne nie miał kontaktu. Po maturze zdanej w 1849 roku podejmuje służbę w wojsku pruskim, w kompanii gwardii pionierów (tzn. saperów). W 1850 zostaje zwolniony z wojska za pożyczanie kolegom – Polakom książek polskich. Dzięki wstawiennictwu Bogumiła Radziwiłła, generał – majora wojsk pruskich, dostał się do konnej artylerii w Berlinie. Jan zamierzał wstąpić do Szkoły Artylerii i Inżynierów w Prusach. Nie przystąpił jednak do egzaminów i nie uzyskał stopnia oficera. W 1851 roku zrezygnował ze służby wojskowej, przechodząc do rezerwy. Od 1859 roku był studentem Uniwersytetu Berlińskiego, ale chodził też na wykłady na politechnikę w Berlinie. Już w tym okresie ojciec usiłował go wyswatać z Izabelą Czarторыską, córką Adama Jerzego. Małżeństwo doszło ostatecznie do skutku kilka lat później, 21. II 1857 roku w Paryżu. W latach 1851–1853 Jan odbył z ojcem podróż na trasie Berlin – Londyn – Paryż. Jan Działyński zdecydował się wstąpić do dwuletniej Szkoły Artylerii i Inżynierii w Metz. Do egzaminu przygotowywał się w polskiej Szkole Przygotowawczej w Paryżu, założonej przez księcia Adama Czarторыskiego w 1848 roku, zwanej później Wyższą Szkołą Polską na Montparnasse. Miała ona przygotowywać Polaków do studiów we Francji. Zapisał się tam jako ekstern. Matematyki uczył go Grakchus Henryk Niewęglowski (1807–1881), zarówno w szkole, jak i prywatnie. G.–H. Niewęglowski zdobył duże zaufanie Jana Działyńskiego. Roch Norzewski, nauczyciel matematyki w Szkole Montparnasskiej, zamierzał wydać podręcznik matematyki *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie*. Jan sfinansował druk tej książki, wpłacając 29. X 1851 roku ogromną kwotę 950 franków. Był to początek jego działalności edytorskiej i de facto początek Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu. Tymczasem Niewęglowski rozpiisał subskrypcję na wydanie podręcznika geometrii. Działyński obiecał zebrać pieniądze. W rezultacie niemal wszystkie wydatki pokrył sam. Książka wyszła w 1852 roku w Poznaniu. W późniejszych latach Jan Działyński sfinansuje – już w ramach Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu – druk kolejnych książek G.–H.

Niewęglowskiego: Arytmetyki z teorią przybliżeń liczebnych (1866), drugiego wydania Geometrii. Kurs zupełny (1869), Trygonometrii prostoliniowej i sferycznej z teorią ilości urojonych i z notami (1870), Mechaniki rozumowej (t. I – 1873; t. II – 1876) i Algebry. Część I (1879).

W 1852 Jan zrezygnował ze wstąpienia do szkoły w Metzu, gdyż, jak pisał, *Do Metzu nikogo z Polaków przyjąć nie chcieli*. Jak pisze Andrzej Mężyński w monografii o Janie Działyńskim [7]: *Rozmowy i korespondencja z Niewęglowskim zdecydowały o skierowaniu uwagi Jana w stronę mecenatu wydawniczego* ([7], s. 37).

Jan uczestniczył czynnie w powstaniu styczniowym, organizując i finansując zakup broni dla powstańców. Wziął udział w kilkudniowej bitwie z wojskami rosyjskimi (29. IV 1863) pod dowództwem Edmunda Taczanowskiego. Po powstaniu Jan zdołał umknąć policji pruskiej, ale władze nałożyły sekwestry na majątki powstańców, w tym na majątki Jana Działyńskiego. Działyński oskarżony o zdradę stanu, przebywał na emigracji w Paryżu (V 1863 – II 1864). W późniejszym okresie, uwolniony od zarzutów, dzielił swój czas między Gołuchów, a później Kórnik i Paryż. Zmarł 30 marca 1880 roku w Kórniku w wyniku kolejnego wylewu do mózgu.

3 Geneza Towarzystwa Nauk Ścisłych

Jan Działyński zamierzał wydawać prace matematyczne i techniczne, niewątpliwie pod wpływem G. – H. Niewęglowskiego. Jeszcze nie do końca sprecyzowane plany Działyńskiego uległy uściśleniu pod wpływem listu księgarza, Karola Królikowskiego.

