

Alena Šarounová

GEOMETRIE A NÁŠ SVĚT



Vzdělávací modul MATEMATIKA

Výukový a metodický text

Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze:
aktivně, aktuálně a s aplikacemi – projekt OPPA



Praha 2012

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu Praha – Adaptabilita (OPPA) a jeho projektu Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: aktivně, aktuálně a s aplikacemi. Řešiteli projektu jsou pracovníci Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Autorka textu:

PhDr. Alena Šarounová, CSc., katedra didaktiky matematiky, MFF UK Praha
alena.sarounova@mff.cuni.cz

Recenzovaly:

Mgr. Věra Dědečková
Věnceslava Vaterová

Vydalo Nakladatelství P3K s. r. o. v Praze v roce 2012 v nákladu 120 ks. Vydání první.
Ze sazby dodané autorkou vytiskl xPrint s. r. o.
Publikace neprošla jazykovou korekturou.

© Alena Šarounová, 2012
© Nakladatelství P3K, 2012

ISBN 978-80-87186-70-1

OBSAH

Úvodní slovo	5
Grafická komunikace	7
Grafická komunikace a my	8
Subjektivní vnímání různých úprav grafů	16
Grafická komunikace a reklama	22
Pracovní list – Polární grafy	25
Pracovní list – Mapové obrazy	26
Pracovní list – Stromy života	28
Pokrývání roviny	30
Pokrývání roviny a vyplňování prostoru	31
Ornamenty a mozaiky	37
Pokrytí roviny jako geometrický problém	41
Pracovní list – Dlaždice odvozené ze čtverce	42
Pracovní list – Vymezování území	43
Pracovní list – Návrhy čtvercových dlaždic pomocí sítě čar ve čtverci	45
Pracovní list – Jednoduché rozety	46
Pracovní list – Rekonstrukce geometrické sítě gotického okna	47
Osová afinita	48
Osová afinita a její užití	49
Plochojevná zobrazení a rovnoploché obrazce	51
Pracovní list – Osová afinita v rovině	54
Pracovní list – Řezy hranolů pomocí osově afinity	55
Pracovní list – Obrazy kružnice v osově afinitě	56
Pracovní list – Trojúhelníková konstrukce elipsy	57
Slovo na závěr	58

Další materiály

Na přiloženém CD jsou další články, pracovní listy, sítě pro tvorbu ornamentů a ukázky výtvarných návrhů. Zařazeny jsou tam, kam tematicky spadají. Proto je Obsah na CD bohatší a stránkování jiné.

Použitá a doporučená literatura

Fialová L. a kol.: Dějiny obyvatelstva českých zemí, Mladá fronta 1998 (2. vydání)
Issam as-Said, Parman Ayse: Geometrická koncepce v islámském umění, Argo a Půdorys, 2008
Klíma J., Šimek K.: Kamenorez, edice Cesta k umění, 1942
Šarounová A.: Souměrnosti v rovině, Veset Plzeň, 1993
Statistické ročenky (celostátní i regionální)
Stránky MFF UK Praha – katedra didaktiky matematiky

Různé grafy a diagramy najdete kdekoli v tisku, ve školním atlase, v bakalářských a diplomových pracích posluchačů učitelství na MFF apod. Dlažby a ornamenty hledejte v reálu, v architektuře, vytváření mezí lze ukázat např. olejovými skvrnami na vodní hladině i v lese mezi mechovými porosty. Také v knihách věnovaných architektuře či textilním technikám najdete mnoho vhodných obrázků.

Grafickou úpravu provedl Jakub Šaroun. Do obrazové části k mému vlastnímu obrazovému materiálu přispěli Zdeněk Halas (písma), Lucia Ilucová (dlažby), Jakub Šaroun, dále Jiří Šrubař (grafy) a Zuzana Štauberová (ornamenty), na návrzích ornamentů do sítí se podíleli účastníci kurzu Kouzelná zahrada geometrie (Univerzita třetího věku), který vedu na MFF UK Praha. Všem svým pomocníkům za jejich ochotu a práci velmi děkuji.

Alena Šarounová

Úvodní slovo

Milí čtenáři této útlé brožurky!

Kolegyně a kolegové, vy všichni, kdo se věnujete výchově a vzdělávání naší mládeže!

Dovolte mi, abych se s vámi podělila o několik pohledů na výuku, vzdělávání a výchovu našich žáků, studentů i posluchačů. Z této trojice je zajisté nejjednodušší to první – výuka. Ovšem i ta bývá občas velmi tvrdým oříškem. Vzdělávání je mnohem širší než jakákoli školní výuka. Počíná narozením – a končí v ideálním případě až s naším odchodem ze života. Vliv mimoškolního prostředí se všemi vymoženostmi technicky vyspělé civilizace i všemi nešvary morálně dosud nevyspělé civilizace na děti je stále silnější. Dokonce sílí i názory, že docházka do školy je vlastně zbytečná. Myslím, že je to veliký omyl. Úkolem školní docházky není jen se učit a naučit, z hlediska psychologického i sociologického má nesmírný význam pro rozvoj životně důležitých schopností jako: umět naslouchat, plnit své úkoly, umět se vcítit do pocitů druhých lidí, rozvíjet zodpovědnost, soustavnost, tolerantnost a zejména – získat řadu zkušeností, norem a vzpomínek, které spojují celou společnost a „drží ji pohromadě“. Lidé, kteří nemají nic společného, si opravdu těžko mohou rozumět, natož společně něco budovat. A jestliže mladí lidé stále více času tráví u počítačů a ve virtuálním světě a vzrůstá procento těch, kteří si „nemají co říci s ostatními“, je právě tato role školy stále důležitější.

Vraťme se ale do školních tříd. Jako učitelé na druhém či třetím stupni školy máme své aprobase a náš úvazek je tvořen zpravidla řadu let předměty, které s touto aprobační úzce souvisejí. Náš profesní život se většinou odehrává na stejném typu školy. Naše příprava na učitelství byla zaměřena na vybranou aprobaci a věk žáků. Málo času se však věnuje tomu, co předchází či naopak následuje po čase, který žáci tráví právě na naší škole.

Myslím, že kdo učí na druhém stupni, měl by nejen znát obsah učebnic ze stupně prvního, ale mít aspoň minimální zkušenost s výukou v 1. až 5. ročníku. Tam, kde se rodí přístup dětí k poznání, kde raší kořínky, z nichž pak vyrůstají i počátky matematiky. Zodpovědný učitel by měl též vždy uvážít, kde v budoucích letech žák bude to či ono potřebovat, abychom zdůraznili vhodné, životaschopné metody práce či poukázali na to, kde v praxi se využije to, čemu se právě učíme. Stejně tak učitelé středních škol by se měli silně zajímat o to, CO a hlavně JAK se učí na škole základní – a co případně prospěje později těm absolventům SŠ, kteří budou dále studovat. Prostě: všichni bychom aspoň v hrubých rysech měli znát (a průběžně sledovat, neboť vše se rychle mění, ne vždy k lepšímu) takový průřez životní cesty studenta v našich předmětech. A pokud možno starat se o jakýsi lehký nadhled nad látkou, jejím využitím ve výuce dalších předmětů i v praxi. Víím, je toho mnoho, co jsem tu sepsala, a není to vůbec snadné. Já mohu nabídnout jen pár námětů, jak některé vztahy mezi geometrií a naším životem naznačit, jak oživit podle potřeb látku, jak „navázat přátelství“ mezi žákem a geometrií „neteoretickou, leč krásnou či užitečnou“.

Jak lze využít tento materiál

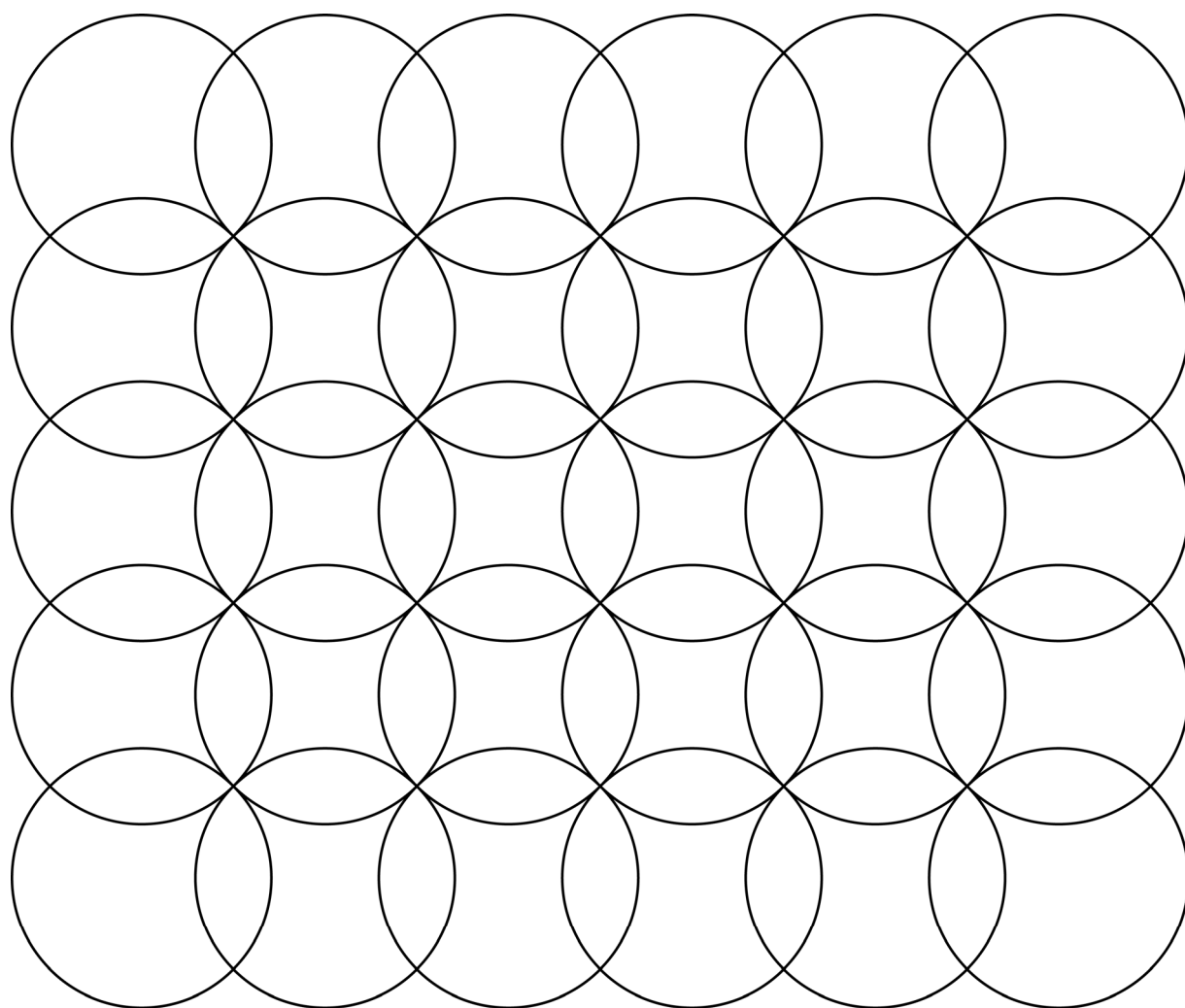
Texty zde uvedené jsou zaměřené na grafické znázorňování dat a dále na základní poznatky syntetické geometrie (na látku, která se modeluje, rýsuje, prostě „zviditelňuje“). Tedy vždy na to, co žák „přijímá okem“. Texty záměrně netvoří nějaký celek ve smyslu části učebnice. Právě naopak. Učitel by měl mít po ruce (kromě učebnice, kterou většinou má) také nějaké „koření“, kterým lze podle potřeby motivovat, ochutit, zdůraznit látku, nabídnout problém či téma k samostatné práci. Některé pracovní listy jsou vhodné i pro děti z prvního stupně (domalovávání ornamentů apod.), většina se hodí na druhém i třetím stupni. Záleží na tom, chceme-li zajímavě zopakovat shodnosti (1. r. G) nebo přivést žáčky k samostatné práci, pomocí níž se dostaneme k výkladu posunutí. Listy výtvarně laděné jsou vhodné i pro domácí práci, vybarvování děti většinou za „geometrii“ nepovažují – a přesto jím procvičují vnímání tvarů, představivost – a konec konců i schopnost ruky něco udělat aspoň trochu pořádně.

Pokud jsou v úlohách zadané sítě, necháme žáky, aby do nich črtali. Nebudou se jim plést v ruku rýsovací potřeby. K vybarvování doporučuji pastelky nebo zvýrazňovače, nikdy normální fixy! Barvy nejsou jen „okrášením stránky“ (i když v některých učebnicích bohužel jinou roli neplní), mohou být významným nositelem informací. Mohou také ovlivnit náš celkový dojem z obrázku – o tom vědí výtvarníci a využívají toho autoři reklamních letáků a billboardů. Brožurka je sice černobílá, ale na přiloženém CD jsou i vybrané barevné ukázky, které lze promítnout ve třídě a porovnat celkový dojem např. dvou „stejných grafů“, které shrnují tytéž údaje, ale díky zvolené barevnosti subjektivně působí na „naši mysl“ různě.

Četné pracovní listy umožňují ukázat žákům rozdíl mezi črtaným obrázkem a jeho narýsovanou variantou. Nejvhodnější k tomu jsou listy zaměřené na pokrývání roviny. Pokud jde o rýsovací pomůcky, stačí jen trojúhelníky a kružítko a u kruhových grafů také úhloměr. Většina pracovních listů je v záhlaví uvedena stručnou informací, poučením, které by mělo stačit k úspěšné práci na úlohách. Je proto možné listy využít i v případě náhlého suplování, jako zaměstnání pro rychlejší žáky, aby nerušili své okolí, jako zdroj úloh do různých soutěží.

Pracovní listy zaměřené na grafy s údaji o obyvatelstvu můžeme nabídnout také kolegům, kteří učí dějepis, zeměpis či občanskou výchovu. Listy k pokrývání roviny mohou sloužit také ve výtvarné výchově. Ostatně – máme zde jistý „materiál“ – a na naší nápaditosti záleží, kdy, kde a jakým způsobem ho nabídneme svým žákům.

Velmi by mě potěšilo, kdybyste nám napsali, jaké zkušenosti s našimi materiály máte, co vám na nich nevyhovuje, co se osvědčuje. O každý dobrý nápad bychom se měli podělit s ostatními učiteli. Myslím, že to platí zejména o jednoduchých a pohotových pomůckách, k jejichž užívání nepotřebujeme ani „vybavenou třídu“, ani dlouhou přípravu před výukou. Škola je prostředí neustálých změn – a takto jsme na některé neplánované, nečekané situace o něco lépe připraveni. Tak – hodně fantazie a zdaru.



Grafická komunikace a my

Člověk je tvor společenský – a jako všichni ostatní společensky žijící tvorové musí přiměřeně reagovat nejen na přírodní prostředí v němž žije, ale také na členy svého společenství. Musí se s nimi dorozumívat. V živočišné říši vidíme nejrozumnější prostředky vzájemné komunikace. Hmyz mnohé signalizuje svými feromony, včely předávají informace o zdroji potravy tzv. tanečky, chobotnice se podle názoru některých biologů dorozumívají hrou barev. Poplašenému volání ptáků rozumějí příslušníci mnoha dalších druhů zvířat. U všech živočichů vybavených dobrým zrakem hrají velkou roli barvy, tvary, pohyb v okolí i nezvyklé proměny známého prostředí.

Pro nás – lidi – jsou vůdčími smysly zrak a sluch, pro rozvoj prostorové představivosti také hmat. Podvědomě se často řídíme i čichem (jako většina savců), ale ten nás ovlivňuje spíše na úrovni pocitů. Podle tónu hlasu i celkového držení těla blízkého člověka odhadneme jeho náladu, zdravotní stav, často i druh zprávy, kterou nám přináší. Zrakové i sluchové vjemy se spojí v důležitou informaci o stavu bližního i okamžité situaci. S neznámým předmětem se nejlépe seznámíme jeho důkladnou prohlídkou ze všech stran a osaháním. Hmatem se řídíme při pohybu ve tmě...

Záměrné učení ve škole probíhá většinou pomocí řeči a obrazů (skutečně trojrozměrných modelů a praktické činnosti je ve výuce méně). Řeč i obrazy jsou ve své podstatě „náhražky“ za skutečné objekty a situace, pomocí nichž zprostředkováváme to, co nelze předvést reálně. Jsou to symboly nebo znaky – zprvu té reality, později i obecných pojmů. Schopnost dorozumívat se jejich prostřednictvím (či uvažovat ve své vlastní mysli pomocí těchto prostředků) bývá psychology popisována jako tzv. symbolická funkce.

Vzijme se do role žáka, který poslouchá náš výklad nějakého jevu. Slyší věty, řetězce slov, která řadíme za sebou (podle mluvnických pravidel) a vyslovujeme je pak v časovém pořádku. Toto podání informací je „lineární a nevratné“. Slyšíme jedno slovo po druhém – a co přeslechneme, je pro nás ztraceno. To jsou nevýhody tohoto způsobu předávání informací. Výhodou přímé řeči je bezprostřední kontakt obou účastníků, možnost reakce přednášejícího na mimické projevy naslouchajícího, zvýraznění důležitých částí našeho projevu zpomalením toku řeči, zesílením přednesu atp. Na rozdíl od přímé řeči umožňuje psaný text opakované přečtení složitější partie, návraty k předchozím stránkám, vlastní zdůraznění částí textu podtržením či jinou grafickou úpravou. I v tomto případě však čteme slovo po slově, větu po větě časově lineárně (pokud neovládáme „rychločtení“, které se však pro přesný příjem podrobných informací příliš nehodí). Chceme-li se čtením – studiem textu – co nejvíce naučit, je vhodné číst nahlas a vypisovat si poznámky. Pak přijímáme informaci zrakem, sluchem i pohybem, a její zapamatování je trvalejší.

Podíváme-li se na nějaký objekt, přijímáme informaci o něm „celoplošně“, vnímáme cosi jako průmět tohoto objektu na pomyslnou plochu, která nás obklopuje. Můžeme vnímat vše, co leží v našem zorném poli, nikoli lineárně, ale dvojrozměrně. A jen naše zkušenost nás „donutí vidět“ prostorové útvary prostorově, neboť to není samozřejmé, učíme se tomu od narození ve spolupráci vidění, osahávání a vlastního pohybu jako kojenci a batolata.

Staré čínské přísloví praví: „Jeden obrázek je lepší než tisíc slov.“ Dobře vystihuje množství informací, které můžeme zrakem postihnout. Bylo by však třeba dodat, upřesnit: „Jeden DOBRÝ obrázek je lepší než tisíc slov.“ Špatné zobrazení nás naopak může přivést ke zcela mylným závěrům. Vnímáním zorného pole a „zpracováním obrazu“ mozkiem se zabývala tzv. gestaltpsychologie (tvarová psychologie) zhruba před sto lety. Nyní se psychologie myšlení zabývá jinými tématy, ale proto by nebylo dobré na některé poznatky o našem vnímání zrakem, které gestaltpsychologie zformulovala, zapomínat. Ostatně – mnohé z nich jistě známe z vlastní praxe. Zejména my, učitelé, dobře víme, že musíme vždy ve škole počítat s těmito jevy:

- Dívají-li se dva lidé na jeden obraz, určitě nevidí totéž.
- Někoho obrázek „obtěžuje“, jinému velmi pomáhá.
- I jeden „čtenář obrázku“ na něm může vidět v různém čase různé věci (tj. všimne si něčeho jiného podle okamžité nálady či potřeby).
- Obrázky se musíme „učit číst“ (a to se bohužel ve škole často neděje, protože předpokládáme, že to umí každý stejně jako většina dospělých lidí).

Do grafické podoby lze převést nejen zcela konkrétní věci, ale i jevy probíhající v čase, vysoce sofistikované myšlenky, spletnost vzájemných vztahů mezi lidmi nějakého společenství i hudební melodie... Všichni používáme písmo, známe mapy a plány, běžně se setkáváme s různými grafy a dopravními značkami. Všechny tyto záznamy (i mnohé jiné) zachycují nějaké informace a jsou schopné předat je jiným lidem. Jsou to různé způsoby grafické informace.



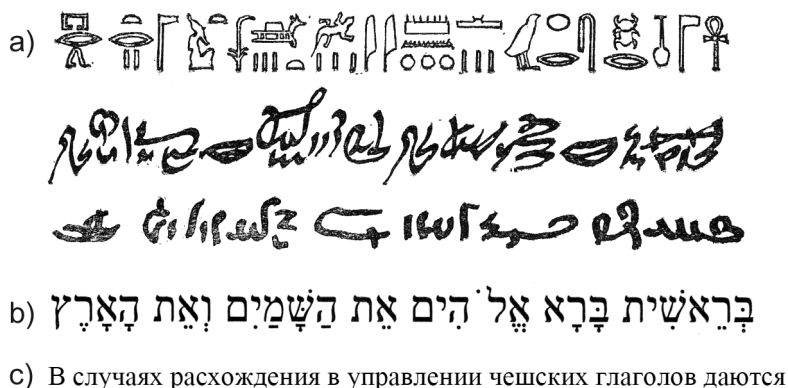
Obr. 1 – Grafická komunikace má mnoho podob. Některým z nich rozumí téměř každý

Stejně, jako se kdysi řečníci učili rétorice, aby jejich řeč byla dobře pochopena publikem a zapůsobila na ně, je třeba učit se vytvářet její „obrazy“ tak, aby co nejjasněji zachycovaly sdělení určená jejím „čtenářům“ – a také publikum seznamovat s tím, co vše lze (nebo naopak nelze) vyčíst z těchto „obrazů“.

Většina zásad pro tvorbu zní jednoduše: Obraz má být jednoduchý, snadno přehledný. Obraz musí obsahovat dostatek informací k tomu, aby při jeho „čtení“ nedocházelo k nejednoznačným závěrům. Obraz má být upraven tak, aby působil pokud možno esteticky. Barvy mají ladit navzájem – a pokud nejsou nositeli důležitých informací, mají být tlumené. Snaha o „umělecký dojem“ obrazu nesmí vést k jeho doplnění takovým způsobem, který ztěžuje jeho čtení. Ukažme si to na nejrozšířenějším způsobu grafické komunikace – na vývoji písma.

Od obrázků k písmu

Prvními grafickými záznamy byly pravděpodobně primitivní pokusy o zachycení cesty v krajině, podoby zvíře a ornament. Dochovaly se vrypy do kamene, které archeologové vykládají jako zápis fází měsíce – (tedy snaha o zviditelnění průběhu času). Samo písmo má dlouhou historii. Jeho vynález je velkým civilizačním objevem, který se rodil na různých místech světa nezávisle na sobě a vyvíjel se do stále dokonalejších forem několik tisíciletí.



Obr. 2 – Písma, s nimiž se můžeme setkat v historických dílech i v současnosti (a – egyptské písmo hieroglyfické, hieratické a démotické, b – písmo hebrejské, c – ruská azbuka)

Převedení mluvené řeči do grafických značek (ať jsou to obrázky, hieroglyfy, klínové písmo, arabština, hebrejštiny, arménština, ruština atd.) má kromě jiného i tyto dva důsledky:

(A) Ti, kdož se chtějí „domluvit na dálku“, se nemusí skutečně potkat ani vysílat posla, který by jejich vzkazy vyřizoval. Můžeme hovořit celkem bez zkreslení informací k lidem vzdáleným nejen v prostoru, ale i v čase. Můžeme své myšlenky a poznání uložit pro příští generace. Právě počátky psaní (spíše nejstarší dosud nalezené písemné doklady) určují v očích archeologů a historiků „počátek dějinného období“ v historii lidstva.

(B) Možnost uchovat údaje důležité z hlediska společenství i jednotlivců písemně velmi ztěžuje možné falšování v budoucnosti. (Ovšem, co člověk nevymyslí, chce-li podvádět, falešnými listinami přišly ke svému majetku nejen některé šlechtické rody, ale i kláštery!) Písmo nás osvobodilo od nutnosti zapamatovat si množství informací. Vynořil se ovšem i jeden velmi nepříjemný důsledek této úlevy pro náš mozek. Mnohem víc než naši praotcové zapomínáme, nepamatujeme si často ani velmi důležitá data, protože paměť necvičíme. Ba ještě hůře: současné klima ve společnosti některé složky paměti (zejména mechanickou paměť, mnemotechnické pomůcky, systematický přístup k učení atp.) vyloženě znevažuje.

I ve školských dokumentech se zdůvodňuje, že nás nová technika zbavuje nutnosti pamatovat si fakta – a tím víc se lze věnovat logickému myšlení. Toto svědčí o hlubokém nepochopení role paměti v životě jednotlivce i celých společenství. Vždyť konečnými stanicemi ztráty paměti jsou: u jednotlivce demence, u společenství vykořenění a jeho rozpad. Vždy tedy „zánik“. Paměť je to, co zachovává naši osobní identitu, paměť udržuje smysly, schemata chování, řeč i kulturu

společnosti. Stará společenství „předhistorické doby“ se vyvíjela velice pomalu (písemný styk urychluje pokrok), ale na rozdíl od současnosti měla mnohem větší zájem o minulost svého rodu, jak potvrzují četná etnografická studia. Jejich paměť byla mnohem vytríbenější, protože se lidé nemohli spoléhat na různé „berličky“, které by ji nahradily. Mechanická paměť je velmi důležitá v období dětství, protože „malý člověk“ (ovšem i jiná mláďata) musí co nejrychleji vstřebat dostatek informací k tomu, aby ve svém prostředí přežil. Tuto paměť je však třeba také záměrně rozvíjet. Kdysi to bývaly různé hry s říkankami doprovázené pohybem (zapojení více smyslů výrazně urychluje učení), ve škole se zpívalo (nikoli mluvílo o hudbě), počítalo z paměti, atp. Většinu těchto aktivit nyní bohužel tlumíme, protože „není čas“. Málokdo domýšlí, kolik problémů si tím chystáme pro budoucí praktický život.

