

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová

VÝVOJ MATEMATIKY JAKO POPULARIZUJÍCÍ STIMUL



Vzdělávací modul MATEMATIKA

Výukový a metodický text

Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze:
aktivně, aktuálně a s aplikacemi – projekt OPPA



Praha 2012

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu Praha – Adaptabilita (OPPA) a jeho projektu Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: aktivně, aktuálně a s aplikacemi. Řešiteli projektu jsou pracovníci Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Autoři textu:

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK Praha

Ústav aplikované matematiky, FD ČVUT Praha

jindrich.becvar@mff.cuni.cz

becvarmar@fd.cvut.cz

Recenzenti:

RNDr. Dana Trčková

RNDr. Jiří Potůček, CSc.

Vydalo Nakladatelství P3K s. r. o. (www.p3k.cz) v Praze v roce 2012 v nákladu 120 ks. Vydání první.

Ze sazby dodané autory vytiskl xPrint s. r. o.

Publikace neprošla jazykovou korekturou.

© Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová, 2012

© Nakladatelství P3K, 2012

ISBN 978-80-87186-77-0

OBSAH

1. Učitel matematiky a historie matematiky	5
2. První krize matematiky	6
3. Východisko z krize	17
Literatura	23
4. Zápis čísel v Evropě 500 až 1600	24
Literatura	40
5. Staré početní algoritmy	42
Literatura	59



1. Učitel matematiky a historie matematiky

Výuka matematiky

- má být kvalitní, poutavá, pestrá a inspirativní,
- má ukazovat aplikovatelnost matematiky a její užitečnost,
- má zdůrazňovat její vliv na rozvoj myšlení.

Humanizací výuky matematiky rozumíme

- ukazování souvislostí matematiky s jinými vědami a disciplínami (astronomie, fyzika, chemie, biologie, technika, hudba, malířství, společenské vědy atd.),
- zařazování matematiky do celkového myšlenkového a kulturního vývoje lidstva,
- objasňování matematického pohledu na svět,
- budování vztahu učitele a žáka založeného na dialogu a diskusi a nevyhýbajícího se humoru.

Učitelé jsou dnes více než kdy dříve v situacích, kdy musí zápasit o zájem studentů, kdy se musí snažit získávat sympatie pro matematiku. Širší znalosti učitele ukazují jeho kulturnost, posilují jeho respekt u studentů i kolegů. Znalost vývoje matematiky dává řadu možností, jak toho dosáhnout. Učitel, který je o dějinách matematiky podrobněji informován, může při výuce matematiky

- ukazovat proces poznávání, vývoj myšlení a abstrakce,
- motivovat studenty zajímavostmi týkajícími se zrodu pojmů, vzniku a vývoje jednotlivých matematických disciplín a souvislostí nejrůznějšího druhu,
- uvádět historii slavných problémů (proč se objevily, jak byly řešeny, jaké důsledky mělo jejich vyřešení)
- a snažit se o „zlidštění“ matematiky nejrůznějšími drobnějšími informacemi (např. o našich i světových matematicích).

Přes historii matematiky vede cesta k matematice samotné!

V tomto sešitu předkládáme pohledy do inspirativního světa antického matematického myšlení, několik středověkých způsobů zápisu čísel a tehdejší standardní algoritmy základních aritmetických operací.

2. První krize matematiky¹

Jindřich Bečvář

2.1 Počátky řecké filozofie a matematiky

V šestém století před Kristem se v nejvýznamnějších civilizacích objevili velcí myslitelé, kteří svým učením výrazně ovlivnili chod následujících staletí. V Číně to byli Lao-c' a Konfucius, v Indii Mahávíra a Buddha, v židovském světě proroci Jeremiáš a Ezechiel, v Persii Zarathustra a v řeckém světě první filozofové – Thalés, Anaximandros, Anaximenés, Pýthagorás, Hérakleitos a další.

Řeční filozofové se již v 6. století př. Kr. částečně vymanili z tradičního náboženství, opustili mytologické představy o vzniku světa a jeho běhu a pokusili se podat do určité míry racionální a přírodovědný výklad světa a jeho mnohotvárnosti. Jejich hlavním zájmem bylo přírodní dění; bývají proto označováni jako přírodní filozofové. V některých směrech byla jejich snaha ještě značně naivní, ale sympaticky sebevědomá.

Nejstarší řecká filozofická škola vznikla v bohatém přístavním městě Miletos, v největším íonském městě na západním pobřeží Malé Asie (dnes Turecko). Jejimi nejvýznamnějšími představiteli byli Thalés (asi 625 až 545), Anaximandros (asi 610 až 545) a Anaximenés (asi 585 až 528). Jako první vyslovili otázku týkající se počátku a původu všeho jsoucna. Představovali si, že celý svět je vytvořen z jedné jediné pralátky (arché). Thalés prohlásil za tuto pralátku vodu (hydór), z níž všechno pochází a do níž vše zaniká – voda se přece mění v páru a v led, z vlhka se rodí život a bez vody život končí. Všechno vzniká zhušťováním (pyknósis) či zředováním (manósis) vody. Podle Anaximandra je pralátkou neurčitá, neomezená a věčná látka, tzv. apeiron. Z ní jakýmsi procesem vydělování vznikají veškeré věci. Anaximandros věnoval velkou pozornost změnám, procesům vznikání a zanikání, svět je podle něho velikým bojem o bytí. Anaximenés považoval naproti tomu za pralátku neurčitý a nekonečný vzduch (apeiros aé), z něhož ostatní látky vznikají zhušťováním (voda, země) či zředováním (ohně). Symbolem života pro něho bylo dýchání; bez vzduchu není života, celý svět dýchá. Hérakleitos z Efesu (asi 550 až 480) považoval za základní prvek-živél (stoicheion) oheň, zdůrazňoval význam pohybu a změny. Empedoklés z Akragantu (asi 490 až 430) přišel s teorií čtyř prvků-živlů (stoicheia) – země, voda, vzduch, oheň, Anaxagorás z Klazomen s myšlenkou nekonečného množství malých částíček – semen věcí, Démokritos z Abdér (asi 460 až 370) s ideou nedělitelných atomů.

Hovoříme-li o řecké matematice, máme většinou na mysli matematiku antickou, matematiku pěstovanou v oblasti Řecka, helénskému světu a Římské říši v období zahrnujícím

¹ V tomto textu využil autor některé partie svých článků [B1], [B2], [B4] uvedených v literatuře. Viz též [H], [BJB].

celé jedno tisíciletí – od šestého století před Kristem až do čtvrtého nebo dokonce pátého století po Kristu. Řecká matematika navázala do určité míry na matematiku egyptskou a mezopotamskou, které za sebou měly v 6. století př. Kr. již více než dvoutisíciletý vývoj. Ani dnes, po intenzivním bádání mnoha generací historiků a matematiků, nemůžeme zodpovědně prohlásit, jak velký objem matematických znalostí a dovedností Řekové z Egypta a Mezopotámie převzali, neboť o matematice egyptské a mezopotamské máme příliš málo informací a stejně tak i o počátcích matematiky řecké. Někdy se dokonce spekuluje o kontaktech nejstarší řecké a čínské vědy.

O řecké matematice 6. až 4. století př. Kr. nemáme dostatek věrohodných zpráv, neboť se žádné matematické spisy z té doby nedochovaly. Jen malé zlomky děl tehdejších myslitelů zaznamenali jejich následovníci, např. Aristotelés, Porfyrios, Iamblichos, Pappos a další. Eukleidovy Základy z přelomu 4. a 3. století př. Kr. jsou prvním řeckým matematickým dílem, které máme celé k dispozici. Nejstarší známá verze Základů pochází sice až z 9. století, ale poměrně oprávněně se domníváme, že se od původní Eukleidovy verze příliš neliší.

Nejstarší řecké matematické výsledky jsou připisovány Mílétské škole. Thalés prý v Egyptě určoval výšku pyramid (patrně pomocí podobnosti trojúhelníků), ovládal základy triangulace, vyslovil větu, že „všechny úhly nad průměrem jsou pravé“ (tzv. Thalétova věta) a předpověděl zatmění Slunce roku 585 př. Kr. Rovněž Anaximandros a Anaximenés podle všech dochovaných svědectví věnovali matematice a astronomii velkou pozornost.

Doba 6. až 4. století př. Kr. je dobou vzniku idejí, někdy bývá označována jako hrdinský věk řecké matematiky. V té době byly empirické poznatky postupně přetvořeny ve vědu. Velký pokrok nastal v rozvoji abstrakce, postupně se zrodily základní pojmy (bod, přímka, ... , číslo, poměr, ...). Zformulovány byly tzv. postuláty a axiomy, vypracovány byly logické principy odvozování a dokazování, vznikla a rozvinula se idea důkazu. Řekové přistoupili k uvědomělé výstavbě matematického světa ze základních prvků (bodů), pomocí postulátů a s přihlédnutím ke stanoveným axiomům. Vše bylo – tak jako ve filozofii – podřízeno určitému principu minimalizace.

2.2 Pýthagorás ze Samu a jeho škola

Pýthagorás, proslulý řecký matematik, filozof a myslitel, pocházel z ostrova Samos, který leží v Egejském moři při pobřeží Malé Asie, nedaleko starověkých měst Mílétos a Efesos. Právě zde se zrodili první řečtí filozofové – v Mílétu Thalés, Anaximandros a Anaximenés, v Efesu Hérakleitos. Pýthagorás žil asi v letech 570 až 495, brzy přesídlil do Krotónu v jižní Itálii (dnes Crotone) a založil tam filozofickou školu, která však měla též charakter tajného spolku a náboženské sekty. Jednou z významných aktivit pýthagorejců bylo studium matematiky. Podstatu a sjednocující princip jsoucna spatřovali – oproti předchozím myslitelům – v čísle (arithmos). Pochopili nutnost kvantitativního popisu věcí, jevů a vztahů, uvědomili si obrovskou roli čísel a jejich poměrů. Pochopili, jakou roli hraje v matematice důkaz. Od nejjednodušších důkazů – položit daný fakt před oči, aby byl dostatečně jasně a zřetelně

vidět – dospěli až k důmyslným důkazům sporem. O pythagorejské škole se zmiňovali např. Aristotelés, Aristoxenés, Proklos, Díogenés, ale i další filozofové a myslitelé:

... soudili, jak patrně, že číslo je počátkem a jakoby látkou, stavem i vlastností věcí, že prvky čísla jsou suda a licha – ona neomezená, tato omezená – že se jednotka skládá z toho obojího, neboť je sudá i lichá, že číslo pochází z jednotky a že celý vesmír ... je číslem. Někteří z nich pak říkají, že je desatero počátků věcí a uvádějí je ve dvojicích: mez a neomezené, licha a suda, jedno a mnoho, pravé a levé, mužské a ženské, klidné a pohybující se, přímé a křivé, světlo a tma, dobro a zlo, čtverec a obdélník. ([PJKB], str. 75–76)

A ježto viděli v číslech stavy a poměry harmonií a ježto se jim zdálo, že se i vše ostatní podobá celou svou přirozeností číslům a že čísla jsou první z celé přírody, usoudili, že prvky čísel jsou též prvky všech věcí a že celý vesmír je harmonií a číslem. ([S], str. 184)

Pýthagorás změnil geometrickou vědu v podobu svobodné nauky tím, že obecně zkoumal její základy a že probíral její poučky nehmotně a pomyslně; našel také nauku o iracionálních číslech a složení světových tvarů. ([S], str. 41)

Pýthagorás pravil, že se život podobá shromáždění při hrách. Jako tam jedni přicházejí, aby závodili, druzí za obchodem a třetí, nejlepší, jako diváci, tak se v životě rodí jedni, lidé otroci, jako lovci slávy i bohatství, a druzí, filosofové, jako lovci pravdy. ([S], str. 42)

Pýthagorejská škola (viz např. [R], [PJKB]) významným způsobem ovlivnila vývoj řecké matematiky, zejména v šestém, pátém a čtvrtém století před Kristem. Patřili k ní Filoláos (5. stol. př. Kr.), Theodóros z Kyrény (asi 460 až 399), Archytás z Tarentu (asi 428 až 365) a jejich žáci Theaitétos z Athén (asi 417 až 369), Eudoxos (asi 408 až 355), pod jejím vlivem byl i Platón (427–347). Výsledky tří století řecké matematiky, zejména pythagorejské, sepsal Eukleidés (asi 325 až 265) ve svých Základech [E].

2.3 Pýthagorejské kvadrivium

Pýthagorejská škola prosazovala studium aritmetiky, geometrie, astronomie a hudby, čtyř disciplín, které ve středověku tvořily tzv. kvadrivium, tj. čtyřcestí (spolu s tzv. triviem, trojcestím, které sestávalo z gramatiky, rétoriky a dialektiky, tvořilo kvadrivium soubor tzv. sedmi svobodných umění (septem artes liberales), který byl základem studia na středověkých univerzitách, viz např. [B3]). Mezi těmito čtyřmi disciplínami cítili pythagorejci úzké souvislosti.

Pýthagorejci se snažili vyznat ve světě přirozených čísel; třídili je do skupin podle určitých znaků, hledali a nalézali jejich společné vlastnosti. Přirozená čísla znázorňovali geometricky, studovali tzv. figurální čísla, tj. čísla, která bylo možno reprezentovat různými geometrickými tvary.

Jedním z nejznámějších geometrických poznatků všech dob je Pýthagorova věta. Příbuznou problematikou v aritmetice, resp. teorii čísel, jsou tzv. pythagorejské trojice čísel, trojice přirozených čísel a , b , c , pro něž je $a^2 + b^2 = c^2$.

Pýthagorejci položili základy matematické teorie hudby. Zkracováním struny či vzduchového sloupce ve vhodných poměrech získáváme základní hudební intervaly: oktáva odpovídá poměru 1 : 2, kvinta poměru 2 : 3, kvarta poměru 3 : 4, sekunda poměru 8 : 9. Všechny tyto poměry lze vytvořit z tzv. hudební čtveřice čísel (6, 8, 9, 12). Přitom je číslo 9 aritmetickým a číslo 8 harmonickým průměrem čísel 6 a 12. Hudební čtveřice byla vnímána v úzké souvislosti s krychlí. Ta má totiž 6 stěn, 8 vrcholů, 12 hran a 9 rovin souměrnosti. Často byla uvažována hudební šestice (4, 6, 8, 9, 12, 16), která již zahrnuje dvě oktávy. Na následujících obrázcích jsou Pýthagorás a Filoláos při studiu hudebních intervalů.



Pýthagorejské představy o vesmíru měly úzký vztah k matematice a hudbě. Ve středu světa (kosmu) je podle Filoláa centrální oheň, na deseti nebeských sférách bylo umístěno šest tehdy známých, okem pozorovatelných planet (Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter a Saturn), dále Slunce, Měsíc a hvězdy. Výrazně spekulativními prvky tohoto modelu světa byly centrální oheň a tzv. Protizemě. Tuto planetu zavedli pýthagorejci proto, aby bylo sfér deset. Desítka totiž symbolizovala dokonalost a vesmír musel být podle jejich představ dokonalý. Poměry délek poloměrů nebeských sfér byly v souladu s hudebními poměry, stavba vesmíru byla tedy popsána přirozenými čísly a jejich poměry. Při pohybu nebeských sfér vzniká proto dokonalá hudba, kosmos je harmonický. Okřídlená slovní spojení „hudba sfér“ a „harmonie kosmu“ mají pýthagorejský původ.

Filolaos učí, že je uprostřed kolem středu oheň a nazývá jej krbem vesmíru, Diovým příbytkem, matkou bohů, oltářem a svazkem i měrou přírody. A opět jiný oheň je nahoře, vše obklopující. Ale první od přírody je střed; kolem něho krouží deset božských těl: obloha, pět oběžnic, za nimi slunce, pod ním měsíc, pod ním země, pod ní protizemě a za nimi za všemi oheň, mající v středu úlohu krbu. ([S], str. 192)

2.4 Aritmetika, svět čísel

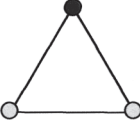
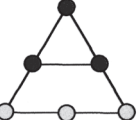
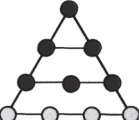
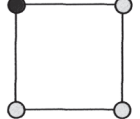
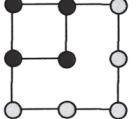
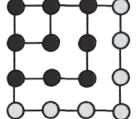
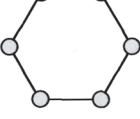
Pýthagorejci začali přísně rozlišovat sudá a lichá čísla. Přirozená čísla „třídili“ do skupin podle jejich „geometrického tvaru“. Znázorňovali je totiž pomocí kamínků či mušliček rozložených v písku do geometrických tvarů. Tak vznikla tzv. figurální čísla, čísla trojúhelníková, čtvercová, pětiúhelníková, ... , která dnes popisujeme algebraicky takto:

$$\frac{1}{2}n(n+1), \quad n^2, \quad \frac{1}{2}n(3n-1), \dots$$

Dále vyšetřovali čísla obdélníková (speciální byla čísla, která se blížila číslům čtvercovým), krychlová, hranolová, ...

$$nm, \text{ resp. } n(n+1), \quad n^3, \quad klm, \dots,$$

čísla jehlanová vybudovaná z trojúhelníkových, čtvercových, pětiúhelníkových čísel atd. Na následujícím obrázku jsou čísla trojúhelníková, čtvercová, pětiúhelníková a šestiúhelníková.

$n \rightarrow$	1	2	3	4
Triangular				
Square				
Pentagonal				
Hexagonal				

Figurální čísla je možno využít ve škole, případně již při výchově dětí předškolního věku. Rozkládáním hromádky kamínek či knoflíků do obdélníků lze rozlišovat čísla sudá a lichá, třídit je podle zbytků při dělení třemi atd., lze „zviditelnit“ důkazy jednoduchých tvrzení (součet sudých čísel je číslo sudé, součet dvou lichých je liché, součet dvou čísel dělitelných třemi je číslo dělitelné třemi apod.). Lze zkoumat dělitelnost čísel a rozklady čísel (přerovnávání do různých obdélníků), vztah dělitelnosti a aritmetických operací, rozlišení čísel složených a prvočísel.

Vzorec vyjadřující trojúhelníkové číslo představuje součet n prvků aritmetické posloupnosti $1 + 2 + \dots + n$, který je spjat se známou historkou o K. F. Gaussovi (1777–1855). Dá se však snadno zdůvodnit geometricky: položíme-li vedle sebe dvě stejná trojúhelníková čísla, jedno z nich „vzhůru nohama“, a tak dostaneme obdélníkové číslo $n(n+1)$. Proto je

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Zajímavější je vzorec

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

který se dá snadno dokázat matematickou indukcí. Výsledek je však „vidět“ na výše uvedeném obrázku: čtvercové číslo totiž vzniká jako součet lichých čísel. Rovněž je vidět, že

každé liché číslo je rozdílem dvou sousedních čísel čtvercových, že se v posloupnosti čtvercových čísel střídají čísla lichá a sudá (1, 4, 9, 16, 25, ...) apod. Čtvercové číslo je sudé právě tehdy, když sčítáme sudý počet lichých čísel, tj. když je jeho stranou sudé číslo.

Při zkoumání přirozených čísel objevili Řekové tzv. dokonalá čísla, tj. čísla, která se rovnají součtu všech svých vlastních dělitelů:

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, \quad 496, \quad 8128$$

Další dokonalé číslo našel až Regiomontanus (1436–1476). Je to číslo 33 550 336. V Eukleidových Základech je dokázáno následující tvrzení: Je-li $2^n - 1$ prvočíslo, je číslo $2^{n-1}(2^n - 1)$ dokonalé.

