Kolektiv autorů

MATEMATIKA

Aktivně, aktuálně a s aplikacemi

●

Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze:
aktivně, aktuálně a s aplikacemi – projekt OPPA

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Praha 2012

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu Praha – Adaptabilita (OPPA) a jeho projektu Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: aktivně, aktuálně a s aplikacemi. Řešiteli projektu jsou pracovníci Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Autoři textu:
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc., RNDr. Jarmila Robová, CSc., PhDr. Alena Šarounová, CSc.

Recenzenti:
Mgr. Věra Dědečková
RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Vydalo Nakladatelství P3K s. r. o. (www.p3k.cz) v Praze v roce 2012 v nákladu 150 ks. Vydání první.
Vytištěno ze sazby dodané autory.
Publikace neprošla jazykovou korekturou.

© Jindřich Bečvář, Zdeněk Halas, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Alena Šarounová, 2012
© Nakladatelství P3K, 2012
Illustrations © Jana Marvánová, 2012

ISBN 978-80-87186-94-7

OBSAH

Několik informací úvodem 4

1. Geometrie a náš svět *(A. Šarounová)* 5

1.1 Dělení roviny a prostoru 5

1.2 Experimentování při řešení úloh 9

1.3 Osová afinita a její užití 10

1.4 Grafická komunikace všude kolem nás 12

1.5 Ukázky pracovních listů 16

1.6 Literatura 24

2. Matematika a budování finanční gramotnosti *(O. Odvárko, J. Robová)* 25

2.1 Složky finanční gramotnosti 25

2.2 Úroková sazba a úrok 26

2.3 Jednoduché a složené úročení 30

2.4 Investice 34

2.5 Spoření 37

2.6 Úvěry 39

2.7 Literatura 42

3. Vývoj matematiky jako popularizující stimul *(J. Bečvář)* 43

3.1 Archimédés ze Syrákús 43

3.1.1 Heuréka 45

3.1.2 Využití jednoduchých strojů 46

3.1.3 Obrana Syrákús 47

3.1.4 Archimédova smrt 48

3.1.5 Archimédův hrob 49

3.2 Archimédovo dílo 49

3.2.1 Archimédovo „Měření kruhu“ 52

3.2.2 Poznámky 56

3.2.3 Objem a povrch koule 57

3.3 Literatura 60

4. Využití matematiky v praxi *(Z. Halas)* 61

4.1 Zeměpisná šířka 61

4.2 Zatmění Slunce 63

4.3 Metónův cyklus 69

4.4 Princip satelitní navigace 72

4.5 Literatura 78

Několik informací úvodem

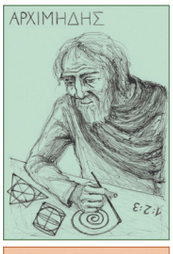
Milí čtenáři, kolegyně a kolegové, učitelé matematiky!

Matematika a zejména její aplikace provázejí každého z nás celým životem. My, učitelé, jsme si toho vědomi, ale mnozí lidé jsou přesvědčeni, že ji vlastně nepotřebují. I ve škole se žáci často ptají, proč se mají to či ono učit. A na hodiny matematiky se mnozí z nich vůbec netěší. Částečně za to může jisté přetechnizování našeho života a celková atmosféra ve společnosti, která sice v mnohých dokumentech zdůrazňuje důležitost matematiky a přírodních věd, ale v praxi je příliš nepodporuje, protože zdánlivě „nepřinášejí přímý ekonomický efekt“. Proto velmi záleží na učitelích, jejich přehledu o situaci, způsobu výuky i velké zásobě materiálů, které jim pomohou důležité aplikace právě „jejich školní“ matematiky v hodinách využívat.

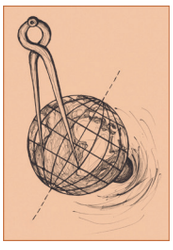
Tato publikace je pátou brožurou, kterou jsme pro vás v rámci projektu připravili. Na rozdíl od předchozích – monotematických – předkládá jakýsi průřez jejich témat, některé ukázky z nich, ale i další nebo širší pohledy na vybrané aplikace.

V kapitole **Geometrie a náš svět** přinášíme náměty práce související se shodnostmi, pokrývání roviny a dělením těles. Mnohé úlohy zde vybízejí k samostatné práci žáků, k experimentování a vyhledávání materiálů. Zdůrazňujeme význam grafické komunikace a ukazujeme, jak lze využít práci s grafy pro posílení mezipředmětových vztahů.