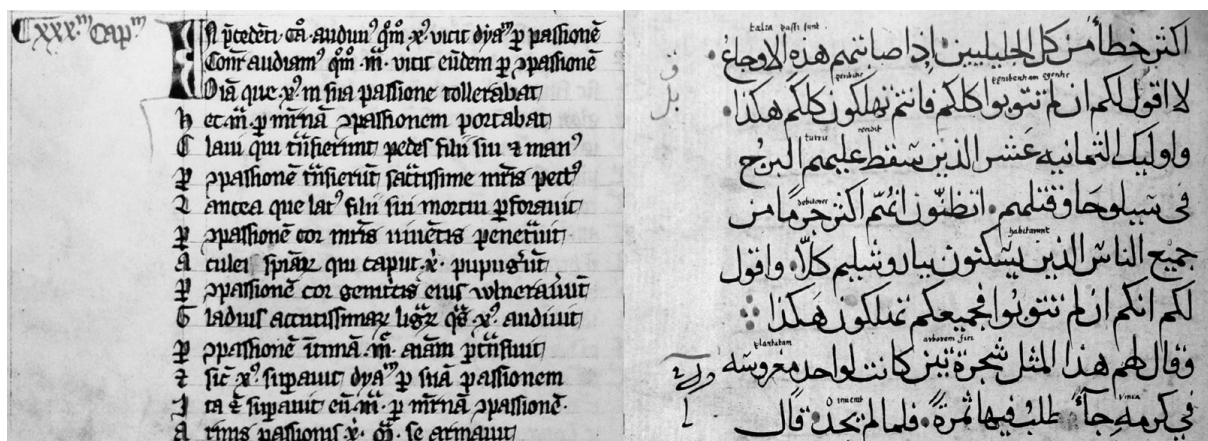
Sama historie vzniku a vývoje písma je velmi zajímavá – a stále je zde co objevovat. Úlomky nových textů, dosud nerozluštěné staré jazyky, cesty dávných poznatků napříč civilizací, stáří textů a jejich padělky. Říkáme, že naše písmo je hláskové, ale to neplatí ani pro většinu evropských jazyků. Vzpomeňme si na polské texty plné spřežek (a poděkujme Janu Husovi za jeho reformu středověké psané češtiny), na složitý zápis některých „zvuků“ např. v angličtině či třeba na zápis prostého Č v němčině, které se píše TSCH, tedy pomocí čtyř písmen abecedy. Je to dáno tím, že v latině, „matce“ naší latinky, nebylo dost písmen pro „cizí hlásky“. I tvary jednotlivých písmen se zajímavě proměňovaly v čase. Porovnejme klasickou malou a velkou řeckou abecedu s latinskými písmeny, která (zejména na veřejných listinách a budovách) jsou přísně geometricky konstruována.

QWERTZUIOPASDFGHJKLYXCVBNM
qwertzuiopasdfghjklyxcvbnm

ΘωεϛτζυιοπασδφγηηφκλψξχϘβνμ
ΘΩ ΕΡΤΖΥΙΟΠΙΑΣΔΦΓΗΘΚΛΨ#ΧςΒΝΜ

Obr. 3 – Písmena latinské a řecké abecedy (ukázka fontů)

Proměny latinky můžeme sledovat na středověkých rukopisech. Sice měl (podobně jako dnes) každý autor psaného slova svůj vlastní rukopis, ale základní charakteristické rysy dodržovali všichni autoři důležitých listin žijící ve stejné době v jednom kulturním společenství. Krásné tvary měla např. karolínská minuskule, písmo nazvané po Karlu Velikém († 814). Tento panovník byl velice významným politikem. Spolupracoval velmi úspěšně s katolickou církví a byl v r. 800 papežem korunován v Římě na císaře středověké říše římské (jazyka německého). Podařilo se mu navázat na helénistickou římskou říši a prosadit svou myšlenku křesťanské říše podobné vážnosti. Protože navazoval na starověk, hovoří se o jeho kulturní politice jako o karolínské renesanci. Rukopisy zachované z této doby byly po celý středověk vzorem po stránce obsahové, obrazové, vynikají krásným kaligrafickým písmem a celkovým uměleckým zpracováním knih. Písmo v arabském světě slouží často dosud i jako ornament. Také mnohá jiná písma, zejména orientální, působí celkově velmi dekorativně.



Obr. 4 – Ukázky písma středověkých rukopisů

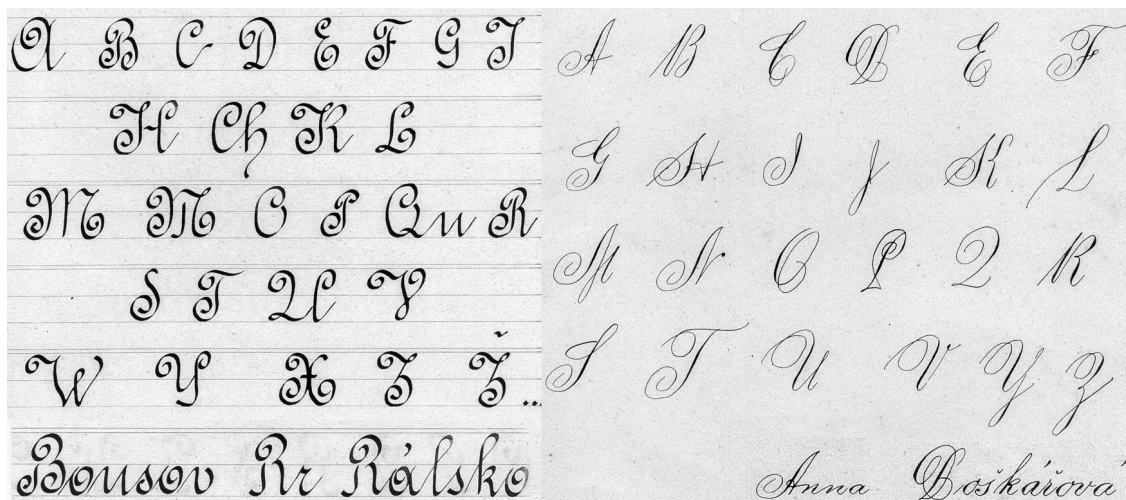
S vynálezem knihtisku se tvary písmen i číslic sjednocují, ale v čase se mění i nadále. První knihy se měly svým vzhledem rovnat krásným rukopisným dílům. Jejich písmo je tvarově složité a jistě nebylo snadné takovou sazbu pro tisk připravit. Zajímavou historií má i německý švabach. Po napoleonských válkách se výrazně zvýšila snaha mnohých národů o politické i kulturní ozvláštnění (vzpomeňme i naše obrození). Tak se také německé země chtěly výrazně odlišit od „Francouzů“ a navázat na starou, často bájnou historii. A tak v době, kdy většina Evropy užívala latinku, byly mnohé knihy v německy mluvících oblastech psány švabachem. Učily se mu ve škole spolu s kurentem také naše prababičky. A začínaly s tím hned v první třídě spolu s nácvikem latinky tištěné i psané a zápisem cifer. Důkazy o tom nalezneme ve starých „čítankách“. Po celé 19. století se dále souběžně tiskly knihy latinkou (učebnice, romány) i švabachem (většinou knihy náboženské, kramářské písně, německé texty). Na obr. 5 je úryvek z knihy Křesťana poklad domáci od Josefa Procházky, která byla vytištěna v Praze r. 1851. Doufám, že vás obsah textu potěší.

Neboť napřed poznamenati dlužno, že negistěgssij, nežli mládence, gest osud panny.

Zěsďa může ona sama los swüg si určiti: ona muss geg očeláwati. Zěsďa může sobě sama muže zwoliti, s ujimž radost a žalost swého žiwota ráda by sdílela: ona muss čekati. Málo kdy mjwá ona swého gměnj toliž, aby se samostatně wyžiwila a uchránila; ona dostáwá wyžiwu i ochranu. Gačožto aud onoho pohlawj, kterěz, gsauc slabšijho osudj a menšsich schopnostj, w bauři obecného žiwota gjednati nemůže, býwá ona gačožto wždycky nedospělá před zákony powažowána, a muss swé záležitosti we weřegném žiwotě cizým lidem k obstaráwánj a k hágenj swěřiti.

Obr. 5 – Ukázka textu z roku 1851 (Křesťana poklad domáci)

Na přelomu 19. a 20. století bývala ve školách věnována velká péče písmu a úpravě textů. Vždyť člověk s úhledným rukopisem mohl na této své způsobilosti „založit živobytí“. Pro zajímavost zde uvádím několik ukázek písma mé babičky, která studovala začátkem 20. století střední dívčí školu Elišky Krásnohorské (obdobu současných středních ekonomických škol). V hodinách krasopisu se žákyně učily psát různými pery různé typy písma – a za svůj výkon, jehož kvalitu můžete posoudit, byla babička hodnocena jen „velmi dobře“ (obr. 6).



Obr. 6 – Ukázky z písanky studentky dívčí školy Elišky Krásnohorské z r. 1910

S rozšířením psacích strojů ztratila školní krasopisná cvičení význam. Jde nám spíše o takovou celkovou úpravu dokumentů, která zdůrazní jejich nejdůležitější části a co nejvíce usnadní čtení. Obecně se poněkud hůře čte kurzíva či písmo napodobující gotické rukopisy.

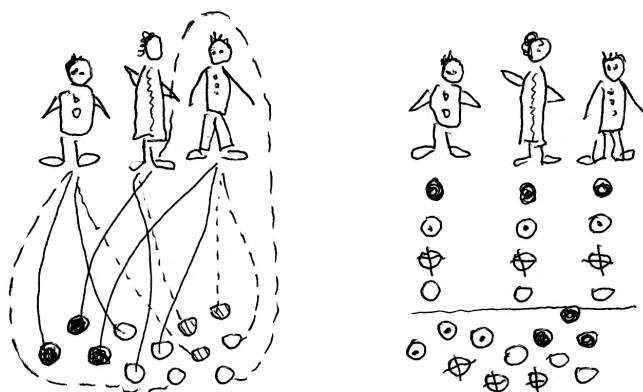
Písmo každého jednotlivce je charakteristické určitými rysy, z nichž mohou grafologové vysoudit některé vlastnosti pisatele. Proto významné firmy žádají, aby se jim zájemci o zaměstnání představovali vlastnoručně psaným textem.

Počátky grafického znázorňování

V praxi se setkáváme s různými typy grafického znázorňování: s grafy, diagramy, grafickými schématy, mapami a různými náčrtky, které mohou (ale nemusí) být doplněny textem, číselnými údaji, vloženými obrázky ap.

Již předškolní děti dovedou vytvořit smysluplné náčrtky, prvopočátky všech užívaných typů grafického znázorňování. Nakreslí na papír s obrázky domova, školky, hřiště apod. cestu „ze školky přes hřiště domů“, rozdělí nakreslený koláč na poloviny i čtvrtiny, přiřadí čarou k nakresleným dětem čepičky stejných barev jako mají jejich svetry... Ve škole je vhodné na tyto počátky navázat při řešení slovních úloh. Musím přiznat, právě v této chvíli dětem velmi škodí pracovní sešity, v nichž mají téměř vše včetně zformulované odpovědi „předkousané“ a doplňují často jen výsledek do připraveného rámečku. Právě hledání metody, způsobu, jak znázornit situaci zadanou textem, je nejcennější fází řešení slovních úloh. Děti se tím učí skutečně

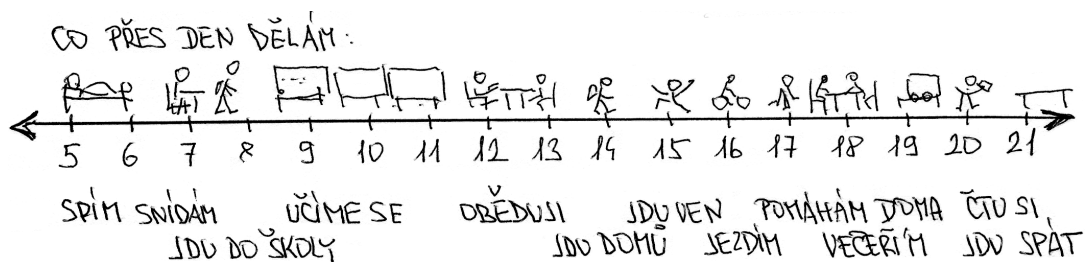
porozumět smyslu textu. Jejich grafické znázornění se může postupně odpoutávat od „realistických“ obrázků k zástupným značkám a schematickým. Rozvíjí se tím jejich abstraktní myšlení (a vynikne „fáze matematizace reálného problému“). Stejně tak dítětem vytvořená formulace odpovědi (návrat „z matematiky do reality“) nám potvrzuje, že žák podstatě úlohy opravdu rozumí. Žákům v 1. třídě byla zadána tato „těžká“ úloha: *Hromádku kuliček rozdělte spravedlivě mezi tři děti!* Ale udělejte to tak, jako kdybyste vůbec neuměli počítat! Po debatě, že „spravedlivě“ znamená „všem stejně“, ale že kuličky nemůžeme rozdávat ani z nich vytvořit tři hromádky, protože jsou nakreslené (stejně jako ty tři děti), ani papír s obrázkem kuliček rozstříhat a pak dělit, začali žáci kreslit. Dva návrhy vidíte na obrázku, pouze barevné čáry jsem převedla do různých typů čar černých.



Obr. 7 – Dětské návrhy grafického dělení kuliček

Znázornění přirozených čísel na číselné (polo)ose usnadňuje dětem „orientaci mezi čísly“. Děti takto znázorněné číslo mohou vnímat různě. Např. jako jeho „místo“ v řadě přirozených čísel (pátý „korálek“ na niti) nebo jako konec úsečky dané délky apod. Velmi dobrou „realizací“ číselné osy je teploměr (osa nemusí být vždy vodorovná) a krejčovský metr (nemusí jít vždy o přímku).

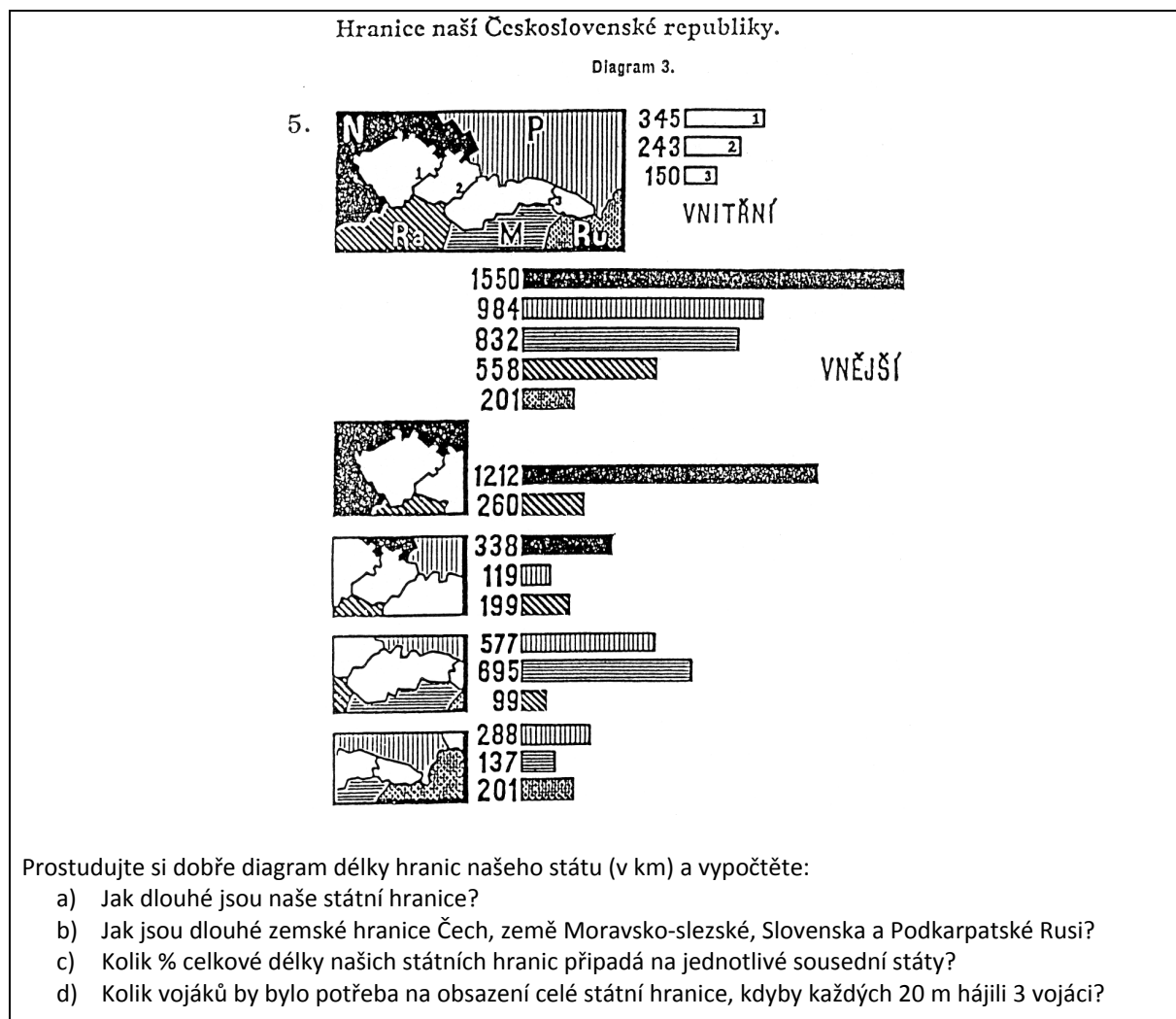
Graficky lze velmi dobře znázornit „plynoucí čas“ (spojitou veličinu, během níž se něco děje) od jednoduchých úloh (napište pořadí příchodu dětí, víte-li, že...) po velmi neoblíbené slovní úlohy o pohybu.



Obr. 8 – Grafické znázornění denního režimu dítěte

Velmi zajímavé úlohy můžeme najít ve starších učebnicích matematiky. Kromě základních učebnic dříve vydávali pro své žáky tiskem zkušený učitelé regionální sbírky úloh, ve kterých se

odrážely aktuální poměry, ceny hospodářských produktů ap. Často jsou z nich patrné politické problémy doby. V roce 1937 vydala trojice autorů J. Komárek, B. Mráz, F. Svatoš Pracovní knihu počtů pro žáky měšťanských škol (schváleno 1.10.1936 ministerstvem školství a národní osvěty jako učebnice pro měšťanské školy s československým jazykem vyučovacím v znění českém!!). Je zde věnována značná pozornost různým druhům grafického zadání úloh. Žáci také byli nuceni sami vyhledat, co vše se dá z daného vyobrazení vyčíst. I jako připomínku naší státní historie zde uvádím jednu ukázkou s částí otázek, na které měli žáci po prohlídce vyobrazení odpovědět.



Obr. 9 – Ukázka úlohy ze staré učebnice

Subjektivní vnímání různých úprav grafů

Vnější úpravou grafického znázornění dané závislosti můžeme podstatně ovlivnit celkový dojem, který si „čtenář grafu“ z jeho studia odnese – a to i tehdy, je-li obraz vytvořen relativně správně, tj. neobsahuje-li záměrně falešné údaje (data i čáry). Často stačí jen nedostatek „vodících čar“ (tj. čar, které usnadňují oku spojení správných bodů na osách x a y , posunutí počátku z průsečíku zobrazovaných os či změna velikosti jednotkových úsečků na osách. V odborné literatuře jsou velmi často při grafickém znázorňování užívány nelineární stupnice, o nichž se většinou naši studenti nic nedozvědí ani na středních školách.

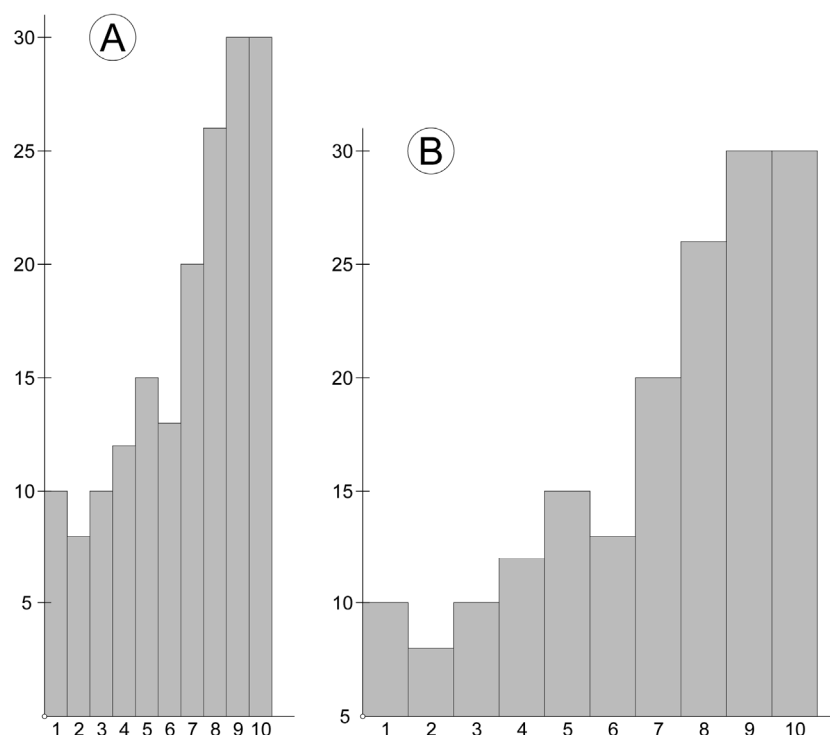
Tab. 1 – Naměřené hodnoty

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	10	8	10	12	15	13	20	26	30	30

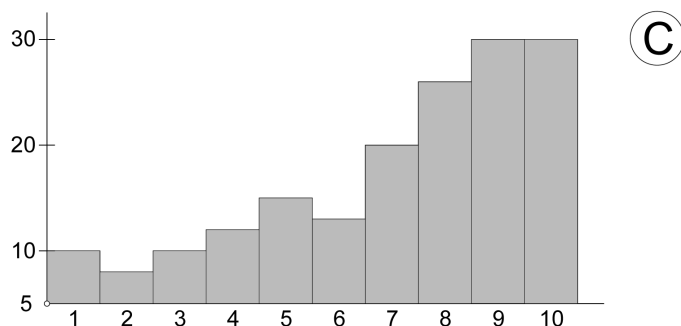
Ukažme si několik proměn grafického znázornění jedné řady naměřených hodnot (např. počty nemocných během deseti po sobě jdoucích měsíců). V následujících obrázcích nejsou k osám x a y jejich „významy“ připisovány, protože tytéž obrázky mohou znázorňovat i cokoli jiného. Sledujeme zde pouze subjektivní vnímání různých úprav dané závislosti (tab. 1).

Klasický „školní“ postup tvorby grafů začíná sestavením navzájem kolmých os x , y a volbou délky jednotkové úsečky stejné pro osu x i y . Matematicky řečeno: zvolí se kartézská soustava souřadnic. Zobrazením námi sledované závislosti XY vznikne obrázek A (zde ve sloupcové úpravě grafu). Tento obrázek vyvolává subjektivní dojem prudce se zvyšujících získaných hodnot, sloupce jsou ve srovnání se svými výškami velmi úzké. Celý obraz je výškově předimenzován.

Rovněž chybějí (jako v řadě dalších obrázků) vodorovné vodící čáry usnadňující čtení příslušných čísel na ose y .

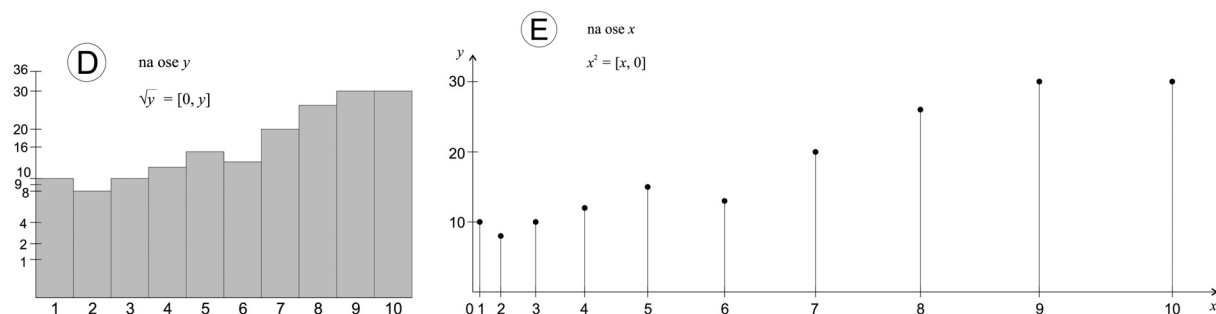


Obrázek B je oku příjemnější. Ve srovnání se znázorněním závislosti XY na obr. A je délka jednotkové úsečky na ose x dvojnásobná. Ovšem počátek stupnice na ose y – bod „0“ – není na ose y zakreslen! Stupnice je znázorněna až od čísla 5. Tento typ zobrazení vidáme často v tisku (zejména v článcích z finanční sféry). Čtenáři grafu to umožňuje vnímat intenzivněji změny v hodnotách, ale potlačuje význam změn vzhledem k celku (nevnímáme nezakreslenou celou výšku sloupců a tudíž přeceňujeme právě ty změny). Tak máme pocit, že se „děje více“, než je tomu ve skutečnosti.



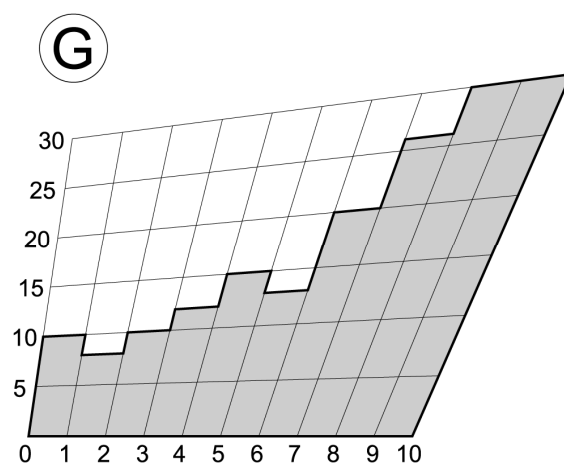
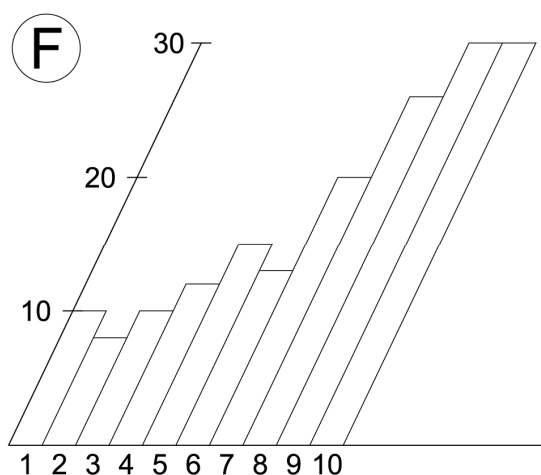
Obrázek C je transformací obrázku B. Je zde pouze změněna velikost jednotky lineární stupnice na ose y . A celkový dojem? „Změny jsou pozvolnější než ty, které znázorňuje obrázek B.“

Pravda je taková, že na nás mnohem silněji působí celkový tvar obrazu („figury“, zde souhrn všech sloupců) než číselné údaje na osách. Ne každý toto podvědomé působení zkoriguje logickou úvahou. To platí zejména tehdy, prohlížíme-li grafy a diagramy jen letmo, např. listováním ve sborníku či sledováním reklam v tisku, podél dálnice nebo na televizní obrazovce, kde občas politici nějakým grafem zamávají divákům před očima, aby doložili serióznost svých argumentů. Pro nepoučeného čtenáře jsou mnohem zákeřnější další metody zpracování dat grafickou formou. Na obrázcích D a E je naše závislost XY znázorněna opět pomocí dvou kolmých os, ale vždy jedna ze stupnic na nich není lineární. Na obrázku D je na svislé ose zapsáno číslo 36 v místě vzdáleném od počátku jen 6 jednotek!