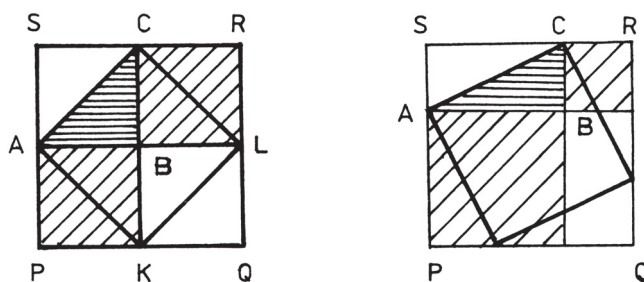
Pýthagorejci byli fascinováni světem přirozených čísel, jejich poměrů a úměr.²

Předpokládali, že celou matematiku je možno postavit na takovýchto aritmetických základech, že pomocí přirozených čísel a jejich poměrů lze popsat veškeré vztahy a zákonitosti, a to nejen v aritmetice, geometrii, hudbě a astronomii, ale i v jiných disciplínách. Stručně hovoříme o aritmetickém pojetí matematiky, s nímž pýthagorejci přišli a které v prvním období existence své školy zastávali.

2.5 Geometrie, svět tvarů

Snad nejznámějším geometrickým poznatkem všech dob je Pýthagorova věta. Objev tohoto tvrzení a zejména důkazu byl ve starém Řecku přičítán Pýthagorovi. Můžeme jen spekulovat, jak vypadaly nejstarší důkazy Pýthagorovy věty. Snad bylo toto tvrzení dokázáno nejprve pro rovnoramenný trojúhelník ABC (obrázek vlevo): Pýthagorovu větu bylo možno přímo „vidět“ na nějakém dláždění či kachlíkování. Čtverce $ABKP$ a $BCRL$ se skládají ze čtyř trojúhelníků stejně jako čtverec $ACKL$.

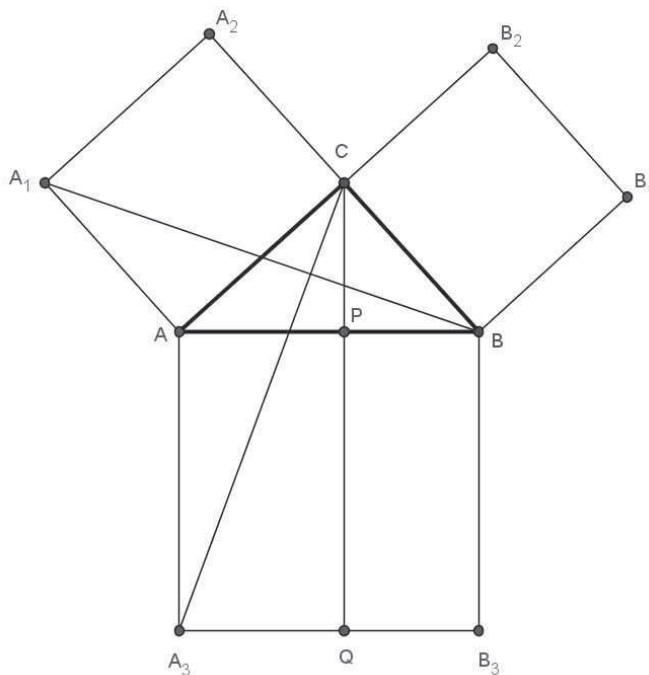
Jednoduchý důkaz Pýthagorovy věty, který je vhodné prezentovat žákům, je znázorněn na obrázku vpravo. Obsah čtverce $PQRS$ o straně $a + b$ je rozdělen na části dvěma různými způsoby.



Zřejmě je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$, a odtud $a^2 + b^2 = c^2$.

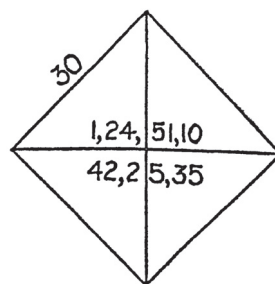
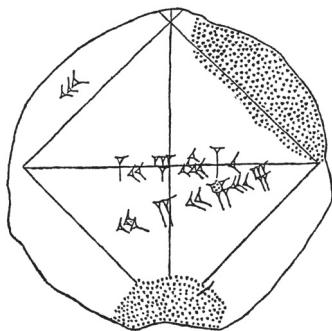
² Připomeňme, že úměra je rovnost poměrů, např. $a : b = c : d$. Důležitým případem je např. úměra $a : c = c : b$ utvořená ze tří čísel, číslo $c = \sqrt{ab}$ je tzv. geometrický průměr čísel a a b .

Eukleides však ve svých Základech uvedl důkaz, který je jiný (1. kniha, věta 47). Trojúhelníky A_3AC a BAA_1 jsou shodné. Obsah trojúhelníku A_3AC je roven polovině obsahu obdélníku AA_3QP , obsah trojúhelníku BAA_1 je roven polovině obsahu čtverce AA_1A_2C . Obsah čtverce AA_1A_2C je tedy roven obsahu obdélníku AA_3QP . Obdobně je obsah čtverce BB_1B_2C roven obsahu obdélníku BB_3QP .

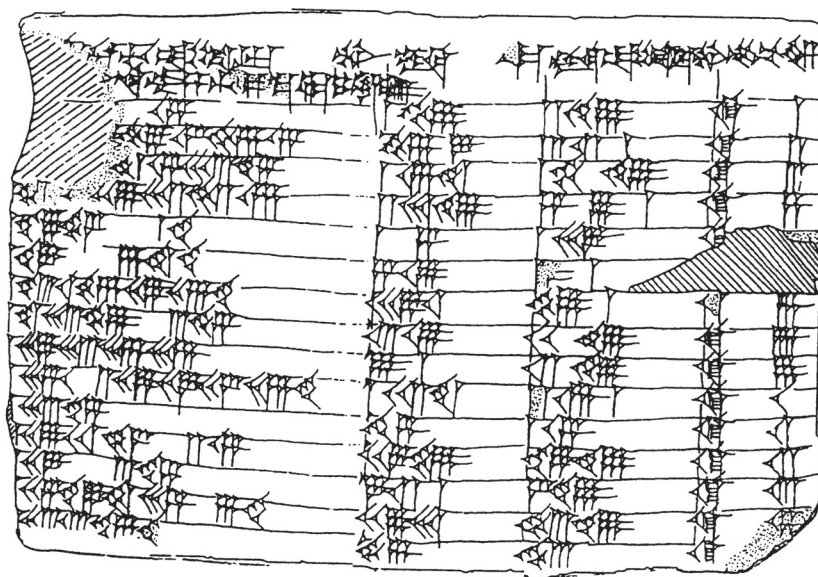


Poznamenejme, že Pýthagorova věta byla již více než tisíc let před Pýthagorem (v 19. až 17. století) užívána v Mezopotámii k řešení nejrůznějších úloh. Tehdejší matematici rovněž znali pýthagorejské trojice, poměrně přesnou přibližnou hodnotu čísla $\sqrt{2}$. Nemáme však žádné informace o tom, zda znali důkaz Pýthagorovy věty. Viz např. [B5]. Na následujících obrázcích je

- tabulka „Y 7289“, na které je znázorněn čtverec, jehož strana má délku 30 a úhlopříčka délku 42,426388... Navíc je připsána důležitá konstanta – velmi přesná hodnota čísla $\sqrt{2}$ (1,414212963); správná hodnota je 1,414213562...,³
- tabulka „Plimpton 322“, která obsahuje patnáct trojic čísel $c, a, \left(\frac{c}{b}\right)^2$, kde (a, b, c) je pýthagorejská trojice.



³ Připomeňme, že jsou tyto hodnoty na tabulce uvedeny v šedesátkové soustavě.



2.6 Souměřitelnost úseček

Podle původních představ pythagorejců jsou každé dvě úsečky souměřitelné, tj. ke každým dvěma úsečkám a , b existuje tzv. měrná úsečka c , pomocí níž je možno úsečky a , b změřit, tj. úsečka a je n -násobkem úsečky c a úsečka b je m -násobkem úsečky c , tj. $a = n \cdot c$, $b = m \cdot c$. Poměr délek úseček a , b je tedy roven poměru $n : m$, tj. poměru dvou přirozených čísel. Představa o souměřitelnosti úseček odpovídala původnímu pythagorejskému pojetí matematiky, které bylo založeno na přirozených číslech a jejich poměrech.

Z představ o souměřitelnosti dvou libovolně zvolených úseček vyplývají závažné důsledky. Snadno usoudíme, že jsou souměřitelné i každé tři úsečky, resp. každý konečný počet úseček. Každému pravoúhlému trojúhelníku tedy odpovídá pythagorejská trojice čísel a naopak. Ke každým dvěma podobným útvarům existuje poměr podobnosti, který je poměrem dvou přirozených čísel. Obsah obdélníku, jehož stranami jsou výše zmíněné souměřitelné úsečky a , b , je roven obsahu $n \cdot m$ čtverců o straně c , tj. nm jakýchsi jednotek obsahu. Podobně je objem kváдру možno vyjádřit počtem malých krychlíček, jejichž strana má délku měrné úsečky, kterou je možno změřit všechny tři hrany. Matematický svět v původním aritmetickém pojetí pythagorejců byl poměrně přehledný, jednoduchý a dobře představitelný.

2.7 Objev nesouměřitelnosti

Pýthagorejská škola se brzy přesvědčila, že její představy o souměřitelnosti úseček nejsou správné, že existují úsečky, které souměřitelné nejsou.

O objevu nesouměřitelnosti úseček mnoho nevíme. Neznáme, kdo a kdy nesouměřitelnost úseček prokázal, domníváme se, že k tomu došlo zhruba na přelomu 6. a 5. století př. Kr.

Pýthagorejci snad tento objev nejprve tajili, jak naznačují legendy o Hippasovi z Metapontu (5. stol. př. Kr.), který byl bohy potrestán za prozrazení podstaty souměřitelnosti a nesouměřitelnosti.

Rovněž nevíme, na jakém objektu byla nesouměřitelnost úseček zjištěna. Patrně se jednalo o nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce, mohlo však jít i o stranu a úhlopříčku pravidelného pětiúhelníku. Tato otázka však není příliš závažná. Jakmile totiž matematici objevili první dvojici nesouměřitelných úseček, jistě brzy zjistili, že to není ojedinělý případ.

Závažnějším problémem je však otázka, jaké matematické poznatky byly k důkazu nesouměřitelnosti úseček použity. Zda se jednalo o Pýthagorovu větu, čtvercová figurální čísla, podobnost, o využití jednoho ze základních pýthagorejských protikladů sudé-liché, nebo dokonce o tzv. nekonečný pokles.

Objev existence nesouměřitelných úseček lze pokládat za první významný matematický výsledek; je totiž hluboký, netriviální a vyžaduje důkaz sporem. Poznamenejme, že zvolíme-li nějakou úsečku c za jednotku délky, potom mají všechny úsečky souměřitelné s touto úsečkou c racionální délky, zatímco ostatní úsečky mají délky iracionální.

Na nesouměřitelnost úseček si řečtí myslitelé postupně zvykli. Můžeme to doložit citátem z Aristotelovy Metafyziky:

Všichni totiž, jak jsme řekli, začínají tím, že se diví, jestliže se věc skutečně má tak a tak ... ať se to týká obrátů slunce anebo nezměřitelnosti úhlopříčky; neboť každému se zdá podivné, že by se něco nedalo měřit měrnou jednotkou. Ale nakonec se podle přísloví všechno obrátí v opak a k lepšímu; a tak je tomu i tu, když se správně poučil. Vždyť znalec geometrie ničemu by se tak nepodivil, než kdyby se úhlopříčka čtverce dala změřit stranami. ([A], odst. 983a)

2.8 Důkazy nesouměřitelnosti úseček

Ve školské matematice se s iracionalitou setkáváme poprvé při důkazu faktu, že v racionálním oboru neexistuje odmocnina ze dvou, tj. číslo, jehož druhá mocnina je rovna číslu 2.

Připomeňme tento důkaz. Předpokládejme, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ a že tento zlomek je ve zkráceném tvaru, tj. čísla p, q jsou nesoudělná. Potom je $2q^2 = p^2$, číslo p musí být sudé, tj. $p = 2r$, a tedy $2q^2 = 4r^2$. Nyní je však $q^2 = 2r^2$, číslo q je tedy sudé, tj. $q = 2s$, a to je spor s nesoudělností čísel p, q . Číslo 2 tedy nemá v oboru racionálních čísel druhou odmocninu.

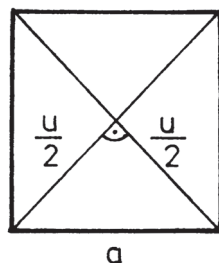
S tím, že některá racionální čísla nemají v oboru racionálních čísel druhou odmocninu, se matematici nechtěli smířit. Zkonstruovali proto rozšíření oboru racionálních čísel, obor čísel reálných, v němž se již odmocňovat dá. Reálná čísla, která nejsou racionální, se nazývají iracionální. Jsou to např. čísla $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ atd.

Důkaz nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce je geometrickou obdobou důkazu iracionality čísla $\sqrt{2}$: Předpokládáme, že strana čtverce měří a jednotek, úhlopříčka u jednotek

a že jsou tato dvě čísla nesoudělná. Podle Pýthagorovy věty je $a^2 + a^2 = u^2$, tedy $2a^2 = u^2$, tj. $u = 2r$. Nyní je $a^2 = 2r^2$, a tedy $a = 2s$, a to je spor s nesoudělností čísel a, u .

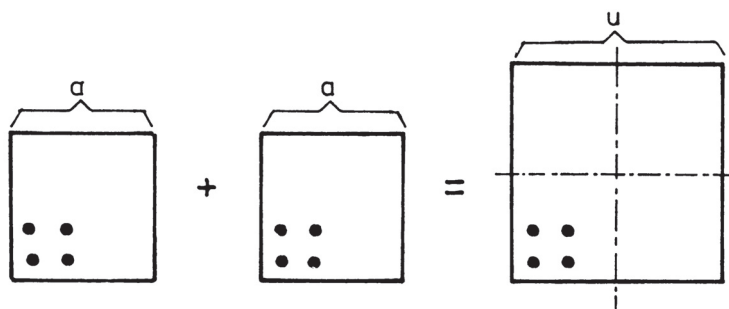
Pouze jsme zopakovali výše uvedený důkaz o iracionalitě odmocniny ze dvou, ale v geometrické podobě.

Předchozí důkaz nyní budeme mírně modifikovat. Předpokládejme opět, že strana čtverce měří a jednotek a úhlopříčka u jednotek a že jsou tato čísla nesoudělná. Podle Pýthagorovy věty je číslo u^2 sudé (je součtem dvou stejných čísel), proto je rovněž číslo u sudé. Polovina úhlopříčky tedy měří $\frac{u}{2}$ jednotek.



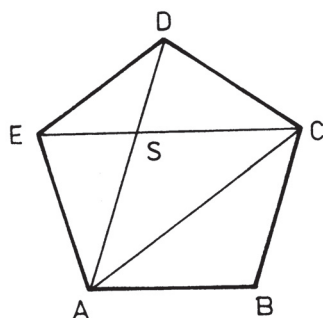
Podle Pýthagorovy věty (pro menší trojúhelník) je tedy rovněž číslo a^2 sudé, a proto je i číslo a sudé. A to je opět spor s předpokladem.

Důkaz nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce však můžeme provést pomocí figurálních čísel. Názorně ukážeme, že pro nesoudělná přirozená čísla a, u nemůže platit vztah $a^2 + a^2 = u^2$ (viz obrázek).



Číslo u^2 je sudé, neboť je součtem dvou stejných čísel. Proto je i číslo u sudé. Čtvercové číslo u^2 lze tedy rozdělit na dvě stejná obdélníková čísla (o stranách u a $\frac{u}{2}$). Každé z nich je rovno čtvercovému číslu a^2 . Přitom je lze rozdělit na dvě stejná čtvercová čísla o straně $\frac{u}{2}$ (viz obrázek). Číslo a^2 je tedy sudé, číslo a je rovněž sudé a opět jsme dospěli ke sporu.

Poměrně snadno můžeme dokázat nesouměřitelnost strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku. Předpokládejme, že jeho strana měří a jednotek a úhlopříčka u jednotek a že jsou tato dvě čísla nesoudělná (stačí předpokládat, že nejsou obě sudá). Nejprve připomeneme, že se úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku protínají ve zlatém řezu. Povšimněme si (viz obrázek), že $ABCS$ je kosočtverec a že jsou trojúhelníky ACB a EDS podobné. Je tedy $u : a = a : (u - a)$, tj. úhlopříčky se protínají ve zlatém řezu.

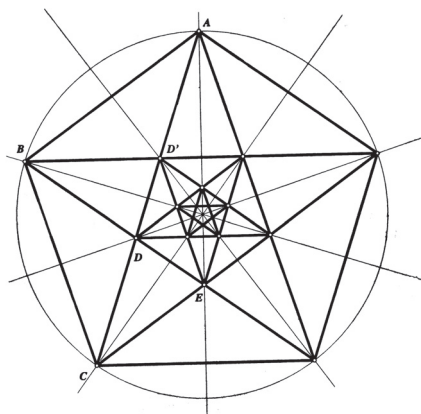


Zvážíme-li všechny tři možnosti (sudé, liché) pro čísla a , u , které nastanou pro rovnost $u : a = a : (u - a)$, dostáváme:

1. sudé : liché = liché : liché,
2. liché : liché = liché : sudé,
3. liché : sudé = sudé : liché.

Všechny však vedou ke sporu. Strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku jsou tedy nesouměřitelné úsečky.

Nesouměřitelnost strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku můžeme dokázat i tzv. nekonečným poklesem. Změříme-li nějakou jednotkou c stranu i úhlopříčku, změříme touto jednotkou i jejich rozdíl, a tedy i stranu a úhlopříčku menšího pětiúhelníku, pak ještě menšího atd. Prohlédněme si pečlivě následující obrázek, který je opravdu krásný a estetický, a provedme v myšlenkách zmíněný nekonečný pokles.



2.9 První krize matematiky

Aritmetické pojetí matematiky, s nímž přišla pythagorejská škola, se po objevu existence nesouměřitelných úseček zcela zhroutilo. Ukázalo se totiž, že přirozená čísla a jejich poměry nestačí na vybudování geometrie. Situace, k níž tehdy matematika dospěla, bývá někdy označována jako „první krize matematiky“, neboť se jednalo o krizi v základech celé tehdejší matematiky.

3. Východisko z krize

Jindřich Bečvář

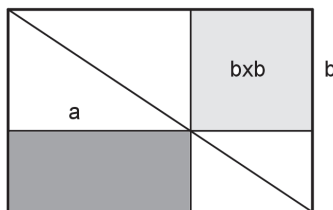
Řeční matematici se s neuspokojivým stavem matematiky poměrně brzy úspěšně vyrovnali. Od aritmetického pojetí přešli ke geometrickému. Základními matematickými veličinami se místo veličin aritmetických – přirozených čísel – staly veličiny geometrické, a to veličiny trojího druhu – „délky“, „obsahy“ a „objemy“. S geometrickými veličinami bylo třeba umět pracovat stejně dobře jako dříve s veličinami aritmetickými. Bylo přirozené, že sčítat (a odčítat) bylo možno pouze veličiny stejného rozměru, tj. délku s délkou, obsah s obsahem apod. Vynásobením dvou délek vznikl obsah, vynásobením obsahu s délkou vznikl objem apod. Souhrn těchto pravidel pro operace s geometrickými veličinami, která respektují jejich „dimenze“, bývá označován jako „zákon homogenity“.