Už název druhé kapitoly **Matematika a budování finanční gramotnosti** naznačuje, že jde o téma velmi důležité pro praktický život. Toho jsou si vědomi i mnozí lidé jinak „matematiku v životě“ příliš neuznávající. Podrobný výklad s úplným řešením úloh může zaujmout nejen studenty, ale i jejich rodiče.

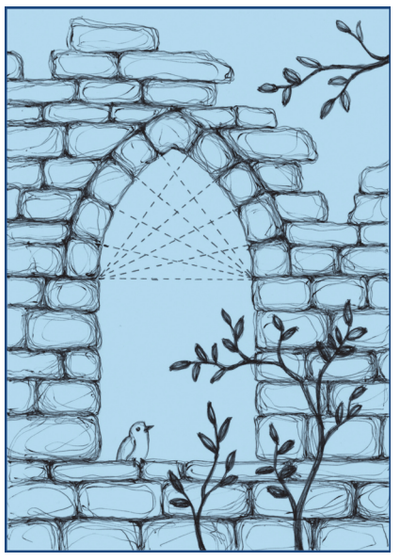


Do historie směřuje kapitola **Vývoj matematiky jako popularizující stimul**. Podrobněji se zabývá Archimédem a jeho objevy, které úzce souvisejí se školskou geometrií a současně s rozvojem matematiky jako vědy důležité i pro praxi. Sledovat jeho myšlenkové „cesty k objevům“ je velmi podnětné (a vybízí nás k následování na přístupných úrovních).



Kapitola **Využití matematiky v praxi** je zaměřena na používání matematických metod v astronomii. Od problémů se zeměpisnou šířkou a výpočtů zatmění Slunce se dostaneme k podstatě satelitní navigace, kterou nyní používají běžně řidiči aut a sportovci, ale slouží i armádě a civilnímu letectvu.

1. Geometrie a náš svět



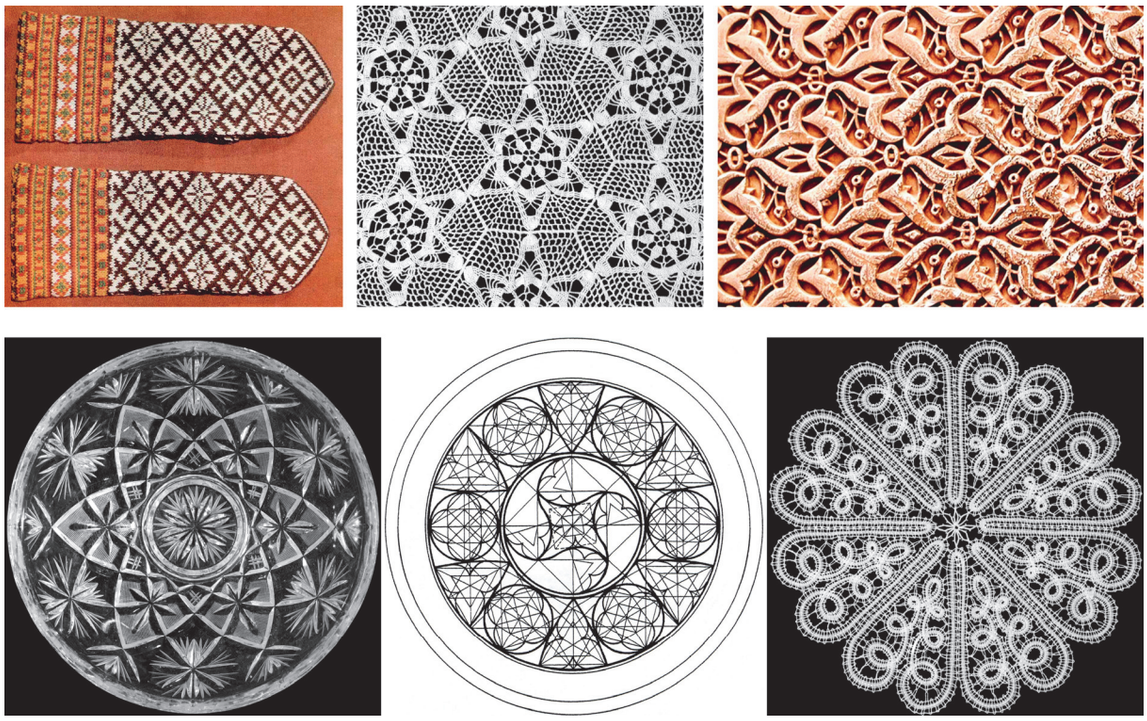
Kamkoli pohlédneme, tam vidíme tělesa i živé organizmy. Vnímáme jejich tvary, velikost, polohu vůči nám i jejich polohu navzájem. Za vším, co nám tento pohled nabízí, jsou skryty zdroje, z nichž se postupně rodila geometrie. S jejími praktickými aplikacemi se setkáváme denně, i když si to málokdo uvědomuje. Podívejme se na několik takových případů, které lze s úspěchem využít nejen při výuce, ale i pro samostatnou práci žáků.