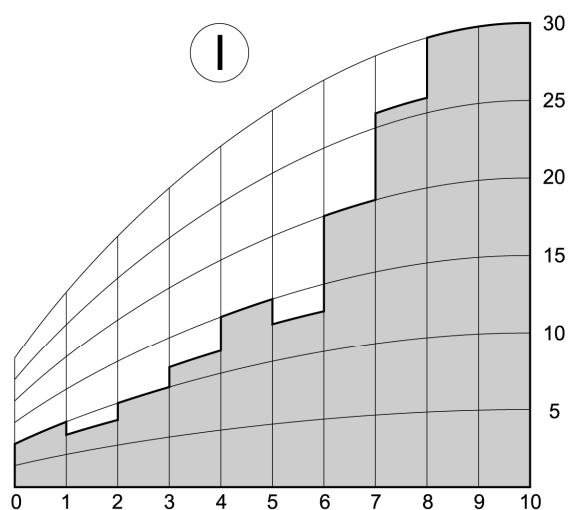
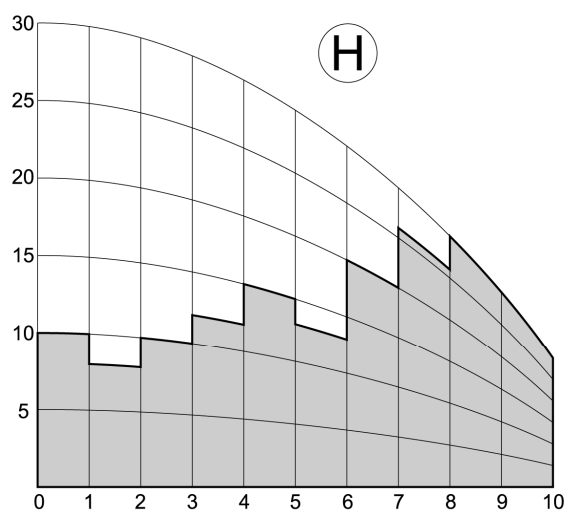
Na obrázku E je nelineární stupnice na ose x . Porovnejte velikost jednotkové úsečky $0-1$ a úsečky $9-10$! Také zde nejsou použity ke znázornění sledovaných hodnot sloupce, ale pouze svislé úsečky. I taková „drobnost“ může silně ovlivnit náš celkový dojem z obrázku. „Plocha“ znamená pro naše vnímání vždy více než „čára“, jak dobře vědí výtvarníci i psychologové.

Téměř nekonečné možnosti transformací grafů nabízí výpočetní technika. Lze vycházet z představy, že graf (= obraz v rovině) se bude proměňovat v závislosti na tom, jak je deformována (tj. prohýbána, natahována atp.) rovina, v níž je původně klasickými metodami sestrojen.



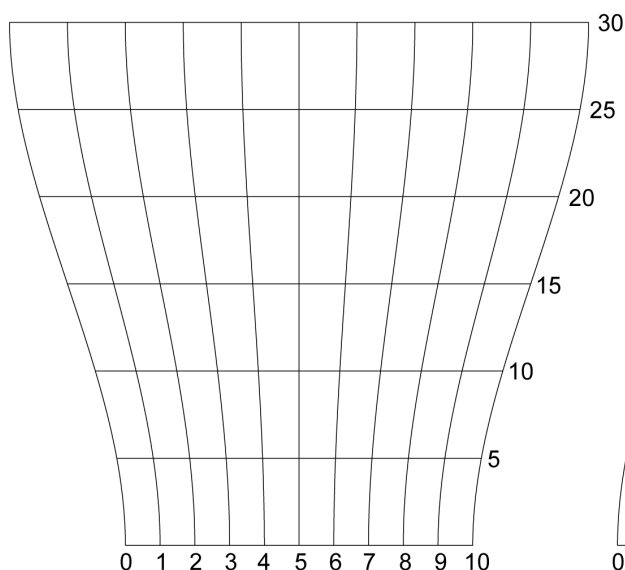
Graf na obr. F získáme snadno osovou afinitou z grafu s navzájem kolmými osami. Toto zobrazení zachovává rovnoběžnost dvojic přímek a dělicí poměry. Proto se sloupce tvaru obdélníků zobrazí jako kosodélníky a celkově nový graf připomíná pohled na list papíru s „klasickým“ grafem, položeným na vodorovnou podložku. Deformace roviny s grafem doplněným sítí pomocných čar může být i složitější, např. taková jako na obr. G. V tomto případě jsou opticky zdůrazněny vyšší naměřené hodnoty v pravé části grafu. Autor chtěl zřejmě zvýraznit a pochválit vývojový trend (či důrazněji poukázat na vzrůst některých nebezpečných jevů) a proto nenápadně zvětšuje „jednotky“ na původně svislých úsečkách grafu. Tato transformace zachovává pouze to, že obrazem úseček původního grafu jsou opět úsečky.

Zpracování téhož grafu na obrázcích H a I využívá subjektivních pocitů při pohledu na zprohýbané linie. Zdá se nám, že „klasický graf“ je nalepen na svislou zaoblenou stěnu (např. na zed' válcové věže).

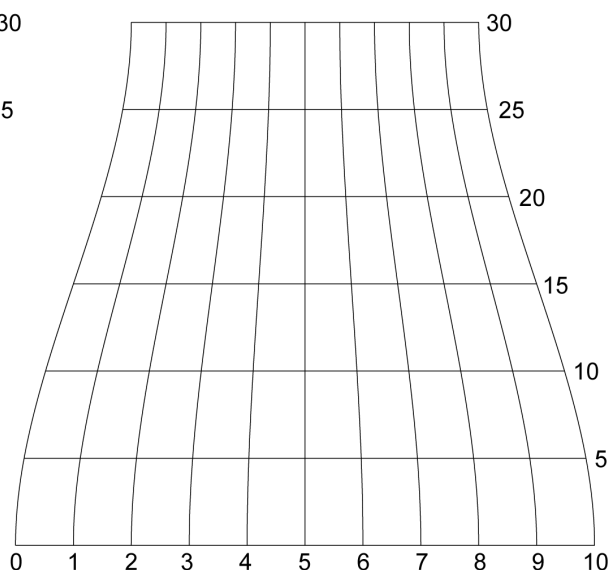


Obdobně zdeformované jsou sítě čar na obrázcích J a K. V nich můžeme buď zdůraznit nebo naopak potlačit horní část sítě a tak přivést čtenáře grafu k dojmu, který neodpovídá realitě.

J

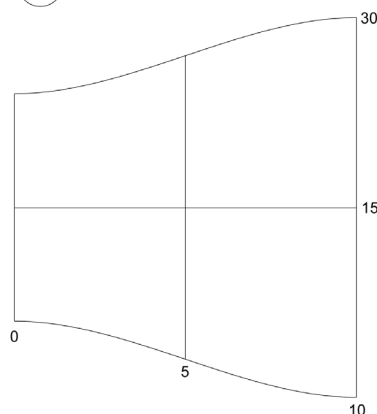


K

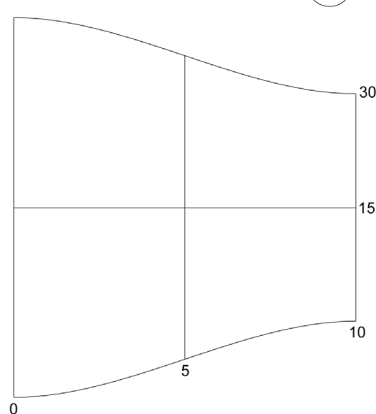


Na obrázcích L a M máme polotovary deformovaných sítí obdobné sítím H a K. Na rozdíl od nich můžeme však (nejen) svislé úsečky doplnit celkem libovolně. Zcela libovolně – jen podle křivítka – je vytvořen i „deformovaný obraz obdélníku“ na obrázku N. Kdybychom do něho vkreslili příslušně deformovaný graf, šlo by vždy jen o přibližné znázornění, o práci „od oka“. V podstatě podobně kreslili kdysi kreslič map, když se snažili znázornit v dané síti geografických čar např. tvar pobřeží nebo překreslit mapu zemského povrchu z jedné projekce do druhé.

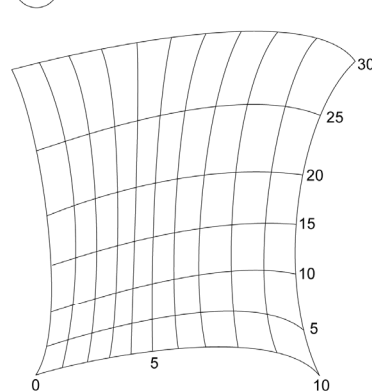
L



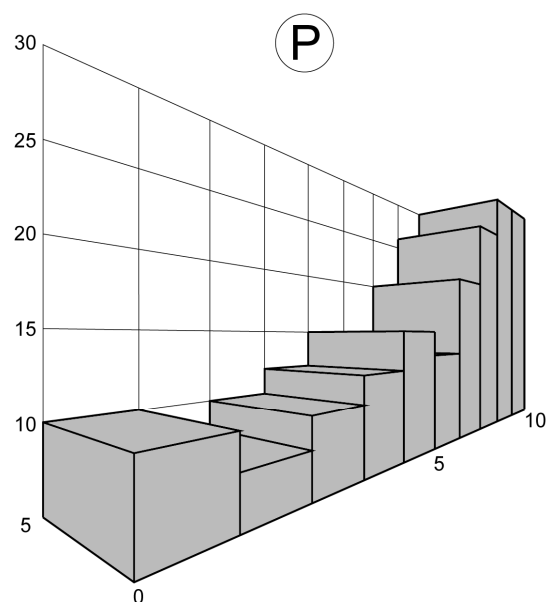
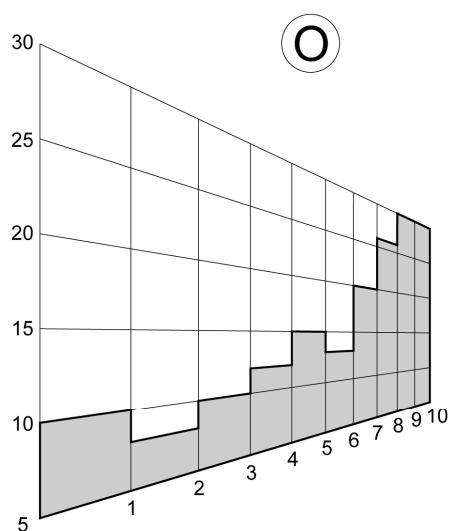
M



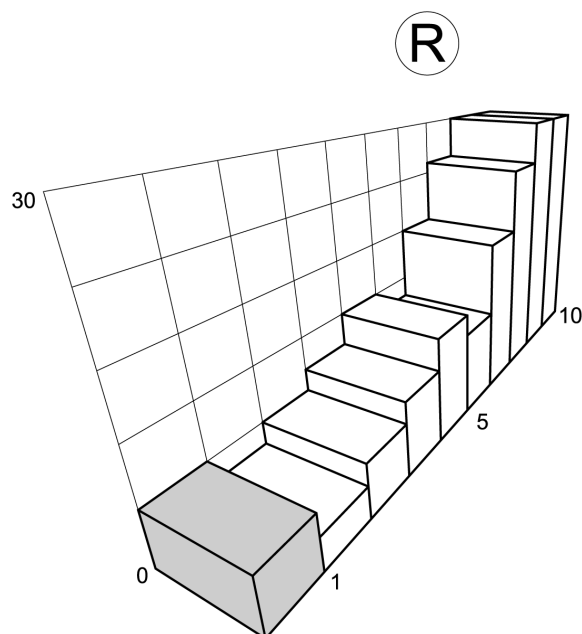
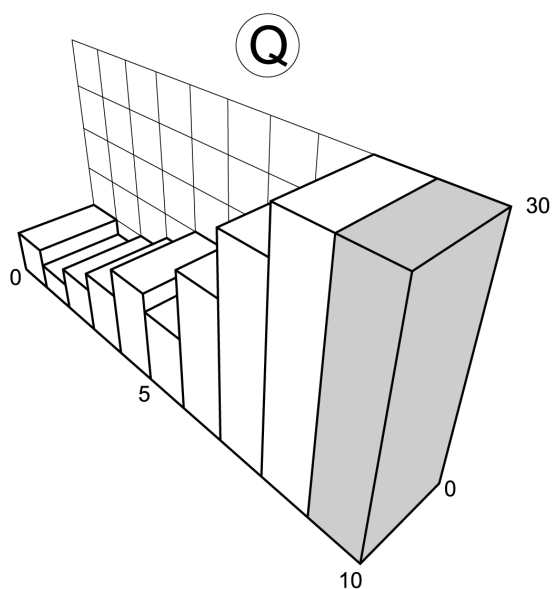
N



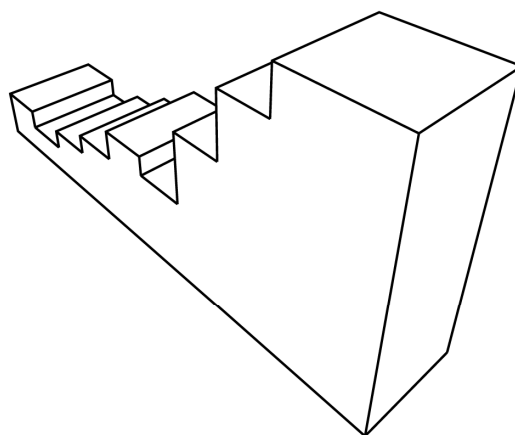
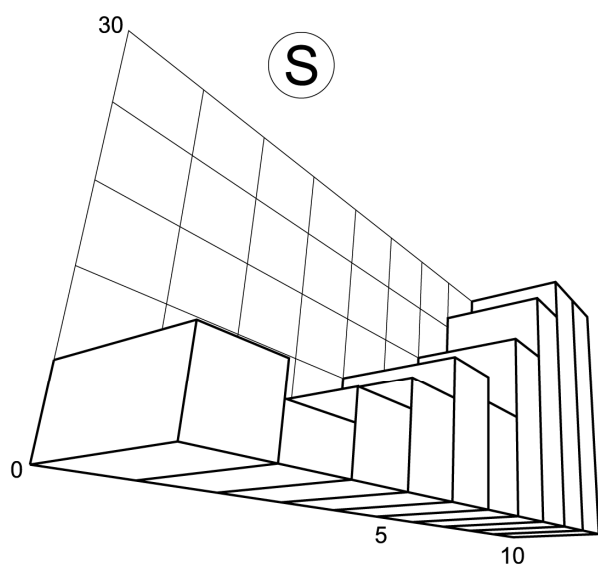
Velmi působivé je jakési „zhmotnění grafu“, tj. vytvoření iluze, že hledíme na obraz tělesa, jehož tvar z původního grafu vychází, například náhradou sloupců (viz B) nebo svislých úseček (viz E) obrazy hranolů, kuželů atp.



Na obrázku O je zakreslen graf B jak bychom ho viděli, pokud by byl list papíru s grafem doplněn vodicími čarami a přilepen na svislou stěnu domu. (Jde o obraz grafu ležícího ve svislé rovině v lineární perspektivě.) Z něho lze snadno vytvořit perspektivní pohled na kompaktní těleso T (viz P).



Můžeme však jít ještě dále. Chceme-li zvýraznit „úspěšný růst“, podíváme se na toto těleso z ptáčích perspektivy (viz Q). Snažíme-li se potlačit „škodlivý růst“, zvolíme perspektivu žabí (viz S) či aspoň zvolíme jiné stanoviště vůči tělesu T než v případě pohledu Q (viz R).



Největší zkreslení představ o tvaru tělesa T a tudíž o datech původního měření a klasických grafů na jeho podkladě vytvořených získáme odstraněním všech čar kromě vlastního obrysu tělesa T . Na většině předchozích obrázků už chyběly potřebné vodící čáry, které usnadňují správné čtení grafů i příslušných číselných údajů, ale přece jen bylo možné se s jistým úsilím potřebných informací dopátrat. Vypuštěním všech těchto údajů se stává i efektní obraz tělesa T zcela bezcenným. Všechny informace o realitě jsou ty tam. Jak ideální pro klamavou reklamu!

Grafická komunikace a reklama

Jednou z oblastí, kde je grafická komunikace velmi využívána (a často plánovitě důmyslně zneužívána), je (obrazová) reklama. Je známo, že má-li obchodník prosperovat, musí se o něm vědět, musí zajistit, aby lidé jeho zboží „potřebovali“ (= chtěli koupit). Často však už nejde o seriózní informace o zboží, ale o psychologicky podložené „umění propagandy“ (i jím se zabývá psychologie trhu).

Reklama na nás působí nejen tím, že devastuje naši krajinu (ničí veřejný prostor ve prospěch společností, které ji platí), ale působí na naše podvědomí, aniž o tom cokoli tušíme. Víme z vlastní zkušenosti, že využívá sexu, rodičovské lásky, různých paradoxů i rádoby „vědecky ověřených“ informací. Působí zvukem (řeč, zpěv, fanfáry atd.), barvami, pohybem i neustálým opakováním (vzpomínáte?... stokrát opakovaná lež se stává pravdou...). Reklamní spoty vstupují do kulturních pořadů, billboardy ničí vzhled našich měst a podílejí se na dopravních nehodách, protože odvádějí pozornost řidičů od vozovky či zastiňují skutečně významné dopravní značky. Reklamu nacházíme na většině spotřebních předmětů a s trochou nadsázky lze říci, že nás doprovází nejen po celý den, ale i do postele. Vše, co na nás ve dne působilo, v nás zůstává, třebaže si to ani neuvědomujeme. Jakýkoli náš zážitek může zapadnout „kamsi do podvědomí“ a v libovolné chvíli ovlivnit naše chování, aniž cokoli tušíme.

Všichni se setkáváme s formulacemi typu:

Každý muž miluje rychlost. Naše auto XY... (Ty ještě NEMÁŠ auto XY? Břídile!!)

Chceš být IN? Potřebuješ PQ! (Bez PQ jsi společensky nemožný!!!)

Náš megavýkonný mixer... (Nevíš, co je megavýkon? Blbče, neptej se a kup!!!)

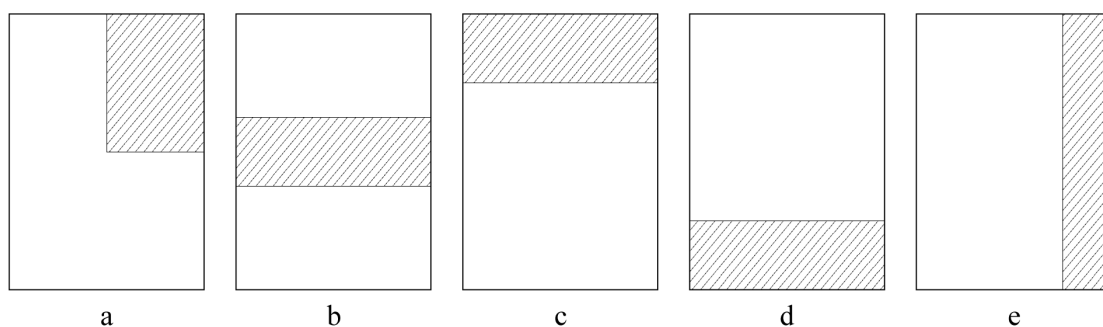
Maminka ví, co dětem prospívá! Čokoláda... (Ona ti nekoupí čokoládu? Je hloupá...)

Cílem reklamy je přesvědčit zákazníka takřka za každou cenu, aby si pořídil XYZ, ať je to cokoli. Dovoleno je vše: přehánění, vnučování i přímé lhaní. Je ovšem třeba lhát tak, aby to nebylo soudně napadnutelné. Sám tehdejší předseda rady pro reklamu Radek Pokorný v rozhovoru pro Právo (28. 12. 2004) řekl „Reklama nemusí být pravdivá, nesmí ale klamat“. Ve světě se vydá zhruba 1% hrubého produktu na reklamu. V naší republice to bylo r. 1990 374 mil. Kč, v r. 1998 již 12 500 mil. Kč (tedy přes 12 miliard Kč) a v r. 2005 celých 45 miliard Kč (a kdybychom chtěli dodržet světový průměr, měli bychom tehdy vydat za reklamu 60 miliard Kč). A to všechno platíme my všichni, ať chceme či nechceme. Kam se to číslo vyšplhalo do letošního roku raději nedomýšlet.

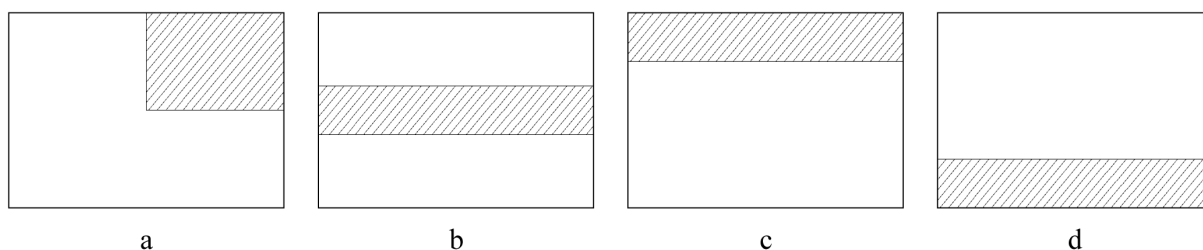
Ukažme si na reklamních tabulích (billboardech), jaká nebezpečí v nich mohou být skryta – tj. jakými způsoby je možné podat grafickou informaci. Obraz musí především zaujmout, musíme si ho všimnout. To můžeme zajistit různými prostředky: jeho velikostí, neobvyklými tvary či umístěním, nasvětlením, velmi živými barvami i šokujícím obsahem. Z praktických důvodů jsou reklamní tabule většinou obdélníkové, ale vídáme i různé „přílepky“, které rámec obdélníku přesahují, známe „modrého ptáka Mattoni“, reklamy na kulových nádržích na vodu aj. Pokud jde o reklamu doporučující koupi auta, většinou na ní dominuje mladá (a pokud možno málo

oblečená) dívka, která se o ně ležérně opírá (atd. – příklady známe všichni). Ceny (pokud jsou vůbec uvedeny) bývají „baťovské“ (998 Kč, 799 900 Kč ap.), texty stupidní a pokud možno s gramatickými prohřešky.

Jsou ale i reklamy, které na nás působí rafinovaněji, takže jsou zdánlivě seriózní. Podívejme se na reklamu na tabákové výrobky. Zanedbáme na nich přítomnost nátlakově působících výjevů (děvy v oparu kouře, jezdec na koni v nedozírné divočině aj.) a soustředíme se jen na nejjednodušší geometrická řešení problému. Na reklamní ploše musí být ze zákona uvedeno varování, upozornění o nebezpečnosti kouření. Řekněme, že mu má být věnována jedna čtvrtina celé plochy. Pokud bude mít reklama tvar obdélníku a část s povinným varovným textem také, nabízí se některá z možností na obrázcích 1 či 2.

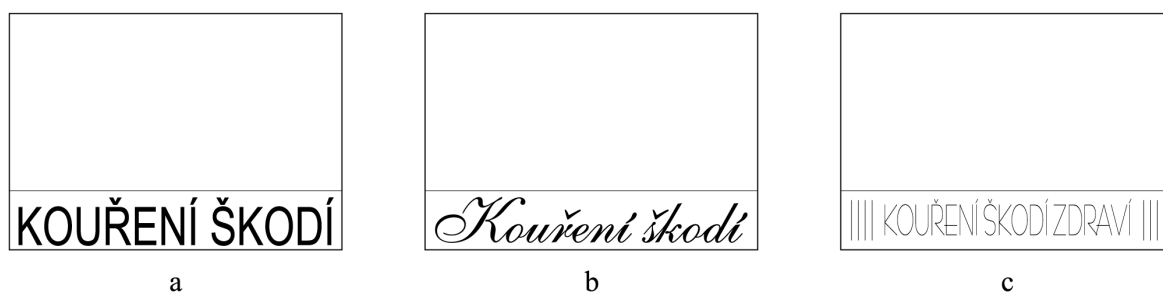


Obr. 1



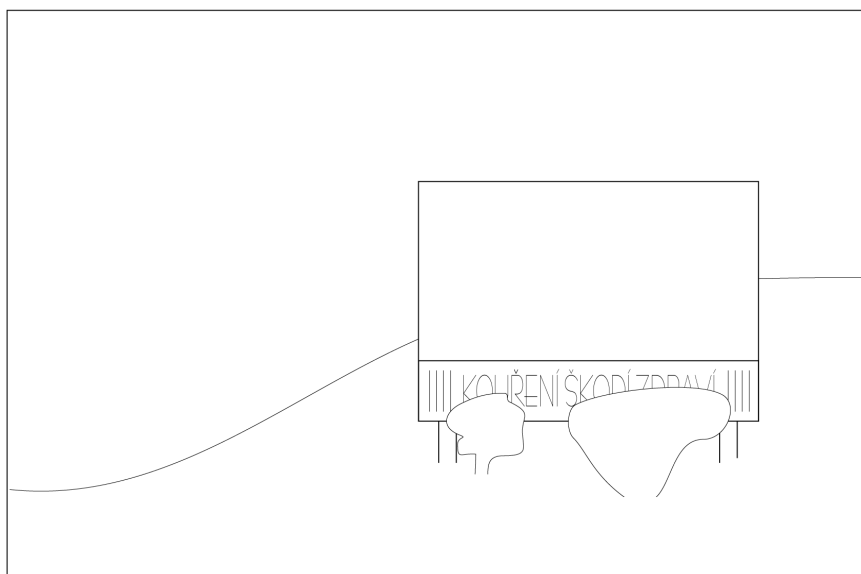
Obr. 2

Protože varování hovoří vlastně proti kouření, budeme mít jako prodejci cigaret zájem na potlačení vlivu této antireklamy. Můžeme sice volit možnost 1c nebo 2c a podložit vyšrafovanou část nenápadnou modrošedou barvou, aby co nejvíce splynula s oblohou, nebo volit možnost 1e a podbarvit pravý okraj tmavohnědou, protože tam jsme zvyklí na obrazech vnímat stíny (a stínu nebudeme věnovat velkou pozornost). Zajímavější by asi byla volba 1d či 2d. V tom případě totiž tmavý „spodek bilboardu“ vnímáme jako podnož obrazu (neupoutá nás) a pokud budeme mít štěstí, ještě zaroste křovím a zmizí úplně (viz obr.3, 4).