Jan Działyński zaczął wcielać w życie pomysł wydawania prac matematycznych i technicznych. Byli już kandydaci do pisania książek: Emil Czaderski (*O kolei żelaznej*), Karol Sulikowski miał napisać podręcznik wytrzymałości materiałów, a Edward Habich – podręcznik mechaniki. Nie doszło to jednak do skutku – żaden z wspomnianych autorów nie wywiązał się z zobowiązania. Natomiast Władysław Folkierski przygotował *Zasady rachunku różniczkowego* (t. I – 1870; t. II – 1873), w dwóch tomach, łącznie prawie 2000 stron. Książka ta miała jeszcze zmienione wydanie na początku XX wieku (t. I – 1904; t. II. – 1909). Jan Działyński podjął próbę upowszechnienia *Arytmetyki* i *Geometrii* Niewęglowskiego w Galicji, zabiegając poprzez odpowiednie czynniki, aby książki zatwierdzić jako podręczniki szkolne dla polskojęzycznych gimnazjów galicyjskich, ale bez powodzenia. Z inicjatywy Agatona Gillera, korzystając z funduszy księdza Karola Mikoszewskiego, 1. XI 1868 roku powstało w Paryżu *Stowarzyszenie Pomocy Naukowej*. Celem Stowarzyszenia było zebranie środków na stypendia dla młodzieży polskiej uczącej się we Francji, a także działalność popularnonaukowa, prowadzona poprzez serie odczytów. Na posiedzeniu SPN dnia 20. XI 1869 Kazimierz Szulc zaproponował utworzenie *Komisji dla nauk ścisłych i przyrodniczych*. Wkrótce, 30. IV 1870 roku, postanowiono odłączyć się od SPN, nazywając dotychczasową Komisję **Towarzystwem Nauk Ścisłych w Paryżu**. Głównym celem Towarzystwa stało się przygotowanie i opublikowanie po polsku kompletu dzieł matematycznych, podręczników i monografii. Działyński wkrótce powiadomił Radę Szkoły Montparnasskiej o powstaniu TNŚ. Prezes TNŚ został, rzecz jasna, sam Jan Działyński, wice prezesem i sekretarzem Władysław Folkierski, drugim sekretarzem Władysław Gosiewski, a sekretarzem Zygmunt Laskowski.

4 Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych

Zapis o powstaniu czasopisma poświęconego naukom ścisłym i wydawanego przez Towarzystwo znalazł się w jego statucie, tzn. w Ustawie Towarzystwa Nauk Ścisłych.

Nie udało się przekształcić Pamiętników w czasopismo, w którym byłyby nie tylko prace i recenzje, ale także bieżące informacje naukowe, personalia itp. Być może był to za krótki okres, aby to zrealizować.

5 Rola Towarzystwa w rozwoju nauk ścisłych w Polsce

Publikacje Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, jak i wcześniejsze, też finansowane przez Jana Działyńskiego, obejmują 20 książek i monografii matematycznych wydanych w latach 1852–1882 oraz 12 tomów Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu (1870–1882). Dość powierzchowny opis tych publikacji można znaleźć w kilku opracowaniach w tomie poświęconym Towarzystwu [9]. Łącznie w Pamiętniku opublikowano 90 prac naukowych, w tym 50 z matematyki, jedną z astronomii, 18 z szeroko rozumianej techniki, 7 z fizyki, 6 z zoologii, po 3 z biologii i chemii, i po jednej z filozofii i geologii. Niektóre z tych prac mogą być zaliczone do kilku dyscyplin, np. równocześnie do matematyki i fizyki. Wszystkie publikacje, z wyjątkiem jednej książkowej, są w języku polskim. Niektóre z tych opracowań są obszernymi, kilkudziesięciostronicowymi monografiami, jak np. praca z algebry Karola Hertza i Samuela Dicksteina, prace Józefa Rostafińskiego o służowcach, praca Teofila Chudzińskiego z anatomii porównawczej zwojów mózgowych, czy też pierwsza historia astronomii w Polsce Feliksa Kucharzewskiego.