1.1 Dělení roviny a prostoru

V geometrii užíváme mnoho pojmů, které jsou odvozeny z našeho životního prostoru a činnosti. Hovoříme o přímkách, ale v praxi dělíme, měříme a sčítáme latě, mluvíme o rovinách, ale potřebujeme vydláždit plochu daných tvarů a rozměrů, studujeme vlastnosti prostoru, ale stavaři uvažují, jak z daných stavebních prvků vytvořit požadovanou budovu, jak „v mysli rozřezat kámen“, aby se ze získaných dílů dal sestavit naplánovaný oblouk mostu… Matematici užívají termíny jako „pokrývání roviny“ (teselace, tessellation), budoucí inženýři se učili o „kamenořezu“ (dělení kamene) či obecněji o „stereotomii“ (dělení prostoru). Myšlenky matematiků dosahují do „nekonečných dálek a vysokých dimenzí“, ale i školní geometrie nachází různá uplatnění všude, kam jen pohlédneme.

Pokrýt rovinu znamená položit na ni tolik navzájem se nepřekrývajících rovinných útvarů, aby každý její bod ležel právě v jenom z nich. Tato úloha má mnoho řešení od užití nejrůznějších divokých tvarů až po pravidelné navzájem shodné n-úhelníky. V praxi můžeme pokrýt např. celý dvorek lomovým (neupraveným) kamenem a štěrkem, zámkovou dlažbou, kombinací různých typů dlaždiček apod. Čím více pravidel si pro tuto práci stanovíme, tím více se blížíme k užití shodností, podobností a obecněji ornamentu.
Základním znakem ornamentu je zákonité opakování jednoho „prvku“ tak, aby byla postupně pokryta celá plocha, která je mu určena. Může to být „nekonečný pruh“ (stuha, ozdoba římsy aj.), kterému říkáme frýz, „rovina“ (stěna, potisk látky), na níž tvoříme tapetu, nebo „kruhová plocha“ (okno, dečka na stolek), pokrytá ornamentem zvaným rozeta. Na následujících obrázcích se můžeme přesvědčit, že v našem prostředí hrají různé typy ornamentů velkou roli nejen v umění.