3.1 Řecká geometrická algebra

Známé aritmetické a algebraické zákonitosti bylo nutno přeložit do řeči geometrických veličin. Zrodila se tzv. „řecká geometrická algebra“. Například distributivní zákon, který dnes zapisujeme ve tvaru $a \cdot (b + c) = ab + ac$, byl znázorněn obrázkem s jednoduchým komentářem: obsah obdélníku se stranami a , $b + c$ je roven součtu obsahů dvou obdélníků – jeden má strany a , b , druhý strany a , c . Známý vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lze geometricky znázornit výstižným obrázkem – čtverec o straně $a + b$ je rozdělen na čtverec o straně a , čtverec o straně b a dva obdélníky o stranách a , b . Podobně lze geometricky interpretovat asociativní zákon pro násobení $(ab)c = a(bc)$ (dvojí vyjádření objemu kváдру), $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (vztah rozdílu obsahů dvou čtverců a obsahu jistého obdélníku), $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (rozklad objemu krychle na součet objemů několika těles). Geometrickou řečí byly rovněž formulovány některé úlohy, které dnes zapisujeme a řešíme algebraicky; odpovídají lineárním a kvadratickým rovnicím. Nejjednodušší případy zapisujeme ve tvaru

$$ax = b^2, \quad ax = bc, \quad x^2 = ab, \quad ax - x^2 = b^2, \quad ax + x^2 = b^2, \quad x^2 - ax = b^2.$$

Řekové vymysleli pro řešení takových problémů geometrické konstrukce, některým se říkalo „přikládání ploch“ (původní výraz „parabolé“).



Objasníme nejprve geometrické řešení lineární rovnice $ax = b^2$. K úsečce délky a „přiložme“ čtverec o obsahu b^2 (viz obrázek). Vzniklý obrazec doplníme na obdélník, jedna jeho strana

má délku $a + b$, druhá má délku $b + x$. Tak získáme hledanou délku x . Zdůvodnění je vidět z obrázku (obsah b^2 světlého čtverce je stejný jako obsah ax tmavého obdélníku). Dnes bychom úlohu patrně řešili podle Eukleidovy věty o odvěsně. Výše uvedenou metodou však ihned vyřešíme i rovnici $ax = bc$. Pro užití Eukleidovy věty bychom museli nejprve přetvořit obdélník o stranách b, c na tzv. rovnoploché čtverec.

Eliptické přikládání ploch je tzv. přikládání ploch s nedostatkem (nedostatek – „elleipsis“). Geometricky řeší úlohu, kterou dnes vyjadřujeme rovnicí $ax - x^2 = b^2$, kde $b \leq \frac{a}{2}$. Úsečku délky a rozpůlíme a na kolmici v jejím středu nanese délku b . Ze získaného bodu opíšeme oblouk o poloměru $\frac{a}{2}$, který protne výchozí úsečku délky a v bodě, který ji rozdělí na části, jejichž délky jsou rovny oběma kořenům rovnice $ax - x^2 = b^2$ (viz obrázek vlevo). Uvědomme si význam počáteční podmínky $b \leq \frac{a}{2}$. Jak odpovídá podmínce kladené na diskriminant rovnice?



Zdůvodnění se zakládá na obrázku vpravo. Podlouhlý středně tmavý obdélník má obsah $ax - x^2$, je tedy (podle zadání) roven obsahu známého čtverce o délce strany b . Velký čtverec o straně $\frac{a}{2}$ je rozdělen na menší čtverec o obsahu $(\frac{a}{2} - x)^2$ a tzv. gnomon o obsahu b^2 . Je tedy

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + b^2.$$

Hyperbolické přikládání ploch je tzv. přikládání ploch s přebytkem (přebytek – „yperbolé“). Týká se úlohy, kterou dnes vyjadřujeme rovnicí $ax + x^2 = b^2$. Geometricky se řeší takto (viz obrázek vlevo):



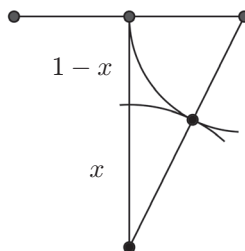
Úsečku délky a rozpůlíme a na kolmici v jejím středu nanese délku b (viz obrázek vlevo). Spojíme krajní body a délku $\frac{a}{2}$ odečteme od vzniklé úsečky. Tak dostaneme hledanou délku x . Zdůvodnění se zakládá na obrázku vpravo.

Čtverec o obsahu $(\frac{a}{2} + x)^2$ je rozložen na čtverec o obsahu $(\frac{a}{2})^2$ a gnomon o obsahu $ax + x^2$, který je však roven obsahu čtverce o straně b . Odtud je

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2.$$

Jiné možnosti geometrického řešení rovnic $x(a - x) = b^2$ a $x(a + x) = b^2$ dává Eukleidova věta o výšce.

Pomocí předchozí metody snadno rozdělíme úsečku zlatým řezem. Dělíme-li zlatým řezem jednotkovou úsečku a označíme-li délku její větší části písmenem x , je $1 : x = x : (1 - x)$, a tedy $1 \cdot x + x^2 = 1$. Dostáváme tedy kvadratickou rovnici, jejímž kořenem je $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\,0339\dots$ Konstruktivní řešení odpovídá výše uvedenému hyperbolickému příkládání (pro $a = 1$, $b = 1$), odtud vyplývá konstrukce. Svislá úsečka délky 1 je rozdělena zlatým řezem:



3.2 Konstrukce pravítkem a kružítkem

V souvislosti s nástupem geometrického pojetí a s prací s geometrickými veličinami se v řecké matematice objevil požadavek geometrických konstrukcí, tj. konstrukcí pravítkem a kružítkem. S geometrickými veličinami bylo totiž třeba zacházet geometricky. Pravítkem lze spojit dva body, tj. konstruovat úsečku, kružítkem lze z daného bodu jako středu opsat daným poloměrem kružnici. Připomeňme, že uvažujeme ideální konstrukce v matematickém světě dokonalých objektů, že pravítko je nástroj ke spojování bodů, na němž není žádné měřítko, a že kružítkem lze dělat libovolně velké kružnice.

Po zhroucení aritmetického světa začali řeckí matematici budovat svět geometrický. Základní materií, látkou, byly body, z nichž byly geometrickými konstrukcemi, tj. konstrukcemi pravítkem a kružítkem, vytvářeny další objekty. Pravítkem úsečky, kružítkem kružnice. Další body, které vznikaly jako průsečíky sestrojovaných úseček a kružnic, bylo možno v dalších krocích použít pro vedení dalších úseček a dalších kružnic. Takovýchto kroků však lze provést jen konečně mnoho.

Budování řeckého geometrického světa má tedy velmi podobné aspekty jako představy řeckých přírodních filozofů o budování veškerého jsoucná. V řecké přírodní filozofii je svět budován z jediné pralátky nebo několika málo živlů nebo z atomů či semen pomocí jednoho či dvou základních principů. V řecké geometrii je geometrický svět budován z bodů pomocí dvou postupů, kterými jsou konstrukce pravítkem a kružítkem. Již v 5. století př. Kr. se tedy projevila snaha tehdejších myslitelů po jakési minimalizaci, která je i v současné matematice typická při budování jakékoli teorie nebo disciplíny.

3.3 Klasické úlohy řecké matematiky

Počátkem 5. století př. Kr. se v řecké matematice objevily úlohy, o nichž často hovoříme jako o klasických nebo proslulých úlohách řecké matematiky – kvadratura kruhu – quadratura circuli, trisekce úhlu – trisectio anguli a zdvojení krychle – duplicatio cubi.

Někdy se k nim počítá i rektifikace kružnice a konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Zdá se pravděpodobné, že se tyto úlohy objevily v souvislosti se změnou paradigmatu řecké matematiky, v souvislosti s přechodem od aritmetického pojetí matematiky k pojetí geometrickému. Všechny tyto úlohy totiž úzce souvisejí s rozvojem práce s geometrickými veličinami a zejména s požadovanou metodou řešení. Proslulé úlohy bylo totiž třeba řešit konstruktivně, pravítkem a kružítkem.

Řeční matematici se snažili geometricky převádět veškeré délky na délky úseček, veškeré obsahy na obsahy čtverců a veškeré objemy na objemy krychlí. Úsečky, čtverce i krychle jsou totiž dány jen jediným údajem, čtverce vyplňují rovinu a krychle vyplňují prostor. Úsečky umíme geometricky sčítat, odčítat, dělit na n stejně velkých částí. Neumíme však vyjádřit délku kružnice úsečkou (rektifikace). Čtverce umíme geometricky sčítat a odčítat (pomocí Pýthagorovy věty), geometrickou konstrukcí umíme převést jakýkoli n -úhelník na čtverec. Neumíme však na čtverec převést kruh (kvadratura). Nejhorší situace nastává s krychlemi – geometricky neumíme sečíst ani dvě stejné krychle (zdvojení krychle). Úhly umíme geometricky sčítat, odčítat a půlit. Neumíme však úhel rozdělit na tři stejné části (trisekce). Plný úhel umíme rozdělit na n stejných částí jen pro některá n (konstrukce pravidelných mnohoúhelníků). Každá z klasických úloh tak odpovídá situaci, v níž jsme při operování s geometrickými veličinami bezradní.

O snahách řešit klasické úlohy máme zprávy již z 5. století př. Kr. Například filozof Anaxagorás z Klazomen si prý krátil čas ve vězení úvahami o kvadratuře kruhu. Zhruba ve stejné době se problematikou kvadratury a rektifikace zabývali Antifón z Athén a Brizón – uvažovali o aproximaci obsahu a obvodu kruhu obsahem a obvodem vepsaných a opsaných pravidelných n -úhelníků, případně průměrem těchto veličin. Antifón vepsal do kruhu rovnostranný trojúhelník, nad každou z jeho stran sestrojil rovnoramenný trojúhelník s vrcholem na obvodu kruhu, a tak pokračoval dále; představoval si, že strany „posledních“ trojúhelníků v podstatě „splynou“ s kružnicí.

3.4 Teorie proporcí

Důležitým úkolem bylo vytvořit teorii poměrů geometrických veličin, ať jsou souměřitelné nebo nesouměřitelné. Bez ní není možno pracovat s podobností geometrických útvarů – potřebujeme totiž poměr podobnosti. Takovouto teorii vypracoval Eudoxos; dnes se obvykle hovoří o „teorii proporcí“.

Eudoxos z Knidu byl velmi nápaditým matematikem a astronomem. Je autorem matematické teorie pohybu planet (tzv. teorie homocentrických sfér), která byla inspirací pro Apollónia z Pergé (kolem r. 200 př. Kr.) a Klaudia Ptolemaia z Alexandrie (asi 90 až 160), a tzv. exhaustivní metody.

Velký význam měla jeho teorie poměrů a úměr, která byla nezbytná pro rozvoj geometrického pojetí matematiky, k němuž řeční myslitelé dospěli po krizi způsobené objevem nesouměřitelnosti. Eudoxos nejprve definoval, co je díl a násobek veličiny, tj. vyšel ze vzta-

hu $a = n \cdot b$, kde n je přirozené číslo. Poměr dvou veličin a, b zaváděl jen v případě, že mají tyto veličiny stejný rozměr, tj. obě jsou buď délkami nebo obsahy nebo objemy. Ze svých úvah vyloučil nekonečně malé a nekonečně velké veličiny. Úměru $a : b = c : d$, tj. rovnost dvou poměrů, definoval takto: pro každá dvě přirozená čísla m, n je

$$\begin{aligned} n \cdot a < m \cdot b & \text{ právě když } n \cdot c < m \cdot d, \\ n \cdot a > m \cdot b & \text{ právě když } n \cdot c > m \cdot d, \\ n \cdot a = m \cdot b & \text{ právě když } n \cdot c = m \cdot d. \end{aligned}$$

Podobně definoval uspořádání poměrů: $a : b > c : d$, jestliže existují přirozená čísla m, n taková, že $n \cdot a > m \cdot b$ a $n \cdot c \leq m \cdot d$. V těchto dvou definicích je obsaženo to nejpodstatnější z Eudoxovy teorie poměrů a úměr.

Poznamenejme, že základní myšlenku Eudoxovy teorie poměrů a úměr využil ve druhé polovině 19. století německý matematik Richard Dedekind (1831–1916) k vybudování exaktní teorie reálných čísel. Tato teorie je dnes známá jako Dedekindova teorie řezů.

3.5 Svět nesouměřitelných veličin

Řeční matematici se potřebovali vyznat ve světě nesouměřitelných veličin, ve světě iracionalit. Tomuto problému se věnoval Theodóros a zejména jeho žák Theaitétos. Zajímavé svědectví o tom nalézáme v Platónově dialogu Theaitétos, v němž Sókratés (469–399) rozmlouvá s mladým Theaitétem, který vypráví, že jim Theodóros vysvětloval problematiku souměřitelnosti a nesouměřitelnosti veličin a že dospěli k názoru, že veličin nesouměřitelných s danou jednotkou délky je nekonečně mnoho. Pokud je popsána situace založena na skutečné události, muselo k ní dojít – vzhledem k životním datům obou aktérů – někdy mezi roky 403 a 399. Řeční matematici tedy v té době dobře věděli, že iracionalit je nekonečně mnoho. Právě Theaitétos popsal řadu typů iracionalit a podal jakousi jejich klasifikaci, která byla později Eukleidem zpracována v desáté knize jeho Základů. Uveďme však již zmíněný úryvek z dialogu Theaitétos.

Theait. Tuhle Theodóros nám znázorňoval obrazci cosi o mocninách, o čtverci obsahujícím tři čtverečné stopy a o čtverci obsahujícím pět čtverečných stop, že svou stranou nejsou souměřitelné se čtvercem o jedné stopě, a tak probíral jednu mocninu po druhé až po čtverec o sedmnácti čtverečných stopách; při tomto se nevím proč zastavil. A tu nás napadla taková myšlenka – když se jevílo, že těch mocnin je nekonečné množství – pokusit se je sebrat v jedno jméno, kterým bychom nazvali všechny tyto mocniny.

Sókr. A našli jste snad nějaké takové?

Theait. Mně se zdá, že ano; ale posuď to i ty.

Sókr. Mluv.

Theait. Všechna čísla jsme rozdělili na dva druhy; čísla vznikající násobením dvou stejných činitelů jsme přirovnali tvarem ke čtverci a proto jsme je nazvali čtvercovými a rovnostrannými.

Sókr. Dobře.

Theait. Ale čísla, která jsou mezi těmito – k nim náleží i tři i pět i každé číslo, které nevzniká násobením stejných činitelů, nýbrž buďto většího násobence menším násobitelem nebo menšího násobence větším

násobitelem a které omezuje pokaždé jedna větší strana a jedna menší – ta jsme přirovnali k obdélníku a nazvali je obdélníkovými.

Sókr. Výborně. Ale co dále?

Theait. Všechny přímky, jejichž čtverec tvoří číslo rovnostranné a plošné, jsme stanovili jakožto délky, které však tvoří číslo nerovnostranné, jakožto mocnosti, hledíce k tomu, že nejsou s oněmi souměřitelné délkou, nýbrž plochami, které vznikají jejich umocněním. A podobně co se týče těles. ([B2], str. 15)

V předposledním odstavci znamená slovní spojení „které omezuje pokaždé jedna větší strana a jedna menší“ to, že obdélníkovými čísly jsou míněna právě ta přirozená čísla, která nejsou čísla čtvercovými (při každém rozkladu v součin dvou čísel je jeden činitel větší než druhý). Číslo čtvercové tedy pro řecké matematiky není speciálním případem čísla obdélníkového. Tomu odpovídá i zařazení dvojice čtverec-obdélník mezi deset základních pythagorejských protikladů. Nesouvisel právě tento striktní pohled na tuto dvojici pojmů s objevem ne-souměřitelnosti? Vždyť odmocnina čtvercového čísla je (v naší řeči) číslo přirozené a odmocnina obdélníkového čísla číslo iracionální.

V posledním odstavci jsou druhé odmocniny přirozených čísel rozděleny na čísla přirozená a čísla iracionální (délky, jejichž čtverec tvoří číslo rovnostranné a plošné, a mocnosti, které však tvoří číslo nerovnostranné). Poslední věta ukázky znamená, že stejné rozlišení se uvažuje u třetích odmocnin přirozených čísel.

3.6 Eukleidovy Základy

Eukleidés sepsal své proslulé Základy [E] v Alexandrii na přelomu 4. a 3. století př. Kr. Vybudoval geometrický svět v duchu základní myšlenky řecké přírodní filozofie (body jako výchozí materie a užití pravítka a kružítko jako dva principy) podle Aristotelových metodických zásad (exaktní budování vědecké teorie: výchozí pojmy, postuláty, axiomy, věty, důkazy). Ukázal, jak vypadá axiomatická teorie, jaká je logická výstavba matematiky a prezentoval bezchybný proces dokazování. Matematika se tehdy stala vědou podle nej-přísnějších kritérií.

Francouzský filozof a historik vědy Arnold Reymond (1874–1958) napsal o řeckém přínosu k rozvoji myšlení následující slova, která můžeme dát do přímé souvislosti s Eukleidovými Základy:

Ve srovnání s empirickými a zlomkovitými vědomostmi, jež lidé na Východě pracně nasbírali za dlouhá staletí, je řecká věda pravým zázrakem. Zde lidská mysl po prvé pochopila, že lze stanovit omezený počet zásad a vyvodit z nich jistý počet pravd, které jsou jejich nutným následkem. ([F], díl I, str. 21)

Základy jsou geniální kompilací shrnující téměř veškeré matematické poznatky předchozích tří století. Řecký název Stoicheia (v latinském překladu Elementa, česky Základy) snad naznačuje nejen charakter tohoto textu – nezpochybnitelný základ k proniknutí do matematického myšlení, ale i tu skutečnost, že soustřeďuje nejdůležitější matematické poznatky (prvky – stoicheia).

Aristotelés napsal ve své *Metafysice* tato slova:

Prvkem (stoicheion) se nazývá to, z čeho se něco skládá jako z první složky a jež se, co se týče druhu, nedá dělit v jiný druh. Tak prvky hlasu jest to, z čeho se hlas skládá a v co se posledně rozkládá, a to tak, že se již nedá rozkládat v jiné druhově různé hlasy. I když je tu další dělení, tedy jsou to části stejného druhu, na příklad každá část vody jest vodou, ale není tomu tak u slabiky. ... Podobně se mluví také o prvcích geometrických důkazů a vůbec o prvcích důkazů. První důkazy totiž, jež jsou opět obsaženy ve více důkazech, nazývají se prvky důkazů. Takového druhu jsou v sylogismech první soudy, jež se získávají ze tří pojmů s pomocí jednoho středního.

Odtud se označení „prvek“ přenáší na to, co jsouc jedno a malé prospívá mnohému. Proto se prvkem nazývá také to, co je malé, jednoduché a nedělitelné. Odtud pochází, že se to, co je v nejvyšší míře obecné, pokládá za prvek, poněvadž každé z nich, jsouc jedno a jednoduché, jest obsaženo v mnoha věcech, buď ve všech nebo ve většině jich. Proto také někteří míní, že jednotka a bod jsou počátky. ... v každém případě prvek znamená něco prvního, co je ve věcech obsaženo. ([A], odst. 1014a,b)

Základy jsou nejstarším kompletně dochovaným řeckým a rovněž evropským matematickým textem, nejvýznamnější matematickou monografií všech dob, nejvíce komentovanou a přepisovanou matematickou knihou, po Bibli prý nejčastěji vydávanou a studovanou knihou západní civilizace, která zcela zásadním způsobem ovlivňovala matematiku a její vyučování po dobu více než dvou tisíciletí. Obrovský význam měly Základy po stránce metodologické. Po celá staletí byly svou logickou stavbou vzorem exaktního budování matematiky a nejen matematiky, ale i vědy obecně. Viz např. [B4], [H], [E].