Obr. 3

Text povinné antireklamy bychom jako prodejci volili co nejméně odstrašující. Třeba „Kouření škodí“. Jeho nenápadnost můžeme podpořit vhodnou volbou typu písma i jeho velikostí. Velké tiskací písmo (obr. 3a) je příliš výrazné. Psací písmo (obr. 3b) je vhodnější, někdy může působit dokonce i jako pouhý ornament. Pokud však zvolíme úzké nitkové písmo (obr. 3c) a doplníme text po stranách svislými úsečkami, můžeme si být jisti, že většina motoristů si ho vůbec nevšimne, i když projíždí přímo kolem naší reklamy. Tak jsme vyhověli předpisu i svým zájmům.



Obr. 4

Takovýchto i dalších metod (ne)omezujících naši informovanost vidáme denně řadu v obchodech, na tiskopisech smluv i jinde. Pamatujme na to! Čtème v klidu, pomalu, důkladně – a všechno! (V opravdu slušných potravinách by měli mít u regálů zavěšené lupy, abychom si mohli přečíst složení zboží, které vybíráme!) Ušetříme sami sebe četných překvapení.

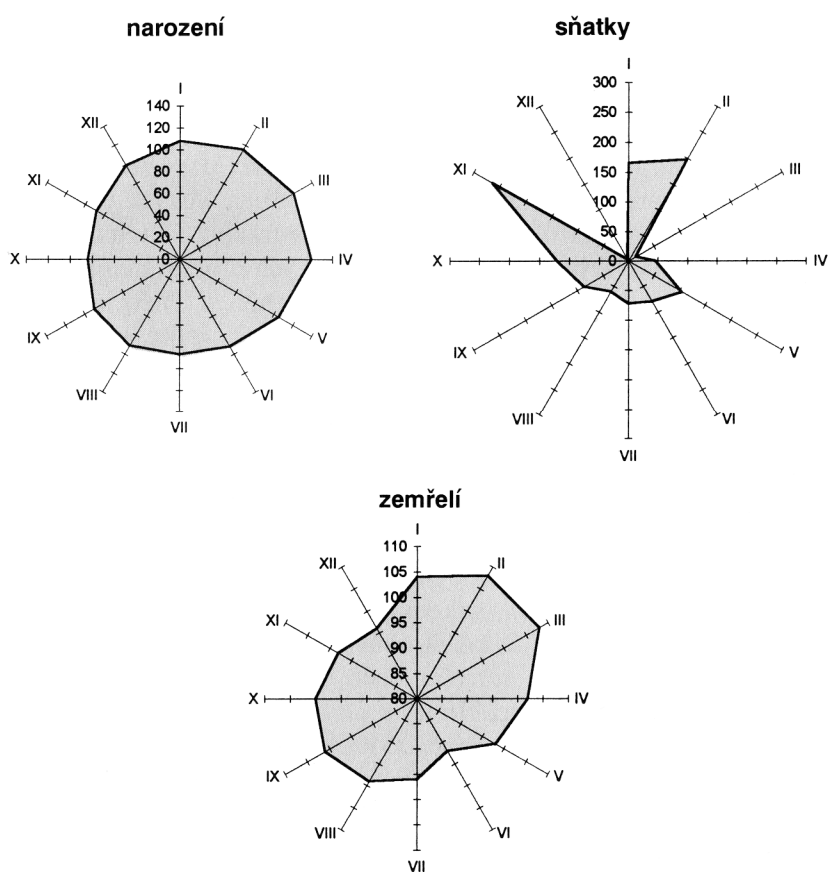
V denim tisku byl 10. 1. 2001 publikován rozhovor s majitelem reklamní agentury Martinem Čermákem. Šlo o pravdivost údajů v reklamách. Na otázku reportéra „jak je to ale s pravdou ve skutečnosti?“ Čermák odpověděl „Pravdivost ošetřuje známý zákaz, že reklama nesmí být klamavá. Je však jasné, že formulace typu náš výrobek je nejlepší zcela pravdivá není. Navíc absolutní pravda neexistuje“. Touha po pravdivé reklamě je podle něho postkomunistickým syndromem, který se projevuje v myšlení Čechů. „Jde o jistou nepřipravenost na mediální komunikaci“.

PL – Polární grafy

Situace, které se opakují v pravidelných intervalech, je možné znázornit tzv. polárním grafem. Jde např. o průměrné srážky naměřené v jednotlivých měsících za n roků, roční (průměrný) chod teplot ap. (Řadu takových údajů najdete v zeměpisném atlase pro střední školy.)

Na našem obrázku jsou na polopřímky vycházející z počátku vyneseny počty narozených, sňatků a úmrtí v jednotlivých měsících roků. Každý z těchto údajů je aritmetickým průměrem počtů 50 zjištěných událostí z let 1750–1799. Připomínám, že v této době většina obyvatel žila na venkově a žila v podstatě „bez rezerv“ v hospodářství. Zimní úmrtí byla zpravidla způsobena nedostatkem stravy. Naproti tomu sňatky (díky katolickému venkovu) byly ovlivněny církevním kalendářem (v adventu a půstu před velikonoce svatba nepřipadala v úvahu) a letní usilovnou prací na polích.

Sezonnost demografických jevů v Čechách v letech 1750–1799

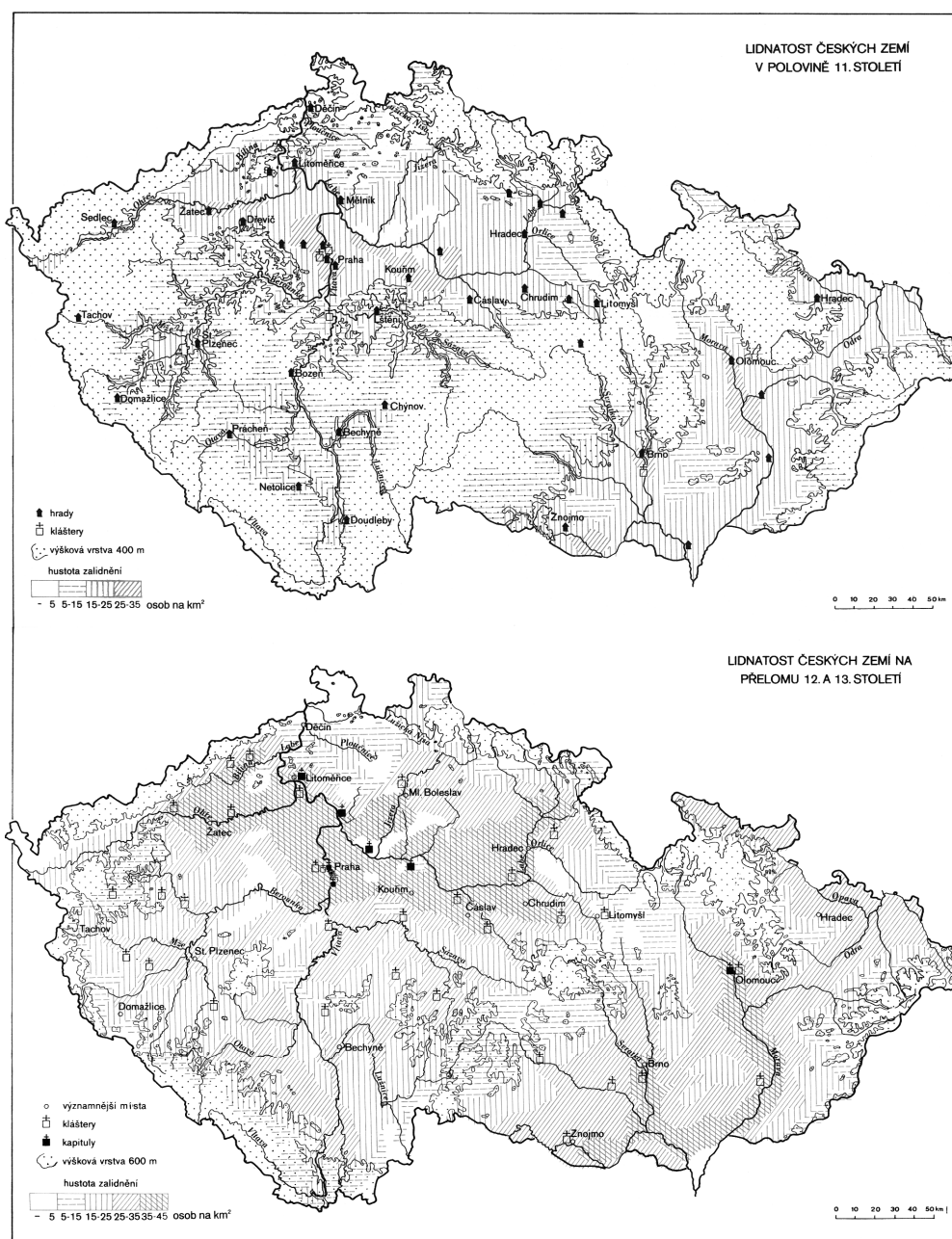


Úloha (1) Sestrojte na základě takového grafu graf sloupkový (stejně jako v atlase). Nezapomínejte, že lomená čára ohraničující „vnitřek grafu“ nic nevypovídá. Slouží pouze k tomu, abychom snadněji našli vyznačené hodnoty pro jednotlivé měsíce.

Úloha (2) Vyhledejte v atlase sloupkový graf průměrných dešťových srážek během roku a sestrojte jemu odpovídající graf polární.

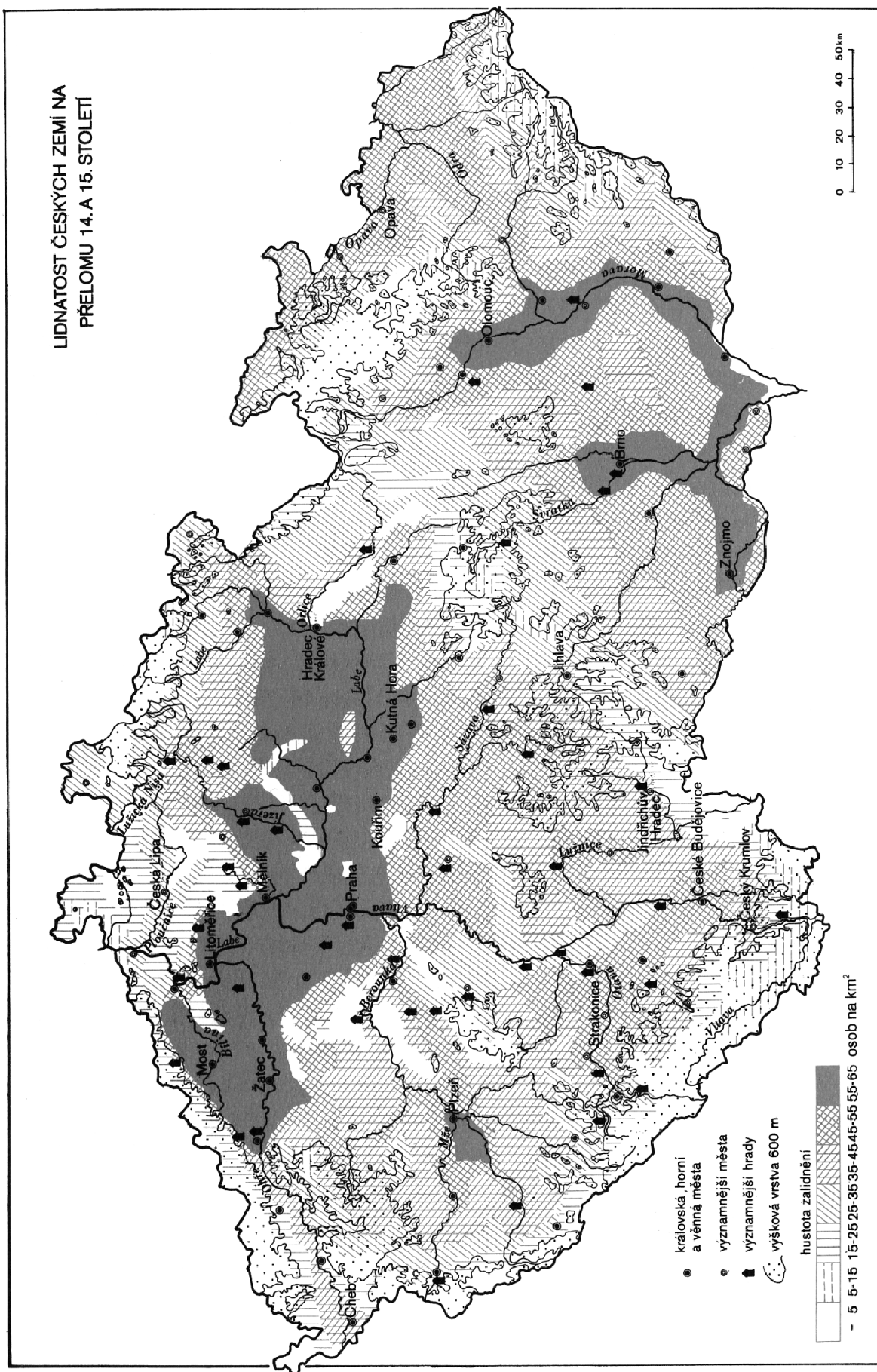
PL – Mapové obrazy

Mnohé údaje se dají znázornit přímo do mapy nějakého území. Známe barevná rozlišení vodstva a lesů na turistických mapách, domluvené značky pro různě velká města, barevně odlišená území různých států, místa, kde se vyskytují rudy či nebezpeční parazité... Na trojici mapek s vyznačením hustoty osídlení našich zemí ve třech různých dobách můžeme sledovat postupné osídlování pohraničí, zahušťování osídlení v úrodných či strategických místech aj. Každá z těchto mapek je zajímavá, ale nejzajímavější je jejich vzájemné porovnávání (máme v ruce cosi jako „časosběrný dokument“, jak se teď říká). Tuto černobílou verzi mapek můžeme vylepšit domluvenými barevnými odstíny. I tyto obrazy jsou ukázkou grafické komunikace. Měli bychom je umět „číst“ tak, abychom z nich získali maximum informací.



Autor Zdeněk Boháč

LIDNATOST ČESKÝCH ZEMÍ NA PŘELOMU 14. A 15. STOLETÍ



Autor Zdeněk Boháč

PL – Stromy života

Zajímavý celkový přehled o složení společnosti s přihlédnutím k pohlaví, věku a rodinného stavu umožňuje grafické znázornění, jemuž se někdy říká strom života. K jeho sestavení je zapotřebí provést nejprve důkladné statistické zjišťování: sčítání obyvatel, které v současné době organizuje statistický úřad naší republiky. Současně se vždy provádí i sběr dalších dat (národnost, bydliště, vybavení domácností atd.), která se dále zpracovávají pro potřeby plánování ap.

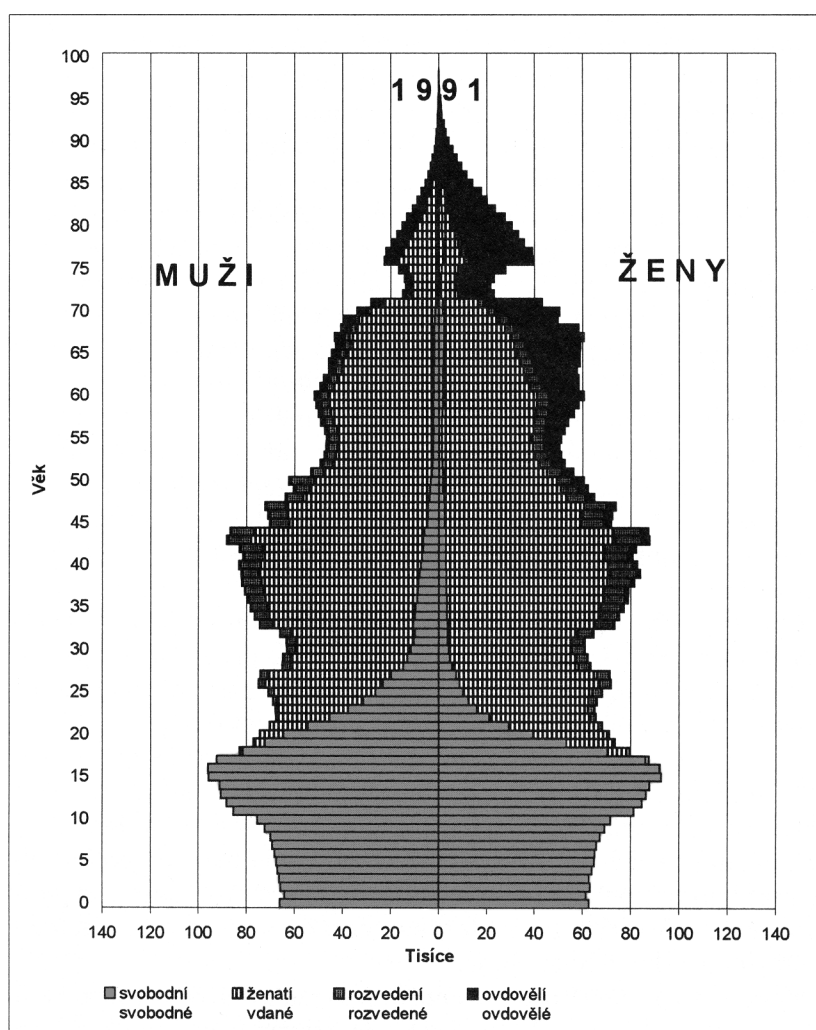
Strom života na obrázku popisuje obyvatelstvo k roku 1991. V tomto roce žilo v naší republice zhruba 65 tisíc chlapců mladších jednoho roku a jen o málo méně stejně starých děvčat. To nám říká nejnižší vodorovná vrstvička v grafu. Porovnáním pravé a levé strany stromu života rychle zjistíme např. že svobodných třicetiletých mužů bylo více než svobodných žen téhož věku, že mezi penzisty převažují ženy, že zhruba od roku 1975 klesala porodnost (rodilo se ročně stále méně dětí) a mnoho jiných zajímavostí.

Úloha (1) Vezměte si průhledné pravítko a přiložte ho vodorovně tak, abyste správně odhadli počty sedmdesátiletých mužů a žen. Počty mužů i žen jen o 2 roky starších je mnohem méně. Zjistěte, co by mohlo být příčinou tohoto nápadného úbytku!

Úloha (2) Připomeňte si historické události 20. století a zjistěte, jak ovlivnily tvar stromu života.

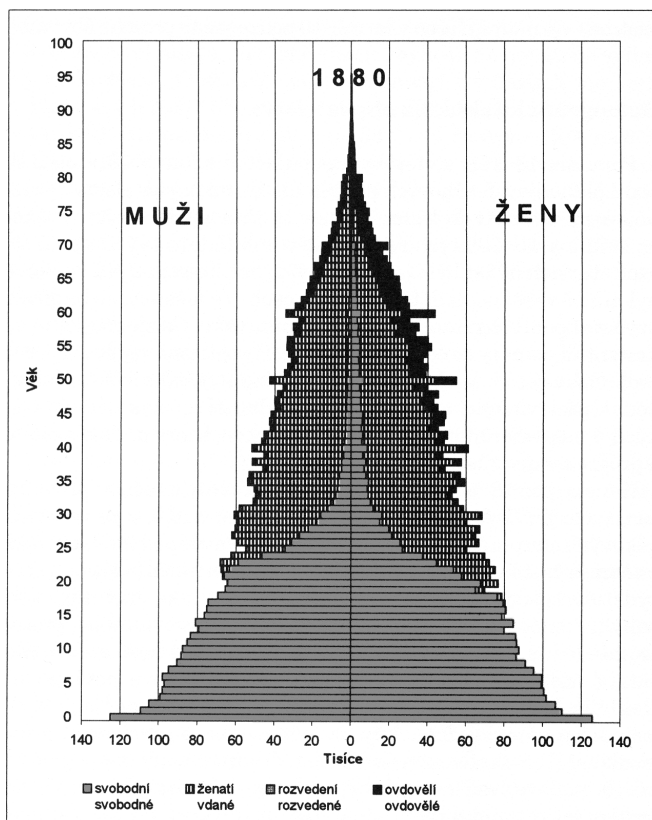
Úloha (3) Vyhledejte na grafu roky narození rodičů a zjistěte, kolik lidí tehdy v našich zemích (Čechy, Morava) žilo.

Úloha (4) Umíte z grafu vyčíst ještě něco?



Mnohem více než z „jednoho stromu“ (tedy z jednoho statistického šetření) můžeme zjistit porovnáním většího počtu šetření z různých let. Pro zajímavost jsou zde ještě grafy pro roky 1930 a 1880.

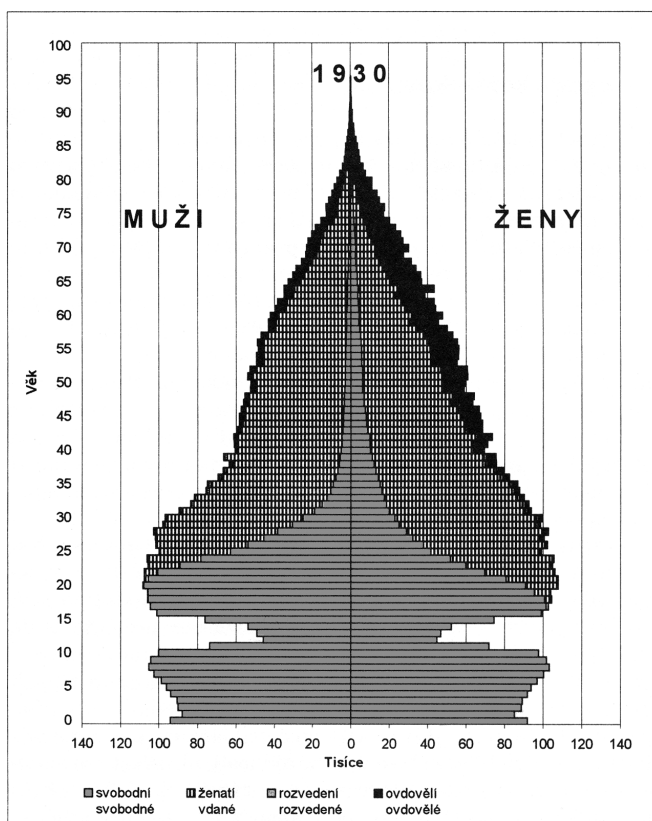
Úloha (5) Graf pro rok 1880 má zhruba tvar rovnoramenného trojúhelníku. Porovnejte počty novorozenců a dětí jednoletých! (Velká dětská úmrtnost!) Lze něčím zdůvodnit skokové nárůsty počtu lidí padesáti a šedesátiletých? (Prolistujte učebnice dějepisu!) V podstatě ale zde populace stárne přirozeně. Graf svědčí o celkem konstantních podmínkách k životu.



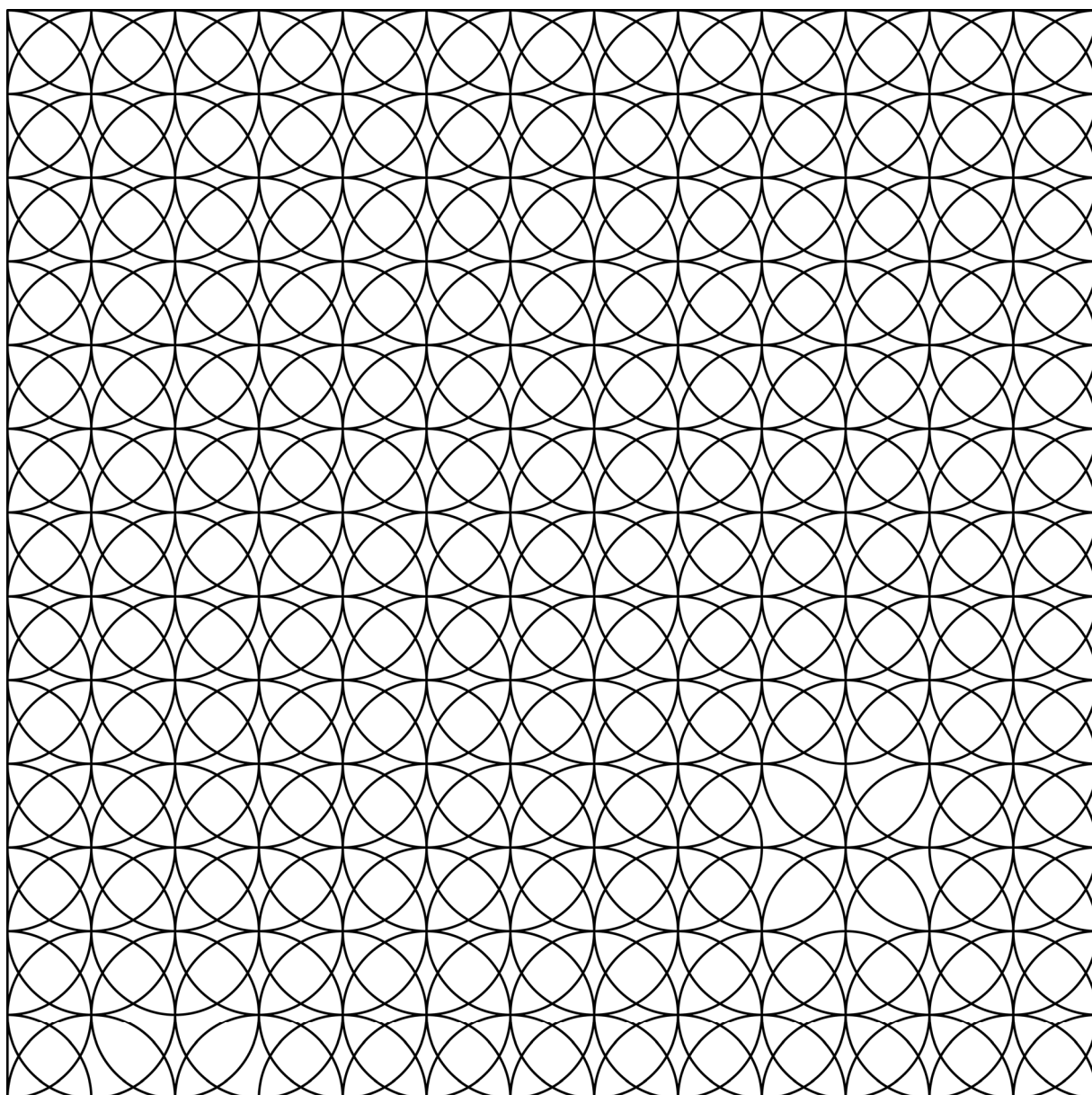
Úloha (6) Porodnost v roce 1930 byla menší než v roce 1880. Nejvýraznější na tvaru grafu je jeho „vykousnutí“, obraz krizového období pro společnost. Čím bylo způsobeno? Taková nerovnoměrnost přináší dále různé problémy hospodářské i sociologické.