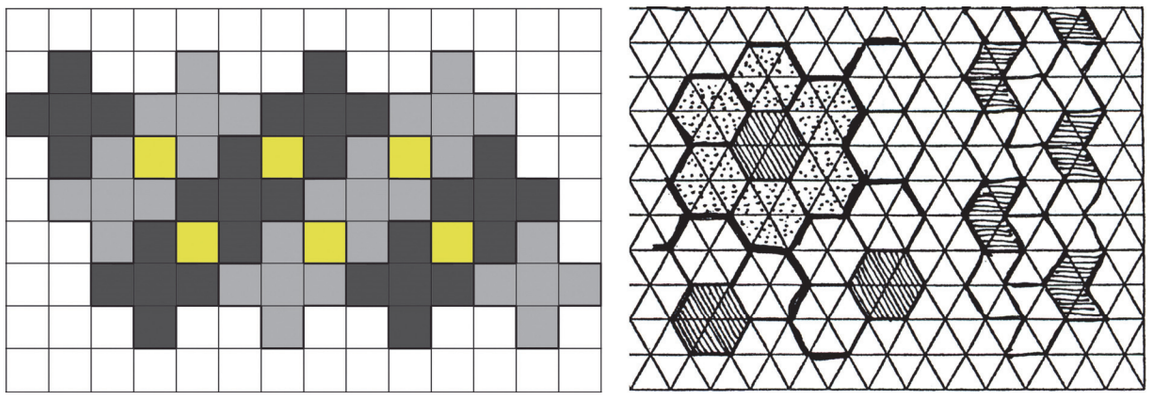
Obr. 1 – Frýzy



Obr. 2 – Tapety a rozety

V hodinách geometrie můžeme velmi dobře využít ornamenty nejen jako motivaci, ale i jako vhodné „shrnující téma“ k závěrečnému opakování učiva o shodnostech či k samostatné práci žáků. Speciálně navrhování dlaždic je přístupné i žákům nižších ročníků ZŠ. Lze však zadat i úlohy velmi obtížné pro střední školy (např. tvorbu escherovských vzorů užívajících i kruhovou inverzi).

Různé „dlaždice“ a z nich skládáním vytvořené vzory se snadno navrhují pomocí vhodných sítí. Několik takových postupů vidíme zde na obrázku či na pracovních listech a přiloženém CD.



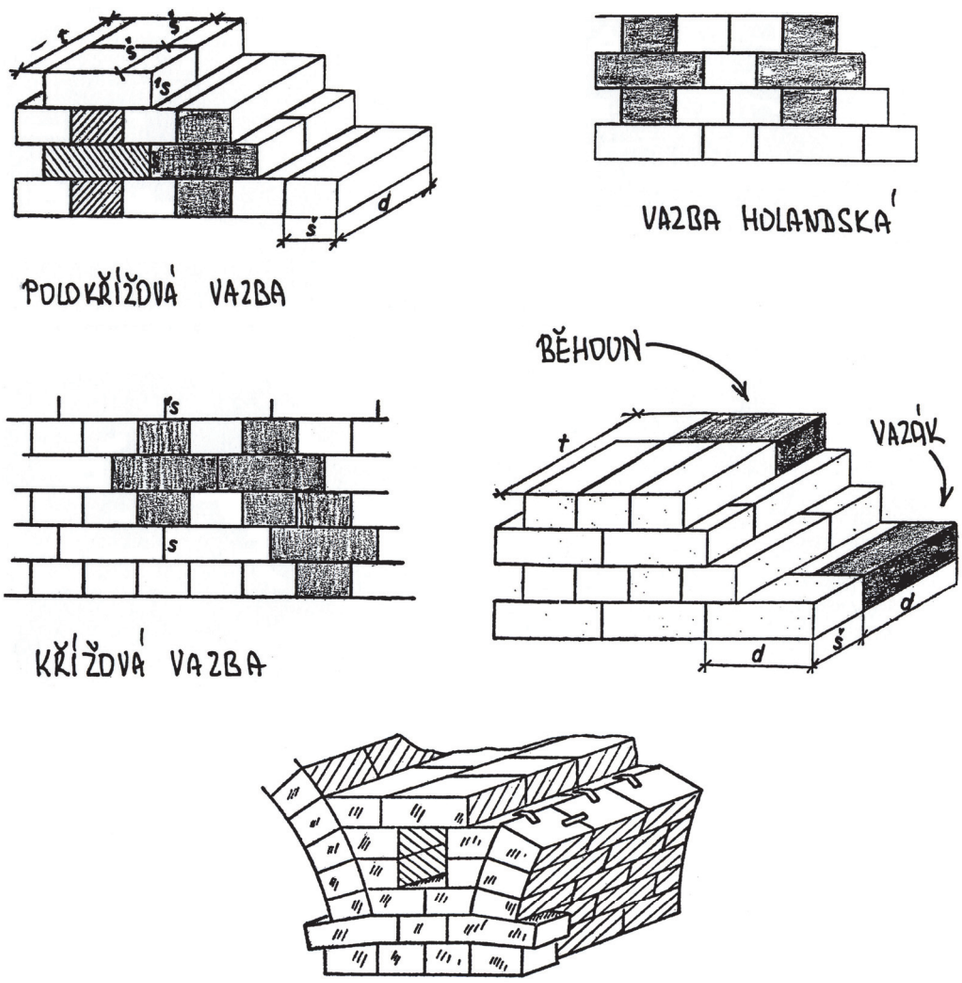
Obr. 3 – Tvorba jednoduché dlažby v sítích

Běžně se setkáváme nejen s pokrýváním částí rovin, ale i jiných ploch (plochy válcové, kulové, povrchy různých krabiček, fasády moderní architektury aj.). Celé světadíly jsou „pokryty“

zónami politických vlivů, nebeskou klenbu dělili astronomové na oblasti různých souhvězdí. I samy živé organizmy zabírají určitá území – „život nemiluje vakuum“. Klasickým případem jsou teritoria sousedících smeček šelem, jejichž hranice se udržují či mění pod tlakem okolností (změna přírodních podmínek, početnost a bojovnost populací aj.).