LITERATURA

- [A] Aristoteles, *Metafysika*, ČAVU, Praha, 1927, 2. vydání: J. Leichter, Praha, 1946, 3. vydání: P. Rezek, Praha, 2003.
- [B1] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky*, in J. Bečvář, E. Fuchs: *Historie matematiky I*, Edice Dějiny matematiky, svazek č. 1, JČMF, Brno, 1994, 20–107, <http://www.dml.cz>.
- [B2] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky II*, in J. Bečvář, E. Fuchs: *Historie matematiky II*, Edice Dějiny matematiky, svazek č. 7, Prometheus, Praha, 1997, 6–28, <http://www.dml.cz>.
- [B3] Bečvář J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 19, Prometheus, Praha, 2001, <http://www.dml.cz>.
- [B4] Bečvář J., *Cesta k Eukleidovým Základům*, G – Slovenský časopis pre geometriu a grafiku 4 (2007), č. 7, 5–24.
- [B5] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003, <http://www.dml.cz>.
- [E] Eukleides, *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Přeložil František Servít, Jednota českých matematiků, Praha, 1907.
- [F] Farrington B., *Věda ve starém Řecku a její význam pro nás I, II*, Rovnost, Brno, 1950, 1951.
- [BJB] Bunt L. N. H., Jones P. S., Bedient J. D., *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976, reprint: Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- [H] Heath T. L., *A history of Greek Mathematics I, II*, Clarendon Press, Oxford, 1921, reprint: Dover Publication, Inc., New York, 1981.
- [PJKB] Porfyrios, Jamblich, Kratochvíl Z., Bor D. Ž., *Pýthagorás ze Samu*, TRIGON, Praha, 1999, 123 stran.
- [R] Riedweg Ch., *Pythagoras. Leben. Lehre. Nachwirkung*, Verlag C. H. Beck, München, 2002, 206 stran.
- [S] Svoboda K. (ed.), *Zlomky předsokratovských myslitelů*, vybral a přeložil Karel Svoboda, ČAVU, Praha, 1944, 2. vydání: ČSAV, Praha, 1962.

4. Zápis čísel v Evropě 500 až 1600¹

Martina Bečvářová

4.1 Úvod

Pokusíme se popsat vývoj zápisu čísel v západní, jižní a střední Evropě (tj. v Evropě, která byla pod kulturním a náboženským vlivem Říma) v období zhruba jednoho tisíce let. Nebudeme si všímat vývoje zápisu čísel v Byzanci, Rusku, slovanských zemích či na Blízkém východě, který byl značně komplikovaný a zcela odlišný od vývoje na západě. Je třeba poznamenat, že zápis čísel prodělal v Evropě dosti složitý a nerovnoměrný vývoj. V různých dobách a různých regionech existovalo současně několik typů záznamu čísel, ukážeme nejdůležitější a nejrozšířenější z nich.

4.2 Počítání na prstech

Jednou z nejstarších a nejjednodušších početních pomůcek byly prsty.

Znázorňování čísel a počítání na prstech bylo již ve starověku užíváno snad ve všech kulturních civilizacích. V Evropě počítali na prstech již Řekové (viz [Me1], str. 211–212), kteří tyto početní postupy považovali za jednoduché a názorné, od Řeků je převzali Římané;² počítání na prstech používali hlavně lidé bez většího vzdělání. O počítání na prstech se zmiňoval např. Plinius Starší (23/24–79),³ satirik Decimus Iunius Iuvenalis (po r. 50 – po r. 130), řečník, učitel a vychovatel Marcus Fabius Quintilianus (asi 35–96) a astronom Firmicus Maternus (4. stol.). Znázorňování čísel prsty a počítání na prstech umožňovalo překonávat v obrovské mnohonárodní římské říši jazykové bariéry zejména při obchodu.

Po zániku antického světa došlo v Evropě k hlubokému úpadku vzdělanosti i kultury, zapomenuta byla téměř celá antická matematika i rozvinuté početní algoritmy. Počítání na prstech se proto ve středověkém světě výrazně uplatňovalo. Benediktinský mnich Beda Venerabilis (asi 673–735) popsal znázorňování čísel na prstech v úvodu *De computo vel loquela digitorum* svého díla *De temporum ratione*: jednotky byly reprezentovány polohami prstů levé ruky, desítky kombinacemi poloh prstů a palce levé ruky, stovky polohami prstů pravé ruky, tisíce kombinacemi poloh prstů a palce pravé ruky, desetitisíce, statisíce a miliony polohami celých paží a trupu.⁴ Díky Bedovi se počítání na prstech rozšířilo v celé Evropě; prosazoval

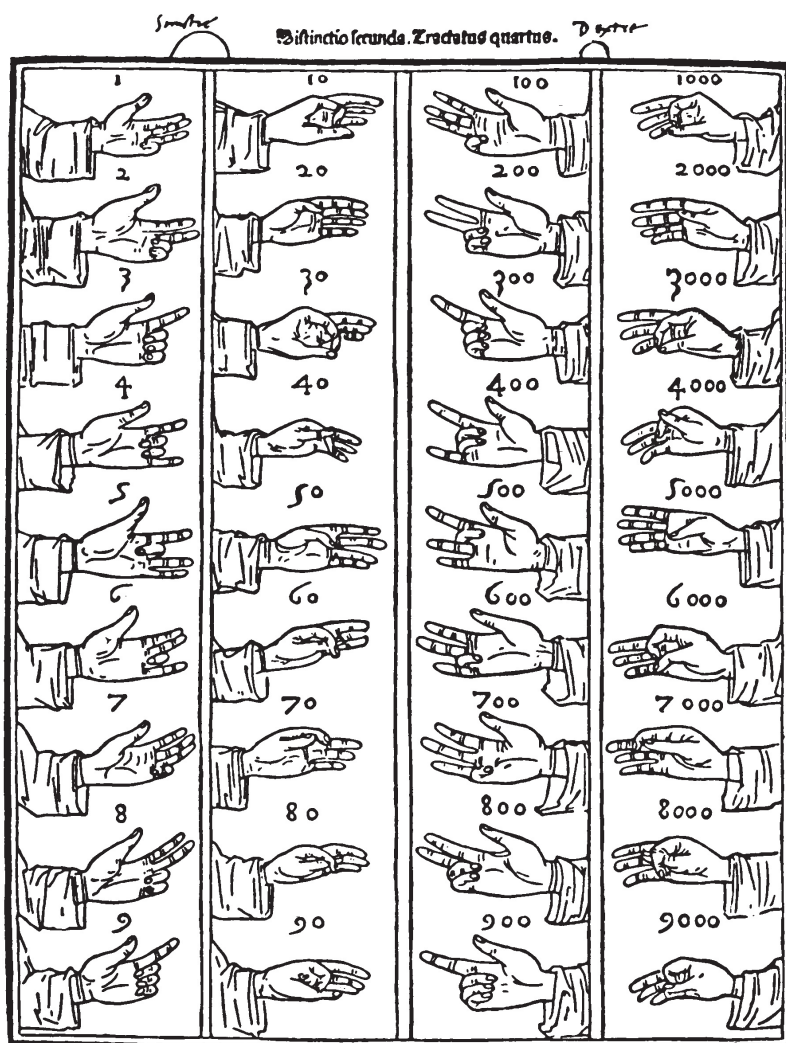
¹ Jedná se o rozšířenou verzi článku M. Bečvářová: *Středověké početní algoritmy*, in J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 19, Prometheus, Praha, 2001, str. 231–263.

² Římané počítali na prstech od 1 do 10 000; v Britském muzeu v Londýně jsou uloženy římské *početní známky* ze slonoviny, na kterých jsou zobrazeny polohy prstů pro číselné hodnoty 1 až 15. Pocházejí snad z 1. století.

³ Popsal mimo jiné slavnou římskou sochu boha Iana, který ukazoval na prstech počet dnů v roce. Viz [Me1], str. 210.

⁴ Podrobný popis viz [Me1], str. 202–208. Polohy prstů znázorňující prvních 15 čísel jsou stejné jako na římských žetonech.

je např. biskup Walafried Strabo (9. stol.) z kláštera Reichenau. Počítání na prstech popsal i Hrabanus Maurus (780–856) ve svém spise *De numeris*; na prstech znázorňoval čísla od 1 do 20 000.⁵ Znázornění čísel na prstech je i na samém počátku slavné knihy *Liber abaci* Leonarda Pisánského (asi 1170 – po 1240).⁶ Nicholas Rhabdas ze Smyrny ve spise *Ekphrasis toû Daktylikoû Métrou* (*Počítání na prstech*) z roku 1340 popisuje počítání na prstech podle římského způsobu a ukazuje, že i Arabové, Peršané a Řekové používali podobnou symboliku a podobné postupy jako Římané. Další popis počítání na prstech je možno nalézt např. v rukopise *Pratica d'Arismetricha* neznámého florentského mistra.⁷ Počítání na prstech neliší se příliš od způsobu, který podal Beda Venerabilis, popsal Luca Pacioli (1445–1514) ve svém velkém díle *Summa de Arithmetica. Geometria. Proporzioni. Proporzionalità* z roku 1494.



Počítání na prstech
(L. Pacioli: *Summa de Arithmetica*. ..., Benátky, 1494)

⁵ Viz *Dějiny světa. Raně křesťanský svět. Od roku 732 do roku 1096*, Larousse, Vašut nakladatelství, Praha, 1998, str. 688. Viz též [Me1], str. 215.

⁶ Viz např. *Codice ambrosiano I 72 sup.* ze 13. století. Viz též H. Lüneburg: *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992, 2. přepracované a rozšířené vydání 1993.

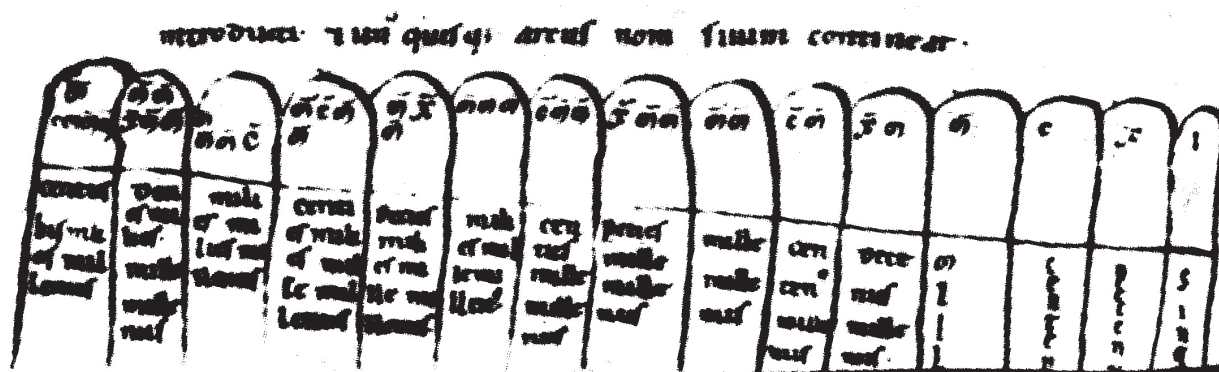
⁷ Viz U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli: *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni Editore, Firenze, 1992, str. 30–31 a jedna z fotografií v obrazové příloze.

Roku 1522 publikoval Aventin z Norimberku učebnici *Abacus atque vetustissimi veterum Latinorum per digitos manusque numerandi consuetudo*, ve které popsal souvislosti mezi počítáním na abaku a na prstech. Jedna z posledních učebnic, která obsahovala výklad počítání na prstech, je učebnice Jacoba Leupolda *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, která vyšla roku 1727.⁸

4.3 Abakus

Důležitou středověkou početní pomůckou byl abakus, který používali již staří Řekové, ale jehož znalost byla po pádu římského impéria na dlouhou dobu téměř zapomenuta a musela být znovu pracně objevována.

Středověký abakus byla hladká dřevěná deska rozdělená obvykle na 30 sloupců, z nichž první tři zprava sloužily pro počítání se zlomky, ostatní pro počítání s přirozenými čísly. Sloupce bývaly nahoře zakončeny ozdobným obloukem, který byl nazýván *arcus Pythagorei*, neboť ve středověku byl vynález abaku nesprávně připisován Pýthagorovi. Počítání na středověkém abaku modifikoval koncem 10. století Gerbert (asi 940–1003). Zatímco ostatní počtáři využívali čísla na abaku položením příslušného počtu kamínků do sloupců představujících jednotky, desítky, stovky apod., Gerbert a jeho žáci používali tzv. *apexy* (*apices*), tj. početní známky, na kterých byly speciální znaky, které lze označit za předchůdce dnešních moderních evropských číslic 1, 2, ..., 9. Do každého sloupce abaku tedy stačilo položit nejvýše jeden apex. Apexy byly vyráběny z kůry, rohoviny, dřeva apod.; jejich názvy byly odvozeny z arabských a řeckých slov.



Abakus s 15 sloupci
(rukopis z 12. století, Bavorská státní knihovna, Mnichov)

Na abaku bylo možno poměrně snadno sčítat a odčítat; násobení bylo již komplikovanější, dělit uměli jen ti nejschopnější počtáři, mezi které patřil právě Gerbert. Ten se v několika svých spisech počítání na abaku věnoval.

⁸ Viz obr. 41, [Me1], str. 207.

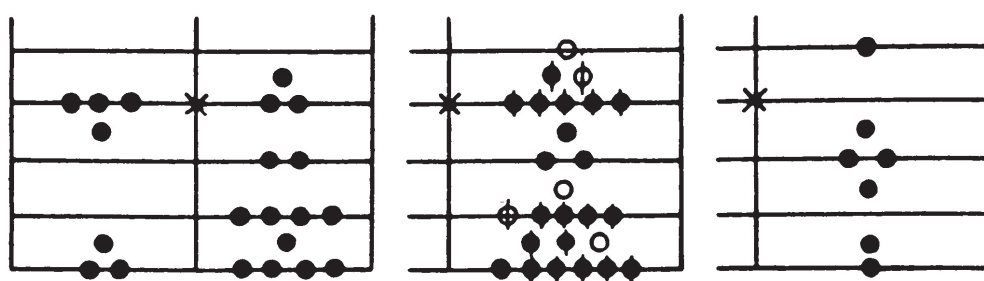
Jeden z dalších výkladů počítání na abaku podal v 11. století Bernelinus ve spise *Liber abaci*. Je pravděpodobné, že jako Gerbertův žák popsal právě Gerbertem inovovaný abakus. V 11. a 12. století se abakus značně rozšířil, vznikla řada prací popisujících použití této početní pomůcky. Autorem jedné z nich byl Hermannus Contractus (1013–1054) z benediktinského kláštera v Reichenau, který popisoval počítání na abaku bez užití „apexů“, které nahradil římskými číslicemi.

Abakus s apexy velké obliby nedosáhl, s apexy se počítalo většinou jen v klášterních školách. Rozšířil se abakus s římskými číslicemi, který byl užíván až do konce 15. století, zejména výběrčími daní a kupci.

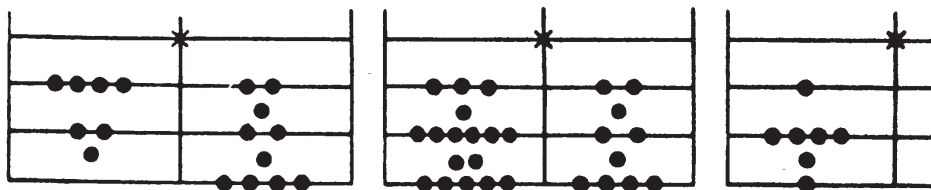
4.4 Liny

Na konci 12. století se v Evropě začalo používat počítání *na linách*. Výhodou tohoto postupu bylo to, že nebylo zapotřebí žádné pomůcky; stačilo načrtnout řadu rovnoběžných linek na tabuli nebo na stole. Každá linka byla určena pro jeden konkrétní řád (jednotky, desítky, stovky atd.). Kamínky se kladly buď na linky nebo mezi ně, bylo však možno je nahradit namalovanými puntíky, které bylo při výpočtu možno snadno mazat. Na lince měly kamínky hodnotu jednotky příslušného řádu, v mezeře označovaly pět jednotek.

Sčítání a odčítání na linách je znázorněno na dvou následujících obrázcích. Sčítalo se tak, že se každý ze sčítanců zaznamenal na linách do jednoho sloupečku, pak se všechny kamínky přemístily do společného sloupečku na odpovídající liny a do odpovídajících mezer. Na každé lince mohly ležet maximálně čtyři kamínky; pokud počet kamínků přesahoval tento počet, odebralo se pět kamínků a do následující mezery se jeden přidal. V každé mezeře mohl být nejvýše jeden kamínek; pokud jich bylo více, nahradily se dva kamínky z mezery jedním kamínkem na následující lince. Tak se postupovalo od nejnižších řádů k nejvyšším. Odčítání se provádělo podobně.



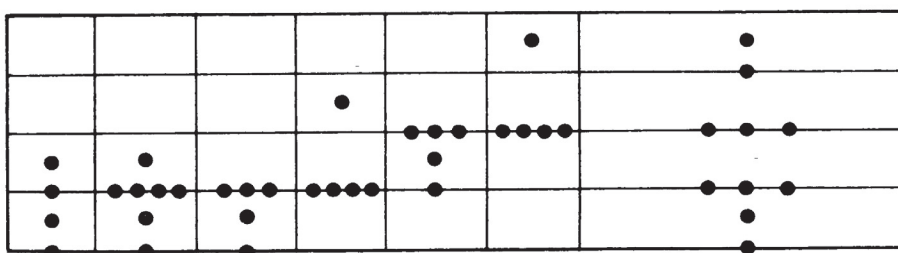
Sčítání na linách
 $3\,507 + 7\,249 = 10\,756$



Odčítání na linách

$$425 - 279 = 146$$

Násobení se převádělo na opakované sčítání, případně se násobilo po jednotlivých řádech. Dělení se převádělo na opakované odčítání. Násobení a dělení vyžadovalo poměrně dlouhou a pozornou manipulaci s přemisťováním kamínků. Násobení na linách je znázorněno na následujícím obrázku.



Násobení na linách

$$66 \times 96 = 6\,336$$

První sloupeček znázorňuje číslo 66,
druhý sloupeček číslo 96, třetí sloupeček číslo $6 \times 6 = 36$,
čtvrtý sloupeček číslo $6 \times 90 = 540$, pátý sloupeček číslo $60 \times 6 = 360$,
šestý sloupeček číslo $60 \times 90 = 5\,400$
a sedmý sloupeček součet $36 + 540 + 360 + 5\,400 = 6\,336$.

Počítání na linách bylo s úspěchem užíváno i v 16. století, zabývá se jím v té době řada učebnic. Často jsou na základním schématu vedle sebe umístěny ve třech sloupcích číselné hodnoty $\frac{1}{2}$, 1, 5, ..., 1 000 000 (moderním způsobem pomocí desítkové poziční soustavy s indicko-arabskými číslicemi včetně nuly), jejich slovní označení a znázornění na linách (viz následující obrázek).⁹ Liny se dlouhou dobu používaly i na triviálních školách jako „počítadlo“ a sloužily rovněž jako průprava ke vnímání čísel.