Wśród książek na szczególną uwagę zasługuje *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z Działu Matematyki i Fizyki oraz ich Zastosowań* Teofila Żebrowskiego, wydana w Krakowie 1873 z okazji Roku Kopernikowskiego, pierwsza w Polsce bibliografia tego przedmiotu. Żebrowski pracował wiele lat nad *Bibliografią*. Była ona wynikiem jego kilkudziesięcioletnich poszukiwań starej polskiej literatury z zakresu nauk ścisłych. Większą część zebranej kolekcji Żebrowski sprzedał Janowi Działyńskiemu do Biblioteki Kórnickiej, w tym także cenne rękopisy matematyczne, za 1600 talarów w trzech ratach (*vide* [4], listy datowane: 14. III 1869, k. 134–135; 18. III 1869, k. 146).

Inną, cenną inicjatywą Jana Działyńskiego był konkurs na ocenę matematycznego dorobku Józefa–Marii Hoene–Wrońskiego. W liście do Władysława Folkierskiego z kwietnia 1870 roku, Działyński pisał ([10]: rks BK 7485/1, s. 30).

Konkurs został ogłoszony w tomie I Pamiętnika z datą 7. IV 1871 (s. 177–181). Towarzystwo wyznaczyło termin nadsyłania prac na tydzień przed pięćsetną rocznicą urodzin Mikołaja Kopernika, tj. na dzień 12 lutego 1873, wyznaczając nagrodę 1000 franków. W wyznaczonym terminie wpłynęła tylko jedna praca, której autorem okazał się być G.–H. Niewęgłowski. Ocena dorobku Wrońskiego, bardzo krytyczna, nie została uznana za zadawalającą odpowiedź na pytanie konkursowe i została odrzucona. Spodziewano się bowiem entuzjastycznej, a nie krytycznej recenzji¹.

Natomiast w tomie IV Pamiętnika (1874) ogłoszona konkurs na kontynuację *Bibliografii* Teofila Żebrowskiego, tj. po roku 1830, wyznaczając termin 1. I 1877. Ponieważ w terminie tym nie wpłynęła żadna praca, przedłużono ten termin o dalsze trzy lata. Ale wtedy Towarzystwo Nauk Ścisłych praktycznie już nie istniało.

Jakość edytorska wszystkich publikacji Biblioteki Kórnickiej jest bardzo wysoka. Skrótowe oceny merytoryczne prac w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu można znaleźć w [9]. Szczegółowe omówienia poszczególnych prac matematycznych będą się ukazywać, począwszy od trzeciego tomu, w *Antiquitates Mathematicae* (VI seria Roczników PTM).

¹ Do dziś nie ma jednoznacznej oceny dorobku matematycznego Hoene–Wrońskiego. Wśród dotychczasowych opinii dominują oceny krytyczne, a nawet bardzo krytyczne. Nie zmienia to faktu, że w kilku miejscach pozostał po Wrońskim ślad w matematyce. Ale jest to bardziej wkład koncepcyjny aniżeli merytoryczny.

Publikacje te niewątpliwie odegrały bardzo ważną rolę w zarówno w rozwoju nauki polskiej, jak też jej uaktywnieniu po zastoju okresu między powstaniowego (1831–1864)². Na szczególną uwagę zasługuje też fakt, że autorami tych publikacji byli Polacy zarówno z kraju, jak i z emigracji.

Opisany incydent naukowy był ważny z dwóch powodów: pokazał, że w krótkim czasie można uaktywnić środowisko naukowe, a po wtóre, podniósł znacząco poziom nauk ścisłych na ziemiach polskich. Uaktywniły się katedry matematyki we Lwowie i na Uniwersytecie Jagiellońskim, a w 1872 roku powstała Akademia Umiejętności i jej Wydział Matematyczno – Przyrodniczy. W ten sposób aktywność naukowa przeniosła się z emigracji do kraju. Na fenomen Polskiej Szkoły Matematycznej trzeba było jednak jeszcze poczekać kilkadziesiąt lat.