Úloha (7) Strom života pro rok 1991 je velmi nepravidelný. Svědčí o špatném, nenormálním stavu populace.

Podobně lze znázornit i stav jakékoli populace živých jedinců z říše zvířat i rostlin.



POKRÝVÁNÍ ROVINY



Pokrývání roviny a vyplňování prostoru

V praxi se často setkáváme s úlohami, které vedou k vyhledávání vhodných tvarů vyplňujících danou plochu nebo prostor. Jde např. o „vydláždění“ dané plochy dlaždicemi či „rozřezání“ daného tělesa na díly určitých vlastností. Geometricky to lze popsat jako „vyplnění daného prostoru útvary bez jejich překrývání a bez mezer“. Hovoříme o pokrývání roviny (tesalace) či stereotomii (tedy o „řezání prostoru“). Jednotlivým prvkům, kterými rovinu či prostor vyplňujeme, říkáme „buňky“ (cely), ale v praxi se hovoří většinou o dlaždicích či kamenech, protože právě ve stavebnictví se takové úlohy geometricky řeší. Dlaždic a kamenů se přidržíme také v tomto textu, protože je to pro žáky názorné, dobře srozumitelné.

Všimněte si, že jsme zatím nijak tvary těchto dlaždic ani kamenů nijak neupřesňovali. Tuto úlohu totiž běžně „řeší“ nejen člověk, ale i příroda kolem nás. Těla se skládají z buněk, kůra stromů se dělí na plátky, těla ryb jsou kryta šupinami, zdivo skládáme z cihel... Naše krajina je rozdělena na řadu parcel nejrůznějších velikostí a tvarů. Může jít i o jisté „virtuální“ dělení, které prostým okem pozorovat nelze, jako oblasti zamořené popílku, administrativní dělení státu aj.

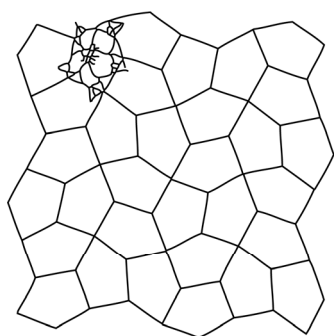
Velké množství příkladů nabízí umění i architektura. Mozaikové obrazy, složité parketáže, ale i různé druhy kladení shodných i rozličných cihel ve zdivu – to vše jsou příklady řešení naší úlohy. Na stavbách cihlových i kamenných, které nejsou omítnuté, můžeme pozorovat řešení „řezů“, jimiž je příslušné těleso (tedy dům, mostní oblouk ap.) rozděleno na kameny, jejichž velikost umožňuje manipulaci s nimi a tvar bezpečné spojení odolávající tlakům, které na stavbu působí. Zejména u významných budov se přihlíží rovněž k estetické stránce řešení, protože spáry mezi kameny či řazení plošek mohou značně ovlivnit celkový vzhled stavby.

Nad následujícími obrázky si dobře uvědomíme pestrost situací, v nichž se pokrývání roviny či dělení prostoru nějakým způsobem uplatňuje v praxi. Berme tuto galerii jako ukázkou možností. V pracovních listech pro žáky jsou uvedeny jednoduché úlohy i návody k jejich řešení. Přesto neuškodí, ukážeme-li žákům i něco z tohoto výběru.

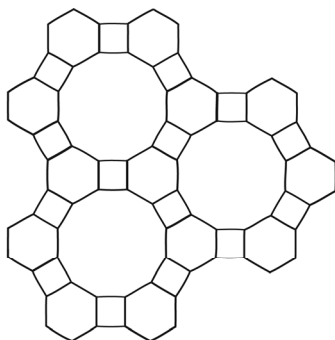
Na obr. 1 jde o dělení plochy kruhu konstruované geometricky. Jednotlivé tvary („dlaždice“) se vždy několikrát opakují a směrem k obvodu kruhu se neustále zmenšují („limita“ ve výtvarném projevu).



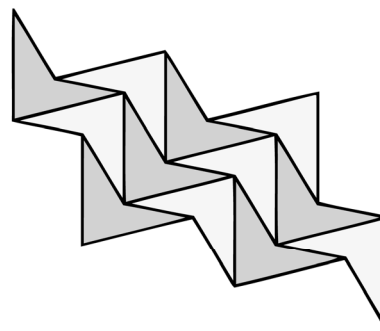
Obr. 1 – M. C. Escher: Kruhový limit I – dřevořez z roku 1958



Obr. 2 – Pětiúhelníky

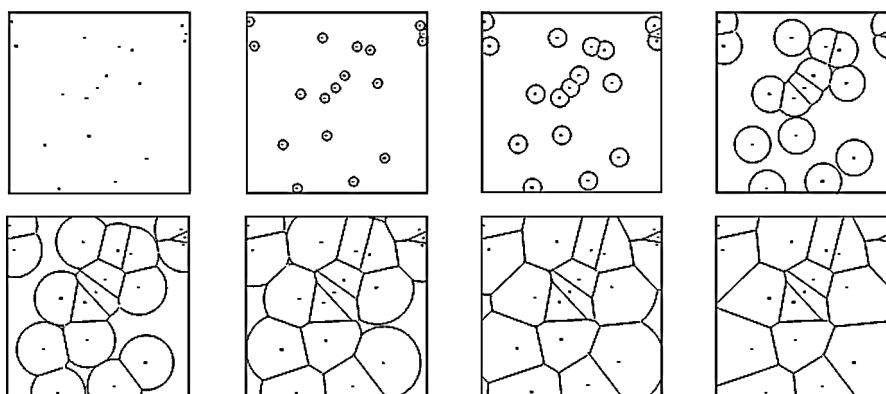


Obr. 3 – Kombinace dlaždic



Obr. 4 – Nekonvexní dlaždice

Pokrytí na obr. 2 pochází z roku 1975 – a jako zajímavost uvádím, že je objevila žena z domácnosti a bez matematického vzdělání poté, co se geometři domnívali, že objevili již všechny možné pětiúhelníky, kterými lze rovinu pokrýt. Tuto síť použila pak k vytvoření kobercového květinového vzoru, jehož jeden kvítek je zde zakreslen. (Našla ještě tři další pětiúhelníky podobných vlastností.) Na obr. 3 je pokrytí roviny třemi typy pravidelných mnohoúhelníků. Tato síť čar je náročná na přesnost rýsování kružítkem a pravítkem, ale snadno ji lze vykreslit na počítači. Pokrytí roviny jedním typem nekonvexního čtyřúhelníku vidíme na obr. 4.



Obr. 5 – Postupné vymezování hranic mezi „stejně rychle rostoucími plísněmi“

Princip načrtnutý na obr. 5 lze v různých úpravách užít v mnoha případech. Rychlost „růstu“ nemusí být stejná ani rovnoměrná jako v našem obrázku. V praxi záleží nejen na vzdálenosti od centra, ale i na snadnosti rozrůstání populací v různých směrech plochy, kterou pokrývají. Např. ideální dělení republiky na kraje (obr. 6) podle předchozího principu není realistické, protože nectí přírodní podmínky, dostupnost centra ap. (ostatně současné politické rozdělení ho rovněž nectí, ani nepřihlíží k historickému vývoji státní správy).



Obr. 6 – Hranice krajů ČR a ideální dělení

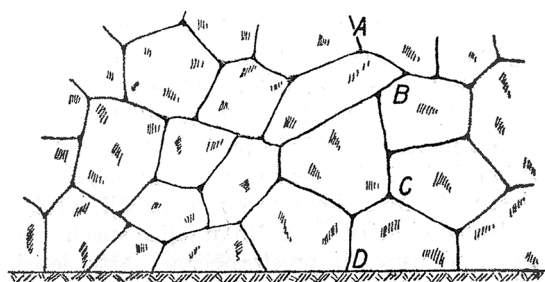
Následující soubor obrázků ukazuje řešení stereometrická. Už v roce 1942 vyšla v edici „Cesta k vědění“ brožura s názvem Kamenorez zaměřená na tuto oblast. Její autoři J. Klíma a K. Šimek zde velmi srozumitelně seznamují čtenáře se základními zákonitostmi a postupy práce při přípravě stavebních kamenů a vyzdívání. (Celá edice Cesta k vědění byla určena laikům, kteří se chtěli seznámit s některými oblastmi vědy aspoň zhruba – a texty jsou skutečně čtenářům velmi přístupné. Popularizaci vědy byla zejména v předválečné republice i během druhé světové války věnována příkladná péče.) Pro zajímavost uvádím několi úryvků z úvodu této brožurky. Pocházejí z ní i následující obr. 7, 8 a 9.

Kamenorez je podstatnou částí stereotomie (tělesorezu), která učí, jak nějakou stavební konstrukci danou tvarem i velikostí rozdělíme na jednotlivé díly tak, abychom přitom vyhověli zákonům statiky, nauky o pevnosti, stavební mechaniky a požadavkům praktickým, tj. tomotechnickým i estetickým, a abychom mohli konstrukci pohodlně a bezpečně na staveništi postavit. Podle toho, z jakého materiálu je konstrukce, budou i různá pravidla dělení...

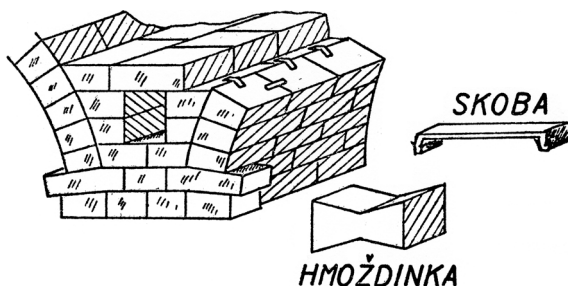
Pravidla kamenorezu určila především zkušenost, tedy praxe, a teprve později, hlavně zásluhou Francouzů, dán jim byl vědecký podklad. Bude tedy účelné uvést zde několik slov o historickém vývoji kamenných staveb. Z dob předhistorických zachovaly se jen skromné památky... Zde o kamenorezu nemůže být ovšem ještě řeči... Známý jsou památky, které z dob své slávy zanechali Egypťané... dělili své stavby na různé části, že i dnes by bylo technicky zajímavým a dost obtížným tak velké kusy kamene dopravit na místo stavby... Ze zbytků řecké klasické architektury, které se zachovaly až do dnešního dne a které svou klasickou krásou působí mohutným dojmem, soudíme, že Řekové vedle zdiva vrstevnatého užívali také zdiva kyklopského (zde obr. 7 našeho značení)...

Když Římané převzali klenby od Etrusků, začínají jejich stavby míti nový ráz... Řekové kladli přesně opracované kameny bez malty, kdežto Římané užívali výborné malty. Mosty u Římanů byly něčím posvátným, stavba a dozor nad Tiberským mostem svěřeny kněžskému řádu pontifices, jehož hlavou byl „pontifex maximus“. (Moje poznámka: vzpomeňte si na papežský pontifikát! Pons = most.) Klenby těchto mostů byly půlkruhové. Pokud zřízení se týče, jest zajímavé, že při kamenném zdivu neradi používali malty, nýbrž klenáky i kvádry přesně opracovali a kladli je na sebe tak, aby se vázaly. K zamezení posuvů používali pak hmoždinek a skob do kvádrů olovem zalitých... (zde obr. 8 našeho značení)

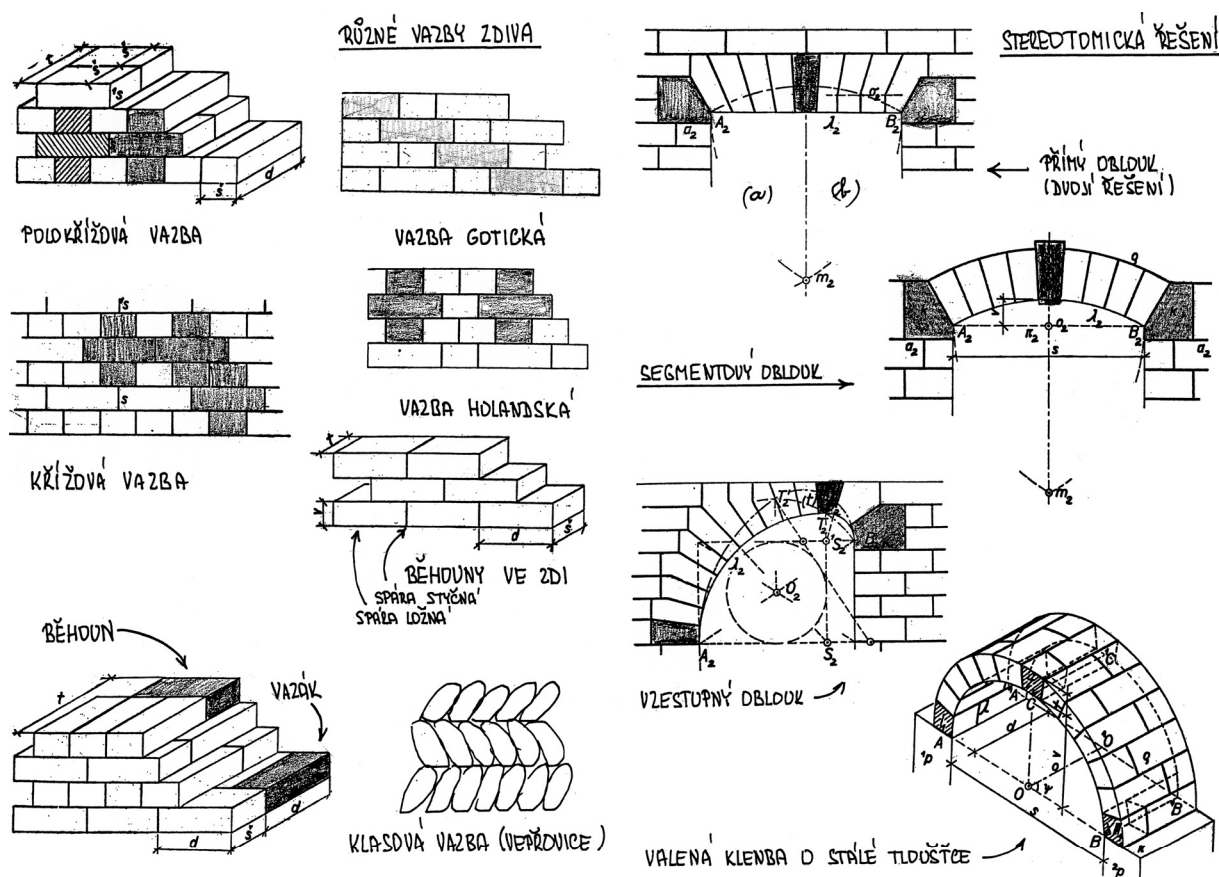
Kamenorez řeší úlohy graficky a jen některé důležité míry kontroluje počtem...



Obr. 7 – Kyklopské zdivo



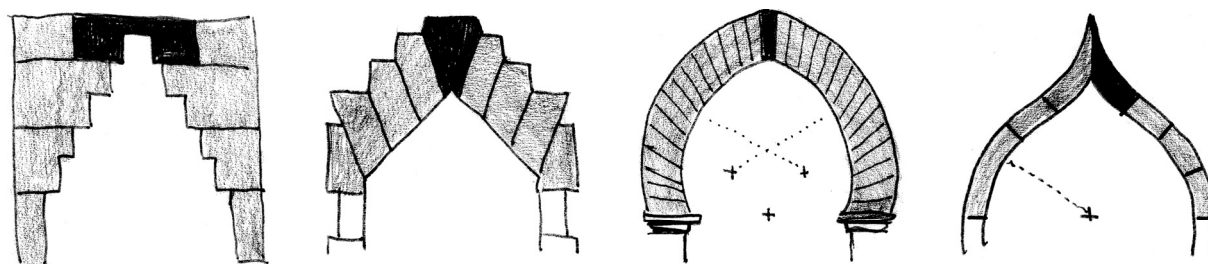
Obr. 8 – Kamenorez části mostu



Obr. 9 – Vazby cihelných zdí a ukázky kamenořezu několika oblouků

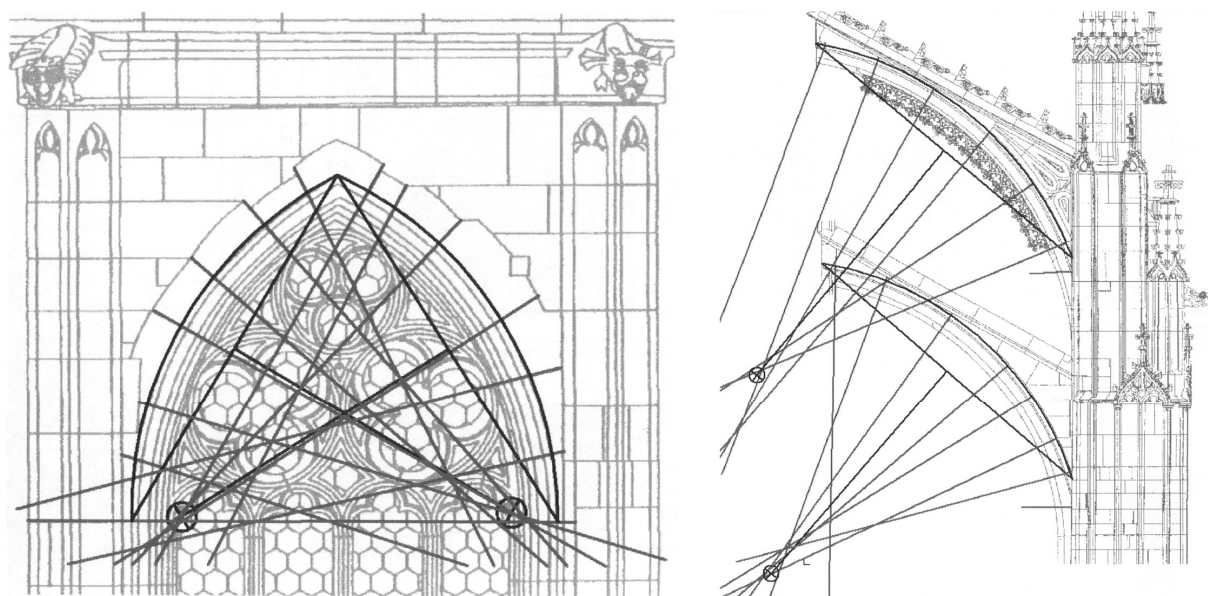
Na obr. 9 si můžeme všimnout různých možností při kladení cihel. Podle obrazu spár mezi cihlami v líci stěny (a podle typu malty i její povrchové úpravy) mohou odborníci často poznat, ze kterého období stavba pochází. Také krajové zvyklosti či jednotlivé stavební hutě odlišují používané vazby zdiva. V pravé části obrázku jsou naznačena některá řešení kamenořezu oblouků. Všimněte si, že „ideální spáry“ (a zvnějšku neviditelné stěny opracovaných kamenů) bývají většinou kolmé ke křivce, kterou vykresluje hrana otvoru (čelo klenby). Je to z hlediska statiky optimální řešení a vyhovuje natolik naší estetice, že i na budovách, které nebývají vystavěny takto „přesně geometricky“ (jsou třeba jen z lomového zdiva), jsou z malty vytvořeny podobné „vystupující falešné kameny“ – bosáž – zejména nad vchodem či okenními otvory.

Na následujícím obr. 10 stojí za zmínku „oblouk“ přečtělkový, který není staticky výhodný, saský oblouk a maurský oblouk, jejichž viditelné spáry nejsou ke hraně oblouku kolmé.



Obr. 10 – Náčrtky: oblouk přečtělkový, saský, maurský a oslí hřbet

Snad nejlépe můžeme pozorovat členění dané stavby na jednotlivé prvky – díly – u precizních kamenických prací na gotických katedrálách, protože u nás nebývalo zvykem většinu viditelných ploch „pokrýt omítkou“. Jednotlivé kamenné díly na sebe těsně dosedají. Jde-li o velmi exponované části stavby (klenební oblouky, části vnějšího opěrného systému katedrál ap.), často bývají spoje uvnitř zpevněny kovovými trny. Rozkreslování jednotlivých kamenů pro řemeslníka, který je pak opracovával, bylo výsostně odbornou prací vyžadující velké geometrické znalosti. Zpětně můžeme rekonstruovat geometrické zásady, jimiž se stavitelé řídili, kromě jiného i pomocí viditelných spár v kamenném zdivu.



Obr. 11 – Grafický rozbor kamenorezu opěrného kruhového oblouku katedrály a ostění gotického okna

V ideálním případě by se přímky procházející spárami oblouků měly protínat ve středu příslušných kružnic. Ze studie je patrné, že si to stavitelé chrámu sv. Barbory v Kutné Hoře uvědomovali, ale ne vždy se jim to podařilo zrealizovat. (Studie je převzata z velice zajímavé disertační práce pana Martina Pospíšila, která byla obhájena na fakultě architektury ČVUT v Praze – autorovi děkuji za možnost publikovat ukázky vyobrazení. Obrázek napoví mnohem více než zdlouhavý slovní popis.)

Obdobně jako jsme se zabývali pokrýváním roviny (chceme-li – tak dělením plochy podlahy na rovinné obrazce) , můžeme uvažovat o dělení jiných – nerovinných – ploch. S touto úlohou se běžně setkávali a setkávají astronomové dělící pomyslnou kulovou plochu nebeské sféry na díly, v nichž pozorujeme určitá souhvězdí, či kartografové zabývající se povrchem Zeměkoule, hranicemi podnebních pásem, států či jiných významných částí našeho životního prostoru. A chceme-li se vrátit do každodenní reality – tak úlohu dělení plochy na vhodné části musí řešit nejen výrobce kopacích míčů, ale i švadlena při tvorbě stříhu na šaty.

Úlohy směřující k řešení problémů vedoucích k pokrývání roviny či vyplnění daného prostoru lze výhodně zařadit do výuky několikrát, protože lze velmi dobře odstupňovat jejich obtížnost. Jsou vhodné při procvičování shodností, při konstrukci mnohoúhelníků požadovaných vlastností i při řešení obdobných úloh ve stereometrii. Při hledání „krásných dlaždic“ uplatní žáci svou fantazii a mají také příležitost seznámit se s osovou afinitou. Téma pokrývání roviny nabízí mnoho možností různých pohledů na tuto problematiku včetně vyhledávání a fotodokumentaci zajímavých řešení v okolí svého bydliště (zámkové dlažby, vzorkové dláždění chodníků, mozaiky v kostelních oknech, gotické kružby místních kostelů, obrubníky kašen, katastrální mapy obce a jejich proměny v historii aj.) Je proto vhodné k zadání ročníkové práce, případně ve spolupráci s výtvarníkem k uspořádání výstavy prací.

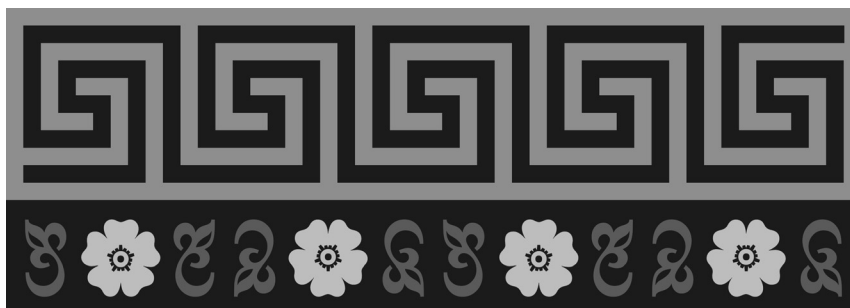
Ornamenty a mozaiky

Nejrůznější projevy geometrie nacházíme všude kolem nás. Velmi často stojí takřka utajeny v kompozičních základech významných stavitelských děl inženýrských, v číselné symbolice církevních staveb, v malířství i v dalších výtvorech v oblasti umění. Téměř všech znalostí ze školské geometrie využívají tvůrci ornamentů, s nimiž se setkáváme na každém kroku. Všichni známe tapety, vykládané podlahy zámeckých komnat i ohromná kruhová okna katedrál. Všichni jsme také jistě někdy kráčeli po chodníku vydlážděném malými kostkami dvou barev položených tak, že vytvářejí charakteristické vzory.

Ornamenty

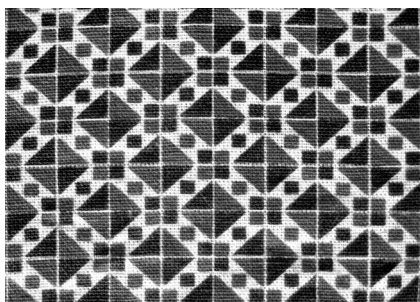
Slovo „ornament“ má původ v latinském „ornare“, což znamená zdobit, zkrášlovat. Už to ukazuje na vlastnosti tohoto ozdobného prvku. Ornament je výtvarnou ozdobou, která je charakteristická svým uspořádáním, vnitřními pravidly určujícími opakování jeho částí. O ornamentu lze hovořit i v hudbě či poezii. Jde-li o výtvarnou ozdobu, vždy se zde uplatňují shodnosti, které známe ze školy. Ornamenty se dělí podle druhu a způsobu použitých shodností na tři základní skupiny: frýzy, tapety a rozety.