Tvorbu hranic lze ve škole názorně ukázat přikapáváním oleje na hladinu vody v misce. V kapitole č. 1.2 „Experimentování při řešení úloh“ je vyhledávání takové hranice převedeno do jazyka geometrie.

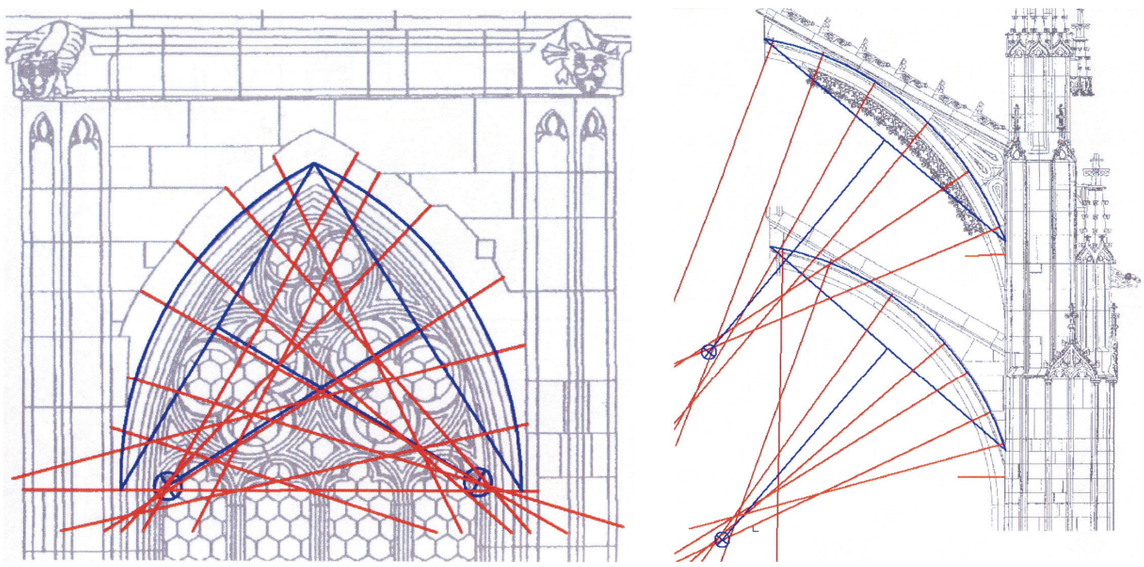
Úlohu obdobnou pokrývání roviny řešíme v prostoru např. ve stereometrii, kde různě sestavujeme mnohostěny, prostorové hlavolamy, dokazujeme shodnost objemů daných těles jejich rozřezáním a přerovnáním získaných dílů apod. Ve stavebnictví můžeme různými způsoby sestavovat hotové cihly i jiné tvarovky při vyzdívání stěn. Má-li stavitel na mysli zvláštní tvary architektury, musí si často vhodné „díly“ rozkreslit a vyhotovit.



Obr. 4 – Ukázky kladení cihel a vyzdívání pilíře mostu

Vytesat kameny správného tvaru, aby se z nich dal sestavit např. oblouk nad dveřmi je poněkud obtížnější než plánování pokrytí roviny. Stavba musí vyhovět nejen požadavkům geometra a případně „krásy“, ale musí ctít i fyzikální zákonitosti – pevnost materiálu, vliv gravitace a technologické možnosti doby. Velmi zde záleží např. na poloze spár mezi kameny.

Tomuto umění byl věnován při studiu na technice zvláštní předmět „stereotomie“. Bohatost řešení kamenořezu ve středověku můžeme pozorovat nejen na kterémkoli neomítnutém gotickém chrámu, ale i na pilířích mostů. Protože spáry mezi kameny jsou výrazným prvkem, který ovlivňuje celkový vzhled architektury, objevují se na fasádách i „falešné kameny a spáry“ od plošných psaníček až po mohutné plastické „kamenné zdivo“ na barokních palácích.