⁹ Jde např. o učebnice Adama Riese (1492–1559); na jejich titulních listech jsou zobrazeni počtáři pracující s linami. Další známé početnice jsou od J. Köbela. První českou početnicí je spis Ondřeje Klatovského nazvaný *Nowe knížky wo pocztach na Cifry a nalyny przytom niektere welmi vzyteczne regule a exempla mintze rozlyczne podle biehu kupetzkeho Kratze a vzytecznie sebrana* (1530); další české početnice sepsali např. Beneš Optát z Telče a Petr Gzell: *Isagogikon* (1535), *Knížky Početní na rozličné Koupě v nově vytištěné* (1548), Jiří Mikuláš Brněnský: *Knížka v níž obsahují se začátkové Umění Aritmetického, to jest počtův na Cifry neb liný poznání pro pacholata a lidi kupecké sebraná* (1567), Georg Goerl z Goerlštejna: *Arithmetica to gest knížka početnij neb umění počtův na linách a cyffrách skrze exempla a mince rozličné všem w handlech, w auřadech, a w hospodářstwij se obijragijcým welmi užitečná a prospěšná* (1577, 1597, 1610). Podrobněji viz [Sm].



Početní deska s linami pro výpočet směny mincí
(dřevoryt pocházející patrně ze Štrasburku)



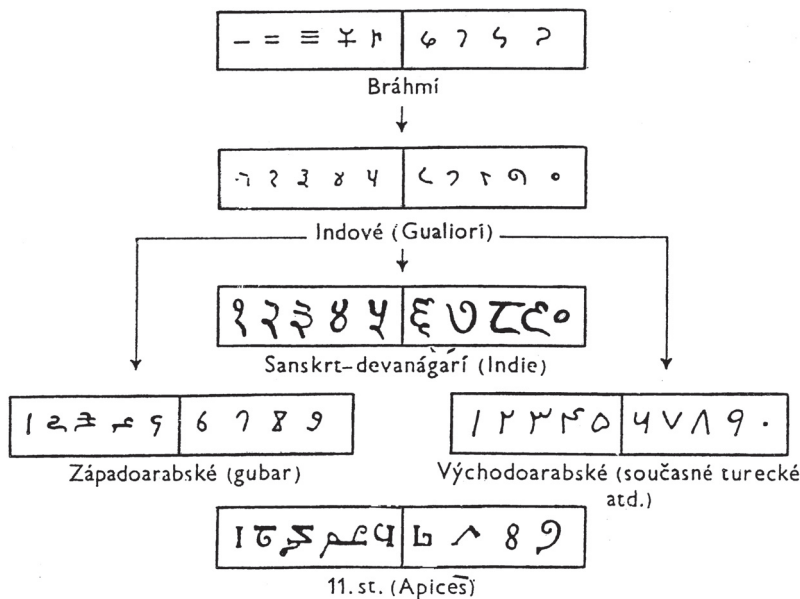
Počítání na linách
(J. Köbel: *Rechenbüchlein*, Augsburg, 1514)

1-0-0-0-0-0	*	•	*	Tiſyc Tiſycü
5 0 0 0 0 0		•		pit Set Tiſyc
1-0-0-0-0-0		•		Bro-Tiſyc
5 0 0 0 0		•		padefat Tiſyc
1-0-0-0-0		•		Deſe -Tiſyc
5 0 0 0		•		pit Tiſyc
1-0-0-0	*	•	*	Tiſyc
5 0 0		•		pit Set
1-0-0		•		Bro
5 0		•		padefat
1-0		•		Deſet
5		•		pit
1		•		Gedna
d		•		pül

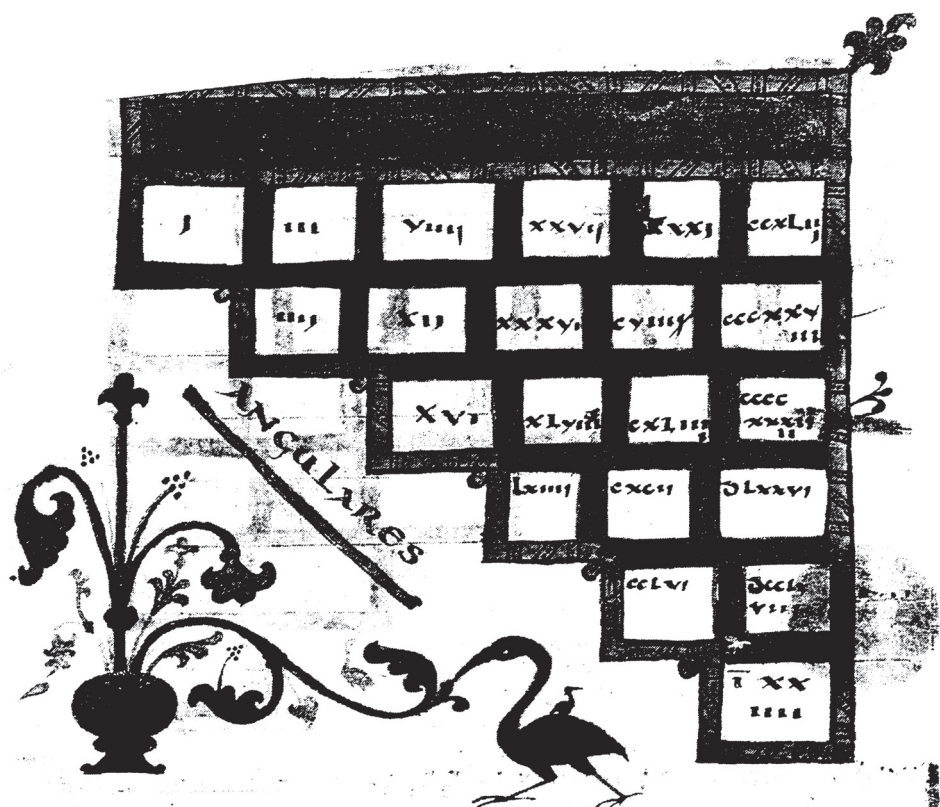
pri tom aby znal / na ktera koli Lina
prst se polozi / ze ta količo gedno znamená /
Spaciam podniti púl / nad ni péc / Druhú
Desku

4.5 Zápis čísel. Symbolika

Až do 10. století se v Evropě k zápisu čísel používaly pouze římské číslice. Pak začínaly do Evropy pozvolna pronikat nové, indicko-arabské číslice. Poprvé se objevily ve Španělsku, kam se dostaly s šířící se arabskou vědou a kulturou. Nejstarší zápis čísla v indicko-arabské poziční desítkové soustavě nalézáme v Evropě v kodexu *Codex Vigilanus* z roku 976; patřil klášteru Albelda v severním Španělsku.



Genealogie dnešních číslíc podle Menningera



Ad quadrupli secundum hanc formam descriptio ē.
 ad quam scilicet qui a prioribus instructus accesserit.
 nulla ratione trepidabit; Et decem is quidem mul-
 tiplicibus eandem conuenientiam pernotabis.



Boëthiova Aritmetika
 (rukopis z 10. až 11. století, Státní knihovna Bamberg)

Na přelomu 10. a 11. století se v Evropě začaly šířit západoarabské číslice *gubar* (též *gobar*), které přišly z oblasti dnešního Íránu a Egypta. V této době ještě nebyl v Evropě užíván žádný znak pro nulu, nad čísly se psaly tečky, které určovaly řád čísel (např. zápis 2̇34 představoval číslo 234, zápis 2̇2̇ číslo 230, zápis 2̇4 číslo 204). V 11. století se objevovalo stále více rukopisů, ve kterých byla čísla zapisována novým způsobem, v indicko-arabské poziční desítkové soustavě, postupně se však vyskytovaly větší či menší odchylky od arabského způsobu psaní cifer. Ve 12. století se v Evropě rozšířilo slovo *cifra* ve smyslu číslice nebo číslo; tento termín byl odvozen z arabského slova *as-syfr*, které původně znamenalo nulu.¹⁰ Ve 13. století zavedl Leonardo Pisánský pro nulu termín *zephirum*, který se udržel až do 17. století, ve 12. až 15. století se objevily ještě termíny „circulus, nihil, figura nihili, nullus, nulla“. Smysl a význam nuly byl po několik století předmětem matematicko-filozofických úvah. Například v roce 1484 napsal Nicolas Chuquet (1445–1488):

... nula sama o sobě nic neznamena, ale tím, že zaujímá nějaké místo, určuje hodnotu jiných symbolů. ([Ju], str. 344)

Indicko-arabská poziční desítková soustava byla v Evropě přijímána opatrně a s nedůvěrou. Je zajímavé, že o nový způsob měli zájem hlavně obchodníci a pokladníci, kteří prováděli dlouhé výpočty, zatímco matematici se přidržovali „osvědčených“ římských číslic. I oficiální autority dlouho „novoty“ odmítaly. Například roku 1299 zakázala Florencie používat nová čísla a nařídila je zapisovat slovy. Rozhodující význam pro přijetí desítkové poziční soustavy a nových číslic měly některé nové spisy, které se v Evropě šířily; byla to zejména latinská kompilace *Libro alghvarismi de practica arismatrice* (*Kniha Algorisma o aritmetické praxi*) od Joanna Sevillského (? – asi 1153), *Liber ysagogarum Alghorismi in artem astronomicam a magistro A. compositus* (*Kniha uvedení Algorisma do astronomického umění*) neznámého mistra A. (snad jím byl Adelard z Bath) a latinský překlad Savasordova¹¹ spisu *Liber embadorum* (*Kniha o měřeních*).

Až do 16. století v Evropě soupeřily oba typy zápisu čísel. V 16. století zvítězila „nová čísla“, která ze škol i běžného života postupně vytlačila římské cifry. K rozšíření indicko-arabského pozičního desítkového systému přispěl i rozvoj knihtisku a s ním spojené vydávání prvních početnic a učebnic aritmetiky.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Rukopis z r.976	I	2	3	4	5	6	7	8	9	
Rukopis z počátku 12.st.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Rukopis Sacroboscova díla z r.1442	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Číslice A.Dürerra z r.1525	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Z tištěného díla J.Widmanna z r.1489	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Vývoj dnešních číslic

¹⁰ Poprvé se tento termín objevil ve spisu *Kniha uvedení Algorisma do astronomického umění*, kterou sepsal v roce 1143 neznámý mistr A.

¹¹ Arabský matematik Abraham Bar Chijja (asi 1070–1136).

55	LV	90	XC	4000	IIII ^{as}
56	LVI	91	XCI	5000	V ^{as}
57	LVII	92	XCII	6000	VI ^{as}
58	LVIII	93	XCIII	7000	VII ^{as}
59	LIX	94	XCIII	8000	VIII ^{as}
60	LX	95	XCV	9000	IX ^{as}
61	LXI	96	XCVI	10000	X ^{as}
62	LXII	97	XCVII	20000	XX ^{as}
63	LXIII	98	XCVIII	30000	XXX ^{as}
64	LXIII	99	XCIX	1400	CCCC
65	LXV	100	C		IIII ^c
66	LXVI	101	CI	1500	V ^c
67	LXVII	102	CII		II
68	LXVIII	103	CIII	1514	V ^c XIII
69	LXIX	104	CIII	1600	II C
70	LXX	105	CV		V ^c
71	LXXI	106	CVI	1612	V ^c XII
72	LXXII	107	CVII	1700	II CC
73	LXXIII	108	CVIII		VII ^c
74	LXXIII	109	CIX	1715	VII ^c XV
75	LXXV	110	CX	1800	II CC
76	LXXVI	111	CXI		VIII ^c
77	LXXVII	112	CXII	1820	VIII ^c XX
78	LXXVIII	112	CXII ^{ac}	1900	VIII ^c
79	LXXIX	200	CC		
80	LXXX	300	CCC		
81	LXXXI	400	CCCC		
82	LXXXII	500	V ^c		
83	LXXXIII	600	V ^c		
84	LXXXIII	700	VII ^c		
85	LXXXV	800	VIII ^c		
86	LXXXVI	900	IX ^c		
87	LXXXVI	1000	II		
88	LXXXVII	2000	II ^{as}		
89	LXXXIX	3000	III ^{as}		

Dem nach mag stu die
bayde zale durch ain
ander lern encrechen
vnd rechen.



Tabulka pro výuku nové numerace
(J. Köbel: *Rechenbüchlein*, Augsburg, 1514)

Až do poloviny 15. století neexistovaly žádné symboly pro označení aritmetických operací. Byly vyjadřovány pouze slovy nebo bylo dokonce třeba typ operace vyrozumět z kontextu nebo z vlastního zápisu výpočtu. U zrodu symbolů pro aritmetické operace stál Johannes Widmann (1462–1498), který ve své knize *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* (*Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce*) vydané v Lipsku roku 1489 použil symboly + a –; poprvé se tak tyto symboly objevily ve vytištěné knize.¹²

¹² Poznamenejme, že v jednom rukopise neznámého autora uchovaném v drážďanské knihovně se objevují znaky + a – dříve než ve Widmannově učebnici. Rukopis pochází z roku 1486.

Dodnes se vedou spory o původu těchto znaků. Snad byly odvozeny z obchodnických značek používaných na bednách se zbožím; symboly $+$ a $-$ označovaly, že váha zboží přesahuje nebo nedosahuje stanovené hodnoty. Podle jiných názorů jsou znaky $+$ a $-$ indického původu, podle dalších badatelů jsou evropského původu a byly odvozeny z latiny (např. $+$ z *et* nebo ze symbolu $\&$).

Koncem 15. století se objevily další užitečné symboly, které usnadňovaly početní postupy; např. druhá mocnina byla označována tečkou před číslem, třetí mocnina třemi tečkami, čtvrtá dvěma tečkami; při rychlém psaní se tečky měnily v čárky. Druhá odmocnina byla často značena písmenem *R*, které bylo různě modifikováno (např. přeškrtnutá nožička); bylo použito prvního písmene z latinského *radix*, resp. italského *radice*. Pro třetí odmocninu bylo k písmenu *R* přidáváno číslo 3, slovo *cub* apod. Pro čtvrtou odmocninu bývalo někdy použito písmeno *R* dvakrát.

Rozvoj matematiky a písemného počítání vedl koncem středověku i k počátkům algebraické symboliky. První pokusy v tomto směru učinili ve 13. století Leonardo Pisánský a Jordanus Nemorarius (1225–1260), kteří začali v určitých situacích některé veličiny označovat písmeny. Jejich snahy však ještě neměly velkou odezvu.

V souvislosti s přijetím desítkové poziční soustavy užívající indicko-arabské číslice nastal v Evropě postupný odklon od počítání na abaku a na línách. Začaly se rozvíjet početní algoritmy na provádění početních operací s čísly vyjádřenými tímto novým způsobem. Počítání *na línách* tak soupeřilo s počítáním *na cifry*. Soupeření nových a starých početních postupů bylo dokonce i umělecky ztvárněno.

Na následujícím obrázku je ženská postava, která je alegorickým zosobněním aritmetiky. Na dlouhé sukni má indicko-arabské cifry,¹³ v obou rukou drží početní desky. U stolků sedí dva počtáři.

Vpravo je Pýthagorás, který počítá „na línách“. U pravé ruky má hromádku kamínků, v levé části počítací desky je znázorněno číslo 1241 a v pravé části číslo 82. Zdá se, že zdvojuje číslo 1241, ale svůj výpočet ještě nedokončil.

Vlevo je Boëthius, který počítá „novým“ způsobem, tj. *na cifry*. Ze zápisu však nelze identifikovat, co vlastně počítá a zda již svůj výpočet ukončil. Obrázek bývá často interpretován jako vítězství počítání na cifry nad počítáním na línách.

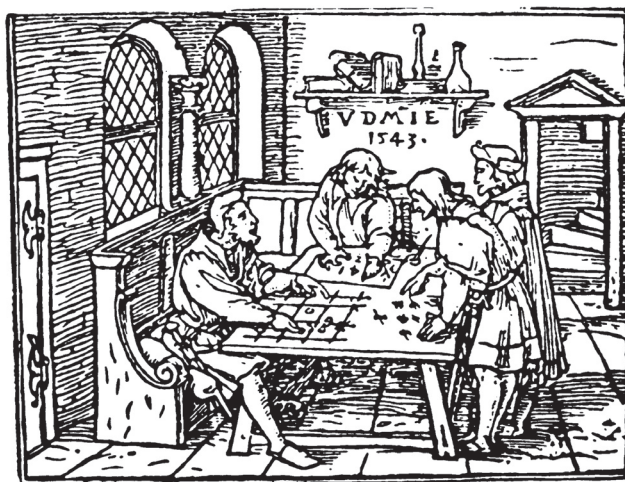
Je třeba poznamenat, že obrázek je značně zavádějící; odráží nepřesné informace, které o objevitelích početních postupů lidé měli na přelomu 15. a 16. století. Boëthius nemohl počítat na cifrách, neboť tento způsob provádění numerických výpočtů se v Evropě postupně šířil až od 11. století; nemohl počítat ani na línách, které byly užívány až v 11. století a oblibu získaly ještě později. Ani Pýthagorás nemohl počítat na línách, oba k výpočtům užívali abakus.

¹³ Uprostřed je jednička, vpravo čísla 2, 4, 8, vlevo 3, 9, 27 (mocniny dvojky a trojky). O smyslu tohoto uspořádání čísel viz např. Jamie James: *The Music of the Spheres*, Springer-Verlag, New York, 1995, str. 46.



Aritmetika

(G. Reisch: *Margarita philosophica*, Štrasburk, 1504)



Diskuse o způsobech počítání

(R. Record: *The Grounde of the Arts*, 1540)

Na obrázku vidíme čtyři počtáře; jeden počítá na linách, dva počítají novým způsobem s ciframi, čtvrtý přihlíží.

bedeut diß figur der selben taylor ains.

I Dieß figur ist vn̄ bedeūt ain fiertel von ainez
IIII ganzen/also mag man auch ain fünfftail/ayn
 sechstail/ain sybentail oder zwai sechstail 2c. vnd alle
 ander bruch beschreiben/Als $\frac{1}{V}$ | $\frac{1}{VI}$ | $\frac{1}{VII}$ | $\frac{1}{VIII}$ 2c.

VI Diß sein Sechs achtail/das sein sechstail der
VIII acht ain ganz machen.

IX Diß figur bezaigt ann newen ayilfftail das seyn
XI IX tail/der XI ain ganz machen.

XX Diß figur bezaichet/zwenzigt ainundreyß
XXXI sigt tail/das sein zwenzigt tail .der ains
 undreißigt ain ganz machen.

IIC Diß sein zwaihundert tail/der Siethunß
IIIC.LX bert vnd sichzig ain ganz machen.

Zlomky v římské numeraci

(J. Köbel: *Rechenbüchlein*, Augsburg, 1514)

4.6 Počítání se zlomky

Počítání se zlomky patřilo k obtížným partiím středověké matematiky. Svědčí o tom mimo jiné i často připomínaný výrok Bedy Venerabilise:

Kdo umí dělit, tomu se žádná záležitost nebude zdát těžká. Já znám hodně složitých věcí, ale nic není složitější než operace se zlomky. ([Ko], str. 109)

Rozvíjející se aktivity řemeslnické, ekonomické a obchodnické však motivovaly čím dál tím více rozvoj početních metod, a tedy i práci se zlomky.

Až do 12. století se v Evropě udržel *římský způsob* počítání se zlomky, jejichž jmenovatelem bylo číslo 12 nebo nějaký násobek tohoto čísla. Tento způsob vycházel z římské peněžní jednotky *as*, která byla rozdělena na 12 *unci*.