Bibliografia:

- [1] Dianni J.: *Powstanie Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu i zarys jego działalności*. Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej, seria C, z. 18(1974), 15–41.
- [2] Folkierski W.: *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu. Jego początek i rozwój*. Prace Matematyczno – fizyczne, tom 6 (1895), 151–176.
- [3] *Listy Antoniego Gosiewskiego do Jana Działyńskiego*. Biblioteka Kórnicka, rks BK 7452.
- [4] *Listy do Dra Wojciecha Kętrzyńskiego*. Biblioteka Kórnicka, rks BK 7451.
- [5] Mężyński A.: *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu w świetle archiwaliów Biblioteki Kórnickiej*. Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej, seria C, z. 18(1974), 41–96.
- [6] – , *Działalność wydawnicza Jana Działyńskiego*. Pamiętnik Biblioteki Kórnickiej, z. 14 (1978), 114–119.
- [7] – , *Jan Działyński*. Ossolineum, 1987.
- [8] *Rozwiązanie Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*. Biblioteka Kórnicka, rks AB 108.
- [9] *Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej*. Seria C, z. 18 (1974) [zeszyt poświęcony Towarzystwu Nauk Ścisłych w Paryżu].
- [10] *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu 1866–1884*. Biblioteka Kórnicka, rks BK 7485_{1–2}.
- [11] *Ustawa Towarzystwa Nauk Ścisłych*. [osobny druk b. d.; także w I tomie Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych]

Adresa

Witold Więśław
Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyczny
Plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
e-mail: witold.wieslaw@poczta.onet.pl

² Np. we wspomnianym okresie na Uniwersytecie Jagiellońskim nie przeprowadzono żadnego doktoratu z matematyki (Archiwum UJ, rks WF I – 85).

OBSAH

Úvodní slovo	3
Seznam účastníků	4
Seznam přednášek	5
Odborný program	6

Zahájení konference

J. Bečvář: Historie matematiky I(1980) – XXX(2009)	9
--	---

Vyzvané přednášky

L. Boček, J. Hromadová: Izoperimetrické nerovnosti, W. Blaschke a trochu politiky	21
J. Štěpán: Povídka o Brownově pohybu a také o Nobelově ceně za ekonomii	31
B. Riečan: Matematika a hudba	49

Konferenční vystoupení

Ľ. Balková: Krok za krokem k řešení soustav lineárních algebraických rovnic	53
A. Bálintová: Skúsenosti z pôsobenia na VŠ v Tunisku vo výučbe matematiky	56
J. Bečvář: Interpretace matematických výsledků našich předků	59
M. Bečvářová: O jedné maturitní zkoušce	87
M. Benediktová: Doba C. F. Gausse	93
J. Čížmár: Matematika na Slovensku 1945–1965	98
L. Dostálová: Hilbertův program	104
H. Durnová: Proměny oddělení matematických strojů v ČSAV	108
P. Grešák, M. Marčoková: 40-ročná história konferencií slovenských matematikov	112
M. Hykšová: Karel Vorovka (1879–1929) – matematik a filosof	116
V. Chmelíková: Z historie výuky deskriptivní geometrie na středních školách	120
M. Chocholová: Tužby našich předků	124
L. Ilucová: História pentagonálnych teselácií	128
A. Kalousová: Hrabě de Buffon a hra franc-carreau	134
J. Kotůlek: Metodika soudobých dějin matematiky na příkladu Riemannovy hypotézy	138
L. Kvasz: Matematika a jej jazyk	143
M. Kvaszová: Historie vybraných problémů z počátků teorie pravděpodobnosti	147
M. Melcer: Poválečná devastace finanční matematiky	151
L. Moravec: Seznámení s Jakubem Filipem Kulikem	156

M. Otavová: Ladislav Jandera – současník Bernarda Bolzana	164
P. Pavlíková: O Fareyových zlomcích	167
K. Pazourek: Slovní úlohy o dělitelnosti 1850–1950	169
Š. Porubský: Ako rýchlo vieme a môžeme násobiť	173
I. Saxl: Paracelsus a jeho dílo	180
I. Saxl: Matematika v době Paracelsově	192
A. Slavík: O binomické větě s racionálními a reálnými exponenty	210
R. Smýkalová: Středověký zrod trigonometrických veličin	213
P. Surynková: Vývoj výpočetní geometrie	217
I. Sýkorová: Zlomky ve staré Indii	221
M. Tihlaříková: Teorie automorfních funkcí	227
D. Trkovská: Möbiův Barycentrický počet a geometrické transformace	229
J. Widž: Z historie řetězových zlomků	233
W. Więsław: Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu (1870–1882)	237

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová (ed.)

30. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Jevíčko, 21. až 25. 8. 2009

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal

MATFYZPRESS

vydavatelství

Matematicko-fyzikální fakulty

Univerzity Karlovy v Praze

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

jako svou 286. publikaci

Z předloh připravených v systému Word

vytisklo ReproStředisko UK MFF

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání

Praha 2009

ISBN 978-80-7378-092-0