Obr. 5 – Grafický rozbor kamenořezu opěrného kruhového oblouku katedrály a ostění gotického okna

Námět na skupinový dlouhodobý „projekt“ zdůrazňující mezipředmětové vztahy geometrie – výtvarné umění – historie – technika:

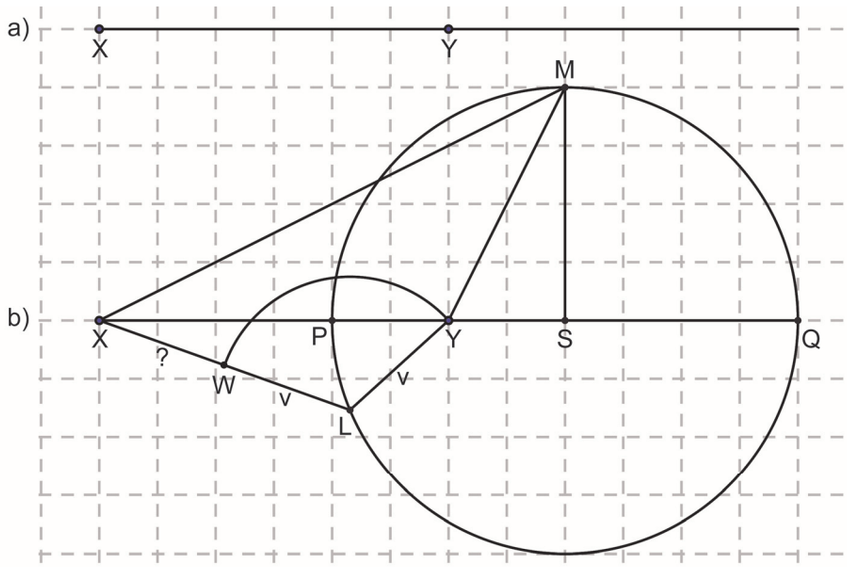
Vyfotografujte kamenné portály ve vašem okolí a pokuste se o geometrickou rekonstrukci jejich tvaru a rovin, v nichž leží spáry mezi jednotlivými kameny! Určete stavební sloh a zjistěte stáří budov.

Vytvořte sadu fotografií rozet, které objevíte. Ke každé takové rozetě sestrojte jejich geometrický rozbor (geometrickou síť, popisující graficky jejich strukturu). Náměty hledejte ve vašem běžném prostředí.

1.2 Experimentování při řešení úloh

Některé geometrické úlohy nás přímo vybízejí k experimentování. Je škoda nevyužít této možnosti. Máme zde příležitost ukázat žákům rozdíl mezi „praktickým“ a matematickým přístupem k řešení problémů, vyzkoušet jejich fantazii a seznámit je se základními zásadami takové práce. Ukažme si to na jediné úloze, která se váže k pokrývání roviny. Její výhodou je, že ji lze zadat v různých ročnících (i na ZŠ) a řešit ji opravdu „bodově“ nebo vytvořit hypotézu (pomůže Pythagorova věta, případně k ověřování i program GeoGebra) – a skutečným důkazem pomocí analytické geometrie lze tento proces uzavřít.

Začneme úlohou o mraveništi (v brožuře Geometrie a náš svět ji stručněji najdete na straně 44). Na louce vznikla současně dvě mraveniště *X*,*Y* vzdálená od sebe šest jednotek délky (obr. 6a). Mravenci z mraveniště *X* jsou zdatní a rychlí, jejich území se šíří rovnoměrně všemi směry. Také mraveniště *Y* se šíří rovnoměrně všemi směry, ale posouvá své hranice jen s poloviční rychlostí oproti mraveništi *X*. Vyznačte hranice mezi těmito mraveništi!



Obr. 6 – Mraveniště *X* a *Y* – a) zadání, b) řešení ve čtvercové síti

Zkusme zformulovat slovně podmínku pro body hranice. Studenti objeví bod *P* (obr. 6b) a většinou i bod *Q*. To je upozorní, že hranice bude mít zajímavý tvar. Můžeme jim připomenout, že řešení – hraniční čára – musí být osově souměrná podle přímky *XY*, protože je podle ní „souměrné celé zadání“. (Tento poznatek se nám hodí při řešení mnoha geometrických úloh.)