Základem byl „zlomek“ $\frac{12}{12}$ nazývaný *as*; dále byly užívány např. zlomky $\frac{11}{12}$ (*deunx*, název byl odvozen z výrazu *de uncia*, tj. „as bez unce“), $\frac{10}{12}$ (*dextans*, *de sextans*, tj. „as bez $\frac{1}{6}$ asu“), $\frac{9}{12}$ (*dodrans*), $\frac{8}{12}$ (*bes*), $\frac{7}{12}$ (*septunx*), $\frac{6}{12}$ (*semis*, polovina), $\frac{5}{12}$ (*quincunx*, pět uncí), $\frac{4}{12}$ (*triens*, třetina), $\frac{3}{12}$ (*quadrans*, čtvrtina), $\frac{2}{12}$ (*sextans*, šestina), $\frac{1}{12}$ (*uncia*), $\frac{1}{24}$ (*semuncia*, polovina unce), $\frac{1}{36}$ (*duella*), $\frac{1}{48}$ (*sicilicus*), $\frac{1}{72}$ (*sextula*, šestina unce), $\frac{1}{144}$ (*dimidia sextula*), $\frac{1}{288}$ (*scriptulum*), $\frac{1}{576}$ (*obolus*), $\frac{1}{1152}$ (*ceratus*, tj. karát), $\frac{1}{1728}$ (*siliquae*), $\frac{1}{5184}$ (*tercia siliquae*).

Na konci 12. století se ukazovalo, že *římský způsob* již není schopen dalšího rozvoje; výpočty užívající římské zlomky byly zdlouhavé, zbytečně komplikované a málo produktivní.

Na počátku 13. století sepsal Leonardo Pisánský ve svém velkém díle *Liber abaci* početní metody využívající egyptské *kmenné* zlomky, tj. zlomky, které měly v čitateli číslo 1. Počítání

s egyptskými zlomky však přinášelo podobné problémy jako počítání se zlomky římskými; každé číslo bylo třeba vyjádřit jako součet přirozeného čísla a egyptských, resp. římských zlomků. Např.

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}, \quad \frac{3}{7} = \frac{5}{12} + \frac{1}{84}.$$

Počítání s egyptskými zlomky se v Evropě neujalo, i přesto, že Leonardo popsal několik postupů pro rozklad zlomku na součet kmenných zlomků.

Leonardo Pisánský však přinesl do Evropy desítkový poziční systém a s ním i *desetinné zlomky*. Desítková poziční soustava i desetinné zlomky měly patrně původ v Indii, přes islámský svět pronikaly od 10. století postupně do Evropy. Leonardo Pisánský zapisoval zlomky téměř tak, jako my dnes; užíval i zlomkovou čáru (*virgula*). Smíšená čísla zapisoval jinak než my, zlomky stály vlevo od čísel přirozených. Pro zlomky užíval termíny *fractia* (z latinského *frangere*, lámat), *ruptus* (z latinského *rumpere*, trhat).

V Evropě se desetinné zlomky většinou zapisovaly pomocí výrazné tečky, např. $\frac{4}{5}$ • má význam $\frac{4}{5}$. Dnešní zápis $\frac{4}{5}$ či $4/5$ se výrazně rozšířil až v 16. století.

Výuka počítání se zlomky byla pro tehdejší žáky obtížná. Operace se zaváděly dogmaticky, bez zdůvodnění a hlubšího teoretického podkladu. Pro snazší zapamatování algoritmů vznikaly různé básně a mnemotechnické pomůcky. I rutinovaní matematici však dlouho zápolili s některými jevy spjatými s operacemi se zlomky. Například vynikající počtář Luca Pacioli, profesor matematiky v Miláně, se pozastavoval nad tím, že při násobení zlomkem menším než 1 je výsledek menší než násobenec; v bibli je totiž psáno: *Rostež a množte se a naplňte Zemi!*

Velkým propagátorem práce se zlomky byl Jordanus Nemorarius. Zajímavý je jeho způsob dělení zlomků, který byl sice správný, ale v tehdejší době asi obtížně srozumitelný. Nemorarius doporučoval dělit čitatele prvního zlomku čitatelem zlomku druhého a výsledek dělit podílem jmenovatelů prvního a druhého zlomku. Jestliže tento postup nebylo možno použít, pak doporučoval násobit čitatele i jmenovatele prvního zlomku součinem čitatele a jmenovatele zlomku druhého (tj. rozšířit první zlomek) a teprve potom provést výše uvedený úkon. Např.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}.$$

Velikým pokrokem při operování se zlomky byl objev převádění zlomků na společného jmenovatele (nejmenší společný násobek jmenovatelů); do evropské praxe tento postup uvedl Leonardo Pisánský. Do této doby (ale i značně později) většina matematiků brala za společného jmenovatele součin všech jmenovatelů. Poznamenejme, že tuto metodu důsledně používali až Niccolò Tartaglia (1499–1557) a Christophor Clavius (1537–1612); k jejímu všeobecnému rozšíření došlo až v 17. století.

Kromě desetinných zlomků přišly z arabského světa *zlomky šedesátinné*, které byly užívány zejména při astronomických měřeních a výpočtech. Jejich teorie se učila ve 13. století na univerzitách podle anonymního spisu *Algoritmus de minutiis*. Je třeba říci, že šedesátinné zlomky

se v Evropě netěšily příliš velké oblibě, zabývala se jimi pouze malá skupina matematiků. Ve 13. století šedesátinné zlomky studoval Johannes Sacrobosco (asi 1195–1256), který ve spise *Algorismus communis* popsal užívání zlomků při astronomických výpočtech, dánský dominikán Petrus Ingvarssön zvaný Petrus Philomena de Dacia (? –1303) sestavil tabulku pro násobení v šedesátkové soustavě a Joannes z Gmundenu (asi 1380–1442) ve spise *Tractatus de minutiis physicis* vyložil pravidla pro počítání v šedesátkové soustavě.

Ve 14. století rozpracoval teorii desetinných zlomků židovský astronom a matematik Immanuel ben Jákob Bonfils z Tarasconu, který v hebrejsky psaném spise *Derek hilluk* (*Cesta dělení*) vysvětlil pravidla pro sčítání, odčítání, násobení a dělení desetinných zlomků. Neuvedl však žádné příklady. Jeho práce zůstala zcela nepovšimnuta.

Francouzský matematik Jean de Meurs (14. stol.) používal desetinné zlomky k zápisu přibližné hodnoty některých iracionálních čísel (např. $\sqrt{2}$ zapisoval 1414 a zápis objasňoval pomocí zlomků). Pařížský matematik Jean de Lignères (1. polovina 14. století) nazývaný též Iohannes de Lineriis vyložil základní operace se zlomky ve spise *Algorismus de minutiis*. V 15. století vídeňský matematik Georg Peurbach (1423–1461) použil desetinné i šedesátinné zlomky ve svých nepublikovaných tabulkách sinů. V jeho stopách se vydal jeho žák Johannes Müller zvaný Regiomontanus (1436–1476), který se již zcela zbavil šedesátinného systému a v roce 1467 sestavil první čistě desetinné trigonometrické tabulky (vydané až po jeho smrti roku 1490).

První souhrn vědomostí o zlomcích a operacích s nimi podal nizozemský matematik Simon Stevin (1548–1620) ve své knize *Arithmétique* (1585). Od 16. století se v Evropě začaly všeobecně užívat desetinné zlomky.

4.7 Závěr

V předchozích odstavcích jsme popsali nejdůležitější středověké způsoby zápisu čísel. Je třeba upozornit na to, že výše uvedené zápisy se vyvíjely a modifikovaly; podrobným rozborem je možno poukázat na řadu odlišností v jednotlivých stoletích, regionech, u různých autorů apod.

Připomeňme rovněž, že se ve středověké Evropě až na vzácné výjimky pracovalo pouze s přirozenými čísly, kladnými zlomky a smíšenými čísly. Se zápornými čísly se setkáváme jen výjimečně. Objevila se v rukopise *De arithmetice propositionibus* z přelomu 8. a 9. století, za jehož autora byl někdy považován Beda Venerabilis.¹⁴ V řadě příkladů je potom použil až Leonardo Pisánský ve 13. století a interpretoval je jako dluh. Přesto však byla záporná čísla dlouho odmítána, teprve na přelomu 15. a 16. století zformuloval Luca Pacioli pravidlo pro násobení záporných čísel. Vyslovil je však bez důkazu; neschopnost dokázat tento poznatek zdůvodňoval nedostatečností lidského rozumu. Ještě v 16. století bojovala záporná čísla o svoji existenci.

¹⁴ Viz Karel Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 15, Prometheus, Praha, 2001, str. 40–42.

S iracionálními čísly se výrazněji setkáváme teprve u Leonarda Pisánského, který již rozlišoval jednotlivé typy kvadratických iracionalit v duchu 10. knihy Eukleidových *Základů*.

4.8 Náměty na samostatnou práci

1. Napište nebo naznačte číslo 1 698

- a) v římském zápisu,
- b) na linách,
- c) na prstech,
- d) v desítkové soustavě,
- e) v šedesátkové soustavě,
- f) ve dvojkové soustavě.

Uvědomte si výhody a nevýhody jednotlivých vyjádření.

2. Sečtěte, odečtěte a vynásobte dvě zvolená přirozená čísla na prstech, linách a na abaku.

3. Rozmyslete si následující úlohu:

Dělenec a dělitel je (2; 0, 0, 33, 20).

Dělenec a dělitel, totiž (2; 0, 0, 33, 20), s (0; 30) násob. To dá (1; 0, 0, 16, 40).

(1; 0, 0, 16, 40) s (1; 0, 0, 16, 40) násob. To dá (1; 0, 0, 33, 20, 4, 37, 46, 40). (1) odečti z toho. Zůstane nazpět (0; 0, 0, 33, 20, 4, 37, 46, 40). Co se má samo sebou násobit, aby to dalo (0; 0, 0, 33, 20, 4, 37, 46, 40)? (0; 0, 44, 43, 20) s (0; 0, 44, 43, 20) násobeno dá (0; 0, 0, 33, 20, 4, 37, 46, 40). (0; 0, 44, 43, 20) k (1; 0, 0, 16, 40) přidej. To dá (1; 0, 45). (0; 0, 44, 43, 20) od (1; 0, 0, 16, 40) odeber. To dá (0; 59, 15, 33, 20) jako dělitele.¹⁵

Pokuste se:

- a) vysvětlit zadání a postup řešení úlohy,
- b) uvést slovní popis algoritmu dnes užívaného postupu řešení,
- c) zapsat algoritmus pomocí současné matematické symboliky,
- d) uvědomit si význam symboliky.

¹⁵ Úloha je zachována na tabulce AO 6484 pocházející z období Seleukovců, nalezena byla ve Warce. Viz [N1], originální text str. 98–99, německý překlad str. 101–102, rozbor str. 106–107. Nuly, středníky a čárky zde byly doplněny pro lepší porozumění textu, v originálu nebyly řády vyznačeny. Připomeňme, že v mezopotámských úlohách je vždy součin dělence a dělitele roven 1; odtud plyne podmínka $x \cdot y = 1$.

LITERATURA

- [Ba] Balada F., *Z dějin elementární matematiky*, SPN, Praha, 1959.
- [BBV] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003.
- [B] Bečvář J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 19, Prometheus, Praha, 2001.
- [Be] Berman G. N., *Wie die Menschen zählen lernten*, Aufbau-Verlag, Berlin, 1953.
- [Bt] Betz O., *Das Geheimnis des Zahlen*, Kreuz Verlag, Zürich, 1989.
- [Ca] Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II Band*, Teubner, Leipzig, 1913.
- [Ed] Edwards C. H., *The historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, New York, 1979.
- [Ev] Eves H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, London, 1966.
- [Ge] Gericke H., *Geschichte des Zahlbegriffs*, Bibliographisches Institute, Mannheim, Wien, Zürich, 1970.
- [Ch] Chabert J.-L., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, 1999.
- [Ju] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.
- [Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, reprint ve třech svazcích, Oxford Univ. Press, New York, 1990.
- [KP] Křišťan z Prachatic, *Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky*, Oikoymenh, Praha, 1999, edice a český překlad Z. Silagiová.
- [Kr] Krysicki W., *Zählen und Rechnen Einst und Jetzt*, Teubner, Leipzig, 1968.
- [Le] Lemoine J.-G., *Les anciens procédés de calcul sur les doigts en orient et en occident*, Paris, 1932.
- [Lo] Löffler E., *Ziffern und Ziffersysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1912.
- [Me1] Menninger K., *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 1969.
- [Me2] Menninger K., *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*, 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1958.
- [Mi] Mikan M., *Jak se vyvinula matematika a geometrie*, Orbis, Praha, 1954.
- [N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [Pi] Picutti E., *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano, 1977.
- [Sc] Scriba Ch. J., *The Concept of Number*, Bibliographisches Institute, Mannheim, Wien, Zürich, 1968.
- [Sh] Smith D. E., *Computing Jeton*, The American Numismatic Society Broadway at 156th Street, New York, 1921.
- [St] Struik D. J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963.
- [Sm] Smolík J., *Mathematikové v Čechách od založení univerzity Pražské až do počátku tohoto století*, Živa **12** (1864), str. 12–27, 140–141, 152–153, 194–225, 308–341.
- [TJ] Tropfke J., *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. vyd., De Gruyter, Berlin, New York, 1980, přepracoval K. Vogel.
- [Wa] van der Waerden B. L., *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 9 \\ \hline 16 \end{array}$$
 partitore

$$\begin{array}{r} i \\ 35 \\ 63 \\ \hline 18 \end{array}$$
 30mi.

Unde in 30mi. 3.e $\frac{i\ 5}{16}$ se scontreranno.

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 7 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 i\ 4\ 4 \\
 -\ 9 \\
 \hline
 i
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{r}
 2\ 5\ 0 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{r}
 6\ 3 \\
 \hline
 1\ 6
 \end{array}$$

Jde o řešení následující úlohy: *Kde se setkají dva kurýři, z nichž jeden projde vzdálenost 250 mil z Říma do Benátek za 7 dní a druhý z Benátek do Říma za 9 dní.*

5. Staré početní algoritmy¹

Martina Bečvářová

5.1 Úvod

Nejjednodušším způsobem počítání bylo ve středověku *počítání na prstech*, které užívali obchodníci a finančníci k jednoduchému znázornění čísel, k jejich sčítání a odčítání. K násobení, dělení a komplikovanějším výpočtům se však prsty příliš nehodily.

Během 10. století se v Evropě opět rozšířil *abakus*, počítací deska s vyrytými vertikálními linkami, které vymezovaly sloupce, do kterých se vkládaly kamínky nebo početní známky (*apexy*) reprezentující jednotky, desítky, stovky atd.

Koncem 12. století se v Evropě objevily místo vertikálních linek linky horizontální, tzv. *liny*. *Počítání na línách* bylo založeno na podobných postupech jako počítání na abaku. Abakus i liny byly běžně užívány až do konce 15. století, kdy je vytlačilo počítadlo a písemné počítání. Počtáři používající abakus a liny byli označováni jako *abacisté*.

Od 10. století pozvolna pronikal do Evropy indicko-arabský desítkový poziční systém; s rostoucí znalostí tohoto způsobu zápisu čísel se postupně šířily a zdokonalovaly návody na písemné provádění početních operací – poměrně výstižně se hovořilo o *počítání na cifry*. Počtáři, kteří tyto algoritmy znali, se nazývali *algoritmikové*. Jejich počet v Evropě od 11. století postupně narůstal, teprve koncem 15. století však písemné způsoby počítání převážily; ostatní postupy byly i nadále využívány na triviálních školách při výuce elementární aritmetiky.

V následujícím textu se pokusíme popsat jednotlivé početní pomůcky a postupy.

5.2 Početní operace prováděné „s ciframi“

Původní indický způsob počítání, který byl založen na vymazávání částečných výsledků a jejich postupném nahrazování dalšími částečnými výsledky (na desce pokryté prachem nebo pískem), byl naprosto nevhodný při počítání *na cifry*. Výchozí čísla i celý výpočet byl zapisován na pergameni nebo na papíru, soustavné vymazávání částečných výsledků nebylo možné, početní postupy se proto pozměnily. Vymazávání částečných výsledků bylo nahrazeno přeškrtnutím jednotlivých číslic; nad ně byly zapisovány cifry dalších částečných výsledků.

¹ Jedná se o zkrácenou a upravenou verzi článku M. Bečvářová: *Středověké početní algoritmy*, in J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 19, Prometheus, Praha, 2001, str. 231–263.

5.2.1 Numerace

Za úvodní početní „operaci“ byla ve středověku považována tzv. *numerace*, tj. vlastní zápis čísel.

Začátečníci se nejprve učili počítat na abaku nebo na linách, k čemuž nepotřebovali umět čísla zapisovat. Pro další vzdělání však bylo třeba se naučit zapisovat čísla (nejprve římskými a později indicko-arabskými ciframi) a právě k tomu sloužila numerace. Zapisování čísel se stalo naprosto nepostradatelným v souvislosti s rozvojem počítání „na cifry“.

5.2.2 Sčítání

Nejjednodušší početní operací bylo *sčítání*. Středověký počtář zapisoval jednotlivé sčítance pod sebe, sčítal zleva doprava, opačně než dnes, tj. od nejvyšších řádů. Částečné výsledky postupně zapisoval nad sčítance; při sčítání zleva doprava bylo někdy třeba předchozí výsledek korigovat, protože součet v nižším řádu může ovlivnit výsledek v řádu vyšším. Při počítání na počítacích deskách či na abaku nedělaly takovéto opravy žádný problém, příslušná číslice se smazala, případně se upravil počet kamínků nebo se vyměnil příslušný apex. Při zápisu na pergamentu nebo na papíře se částečné výsledky přeškrtovaly a nad ně se zapisovaly výsledky nové; výsledek výpočtu pak bylo třeba „sestavit“ z nejvyšších nepřeskrtnutých číslic. Na příkladu

$$2\,837 + 3\,524 + 1\,722 = 8\,083$$

zaznamenejme jednotlivé fáze výpočtu, který středověký počtář prováděl.

6				8				8				8		8
2	8	3	7	8	0			8	0	7		8	0	7
3	5	2	4	2	8	3	7	2	8	3	7	2	8	3
1	7	2	2	3	5	2	4	3	5	2	4	3	5	2
				1	7	2	2	1	7	2	2	1	7	2

Připomeňme, že po ukončení výpočtu měl před sebou středověký počtář pouze poslední z výše uvedených čtyř schémat; výsledek 8083 bylo třeba sestavit z nejvyšších nepřeskrtnutých číslic. Zkouška správnosti výpočtu by byla vzhledem k přeškrtování číslic poměrně obtížná; správnost výsledku se většinou ověřovala opětovným výpočtem.

5.2.3 Odčítání

Odčítání prováděli středověcí počtáři podle několika algoritmů. První, tzv. *indický*, byl podobný našemu dnešnímu algoritmu. Výpočet se prováděl zleva doprava, opačně než dnes, tj. od nejvyšších řádů. Částečné výsledky se zapisovaly nahoru (podobně jako při sčítání), při následujících krocích se přeškrtovaly. Výsledek bylo třeba opět sestavit z nejvyšších nepřeskrtnutých cifer, které jsou často v různých řádcích. Na příkladu

$$8\,946 - 6\,983 = 1\,963$$

zaznameníme jednotlivé fáze výpočtu, který středověký počtář prováděl.