Frýz je teoreticky myšleno nekonečný ozdobný pás, pruh, který vzniká postupným posouváním výtvarného motivu vždy stejným směrem o stejnou vzdálenost (obr. 1). Frýzy tvořili lidé už v pravěku, zachovaly se vyřezané na kostech ulovených zvířat, rozvíjela se technika tkaní. K dokonalosti je přivedly starověké vyspělé civilizace a dále např. renesance.

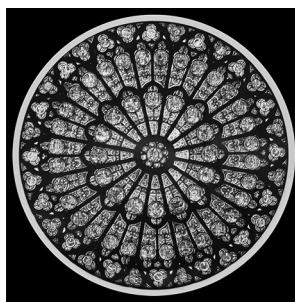


Obr. 1 – Frýzové vzory

Tapeta pokrývá (celou) rovinu pravidelně opakovanými motivy (obr. 2). K jejímu vytvoření vždy potřebujeme užívat dvojí posunutí různých směrů. Souměrnosti i otočení použít můžeme, ale nemusíme. K dokonalosti tapety dovedli Maurové v paláci Alhambra v Granadě. Objevili (a v praxi provedli) všech 17 teoreticky možných tříd jejich vytváření. Tapetové vzory se snadno nanášejí na zeď malířskými válečky, je však třeba dávat pozor na správné sesazení jednotlivých pásů, které váleček vytváří. V období gotiky se hojně používaly šablony – destičky s vyřezaným ornamentem, jejichž přikládáním k sobě a přetřením barvou tapeta vznikala. Podobného postupu užívají rukodělné dílny při potiskování látky modrotiskem. I vzory vytkávané do textilií bývají většinou tapetové.



Obr. 2 – Tapetový vzor

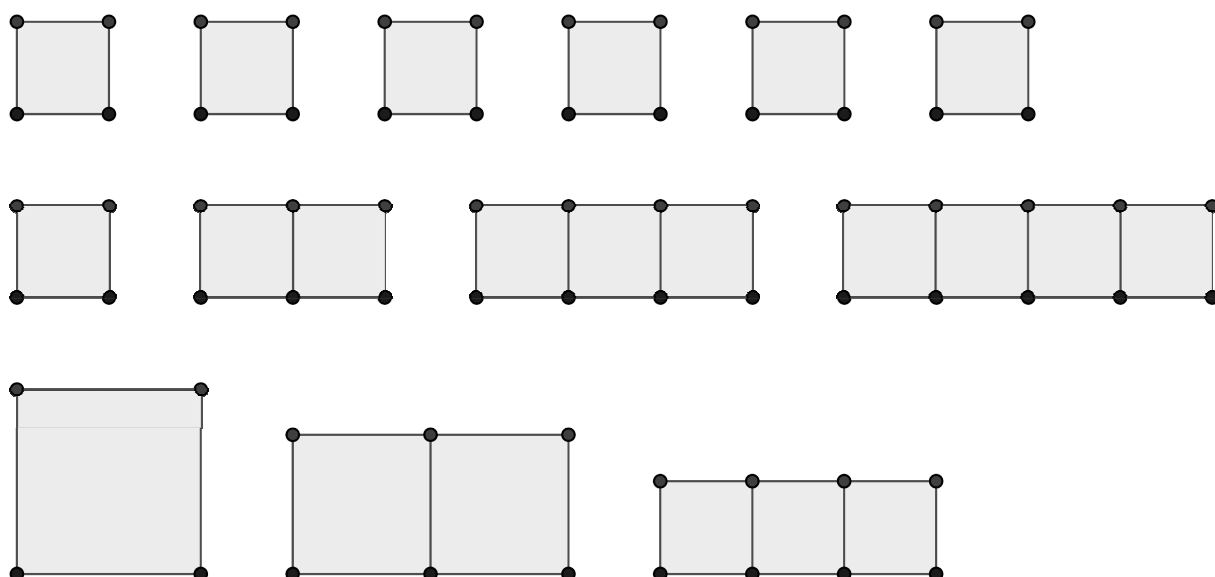


Obr. 3 – Rozeta

Rozeta (růžice) je kruhový ornament (obr. 3). K jeho vytvoření je nutná rotace, základní motiv se opakuje několikrát, vždy v pootočené poloze. Pokud je sám základní motiv osově souměrný, bude i rozeta osově souměrná – a to podle několika os. Není-li výtvarný motiv osově souměrný, rozeta jako celek žádnou osu souměrnosti mít nebude. Rozetu připomínají knoflíky, sváteční koláče, vystřihovánky vznikající překládáním a vystřihováním čtvercového archu papíru, dekorační talíře, ozubená kolečka, háčkové dečky... Z Indie se rozšířilo vytváření mandal (původně snad symbolů Slunce – slunečního kola), kruhových obrazů s filosofickým podtextem. Volněji chápané mandaly se využívají i v psychiatrické praxi při arte-terapii. Vrcholem geometricky tvořených rozet jsou rozety gotické, konstruované nad složitou sítí kružnic.

Vlastní tvorba ornamentů či naopak geometrický rozbor daného ornamentu může posloužit při objevování jednotlivých shodných zobrazení či ke shrnutí látky na „příkladech z praxe“. Vzhledem k tomu, že různých ornamentů je v našem prostředí nepřeberné množství v nejrozličnějších oblastech od umění přes strojírenství, textilní techniky, architekturu i běžné spotřební předměty a lze je vyhledat i ve volné přírodě, je „ornament“ vhodným námětem k samostatné práci žáků. Jeho výhodou kromě zkušenosti žáků s materiálem, který sami shromáždí, utřídí a dále zpracují, je výtvarnost, řekněme umělecká hodnota, snadná „vizualizace“, tedy možnost prezentace na výstavce, v tištěném materiálu apod. Nabízí se také spolupráce s výtvarníkem, pokud na škole působí.

Ornamenty mohou být natolik jednoduché, že jejich strukturu „vidí“ i malé děti. Zkoušela jsem s nimi v mateřské škole „malovat mašličku“ kladením barevných trojúhelníků, kruhů a čtverců na jednobarevnou stuhu rozvinutou na podlaze. Překvapilo mne, jak pohotově většina dětí reagovala a začala i vymýšlet vlastní vzory. Obecnější výtvarné kompozice než je frýz vznikají nikoli pravidelným opakováním daného motivu, ale opakováním pravidelné změny či kombinace pravidelných změn. Na obr. 4 jsou pomocí čtverců ukázány postupně frýz, kompozice s pravidelnou změnou počtu čtverců a kompozice s pravidelnou změnou počtu i velikosti čtverců.



Obr. 4 – Vzory vytvářené čtverci

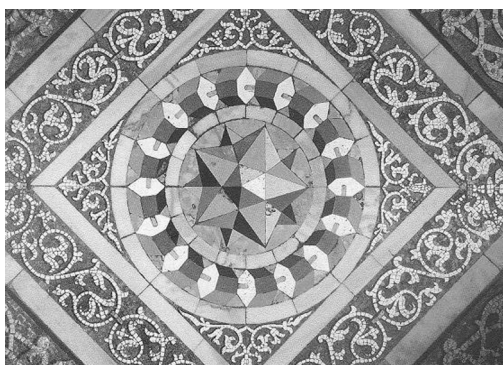
Vnímání i tvorba ornamentů souvisí s vnímáním rytmu. Rytmus sám je pro život velmi důležitý, všechny životní projevy jsou mu podřízeny. Rytmus chápáný v čase souvisí s hudbou, mluvním projevem, v pohybu vede postupně k jeho optimalizaci (zkuste jít neustále se měnícím rytmem kroků – velmi vás to unaví). Vyvinutý smysl pro rytmus přispívá dětem i ke snadnějšímu pochopení zákonitostí řady přirozených čísel a orientaci na číselné ose.

Kruhové ornamenty – rozety – mohou být konstruovány i pomocí kruhové inverze. Ale i zde je základním principem postupné otáčení základního prvku. Ten základní výtvarný motiv může být velmi jednoduchý (i kruh dělený na třetiny či čtvrtiny je rozetou), geometrický či volně kreslený. Už ze starověku je známá technika postupného pootáčení kruhu rozety a otiskování primitivního razítka.

Různé příklady ornamentů jsou umístěny na pracovních listech. Jejich charakteristiku i vytváření mnohem lépe pochopíme z obrázku než prostřednictvím slovního popisu. Ovšem budeme-li vyžadovat od žáků i tento slovní popis, procvičí si vyjadřování, používání geometrické terminologie v praxi. Při vytváření ornamentů je vhodné (na rozdíl od návrhů dlaždic v připravených sítích) vyžadovat od žáků jejich rýsování.

Mozaiky

Pokrytím plochy s nějakým uměleckým záměrem může vzniknout ornament nebo volnější výtvarné dílo. Už podlahy starých římských vil před 2000 lety bývaly vyzdobeny nádhernými mozaikami připomínajícími obrazy. Každý dílek mozaiky může (ale nemusí) mít jiný tvar, ale měl by být jednobarevný. Celkovou barevnost získáme kombinací dílků různých barev (obr. 5). Na chrámových oknech můžeme kromě takto sestavovaných barevných sklíček vidět i jiný druh výzdoby. Obrazy jsou sestaveny z větších sklíček, která jsou domalovávána různými detaily – obličejí, řasením oděvu apod. Velkou roli zde hraje také spojovací materiál, olověné proužky, do nichž jsou sklíčka zasazena. Jsme-li uvnitř chrámu, jeví se nám tyto proužky jako silné černé čáry zdůrazňující zobrazenou scénu. Hovoříme o okenních vitrážích (obr. 6).



Obr. 5 – Mramorová mozaika



Obr. 6 – Detail okna katedrály v Chartres

Užívání barevného prosklení oken církevních staveb bylo ve středověku omezeno předpisem. Klášterní kostely na takovou výzdobu neměly právo, ale chrámy, které sloužily „obecnému lidu“ (katedrály, městské kostely) se touto výzdobou pyšnit mohly. (Podobně tomu bylo s další výzdobou interiéru, krása prostředí měla laikům symbolizovat nádheru nebes a připomínat biblické příběhy i životy světců.) Okenní vitráže používala poměrně často secese, ale najdeme je i v moderní architektuře. Krásné ukázky barevných chrámových oken vidíme např. ve Svatovítské katedrále na pražském Hradě. Jsou to ovšem okna v její novodobé části. Podíleli se na nich významní umělci 20. století. Katedrála byla po dostavbě vysvěcena k „miléniu smrti sv. Václava“ r. 1929 (podle tehdejších historiků byl zavražděn r. 929, nyní se uvažuje o roce 935 nebo 936), ale některá okna byla dokončena ještě později.

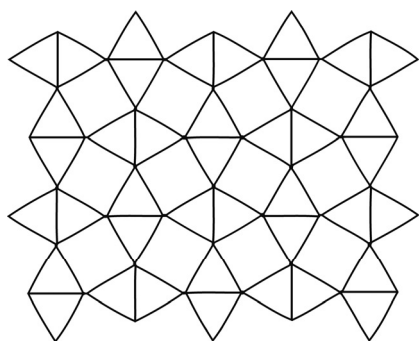
Pokrytí roviny jako geometrický problém

Geometrie je exaktní vědou, kterou mnozí lidé považují za zcela nesouvisející s běžným životem. Je to veliký omyl, geometrie se vyvinula z potřeb praxe a také její aplikované výsledky všichni používáme, jenže si to většinou neuvědomujeme. Ukažme si proto jednu z oblastí, kde se můžeme na chvíli stát i návrháři v průmyslovém podniku. Potřebné znalosti k tomu máte, pokud jste nezapomněli na shodná zobrazení.

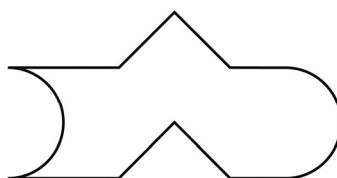
Jedním z geometrických problémů je dělení roviny (případně dalších ploch i těles) na díly, které splňují určité požadavky. V praxi je nejjednodušším požadavkem pokrytí roviny navzájem shodnými útvary tak, aby se nepřekrývaly a nevznikaly mezi nimi žádné mezery. Hledané vhodné útvary budeme nazývat dlaždicemi, protože tuto úlohu řeší skutečně často jejich návrháři.

Na reálné dlaždice lze klást řadu požadavků od snadnosti výroby přes jejich vhodný tvar (nežádoucí jsou např. výrazné výběžky, které by se při dopravě snadno odlomily apod.) po důraz na jejich estetický vzhled. Pro vlastní kladení dlaždic je výhodné pracovat s jedním či dvěma typy dlaždic a vytvářet vzor jednoduchý, pro estetický dojem se používají i podstatně složitější typy „položení“. Takové mramorové dlažby italských renesančních vil a chrámů či parketáže našich zámků bývají často rovnocennými konkurenty nádherně zdobených stropů, které se klenou nad nimi.

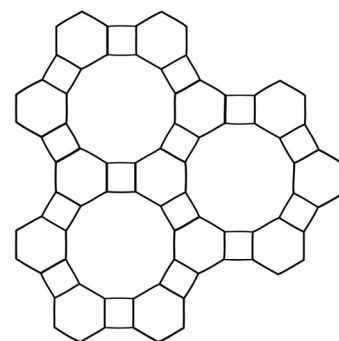
Základním typem dlaždice pro jednoduchou dlažbu může být čtverec, rovnostranný trojúhelník či pravidelný šestiúhelník, nebo jejich kombinace (viz obr. 1). Složitější tvary dlaždic získáme jejich odvážnějšími deformacemi (viz obr. 2). Velmi složité mohou být i vzory vytvořené z kombinací více druhů třeba i jednoduchých dlaždic (viz obr. 3).



Obr. 1 – Kombinace dvou typů



Obr. 2 – Komponovaná dlaždice



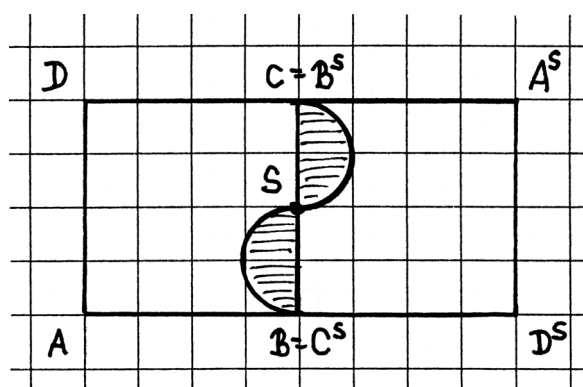
Obr. 3 – Vícedruhová skladba

PL – Dlaždice odvozené ze čtverce

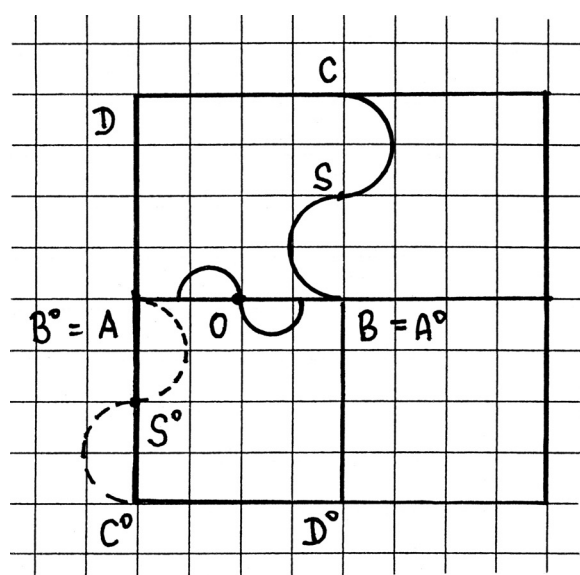
Pomocí středových souměrností lze ze čtverce vytvořit dlaždičky roztodivných tvarů. Popišme si vznik takové dlaždice pomocí obrázků.

Na obr. 1 jsou zakresleny dvě sousední čtvercové dlaždice. Chceme-li dlaždici $ABCD$ upravit na zajímavější tvar, nebudeme měnit polohu vrcholů A, B, C, D , ale můžeme zaměnit strany za zajímavější čáry než jsou úsečky. Úsečku BC můžeme nahradit jen takovou čarou, která je středově souměrná podle bodu S , středu úsečky BC , aby se k ní dala sousední dlaždice přiložit. Také vyšrafovaný půlkruh, který jsme dlaždici $ABCD$ přidali, byl odkrojen ze sousední dlaždice a proto se jí musí vrátit. (Obsah plochy dlaždic se při těchto proměnách musí zachovat.) Sousední dlaždice je středově souměrná k dlaždici $ABCD$ podle středu S . Její vrcholy A^s, B^s, C^s, D^s jsou obrazy bodů A, B, C, D .

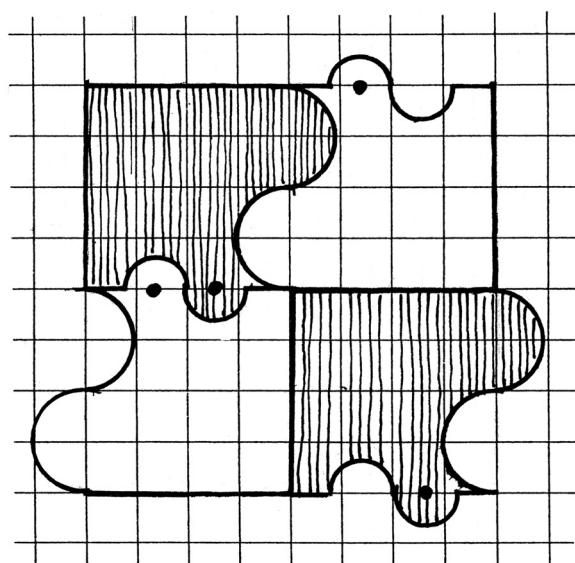
Pokud chceme ještě složitější tvar dlaždice, provedeme totéž s jejími dalšími stranami. Na obr. 2 je tento postup naznačen pro úsečku AB . Středem souměrnosti je bod O . Čárkovaně je vyznačena upravená strana dlaždice $ABCD$ v nové poloze A^o, B^o, C^o, D^o . Celou čtveřici těchto dlaždic – tedy i výsledný dojem z části dlažby – vidíme na obr. 3.



Obr. 1 – Úprava strany BC dlaždice



Obr. 2 – Odvození druhé strany dlaždice



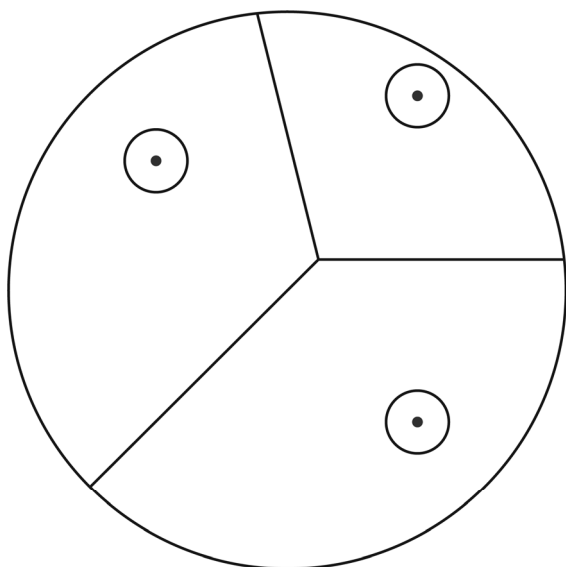
Obr. 3 – Celkový vzhled části dlažby

PL – Vymezování území

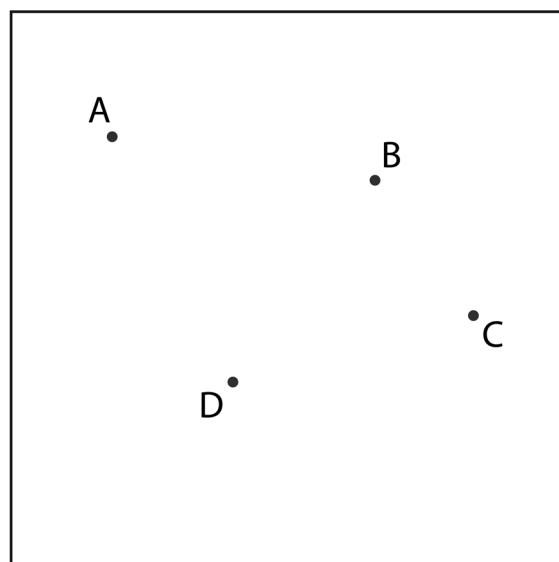
Rovinu (i každou jinou plochu) lze pokrýt nejen danými dlaždicemi, ale mnohem pestřejšími způsoby. Jestliže si „vydláždíme dvoreček“ neopracovaným lomovým kamením, má každý kus jiný tvar – a přesto je zem „pokryta“. Obdobně mozaiky pokrývají plochu barevnými sklíčky, z nichž každé může mít jiný tvar. Lze postupovat i obráceně: danou plochu (např. arch papíru) můžeme dělit na menší a menší kousky třeba zcela nahodile – a zpětně jimi lze pokrýt plochu, která má shodný tvar s tou naší původní. Tento postup byl blízký návrhářům zajímavých zámeckých parketáží či mramorových podlahových mozaik renesančních italských chrámů. Jen to výchozí dělení se provádělo nikoli reálně, ale v myšlenkách a na plánech stavitelů.

Zcela jinak se vymezují části ploch v živé přírodě. Zde organizmy rostou a snaží se zabírat stále větší území, pokud jim to místní životní podmínky (a případná slabost sousedů) dovoluje. Klasickým jednoduchým případem je následující situace:

Do kruhové Petriho misky naplněné vhodnou živnou půdou jsou umístěny do tří různých bodů tři zárodky plísně jednoho druhu. Protože prostředí v misce je všude stejné a všechny zárodky mají stejné podmínky, budou se plísně při růstu šířit stejně rychle a rovnoměrně na všechny strany. Pokud nenarazí na překážku, budou mít jejich kolonie kruhový tvar. Jakmile se však dvě kolonie rozrostou tak, že se budou dotýkat, růst se v daném směru zastaví – vytvoří se mezi nimi hranice. V dalších směrech bude rozrůstání pokračovat tak dlouho, dokud nebude celý povrch živné půdy porostlý plísní. Na obr. 1 je naznačen takový růst i konečné dělení území mezi koloniemi plísní v misce. Společné hranice tvoří úsečky ležící na osách souměrnosti úseček určených výchozím umístěním zárodků plísní.



Obr. 1 – Kolonie plísní v Petriho misce

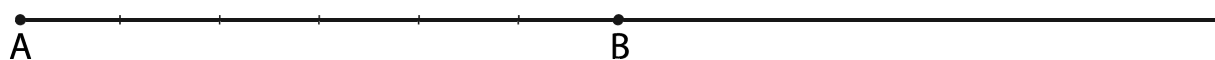


Obr. 2 – Čtvercové pole se čtyřmi mraveništi A, B, C, D

Úloha (1) Na obr. 2 je podobná situace. Tentokrát na čtvercovém pozemku vznikla současně čtyři malá mraveniště a rovnoměrně rozšiřují své území. Zakreslete hranice konečného dělení pozemku.

Úloha (2) V přírodě je v podstatě každá část povrchu země rozdělena mnoha „děleními“ na sféry různých vlivů od rozrůstání plevelů přes vymezení lovišť predátorů apod. až po vytváření hranic mezi státy. Protože spolupůsobících vlivů je celá řada a jejich síla se v čase proměňuje, nebývají hranice tak geometricky jednoduché ani trvalé. Stačí malá změna prostředí či situace uvnitř rozrůstající se „kolonie“ a celá soustava hranic se může výrazně změnit. Uvedme příklad:

Na louce máme dvě mraveniště A , B vzdálená od sebe 6 jednotek délkové míry (obr. 3). Obě mraveniště vznikla současně, ale mraveniště A je silnější a rozrůstá se do všech stran dvakrát rychleji než mraveniště B . Zjistěte hranice mezi nimi! (Návod: Převeďte úkol do matematické terminologie. Hledáme body této hranice, začněte konstrukcí. Až sestrojíte několik bodů hranice, zkuste vyslovit hypotézu o jejím tvaru – a pokuste se o její důkaz. Znáte-li analytickou geometrii, nebude to příliš obtížné.)



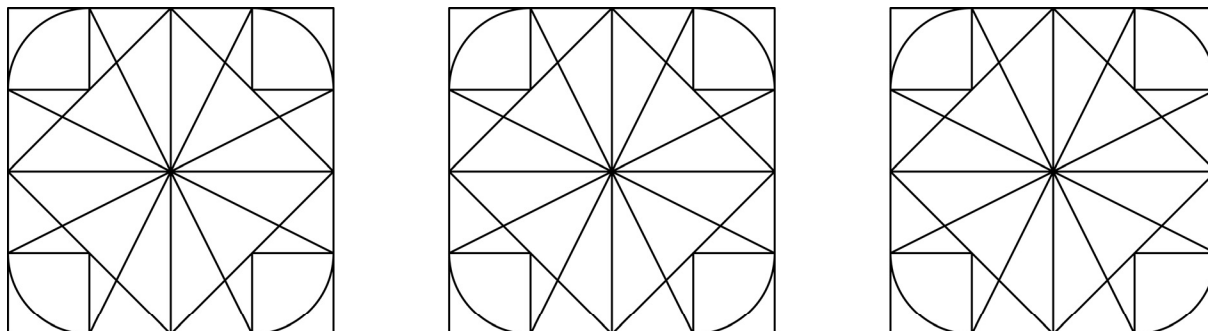
Obr. 3 – Mraveniště na louce

Stejný problém (ovšem bez těch mravenců) řešil kdysi Apollónios z Pergy – a ta hranice nese jeho jméno. Vrátime-li se do říše živých organismů, můžeme poznamenat, že naše mraveniště B nečeká pěkná budoucnost.

Podle stejných zákonů se vytvářejí hranice mezi mastnými oky na polévce, skvrnami oleje na hladině, vzduchem uzavřeným v bublinách, mezi vrstvami různě teplého vzduchu při přechodu front... Nejrychleji se mění hranice ohraničující životní prostor v živočišné říši, protože zde jsou většinou členové příslušného společenství pohybliví a mohou kromě „růstu“ reagovat na změny i přesunem na jiná stanoviště a různým přeskupováním uvnitř svého prostoru. (Ale to už bychom se dostali od geometrie daleko do biologie i sociálních a politických věd. Nahlédněte do atlasů, v nichž jsou zakresleny proměny hranic významných států od starověku do současnosti! Je to poučné – a také varovné – podívání. I jeden lidský život obsáhne různá dělení, ale u života společenství jako celku jsou ty změny mnohem výraznější.)