2					2	0				1	9				1	9			
8	9	4	6		8	9	4	6		2	0	6			2	0	6	3	
6	9	8	3		6	9	8	3		8	9	4	6		8	9	4	6	
										6	9	8	3		6	9	8	3	

Druhý algoritmus byl založen na tzv. *desítkovém doplňku*. Číslo $1, \dots, 9$ je možno chápat jako doplňky čísel $9, \dots, 1$ do 10, tj. $1 = 10 - 9, \dots, 9 = 10 - 1$.

Výpočet se prováděl tentokrát zprava doleva; na první řádek zapsal středověký počtář menšence, na druhý menšitele a na třetí zaznamenával rozdíl. Pokud byla cifra menšitele větší než příslušná cifra menšence, nahradila se doplňkem, obě cifry se sečetly a k další číslici menšitele se přičetla jednička. Stejně se postupovalo v dalších krocích. Na příkladu

$$62\,315 - 47\,836 = 14\,479$$

popsíme jednotlivé kroky, které středověký počtář prováděl.

6	2	3	1	5
4	7	8	3	6
1	4	4	7	9

Výpočet probíhal asi takto: rozdíl $5 - 6$ „nelze vypočítat“, proto číslo 6 nahradíme jeho doplňkem $4 = 10 - 6$. Nyní sečteme cifru menšence s cifrou doplňku menšitele, tj. $5 + 4 = 9$, devítku zapíšeme a zvětšíme o jedničku další cifru menšitele, tj. $3 + 1 = 4$.² Pokračujeme dále: rozdíl $1 - 4$ „nelze vypočítat“, proto číslo 4 nahradíme jeho doplňkem 6, sečteme $1 + 6 = 7$, sedmičku zapíšeme a následující cifru menšitele zvětšíme o jedničku, tj. $8 + 1 = 9$. Nyní budeme počítat třetí cifru: rozdíl $3 - 9$ „nelze vypočítat“, proto číslo 9 nahradíme doplňkem 1, sečteme $3 + 1 = 4$, čtyřku zapíšeme a následující cifru menšitele zvětšíme o jedničku, tj. $7 + 1 = 8$. Obdobně pro čtvrtou cifru: rozdíl $2 - 8$ „nelze vypočítat“, tudíž číslo 8 nahradíme jeho doplňkem 2, sečteme $2 + 2 = 4$, čtyřku zapíšeme a následující cifru menšitele zvětšíme o jedničku, tj. $4 + 1 = 5$. Výpočet poslední cifry je jednoduchý: $6 - 5 = 1$. Tento postup se podobá našemu současnému algoritmu, zápis výpočtu, pokud bychom přidali znaménko minus, by byl naprosto stejný.

5.2.4 Násobení

Středověké algoritmy pro násobení byly založeny na dokonalé znalosti malé násobilky (1×1 až 9×9).

Jedním z často užívaných algoritmů pro násobení víceciferných čísel byl postup nazývaný *galea* nebo *battello*, tj. *loď* či *člun*. Název byl odvozen z obrázku, který počtář obdržel na konci výpočtu; lze v něm s notnou dávkou fantazie spatřit loď se stožárem, napjatou plachtou a případně i s kormidlem. Násobitel se napsal nad násobence tak, aby poslední cifra násobence byla pod první cifrou násobitele. Potom se první cifrou násobitele zleva doprava

² Neboť $5 - 6 = 5 + (10 - 6) - 10$.

Vzhledem k tomu, že po ukončení výpočtu bylo těžké „ve změti cifer“ rychle rozeznat oba činitele, začal se násobenec (v základní poloze) i násobitel podtrhávat. Zkouška správnosti výpočtu byla těžko realizovatelná, prováděla se většinou opakováním výpočtu. Na příkladu

ukážme postup středověkého počtáře.

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & & \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccc} 4 & & 3 & & & & \\ \cancel{3} & 5 & 3 & 2 & 7 & & \\ 1 & 5 & 1 & & & & \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccc} & & 8 & & & & \\ 4 & 7 & 3 & 2 & & & \\ \cancel{3} & \cancel{5} & 3 & 2 & 7 & & \\ 1 & 5 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 5 & & & & \end{array}$$

	9	3		
	8	0	7	
4	7	3	2	7
3	5	3	2	7
1	5	1	1	1
	1	5	5	
		1		

Zdůrazněme, že středověký počtář měl na svém papíru pouze poslední zápis, „obrázek“ vzdáleně připomínající loď.

Další užívaný algoritmus pro násobení byl nazýván *gelosia*. Traduje se, že to je prastarý postup, který vznikl v Indii. Počtář nejprve nakreslil čtvercovou síť a každý čtverec rozdělil úhlopříčkou na dvě pole. Cifry násobence napsal zleva doprava nad sloupce, cifry násobitele za řádky shora dolů. Pak začal počítat součiny jednotlivých čísel a výsledky zapisoval do jednotlivých čtverců, desítky nad úhlopříčku a jednotky pod ni.

Pak sečetl v jednotlivých pásech ve směru úhlopříčky všechna čísla, případné desítky přičetl k součtu dalšího šikmého pásu. Celkový výsledek byl čten zleva, shora dolů a doprava. Tvar sítě prý připomínal italským matematikům mříž v oknech vdaných benátských žen; snad proto byl nazýván *gelosia* (italsky žárlivost). Byl též znám pod méně romantickým názvem, *multiplicare per quadrilatero*, tj. násobení ve čtvercích nebo v dlaždicích. Na následujícím obrázku je zaznamenán výpočet $765 \times 321 = 245\,565$ pomocí algoritmu *gelosia*.

			7	6	5		
2	2	1	1			3	
	1	8	5				
4	1	1	1			2	
	4	2	0				
5	0	0	0			1	
	7	6	5				
			5	6	5		

Tento algoritmus je velmi jednoduchý, jeho zvládnutí nevyžaduje zvláštní matematické nadání.

Indického původu je prý i algoritmus nazývaný *multiplicare per crocette* nebo *multiplicare per casella* (*crocette* je italsky křížek, *casella* skříňka), který byl poprvé popsán v práci indického matematika Bháskary II. (1114 – po 1178). Tento početní postup byl v Itálii velmi oblíben, obratný počtář získával správné výsledky velmi rychle. Luca Pacioli prý napsal, že tato metoda vyžaduje trochu více rozumu a fantazie.

Násobená čísla napíšeme pod sebe, jednotky pod jednotky, desítky pod desítky atd. Potom zprava násobíme jednotlivé cifry obou čísel tak, abychom postupně dostávali cifry výsledku (jednotky, desítky, ...). Máme-li vypočítat součin 375×4251 , umístíme oba činitele pod sebe:

$$\begin{array}{r} 375 \\ 4251 \end{array}$$

Nyní budeme počítat jednotlivé cifry výsledku v pořadí jednotky, desítky, stovky atd. tak, jak je dále naznačeno. Poznamenejme, že „zbytek“ částečného výsledku se vždy bere jako sčítanec v kroku následujícím.

<i>jednotky</i>	$5 \cdot 1$	$= 5 \longrightarrow 5$
<i>desítky</i>	$5 \cdot 5 + 7 \cdot 1$	$= 32 \longrightarrow 2$
<i>stovky</i>	$3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 5$	$= 51 \longrightarrow 1$
<i>tisíce</i>	$5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5$	$= 54 \longrightarrow 4$
<i>desetitisíce</i>	$5 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 2$	$= 39 \longrightarrow 9$
<i>statisíce</i>	$3 + 4 \cdot 3$	$= 15 \longrightarrow 5$
<i>miliony</i>	1	$= 1 \longrightarrow 1$

Hledaný součin je tedy 1 594 125.

Předchozí výpočet lze usnadnit tak, že cifry jednoho z činitelů napíšeme na proužek papíru v opačném pořadí. Proužek umístíme tak, aby levá krajní cifra čísla na proužku byla pod pravou krajní cifrou čísla na papíře. Nyní vypočteme součin cifer, které jsou pod sebou, jednotky částečného výsledku zapíšeme a proužek posuneme o jedno místo doleva. Vypočteme součiny cifer, které jsou pod sebou, oba součiny sečteme a přičteme případné desítky z předchozího kroku. Proužek opět posuneme o jedno místo doleva a pokračujeme ve výpočtu. V našem příkladě bude první poloha obou činitelů vypadat takto:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 5 \\ 1 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

Poslední poloha bude:

$$\begin{array}{r} \quad \quad 5 \\ 1 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

Ve středověku byla vyvinuta a rozvíjena i tzv. *teorie doplňků*, která umožňovala násobení čísel pouze se znalostí „částí“ malé násobilky, tj. součinů 1×1 až 5×5 .

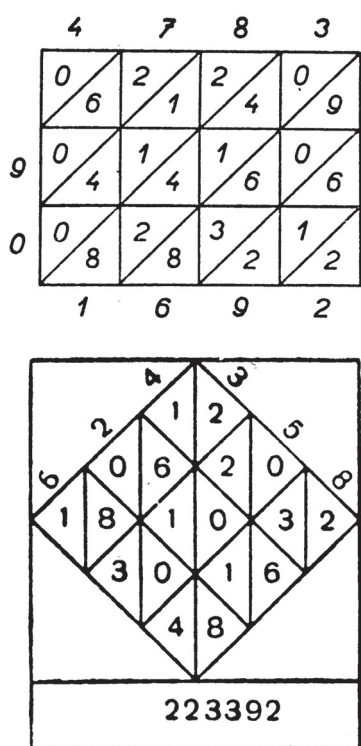
Máme-li vypočítat součin $a \times b$, kde $5 < a < 10$, $5 < b < 10$, pak vynásobíme jejich doplňky $10 - a$ a $10 - b$ a k tomuto číslu přičteme desetinasobek čísla $a + b - 10$, tj.

$$a \cdot b = 10(a + b - 10) + (10 - a)(10 - b) .$$

Chceme-li např. vypočítat součin čísel 6 a 8, vynásobíme jejich doplňky 4 a 2, $4 \times 2 = 8$, a máme jednotky hledaného součinu. Čísla 6 a 8 sečteme a odečteme 10, $6 + 8 - 10 = 4$, a máme desítky hledaného součinu. Počítáme-li však takto např. součin 6×6 , je součin doplňků roven 16; číslo 6 určuje jednotky hledaného součinu a číslo 1 je třeba přičíst k číslu $6 + 6 - 10$, abychom získali desítky hledaného součinu.

Tento algoritmus pro násobení přežil do dnešních dnů ve formě tzv. *cikánské násobilky*. Chceme-li vypočítat součin čísel větších než pět, vztyčíme na každé ruce tolik prstů, o kolik je každý z činitelů větší než pět. Součet vztyčených prstů je pak roven počtu desítek a součin nevztyčených prstů počtu jednotek hledaného součinu. Uvědomme si, že postup přesně odpovídá „metodě doplňků“.

Znovu připomeňme, že v raném středověku bylo počítání na prstech „dovedeno k dokonalosti“ (viz např. metody, které učil Beda Venerabilis).

[illegible]Středověký algoritmus *gelosia* v evropské a arabské verzi

Algoritmy *dělení* prodělaly složitý vývoj; dělení bylo ve středověku považováno za jeden z nejobtížnějších matematických úkonů. Matematické vzdělání se často prokazovalo právě výbornou znalostí dělení.

Středověký počtář zapsal dělitele pod dělence tak, aby byly pod sebou jejich první cifry zleva; pokud však byl dělitel větší než číslo utvořené ze stejného počtu cifer dělitele, zapsala se první cifra dělitele pod druhou cifrou dělence.

Pak počtář provedl odhad podílu, hodnotu částečného podílu zapsal za svislou čáru vpravo od dělitele, částečným podílem postupně násobil jednotlivé cifry dělitele a výsledky odčítal od dělence; tento výpočet prováděl zleva, předchozí výsledky proto musel někdy korigovat. Škrtnal i použité cifry dělitele, aby měl stále přehled o tom, kam až ve výpočtu dospěl. Po ukončení prvního kroku zapsal znovu všechny cifry dělitele (všechny cifry dělitele byly totiž v té chvíli již škrtnuté), ale posunuté o jedno místo doprava. Celý postup opakoval až do okamžiku, kdy získal výsledek dělení s případným zbytkem, který objevil mezi nepřeskrtnutými čísly.

Obtížnost dělení byla (obdobně jako u násobení) komplikována tím, že cifry dělitele byly zapsány ve více řádcích. Na příkladu $18821 : 153 = 123$ a zbudou 2 ukážeme celý postup. Nejprve zapíšeme dělence i dělitele.

$$\begin{array}{r} 1 \ 8 \ 8 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 3 \end{array}$$

Cifry 1, 5, 3 jsou zapsány pod ciframi 1, 8, 8, neboť je $188 > 153$. Výpočet zachytíme v jednotlivých fázích vývoje schématu:

$$\begin{array}{r} 1 \ 8 \ 8 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 3 \end{array} \quad |1 \quad \begin{array}{r} 0 \ 3 \ 5 \\ \cancel{1} \ \cancel{8} \ \cancel{8} \ 2 \ 1 \\ \cancel{1} \ \cancel{5} \ \cancel{3} \end{array} \quad |1 \quad \begin{array}{r} 0 \ 3 \ 5 \\ \cancel{1} \ \cancel{8} \ \cancel{8} \ 2 \ 1 \\ \cancel{1} \ \cancel{5} \ \cancel{3} \ 3 \end{array} \quad |1$$

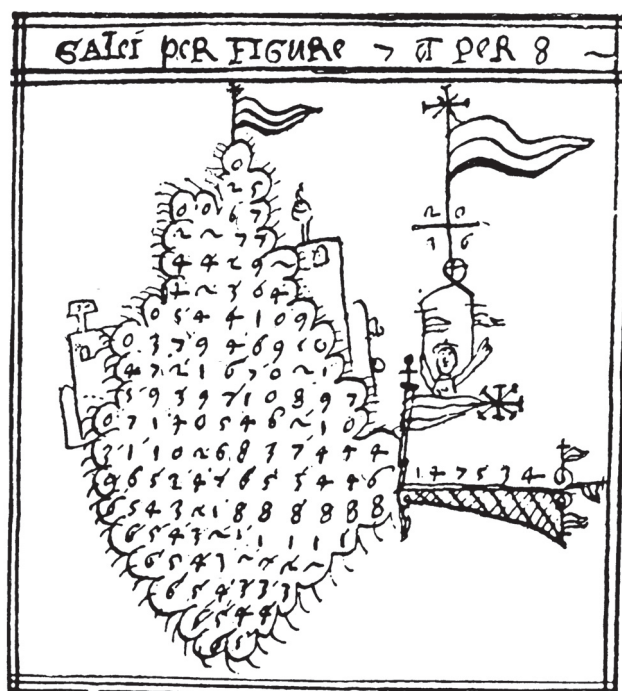
Získali jsme první částečný podíl, odečetli příslušný násobek dělitele a cifry dělitele jsme zapsali posunuté o jedno místo doprava. Dále je:

$$\begin{array}{r} 0 \ 3 \ 5 \\ \cancel{1} \ \cancel{8} \ \cancel{8} \ 2 \ 1 \\ \cancel{1} \ \cancel{5} \ \cancel{3} \ 3 \end{array} \quad |12 \quad \begin{array}{r} 0 \\ \cancel{1} \ 4 \\ 0 \ \cancel{3} \ \cancel{5} \ 6 \\ \cancel{1} \ \cancel{8} \ \cancel{8} \ 2 \ 1 \\ \cancel{1} \ \cancel{5} \ \cancel{3} \ 3 \end{array} \quad |12$$

Získali jsme druhý částečný podíl a příslušný násobek dělitele jsme odečetli.

$$\begin{array}{r} 0 \\ \cancel{1} \ 4 \\ 0 \ \cancel{3} \ \cancel{5} \ 6 \\ \cancel{1} \ \cancel{8} \ \cancel{8} \ 2 \ 1 \\ \cancel{1} \ \cancel{5} \ \cancel{3} \ 3 \end{array} \quad |12 \quad \begin{array}{r} 0 \\ \cancel{1} \ 4 \ 0 \\ 0 \ \cancel{3} \ \cancel{5} \ \cancel{6} \ 2 \\ \cancel{1} \ \cancel{8} \ \cancel{8} \ 2 \ 1 \\ \cancel{1} \ \cancel{5} \ \cancel{3} \ 3 \end{array} \quad |123$$

Cifry dělitele jsme zapsali potřetí, opět posunuté o jedno místo doprava, vypočetli jsme další částečný podíl a odečetli příslušný násobek dělitele. Získali jsme tak hledaný podíl 123 a zbytek 2. Povšimněme si, že identifikovat v tomto zápise dělence a dělitele není jednoduché. Hledání případné chyby ve výpočtu je obtížné, nejjednodušší je provést nový výpočet.



Dělení podle algoritmu *battello*
 $965\,347\,653\,486 : 6\,543\,218$
 (podíl je 147 534, zbytek je 529 074)

5.2.6 Odmocňování

Ještě obtížnější operací bylo ve středověku *odmocňování*, neboli „dobývání kořene“. Ocitujme půvabnou pasáž z práce Josefa Smolíka *Mathematikové v Čechách*, ve které Smolík popsal, jak odmocňoval Křišťan z Prachatic:

Kořene druhého stupně učí Křišťan dobývati takto: Nejprvé nechť prý se sečtou cifry daného čísla, kdyby byl počet jejich sudý, nechť se započne dobývání u dvou nejvyšších míst, kdyby však byl lichý, u nejvyššího místa. Dle toho se tedy dobude kořene částečného buď ze dvou neb z jedné cifry. Dále nechť se kořen ten poznamená, sám sebou násobí a odečte, na to nechť se zdvojnásobí, dvojnásobený napíše ob jednu cifru dále v pravo, a nechť se jím dělí předešlý zbytek a jedna cifra vedle; načež má se podíl ten napsati ke kořenu, násobiti dělitelem a násoben odečísti od svého dělence, pak násobiti sám sebou a odečísti od předešlého zbytku a cifry vedle a t. d. ... ([Sm], str. 21)

Na jednoduchém příkladu budeme nyní demonstrovat postup středověkého počtáře; vypočteme druhou odmocninu čísla 119 025.

Číslo 119 025 má šest cifer; začneme tedy „dobývati kořen“ dvouciferného čísla 11 sestaveného z prvních dvou cifer zleva. Částečný výsledek je 3, toto číslo se umocní, devítka se napíše pod druhou cifru odmocňovaného čísla, odečte se a rozdíl 2 se napíše nad číslo 11, které se škrtné. Částečný výsledek 3 se nyní zdvojnásobí, číslo 6 se zapíše na další řádek pod

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 3 & & & \\
 & 2 & 5 & 4 & & \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\
 & 9 & & & & \\
 & & 6 & & & \\
 & & 1 & 6 & & \\
 & & & 6 & 8 & \\
 & & & & 2 & 5
 \end{array}
 \quad |345$$
$$345^2 = (300 + 40 + 5)^2 = (300 + 40)^2 + 2 \cdot 340 \cdot 5 + 5^2 =$$
$$= 300^2 + 2 \cdot 300 \cdot 40 + 40^2 + 2 \cdot 340 \cdot 5 + 5^2 = 90\,000 + 24\,000 + 1\,600 + 3\,400 + 25.$$

Toto číslo má lichý počet cifer, proto začínáme odmocněním čísla 5. Prvním částečným výsledkem je číslo 2. Po umocnění čísla 2 a odečtení získáme zbytek 1, který napíšeme nad pětku, kterou škrtneme. Nyní musíme číslo 16 vydělit dvojnásobkem čísla 2, tj. čtyřkou. Podíl je 4, a to by měla být druhá cifra výsledku; odečteme-li 4×4 od 16, je zbytek nula, nyní musíme druhou mocninu čísla 4 odečíst od čísla 1 a to nejde! Musíme se tedy vrátit, při předchozím dělení $16 : 4$ vzít jako podíl číslo 3 a to bude druhá cifra částečného výsledku; zbytek je potom 4 a v dalším kroku odčítáme druhou mocninu čísla 3, tj. 9 od 41, zbytek je 32. Číslo 326 dělíme dvojnásobkem částečného výsledku, tj. číslem 46; dostáváme číslo 7, od čísla 326 odečteme součin $7 \cdot 46 = 322$, zbytek je 4. Připojíme-li poslední cifru 9, dostáváme právě druhou mocninu čísla 7; druhou odmocninou čísla 56 169 je tedy číslo 237. Středověký zápis mohl vypadat asi takto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 3 & & & & \\
 1 & 4 & 2 & 4 & & & \\
 5 & 6 & 1 & 6 & 9 & & |237 \\
 4 & & & & & & \\
 & 4 & & & & & \\
 & & 9 & & & & \\
 & & 4 & 6 & & & \\
 & & & 4 & 9 & &
 \end{array}$$

Algoritmus pro nalezení odmocniny se tedy nedal užívat zcela bezmyšlenkovitě, velmi často docházelo k výše naznačeným „komplikačním“.