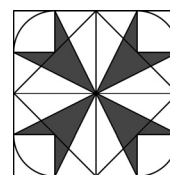
PL – Návrhy čtvercových dlaždic pomocí sítě čar ve čtverci

Úloha (1) Ve čtvercích na obr. 1 je připravena konstrukční síť, která je dělí na řadu částí. Navrhněte tři různé středově souměrné geometrické vzory využívající částí čar sítě pro čtvercové dlaždice. Jeden takový návrh vidíte na obr. 2.

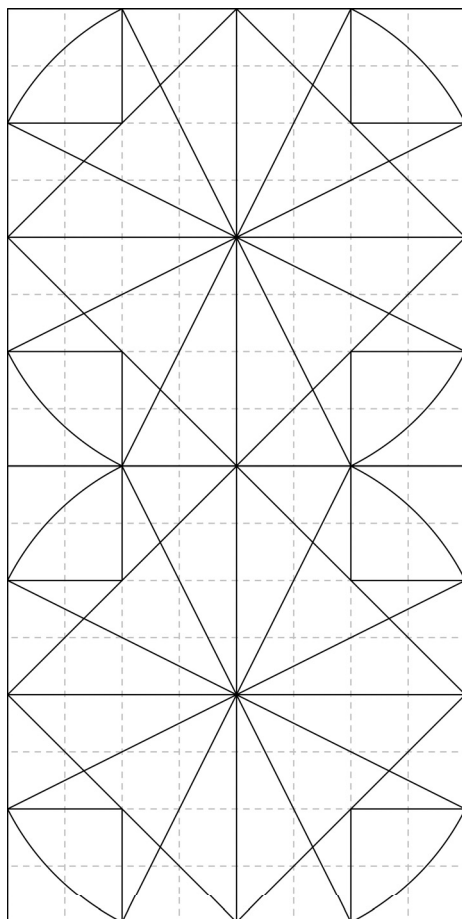


Obr. 1 – Konstrukční síť pro navrhované dlaždice

Úloha (2) Nejlepší ze svých návrhů překreslete dvakrát do připravených sítí na obr. 3. Narýsujte ještě dvě shodné sítě a dlaždice do připraveného pole vedle nich. Teprve položením větší plochy dlaždic plně vynikne jejich vzor!



Obr. 2 – Návrh

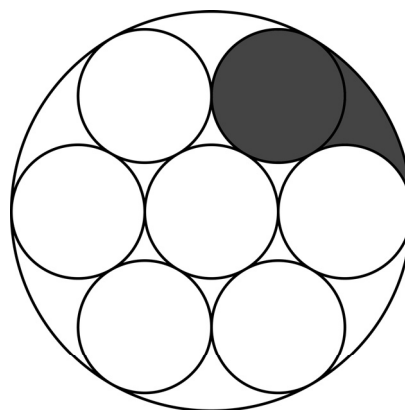


Obr. 3

PL – Jednoduché rozety

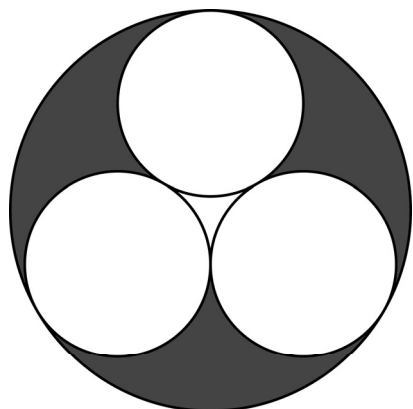
Rozety – kruhové ornamenty – známe z běžného života. Vidíme je na discích automobilových kol, na ozdobných koláčích, velmi často v technice a výtvarném umění. Krásné, přísně geometricky konstruované rozety jsou ozdobou našich chrámů i některých současných významných staveb. Specialitou gotických rozet je kamenná konstrukce jejich „zhmotnělých křivek“ nad sítí kružnic. Každá takováto kamenná „křivka“, která je zdobí, vychází z kružnic a úseček či jejich částí a kombinací.

Úloha (1) Velmi jednoduchá rozeta na obr. 1 je členěna sedmi shodnými kružnicemi. V síti je zvýrazněn tvar plaménku, jehož obvod je kombinací částí tří kružnic. Dokreslete zbývajících pět plamének.

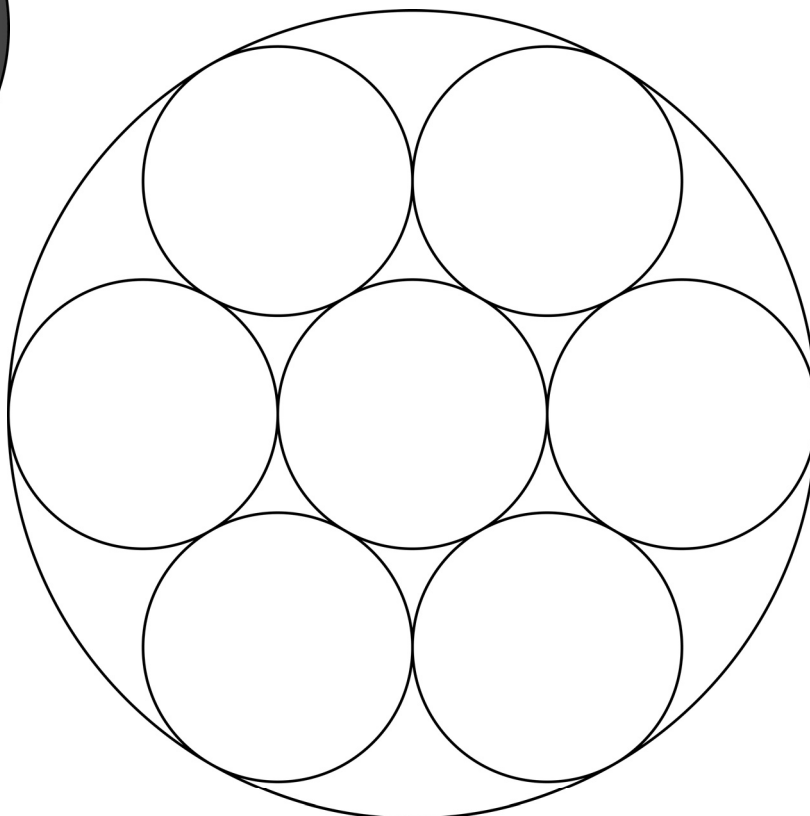


Obr. 1 – Jednoduchá rozeta

Úloha (2) Do síť na obr. 3 dorýsujte další kružnice (např. trojice kroužků z obr. 2 do kružnic síť) a silně vytáhněte vámi navržený vzor. Dbejte na zachování souměrností rozety.



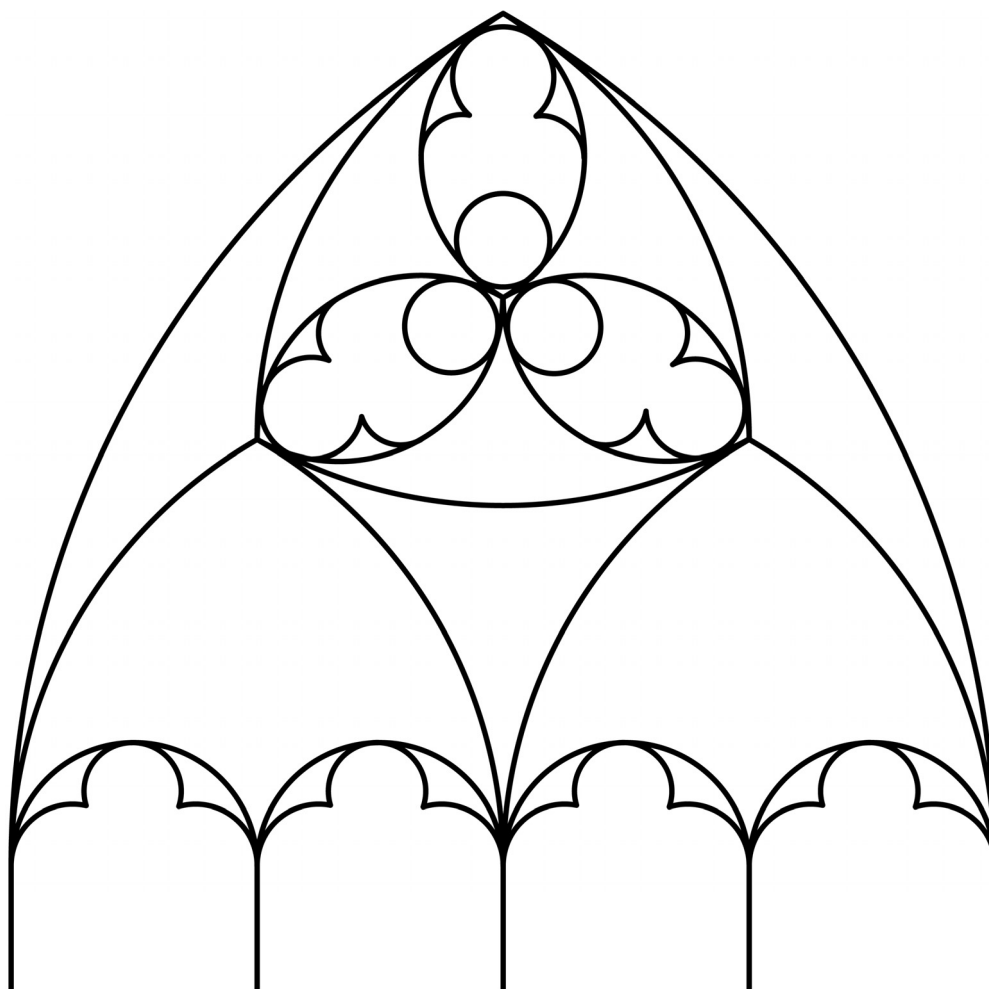
Obr. 2 – Rozeta se třemi kruhy



Obr. 3 – Volná síť pro návrh složitější rozety

PL – Rekonstrukce geometrické sítě gotického okna

Na obrázku je zakreslena část okna gotické katedrály. Pokuste se o rekonstrukci jeho geometrické sítě!



Obr. 1

Úloha (1) Vyhledejte a vyznačte středy všech kružnic sítě.

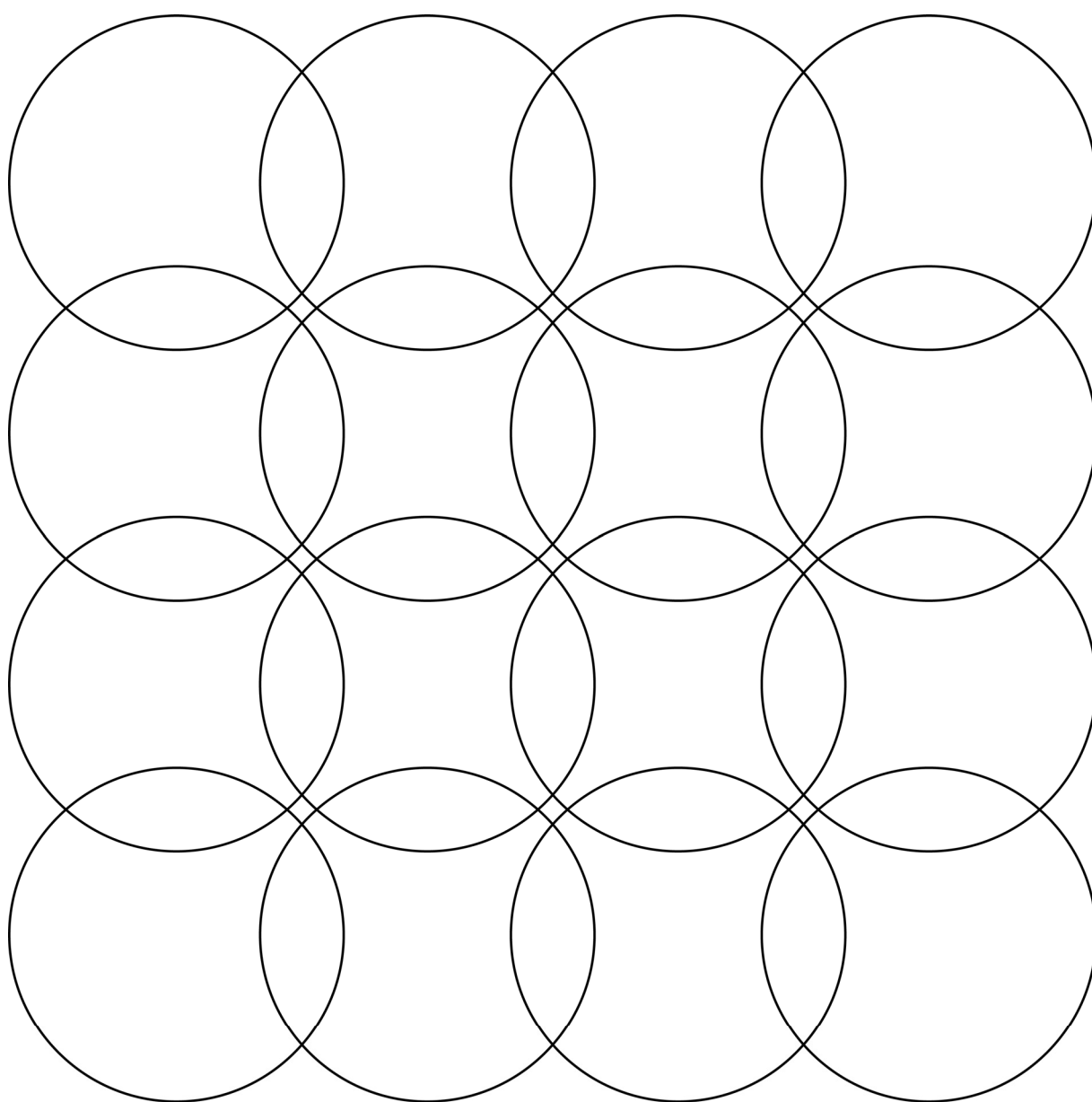
Úloha (2) Zapište postup vytváření této sítě, která je dána šířkou okenního otvoru. Jednotlivé prvky pečlivě popisujte v textu i na obrázku.

Úloha (3) Vypočtete obsah „křivočarého trojúhelníku“ (to není termín geometrický, ale užívá se v architektuře), jehož vrcholy splývají s vrcholy tří lomených oblouků sítě. (Porovnejte navzájem své výsledky. Pokud vycházíme z reálného měření, jsou vždy jen přibližné. O způsobech, jak mini-malizovat chyby měření, jedná celá matematická disciplína.)

Úloha (4) Navrhněte barevná skla do okna a obrázek lehce kolorujte.

Rekonstrukce kružeb lze provádět také zpracováním fotografií v některých grafických a geometrických programech (AutoCad, Rhino...)

OSO VÁ AFINITA



Osová afinita a její užití

Na základní škole se žáci seznamují s osovou a středovou souměrností a posunutím, ale ne všichni tam slyší něco o otáčení. Rovněž při probírání podobnosti nebývá nyní povinné vyložit i stejnolehlost. Myslím, že to není v pořádku, protože už na ZŠ ji potřebují při optice ve fyzice (která se může učit kdekoli od 6. do 8. ročníku ZŠ). A že ve společnosti, jejíž technický pokrok byl založen na kole (a vlastnostech otáčení), odcházejí žáci zcela neznalí vlastností otáčení, je nepochopitelné.

Všechna shodná zobrazení zachovávají velikost a tvar geometrických útvarů. Mají mnoho společného (tvoří grupu shodných zobrazení) a jejich použití v praxi vidáme velmi často. Je však i mnoho dalších poměrně jednoduchých zobrazení, s nimiž se setkáváme v běžném životě. Jedním z nich je osová afinita.

S osovou afinitou lze velmi jednoduše seznámit žáky pomocí osové souměrnosti, která je jejím speciálním případem. Pokud u osové afinity „nedodržíme přesně“ některé z postupů, jimiž sestavujeme obrazy jednotlivých bodů, dostaneme různé osové afinity se zajímavými vlastnostmi i aplikacemi. Osová afinita v rovině je přitom velmi jednoduché zobrazení, které pochopili i žáci sedmých tříd na škole v přírodě.

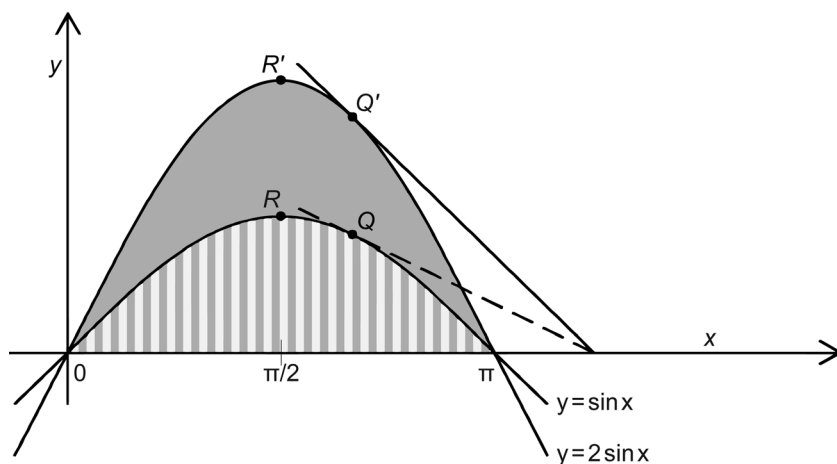
Osová afinita v rovině určená osou a dvojicí bodů, které na ose neleží, je zobrazení s těmito vlastnostmi:

- obrazem bodu je bod, obrazem přímky je přímka
- všechny samodružné body leží na jediné přímce – na ose afinity
- všechny přímky určené bodem neležícím na ose a jeho obrazem jsou navzájem rovnoběžné (určují směr afinity)
- obrazy přímek rovnoběžných s osou afinity jsou s ní také rovnoběžné
- dvojice rovnoběžných přímek se zobrazí na dvojici rovnoběžných přímek
- obrazem středu úsečky je střed obrazu této úsečky

Porovnáme-li soubor těchto vlastností s vlastnostmi osové souměrnosti, zjistíme, že osová afinita daná svou osou, směrem kolmým k ose a dvojicí bodů podle osy souměrných je právě naší dobře známou osovou souměrností. Žáci se s ní mohou seznámit řešením úloh na pracovních listech, které jí věnujeme.

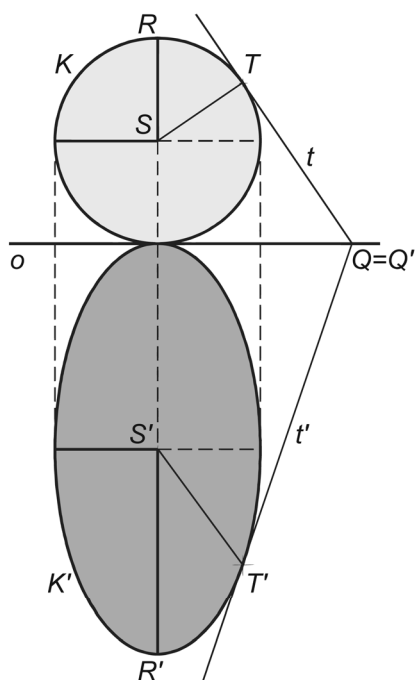
Skupina osových afinit je velmi užitečná pro geometry i výtvarníky. Pomocí osové afinity lze přesně sestavit obrazy podstav těles (mnohoúhelníky, kružnice) ve volném rovnoběžném promítání (obrázky v učebnicích), konstruovat elipsy i jiné křivky, obrazy rovinných řezů na hranolech a válcích, sestavovat obrazy stínů těles, rozšiřovat škálu „dlaždic k pokrývání“ nebo v písmomalířství výtvarně dotvářet nápisy. Afinní obrazy písma a různých značek vidíme na vodorovném dopravním značení...

Osovou afinitu nevědomky užíváme i při sestrojování grafů k -násobků funkce, je-li dán graf funkce původní. Také při změně velikosti jednotkové úsečky na jedné z os x, y bude nový graf funkce afinním obrazem původního grafu. Na obr. 1 je graf části funkce $y = \sin x$ a graf jejího dvojnásobku, tj. funkce $y = 2\sin x$. Ploška omezená osou x a grafem druhé funkce má obsah dvojnásobný ve srovnání s vyšrafovanou ploškou funkce původní.

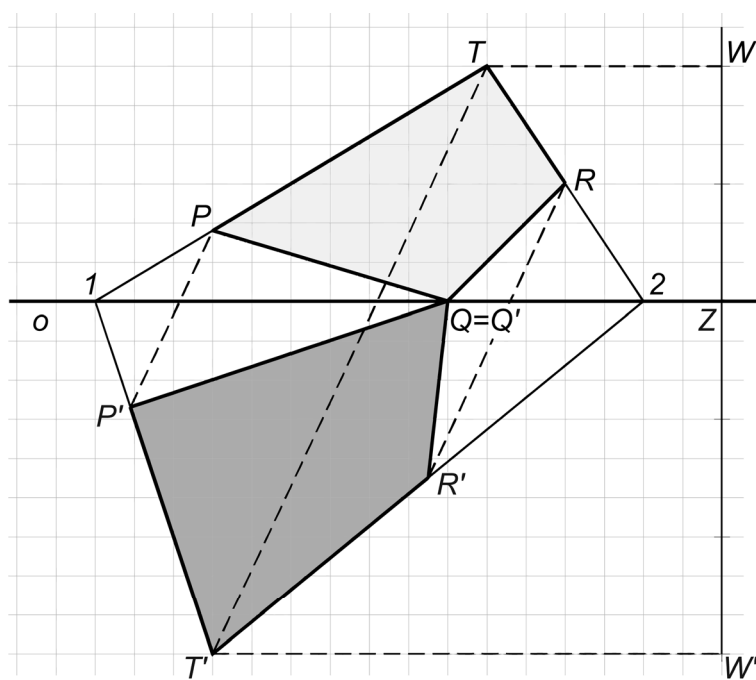


Obr. 1 – Afinní obraz grafu funkce $y = \sin x$

Obecně lze při zadání afinity osou a dvojicí bodů X, X' určit, v jakém poměru budou obsahy každého útvaru a jeho obrazu. Tak na obr. 2 je obsah K' , obrazu kruhu K , dvojnásobkem obsahu kruhu K , protože vzdálenosti středu S a jeho obrazu S' od osy afinity jsou v poměru $1 : 2$. (Odtud lze také ukázat, že lze obsah vnitřku elipsy vypočítat podle vzorce $S' = \pi ab$. Důkaz to ovšem není.) Poměr obsahů čtyřúhelníků na obrázku 3 je roven $2 : 3$.



Obr. 2 – Elipsa jako obraz kružnice k

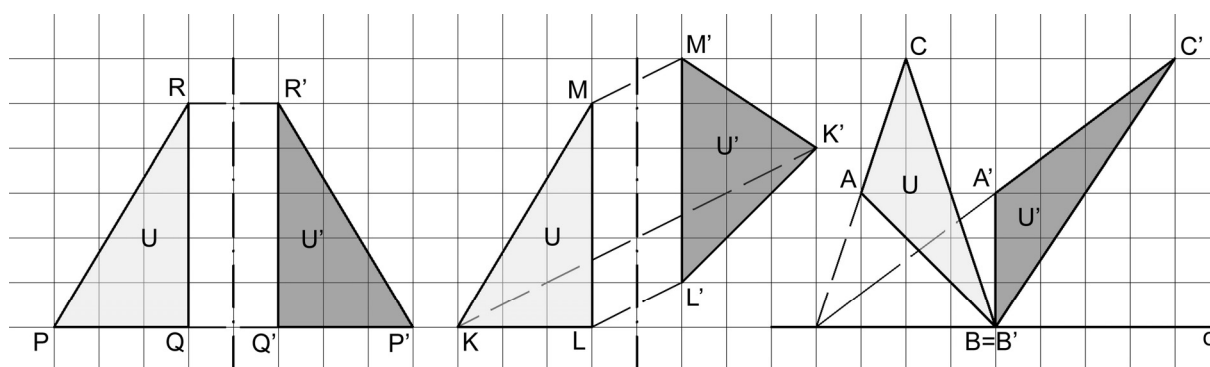


Obr. 3 – Čtyřúhelník a jeho afinní obraz

Plochojevná zobrazení a rovnoploché obrazce

Shodná zobrazení zachovávají tvar a velikost útvarů. V praxi bývají někdy velmi důležité obě tyto vlastnosti, ale často nám záleží pouze na velikosti – na výměře pozemku, velikosti státu ap. Právě u převodu obrazů světadílů a států z globu na rovinu, kde nelze uplatnit žádnou shodnost, musíme vždy volit takové zobrazení, které bude co nejvíce vyhovovat našim potřebám. Pro turistu je dobré poznat na mapě, jaký tvar má ve skutečnosti křižovatka cest zakreslená na mapce, proto přivítá, je-li jeho mapa úhlojevná. Národohospodáře zajímá více rozloha úrodných oblastí než jejich tvar...

S některými plochojevnými (ekvivalentními) zobrazeními se setkáváme ve škole běžně. Jsou to už zmiňované shodnosti, ale např. i „proměny trojúhelníku“ na požadovaný tvar při zachování jeho obsahu. Na obr. 1 je kromě osové souměrnosti uvedeno ještě šikmé zrcadlení a osová afinita, jíž se říká osová elace. Ve všech případech má dvojice šedě zvýrazněných trojúhelníků týž obsah.



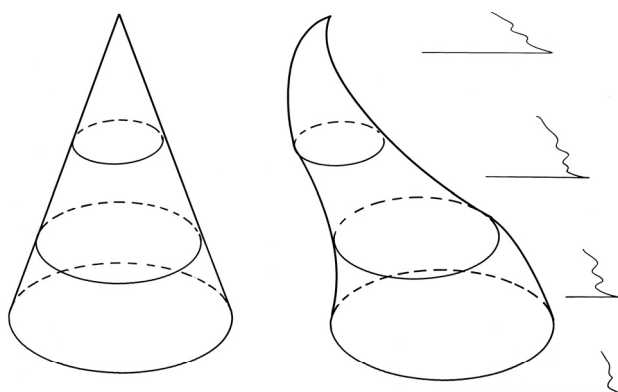
Obr. 1 – Tři speciální osové afinity zachovávající obsahy útvarů – zde trojúhelníků

Žákům známá skutečnost, že obsahy všech trojúhelníků ABC , kde je bod C libovolným bodem ležícím na rovnoběžce s přímkou AB , je v podstatě rovinným speciálním případem tzv. Cavalieriho principu, který je velmi užitečný v teoretické geometrii i v praxi. Býval často používán i k důkazům vět ve středoškolských učebnicích, i když jeho obecná formulace je značně složitá. Vysvětlíme jeho podstatu (obr. 2).