Poznamenejme, že byl ve středověku užíván i algoritmus pro výpočet třetí odmocniny, který byl složitější; vychází ze známého vzorce

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 ,$$

podobně jako je algoritmus pro výpočet druhé odmocniny založen na využití vzorce

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

Před několika desetiletími byly ještě tyto algoritmy vyučovány na základních školách; ve starých učebnicích je můžeme snadno vyhledat. Dnes už je mladší generace nezná. Dnešní žáci a studenti by vzhledem k všeobecnému rozšíření počítačů a kalkulaček tyto algoritmy považovali za zbytečné a neužitečné.

5.3 Závěr

V předchozích odstavcích jsme popsali nejdůležitější středověké početní algoritmy pro sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Je třeba upozornit na to, že výše uvedené algoritmy a jejich zápisy se vyvíjely a modifikovaly; podrobným rozбором je možno poukázat na řadu odlišností v jednotlivých stoletích, regionech, u různých autorů apod. Koncem středověku již někteří počtáři užívají početní postupy, které nejsou příliš odlišné od těch, které jsme se učili na základní škole.

Poznamenejme, že středověké „učebnice“ aritmetiky uvádějí ještě další dvě operace – *zdvojování* a *půlení*, tj. výpočet dvojnásobku a poloviny daného čísla. Algoritmy pro zdvojování a půlení však jsou jen modifikací algoritmů pro násobení a dělení, proto jsme se jimi podrobněji nezabývali.

5.4 Ukázky

Následující ukázky jsou převzaty z knihy Křišťana z Prachatic *Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky* [KP], a sice z lichých stran 13–25, 35–41, 43–49, 63–73, 81–91, 99–115. Přetištěn je pouze základní text bez vepsaných komentářů a poznámek. Počátek Křišťanova rukopisu je na uvozujícím obrázku. Vřele doporučujeme podrobné studium knihy [KP].

5.4.1 Křišťan z Prachatic – Algorismus prosaicus

5.4.1.1 Numerace

Pohnut láskou k mladým přičinil jsem se o sepsání základů početního umění ve stručném stylu. A protože podstata všeho počítání se vykonává prostřednictvím čísla, je tedy třeba od čísla začít.

Číslo není nic jiného než shromážděné jednotky. Jednotka však je to, čím se o každé věci vypovídá, že je jedna.

A číslo je trojí, totiž digitus, artikulus a číslo složené čili smíšené.

Digitus, „prst“, je každé číslo menší než deset, jako 1, 2, 3, atd. až do 9 včetně.

Artikulus, „článek“, je každé číslo, které může být rozděleno na deset stejných částí tak, že nezůstává nic zbylého ani zmenšeného, jako např. deset se dělí na deset jednotek a dvacet na deset dvojic a třicet na deset trojic a tak podobně i ostatní artikuly.

Číslo složené se nazývá to, které se skládá z digitu a artikulu, jako např. 11 se skládá z 1, což je digitus, a z 10, což je artikulus. A tak každé číslo mezi dvěma sousedními artikuly se nazývá číslo složené.

Tato čísla se znázorňují u různých různými číslicemi; jinak je píší lidé znající latinsky, jinak je na zdech zaznamenávají lidé latinsky neznající. Ponechme stranou lidi bez latinského vzdělání, kteří dle různých krajin používají pro čísla různých znaků; následující výklad pojednává o označování latinském.

Latiníci zapisují každé číslo dvěma způsoby. Prvním, hrubším, píší jednotku jako I, dvojku jako II, přidávajíce takto až k pětce, kterou označují písmenem V, a pak znovu přidávají I až k deseti, které zobrazují jako X. A proto:

I – to je jedna, V pět, X deset, to zdvojené dvacet, XL dá dvakrát víc, LX třikrát a samotné L pak vytvoří padesátku, XC zas devadesátku, C vždy udává sto, kdežto z D vznikne pokaždé pět set. Stovek je v DC šest, M je tisíc; to C, jde-li před ním, pak sto musí pryč: to je klíč, jak psát budeš veškerá čísla. ...

5.4.1.2 Sčítání

Sčítání je seskupování čísla či čísel, aby se vědělo, jaká bude suma celého seskupeného čísla.

Pamatuj, že každé číslo, které má být přičteno k jinému, se jmenuje číslo přičítané a musí se napsat vždy dolů. Avšak to číslo, k němuž se má přičítat, se musí napsat nahoru, a to tak, že první číslice přičítaného čísla se napíše pod první číslici čísla, k němuž se přičítá, druhá pod druhou, třetí pod třetí a tak dále, je-li číslic více.

Když se tak stalo, přičti první číslici spodního řádku k první číslici horního řádku.

A jestliže z takového sečtení vyjde digitus, škrtni horní a napiš digitus vycházející ze sčítání, např. při sčítání 2 a 4 škrtni 4 a napiš 6. Vyjde-li artikulus, tu se po škrtnutí horní číslice napíše na její místo nula a číslo, které dává jméno tomuto artikulu, se přičte k následující číslici jako digitus, nikoliv jako artikulus. A jestliže následující číslice neexistuje, pak se napíše na následující prázdné místo, např. přičtením 4 k 6 vyjde 10; tu se po škrtnutí 6 napíše nula a jednička se přičte k následující číslici, existuje-li, nebo se napíše na prázdné místo. Jestliže však někdy ze sčítání vyjde číslo složené, tu se po škrtnutí hořejší číslice napíše na její místo digitus, který je částí onoho složeného čísla, a artikulus se přičte k následující číslici nebo se napíše na následující volné místo, jestliže tam žádná číslice není, jak bylo výše řečeno o artikulu. ...

5.4.1.3 Odčítání

Odčítání je odnímání čísla nebo čísel od daného čísla, např. odečtením 3 od 10 zůstane 7.

Při odčítání jsou potřebná dvě čísla, totiž číslo odčítané, a takto je nazýváno to, které se od jiného odčítá, a číslo, od něhož se děje odčítání. A je třeba, aby číslo, od něhož se odčítá, bylo vždy větší než číslo odčítané, nebo jemu rovné, protože menší od většího nebo stejné od stejného může být odečteno, avšak větší od menšího se v žádném případě odečíst nedá.

Při odčítání se musí číslice čísel uspořádat tak, že první čísla odčítaného se napíše pod první čísla od něhož se odčítá, druhá pod druhou a tak dále i ostatní.

Když se tak stalo, odečti první číslici spodního řádku od první číslice horního řádku, můžeš-li, a zbytek napiš na hořejší místo. Jestliže však nemůžeš, protože horní je menší, nebo je nula, tu od druhé číslice odeber jedničku a napiš ji před menší číslo nebo před nulu, která bude mít hodnotu deseti. A tu od tohoto prvního sloučeného čísla odečti první číslici spodního řádku od první číslice horního řádku. A jestliže odčítané číslo bude rovno číslu od něhož se odčítá, tu se po škrtnutí čísla, od něhož se má odčítat, na jeho místo napíše nula.

A po odečtení první číslice spodního řádku od první číslice horního řádku je třeba odečíst druhou od druhé, napsané nad ní, a třetí od třetí a tak dále. A je třeba postupovat tímž způsobem, jak bylo řečeno o první číslici. ...

5.4.1.4 Násobení

Násobení je zmnožování jednoho čísla druhým tolikrát, kolik je ve druhém jednotek, např. když řekneme dvakrát tři je šest. V tomto případě jsou tři rozmnoženy dvakrát prostřednictvím dvou jednotek, které jsou obsaženy v čísle dvě.

A číslo, které je násobeno, se jmenuje číslo násobené, a číslo, které násobí jiné, se jmenuje číslo násobící, a vždy má být vyjádřeno jako příslovce, např. třikrát čtyři je dvanáct. V tomto případě třikrát je číslo násobící a čtyři číslo násobené a číslo 12, které z násobení vyjde, se nazývá číslo vytvořené. A je třeba vědět, že z čísla násobícího se může stát násobené a opačně, např. totéž je říci třikrát čtyři a čtyřikrát tři, protože vyjde dvanáct.

Chceš-li tedy nějaké číslo násobit sebou nebo jiným, napiš číslo násobené podle číslic do hořejšího řádku a číslo násobící do spodního řádku a to tak, aby první číslice spodního řádku byla pod poslední číslicí horního řádku.

A pak násob pomocí příslovce všemi číslicemi spodního řádku, začínaje od poslední spodního řádku, poslední číslici horního řádku.

A jestliže z takového násobení vyjde digitus, napiš ho bezprostředně nahoru nad to číslo, kterým násobíš. Jestliže artikulus, pak napiš nulu nahoru nad číslo násobící a digitus pojmenovávající artikulus napiš na nejbližší místo směrem doleva. A jestliže číslo složené, pak digitus, který je součástí toho složeného čísla, napiš nahoru nad číslo, kterým násobíš, a artikulus posuň doleva jako dříve.

Když se tak stalo, je třeba násobit poslední číslici horního řádku předposlední číslicí spodního řádku, přičemž děláme všechno tak, jak bylo řečeno, a tak podobně u všech spodního řádku, násobíce jimi pomocí příslovce poslední číslici horního řádku, a to tak, že když násobíš první číslici spodního řádku nějakou číslici horního řádku, tu vždycky škrtni tu v horním řádku a výsledek napiš na její místo. Jestliže vyjde digitus, napiš digitus. Jestliže artikulus, napiš na její místo nulu a digitus přičti k následující číslici směrem doleva. Jestliže číslo složené, pak digitus, který je součástí toho složeného čísla, napiš na místo škrtnuté číslice a artikulus směrem doleva, jak bylo řečeno dříve.

A potom, cos vynásobil všemi číslicemi spodního řádku poslední číslici horního řádku, posuň všechny číslice spodního řádku o jedno místo tak, že napíšeš první číslici spodního řádku pod předposlední horního řádku. A začni násobit, jaks to dělal dříve, ...

5.4.1.5 Dělení

Dělení je rozdělování jednoho čísla číslem jiným, menším nebo stejným.

Při dělení jsou potřebná tři čísla: první je číslo dělené, a to je to, které má být rozděleno na části, druhé je číslo dělící, a to je to, kterým je číslo děleno. A třetí je kvociens, a to je to, které označuje, kolikrát může být číslo dělící odečteno od čísla děleného; např. při dělení 20 jablek nebo grošů mezi pět lidí bude číslo zvané kvociens 4, a to ukazuje, že pět je ve dvaceti obsaženo čtyřikrát.

Chceš-li tedy nějaké číslo dělit jiným, pak napiš číslo dělené v horním řádku podle jeho číslic, přičemž musí být vždy větší nebo rovno číslu děliteli, číslo dělící čili dělitele do spodního řádku takovým způsobem, aby poslední číslice dělitele byla pod poslední číslicí čísla děle-

ného, předposlední pod předposlední a tak podobně u ostatních číslic; a to tehdy, jestliže číslo dělicí může být odečteno od číslic napsaných nad ním; jestliže však ne, pak poslední číslici dělitele napiš pod předposlední číslici čísla děleného a tak podobně u ostatních, dáváje číslici pod číslici.

Když se tak stalo, podívej se, kolikrát je poslední číslice čísla dělicího obsažena v číslici napsané nad ní, nebo – což je lepší – podívej se, kolikrát je číslo dělicí obsaženo v číslicích napsaných nad ním; a nebývá to víc než devětkrát a méně než jednou. A toto číslo, určující kvociens, napiš nahoru nad tu číslici čísla děleného, pod níž je první číslice čísla dělitele. A pak násob všechny číslice dělitele oním kvocieniem a výsledek napiš doprostřed mezi číslo dělené a dělitele, dáváje vždy první číslici čísla výsledného nad tu číslici, kterou násobíš kvocieniem, a druhou nad druhou směrem doleva. A pak odečti celý výsledek násobení od číslic nad ním napsaných.

Když se tak stalo, napiš první číslici dělitele pod nejbližší číslici horního řádku směrem doprava a tak učiň s ostatními číslicemi dělitele. ...

5.4.1.6 Odmocňování

K nalezení kořene čísla čtvercového nebo krychlového je třeba vědět, že číslo čtvercové je číslo, které vychází z násobení sebe sama sebou samým, např. když řekneme dvakrát dvě jsou čtyři; tedy 4 je číslo čtvercové a číslo 2 je kořen tohoto čísla. Krychlové číslo je však to, které vychází z násobení sebe sama sebou dvakrát, nebo z násobení jednou sebe sama a jednou svého čísla čtvercového, např. když řekneme dvakrát 2 dvakrát je 8, nebo takto: dvakrát 2 jsou 4 a dvakrát 4 je 8; tedy číslo 2 bude kořenem tohoto krychlového čísla 8. Z toho plyne, že totéž číslo může být kořenem čísla čtvercového i krychlového.

Najít kořen není nic jiného než k nějakému danému číslu najít podle velikosti daného čísla jeho čtvercový nebo krychlový kořen. Z toho plyne, že najít čtvercový kořen znamená najít k nějakému danému číslu čtvercový kořen, to jest číslo, které znásobené jednou sebou vytvoří dané číslo, je-li přesně čtvercové; jestliže však není, pak největší čtvercové v daném čísle obsažené.

Chceš-li tedy najít čtvercový kořen nějakého daného čísla, napiš dané číslo podle jeho míst a spočítej počet číslic, zda je sudý nebo lichý. Je-li sudý, začni pracovat pod předposlední číslicí směrem doleva, je-li lichý, pak od poslední, takže začínáš vždy od poslední napsané na lichém místě.

Tedy pod poslední číslicí napsanou na lichém místě je třeba najít nějaký digitus, který znásoben sebou samým vyruší celé nahoře napsané nebo nakolik nejbližše může. Po nalezení takového digitu a odečtení od hořejšího čísla je třeba digitus zdvojit a dvojnásobek napsat pod nejbližší číslici směrem doprava a jeho subduplum, to jest onen digitus, který zdvojíš, pod něj. Když se tak stalo, je třeba najít nějaký digitus pod nejbližší číslicí před dvojnásobkem, který znásobený dvojnásobkem a potom sebou samým vyruší celé nad ním nahoře napsané číslo, nakolik nejbližše může.

A nemá se přestat v hledání takového digitu a v jeho zdvojnásobování a kladení subduplů, dokud nebude pod první číslicí nalezen digitus, který znásoben všemi dvojnásobky a potom sebou samým zruší celé nad ním nahoře napsané nebo nakolik nejbližze může.

A jestliže by se stalo, že by nějaký digitus nemohl být nalezen, pak je třeba napsat nulu pod nejbližší třetí číslicí směrem doprava. A první dvojnásobek s jeho subduplem je třeba posunout dopředu a pod předcházející číslicí směrem doprava je třeba najít nějaký digitus a postupovat jako dříve.

Jestliže po tom, co se tak stalo, vyjde nula, pak dané číslo bylo pravé čtvercové a naposled nalezený digitus se subduplem nebo subduply bude jeho kořen. Jestliže však něco po odečtení dvojnásobků zůstane, pak ono číslo nebylo čtvercové, ale nalezený kořen je kořenem největšího čtvercového čísla obsaženého v onom čísle.

Chceš-li si ověřit, zda jsi počítal správně, vynásob kořen sebou samým a vyjde dané číslo, bylo-li čtvercové; jestliže nebylo čtvercové, pak dané číslo vyjde s přidáním zbytku k číslu vyšlému z násobení kořene sebou.

5.5 Náměty na samostatnou práci

1. Vynásobte dvě čísla pomocí

- a) středověkého algoritmu,
- b) dlaždicového algoritmu,
- c) proužkové metody,
- d) našeho algoritmu,

Uvědomte si výhody a nevýhody jednotlivých postupů.

2. Pomocí tužky a papíru vypočtete druhou odmocninu z čísla 140 625. Soutěž o cenu.

3. Uveďte jiné staré algoritmy násobení víceciferných čísel.

LITERATURA

- [Ba] Balada F., *Z dějin elementární matematiky*, SPN, Praha, 1959.
- [B] Bečvář J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 19, Prometheus, Praha, 2001.
- [Be] Berman G. N., *Wie die Menschen zählen lernten*, Aufbau-Verlag, Berlin, 1953.
- [Bt] Betz O., *Das Geheimnis des Zahlen*, Kreuz Verlag, Zürich, 1989.
- [Ca] Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II Band*, Teubner, Leipzig, 1913.
- [Ed] Edwards C. H., *The historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, New York, 1979.
- [Ev] Eves H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, London, 1966.
- [Ge] Gericke H., *Geschichte des Zahlbegriffs*, Bibliographisches Institute, Mannheim, Wien, Zürich, 1970.
- [Ha] Hairer E., Wanner G., *Analysis by Its History*, Springer, New York, 1996.
- [Ch] Chabert J.-L., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, 1999.
- [Ju] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.
- [Ko] Konforovič A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.
- [Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, reprint ve třech svazcích, Oxford Univ. Press, New York, 1990.
- [KP] Křišťan z Prachatic, *Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky*, Oikoymenh, Praha, 1999, edice a český překlad Z. Silagiová.
- [Kr] Krysicki W., *Zählen und Rechnen Einst und Jetzt*, Teubner, Leipzig, 1968.
- [Le] Lemoine J.-G., *Les anciens procédés de calcul sur les doigts en orient et en occident*, Paris, 1932.
- [Lo] Löffler E., *Ziffern und Ziffersysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1912.
- [Me1] Menninger K., *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 1969.
- [Me2] Menninger K., *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*, 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1958.
- [Mi] Mikan M., *Jak se vyvinula matematika a geometrie*, Orbis, Praha, 1954.
- [Pi] Picutti E., *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano, 1977.
- [Sc] Scriba Ch. J., *The Concept of Number*, Bibliographisches Institute, Mannheim, Wien, Zürich, 1968.
- [Sh] Smith D. E., *Computing Jeton*, The American Numismatic Society Broadway at 156th Street, New York, 1921.
- [St] Struik D. J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963.
- [Sm] Smolík J., *Mathematikové v Čechách od založení univerzity Pražské až do počátku tohoto století*, Živa **12** (1864), 12–27, 140–141, 152–153, 194–225, 308–341.
- [TJ] Tropfke J., *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. vyd., De Gruyter, Berlin, New York, 1980, přepracoval K. Vogel.
- [Ul] Úlehla J., *Dějiny matematiky II.*, Praha, 1913.
- [Wa] van der Waerden B. L., *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.