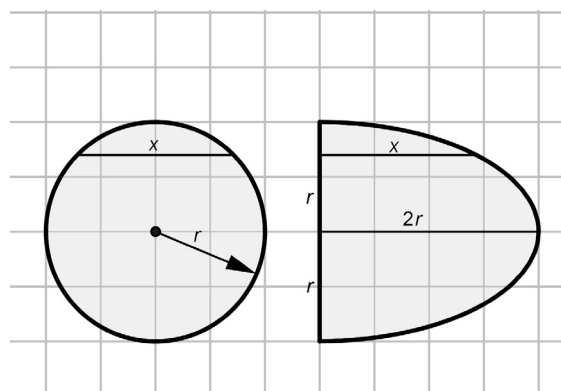
Máme-li umístěna dvě tělesa v prostoru tak, že mají dvě rovnoběžné tečné roviny, pak další s nimi rovnoběžné roviny ležící mezi touto dvojicí nutně protíná obě tělesa v rovinných řezech. Pokud pro všechny takovéto roviny platí, že dvojice rovinných řezů oběma tělesy mají vždy shodný obsah, pak mají tato tělesa shodný objem.

Všimněte si, že zde nezáleží na tvaru řezů rovin s tělesy ani na tvaru těles samotných. Ve školách bývaly kdysi dřevěné modely válců a kuželů rozřezané rovinami rovnoběžnými s podstavami a navlečenými na tyčku volně procházející otvory v jejich středech. Takový model představoval např. rotační válec a vzápětí nakloněním oné tyčky válec šikmý. Oba válce měly shodnou podstavu i výšku a objem. (Podobný trik lze předvést z kruhových pivních tácků.)

Rovinnou aplikací tohoto principu je naše úvaha o trojúhelnících. Na obr. 3 jsou ve dvojicích rovinných útvarů znázorněny jejich společné tečny (obdoba tečných rovin) a „řezy“ přímkami, které jsou s nimi rovnoběžné. Jsou-li všechny dvojice úseček takto získaných stejně dlouhé, mají oba rovinné útvary stejný obsah. Tímto způsobem můžeme sestrojovat tvarově velmi rozličné dvojice ekvivalentních útvarů.

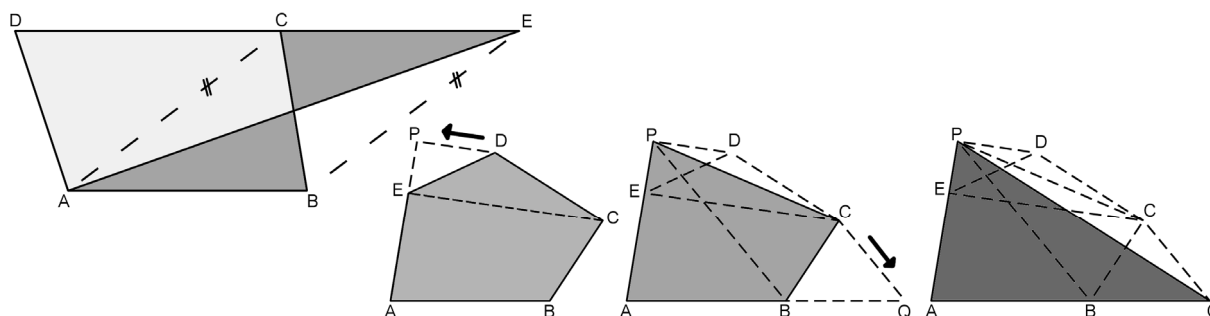


Obr. 2 – Rovinné řezy dvou těles se společnou dvojicí rovnoběžných tečných rovin



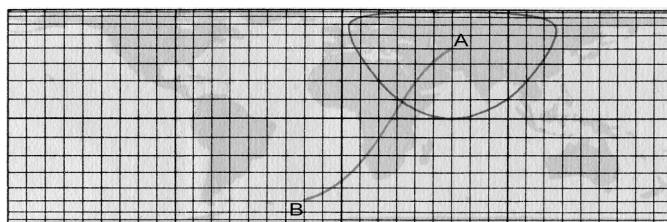
Obr. 3 – Rovnoploché dvojice útvarů konstruovaných pomocí Cavalieriho principu

Dále můžeme získat rovnoploché mnohoúhelníky rozdělením jednoho mnohoúhelníku na díly a pak jejich různým přerovnáváním. Tento princip se často využívá pro svou názornost v učebnicích matematiky při odvozování vzorců o obsahích čtyřúhelníků. Na tomto základu je zkonstruováno i mnoho geometrických úloh a hlavolamů. U mnohoúhelníků je vhodný ještě jeden postup tzv. „proměny mnohoúhelníku“ na mnohoúhelník s menším počtem vrcholů (a tedy postupně až na trojúhelník). Přesněji řečeno: Hledáme konstrukci, pomocí níž sestrojíme k danému mnohoúhelníku mnohoúhelník s menším počtem vrcholů, ale se stejným obsahem. Postup je jednoduchý. Vždy odřízneme jednou úhlopříčkou jeden vrchol a takto získanému trojúhelníku přesuneme tento vrchol na jednu ze stran mnohoúhelníku. Postup i jeho aplikace na obecný pětiúhelník jsou patrné na obr. 4. (Pro žáky by mohlo být zajímavé porovnat přesnost tohoto „proměňování“ výpočtem obsahu původního n -úhelníku i konečného trojúhelníku. Příležitost pro upozornění, že žádná rýsovaná konstrukce není zcela přesná!)



Obr. 4 – Metoda a postupná konstrukce trojúhelníku rovnoplochého k pětiúhelníku $ABCDE$

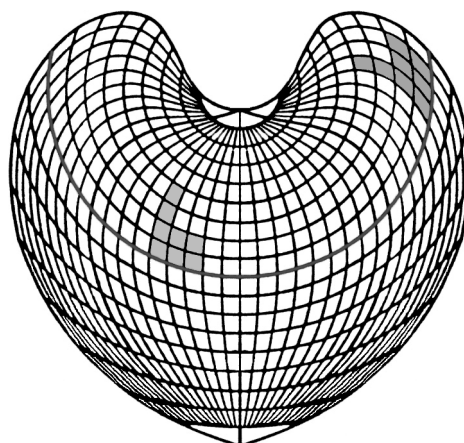
Pěkné ukázky plochojevných zobrazení najdeme v kartografii. Tak např. Lambertovo ekvivalentní válcové zobrazení vychází z poznatku známého už Archimédovi. Obsah kulové plochy s poloměrem r (a tedy povrch koule) je roven obsahu pláště válce, který je této kouli opsán. Jeho kruhová podstava má tedy stejný poloměr r a výška válce je rovna $2r$. Rozvinutím tohoto pláště do roviny dostaneme uvedenou Lambertovu síť (obr. 5).



Obr. 5 – Lambertova válcová síť

Cena za ekvivalentnost je však velická. Všechny rovnoběžkové kružnice – a dokonce i zemské póly – se zobrazují do úseček stejné délky. Díky tomu se obrysy kontinentů a území zejména blízkých pólům velice deformují. Ovšem rovnoplochosť je zachována. Mají-li např. dva ostrovy stejnou rozlohu, budou ji mít i jejich mapové obrazy.

Pěkným ekvivalentním zobrazením je zobrazení Bonneovo. Zobrazením celé Zeměkoule je jakési „srdce“, ale v praxi se používá vždy jen jeho vhodná část volená tak, aby tvarové deformace nebyly příliš velké. Na obr. 6 jsou v Bonneově síti vyznačeny dvojice „stejných území“, jejichž hranicemi jsou části rovnoběžek a poledníků. Můžeme porovnat, jak záleží velikost jejich mapových obrazů na „poloze území v síti“.



Obr. 6 – Bonneova síť

Studenti by mohli prohlédnout své školní atlasy a zjistit, jsou-li tam poznamenány názvy použitých kartografických sítí. Jistě narazí i na síť stereografickou, která zachovává úhly. Toto se dá snadno „ověřit“: všechny obrazy rovnoběžek se protínají s obrazy poledníků pod pravým úhlem – a vždy mají tvar kružnice nebo přímky. Na obr. 7 je tato síť zvolena tak, aby průsečík padesáté rovnoběžky s. š. a nultého poledníku ležel v jejím středu (a tedy rozlehlé území okolo nemělo příliš zdeformované tvary).

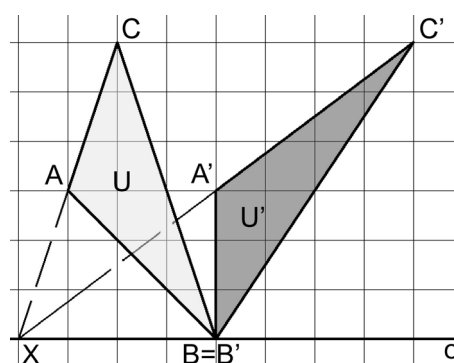


Obr. 7 – Stereografická síť

PL – Osová afinita v rovině

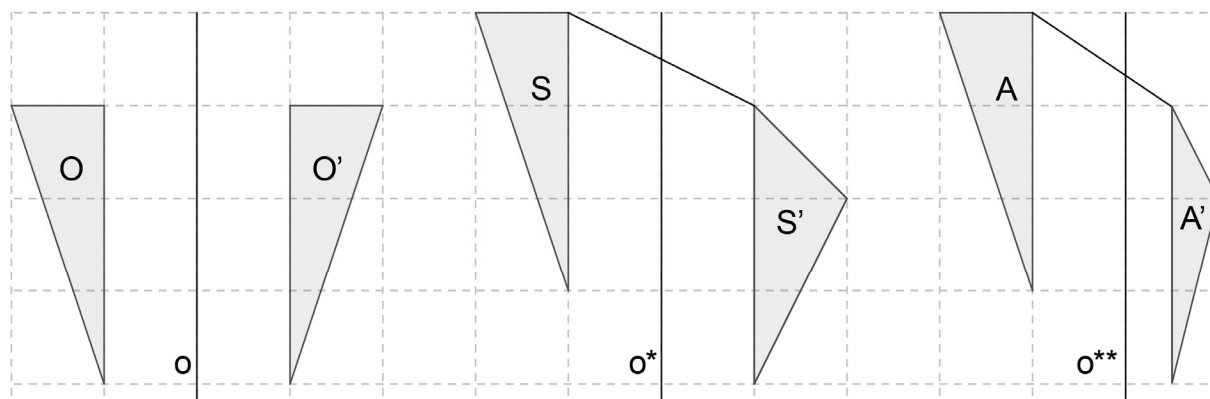
V geometrii se pracuje s mnoha užitečnými zobrazeními. Seznámíme se s jedním velice jednoduchým a přitom užitečným. Přes svou jednoduchost má širokou použitelnost nejen v matematice, ale i v běžné praxi. Pro začátek stačí připomenout si osovou souměrnost a její vlastnosti.

Úloha (1) Na obr. 1 jsou nakresleny trojúhelníky XBC a $XB'C'$. Víte ze ZŠ, že mají stejný obsah (opravdu?). Dokažte, že i trojúhelníky ABC a $AB'C'$ mají stejný obsah. Svůj postup zapište:



Obr. 1

Úloha (2) Na obr. 2 jsou tři shodné trojúhelníky O , S , A a jejich obrazy ve třech různých zobrazeních. Každé z nich má osu samodružných bodů a zobrazuje přímky na přímky. (Matematici říkají, že jde o lineární zobrazení.) Zapište název prvního zobrazení a popište způsob vytvoření obrazů trojúhelníků ve zbývajících dvou. Jaké vlastnosti jsou společné všem třem zobrazením? Má tytéž vlastnosti i zobrazení z obr. 1?



Obr. 2

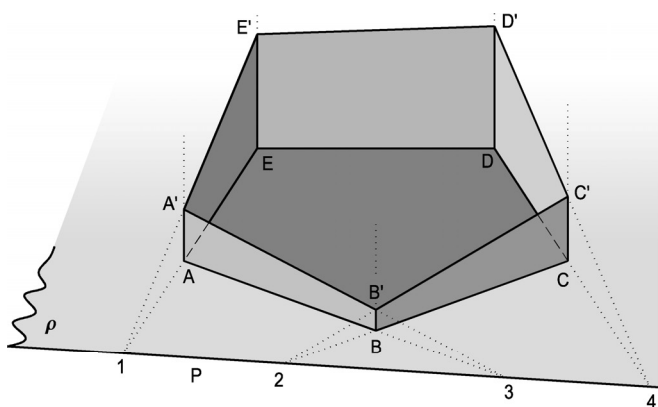
Porovnejte obsahy trojúhelníků S a S' . Zapište:

Všechna tato zobrazení jsou různými případy osové afinity v rovině. Na obr. 1 jde o osovou elaci, na obr. 2 jste jistě poznali osovou souměrnost. Dále je zde tzv. šikmé zrcadlení a obecná osová afinita.

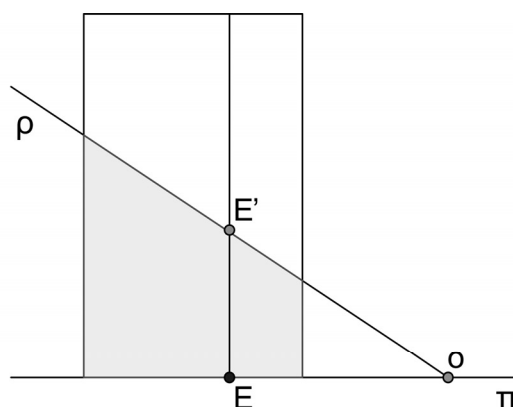
PL – Řezy hranolů pomocí osové afinity

Máme-li sestrojit obraz hranolu nebo válce rovinou, můžeme postupovat dvojím způsobem: buď užíváme stereometrické věty o vzájemné poloze rovin nebo osovou afinitu. V obou případech většinou kreslíme stejné přímky, jen zdůvodnění postupu je trochu jiné.

Na obr. 1 je zobrazena spodní část dutého pětibokého hranolu seříznutého rovinou. V tomto případě byla rovina řezu zadána její průsečnicí s rovinou podstavy hranolu a bodem A' na jeho svislé hraně vedené bodem A . Pětiúhelník řezu je afinním obrazem podstavy. Osou afinity je vždy společná přímka roviny podstavy a roviny řezu. Směr afinity je dán hranami pláště, které musí být navzájem rovnoběžné. Metoda je tedy použitelná pro jakékoli hranoly a válce, nikoli pro jehlany a kužele (tam lze použít podobné, ale obecnější zobrazení – středovou kolineaci).

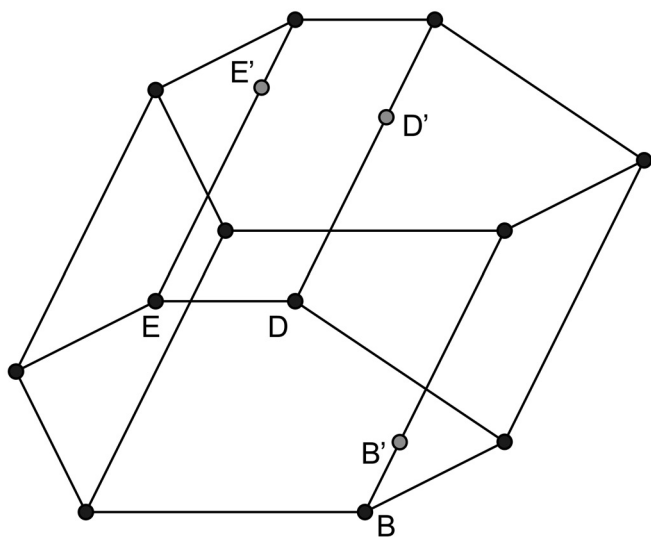


Obr. 1 – Krabíčka seříznutá rovinou



Obr. 2 – Řez hranolu z boku

Na obr. 2 je pohled na řez hranolu rovinou ze strany. Rovina podstavy i řezu se jeví jako přímky, osa afinity jako bod.



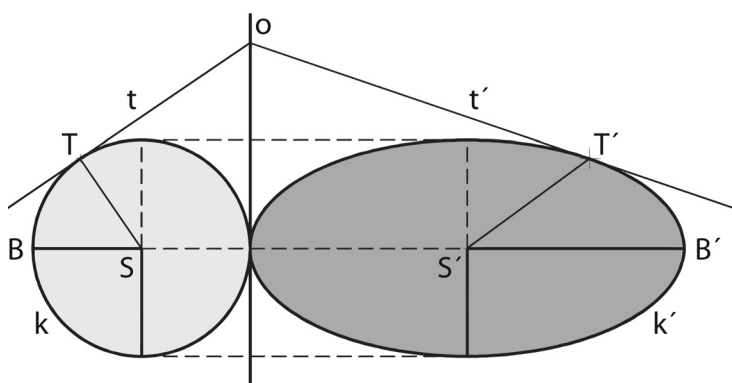
Obr. 3

Úloha (1) Sestrojte řez šestibokého nepravidelného hranolu s podstavou $ABCDEF$ rovinou $B'D'E'$. (Sestrojte nejprve osu afinity.)

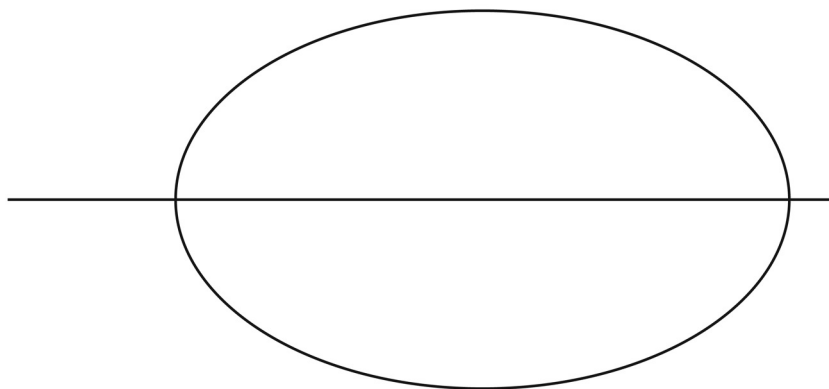
PL – Obrazy kružnice v osově afinitě

Osovou afinitu lze výhodně užít při řešení různých úloh o elipse. Na obr. 1 je kružnice $k(S, SB)$ a její afinní obraz k' – elipsa. K její konstrukci lze využít čtverec kružnici opsaný a jeho obraz – obdélník opsaný „budoucí“ elipse k' . V tomto případě se jedná o afinitu pravoúhlou, která je pro konstrukci elipsy nejvýhodnější. Dle obrázku rychle sestrojíme všechny vrcholy elipsy. Pomocí afinity však snadno doplníme i řadu dalších bodů a tečny k elipse.

Obsah kruhu počítáme podle vzorce $S = \pi \cdot r^2$. Pro výpočet obsahů ploch potřebujeme zpravidla znát délky dvou vhodných navzájem kolmých úseček, tak si vzorec přepíšeme do tvaru $S = \pi \cdot r \cdot r$. Vedlejší poloosa elipsy má délku r , hlavní poloosa je obrazem poloměru kolmého k ose afinity. Tyto poloosy značíme a, b . Obsah plochy, která je elipsou ohraničena, vypočteme podle vzorce $S = \pi \cdot a \cdot b$. (Tato úvaha ještě není důkazem, ale pomůže nám k zapamatování nového poznatku.)



Obr. 1 – Obraz kružnice v osově afinitě



Obr. 2

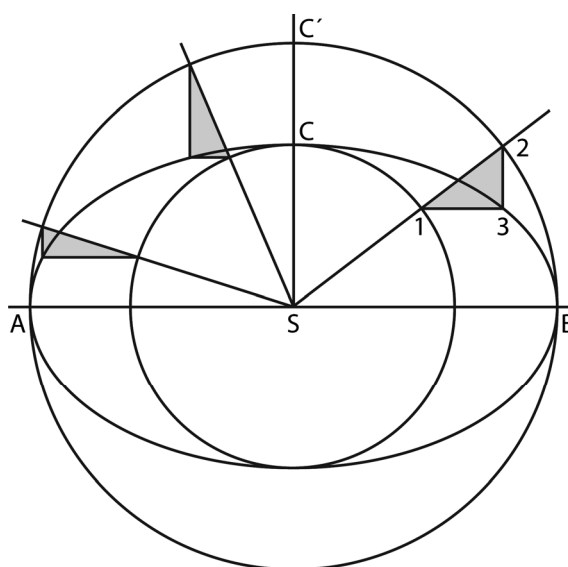
Úloha (1) Obráceným postupem sestrojte k dané elipse na obr. 2 afinně sdruženou kružnici a s její pomocí sestrojte tečny k elipse ve třech vámi zvolených bodech této elipsy. Zapište! (Návod: Za osu afinity zvolte přímku procházející hlavními vrcholy elipsy. Lze volit i osu procházející i vedlejšími vrcholy, ale pak je kružnice menší a konstrukce proto méně přesná.)

PL – Trojúhelníková konstrukce elipsy

Pro konstrukci mnoha bodů elipsy zadané svými vrcholy je nejvýhodnější a také nejpřesnější trojúhelníková konstrukce elipsy (obr. 1). Je odvozena z afinit mezi kružnicí a elipsou s osami AB a CD .

Postup konstrukce:

Sestrojíme soustředné kružnice se středem S a poloměry AS , CS . Zvolíme libovolnou polopřímku l s počátkem S . Označíme body 1 , 2 podle obrázku a doplníme pravoúhlý trojúhelník 123 . Bod 3 je bodem hledané elipsy.



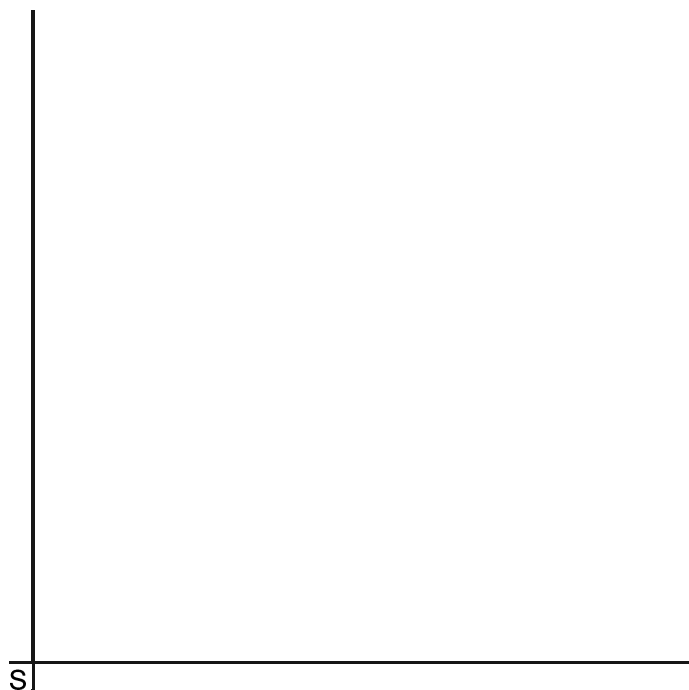
Obr. 1 – Konstrukce bodů elipsy

Úloha (1) Narýsujte dvojici kružnic se společným středem S a poloměry 3 cm, 5 cm (obr. 2). Sestrojte trojúhelníkovou konstrukcí aspoň tři body elipsy ležící v jednom kvadrantu.

Úloha (2) Sestrojte oskulační kružnici pro hlavní vrchol elipsy a porovnejte její polohu s polohami vámi sestrojených bodů.

Úloha (3) Sestrojte pomocí afinity ve dvou již sestrojených bodech elipsy tečny.

Úloha (4) (Pro experty) V bodě T sestrojeném pomocí trojúhelníkové konstrukce ved'te kolmici k tečně tímto bodem procházející. Je to tzv. normála elipsy v bodě T . Průsečík normály s polopřímku l , pomocí níž byl bod T sestrojen, označte X . Opakujte konstrukci pro několik dalších bodů. Vyslovte hypotézu o poloze bodů X .



Slovo na závěr

Dovolte mi, abych nejprve upřesnila, co rozumím pracovním listem. Takovým listem je určitě kratší (a relativně samostatný) text, který stručně seznamuje s následujícím úkolem, uvede vše potřebné k vyřešení úloh a formuluje aspoň jedno zadání. Na tom se myslím shoduje většina učitelů. V této brožurce je zařazeno i několik listů, které zdánlivě nesplňují tu poslední jmenovanou podmínku: není zde přímo položena otázka, zadání konkrétní úlohy. Přesto se domnívám, že i tyto listy jsou pracovní. Jsou určeny ke krátkému „samostudiu“, k poučení o „něčem novém“, případně ke společné četbě a následnému rozhovoru o textu ve třídě. Víím, že se mnozí žáci nedovedou učit z knih, nedovedou vyhmátnout z textu ta nejdůležitější sdělení a představit si pod slovy něco konkrétního. Určitou zásluhu na tom má jistá povrchnost, jíž se brání mozek přemíře informací, kterými jsme zahlcováni ze všech stran, i velice nevhodným „klipovým“ způsobem zpracování často i naučných pořadů.

Většina pracovních listů by měla inspirovat řešitele k vyhledání podobných materiálů ve svém okolí. To platí nejen o různých způsobech grafického zpracovávání informací či obzvláště „povedených“ reklam, ale i pozorného procházení bydlištěm, případnou fotodokumentací výtvarných architektonických prvků apod. Poučené „oko“ toho vždy vidí ve svém okolí mnohem víc. Ozvěny geometrie skutečně nacházíme ve svém prostředí na každém kroku – jen si to uvědomit. Aktuální „materiál“ ke grafické komunikaci najdeme nejen v ročenkách statistického úřadu, ale i přímo v sídle školy, v tisku, při experimentech ve fyzice, při sportovních soutěžích aj.

Vzhledem k tomu, že se jedná většinou o „grafický materiál“, neuvádím zde přehled řešení úloh z pracovních listů.

Milí kolegové, pokud máte zajímavé zkušenosti s činností žáků v mezních oblastech matematiky a jejích aplikací nebo pokud jste si vytvořili a úspěšně použili vlastní pracovní listy nebo jiné učební texty a chtěli byste je nabídnout svým kolegům, buďte tak laskavi a sdělte nám to. Rádi tuto informaci zprostředkujeme vašim kolegům. Dobrých nápadů není nikdy dost a měly by se šířit učitelskou obcí.

Alena Šarounová