Další body lze hledat pomocí průsečíků dvojic kružnic *k(X, 2r)* a *l(Y, r)*. Užitím Pythagorovy věty snadno zjistíme, že bod *M* na hledané hranici leží – vyhovuje podmínce: |XM| = 2|YM|. Užitím GeoGebry lze „ověřit“, že libovolný bod *L* kružnice také vyhovuje dané podmínce. (Na obr. 6b je z úsečky *LX* „odkrojena úsečka délky *v*“ a pokynem v GeoGebře ověříme, že takto získaný bod *W* je středem úsečky *XL*.
V analytické geometrii můžeme najít rovnici této kružnice (jde o tzv. Apollóniovu kružnici).

1.3 Osová afinita a její užití

Na základní škole se žáci seznamují s osovou a středovou souměrností a posunutím, ale ne všichni tam slyší něco o otáčení. Rovněž při probírání podobnosti nebývá nyní povinné vyložit i stejnolehlost. Myslím, že to není v pořádku, protože už na ZŠ ji potřebují při optice ve fyzice (která se může učit kdekoli od 6. do 8. ročníku ZŠ). A že ve společnosti, jejíž technický pokrok byl založen na kole (a vlastnostech otáčení), odcházejí žáci zcela neznalí vlastností otáčení, je nepochopitelné.

Všechna shodná zobrazení zachovávají velikost a tvar geometrických útvarů. Mají mnoho společného (tvoří grupu shodných zobrazení) a jejich použití v praxi vídáme velmi často. Je však i mnoho dalších poměrně jednoduchých zobrazení, s nimiž se setkáváme v běžném životě. Jedním z nich je osová afinita.

S osovou afinitou lze velmi jednoduše seznámit žáky pomocí osové souměrnosti, která je jejím speciálním případem. Pokud u osové afinity „nedodržíme přesně“ některé z postupů, jimiž sestrojujeme obrazy jednotlivých bodů, dostaneme různé osové afinity se zajímavými vlastnostmi i aplikacemi. Osová afinita v rovině je přitom velmi jednoduché zobrazení, které pochopili i žáci sedmých tříd na škole v přírodě.

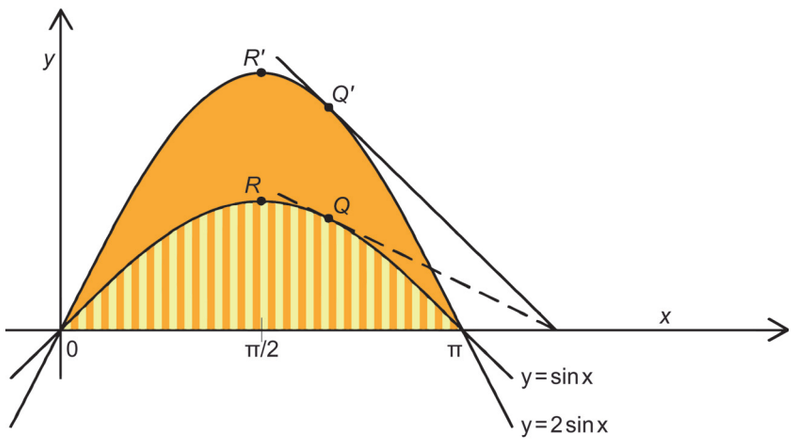
Osová afinita v rovině určená osou a dvojicí bodů, které na ose neleží, je zobrazení s těmito vlastnostmi:

- obrazem bodu je bod, obrazem přímky je přímka
- všechny samodružné body leží na jediné přímce – na ose afinity
- všechny přímky určené bodem neležícím na ose a jeho obrazem jsou navzájem rovnoběžné (určují směr afinity)
- obrazy přímek rovnoběžných s osou afinity jsou s ní také rovnoběžné
- dvojice rovnoběžných přímek se zobrazí na dvojici rovnoběžných přímek
- obrazem středu úsečky je střed obrazu této úsečky

Porovnáme-li soubor těchto vlastností s vlastnostmi osové souměrnosti, zjistíme, že osová afinita daná svou osou, směrem kolmým k ose a dvojicí bodů podle osy souměrných je právě naší dobře známou osovou souměrností. Žáci se s ní mohou seznámit řešením úloh na pracovních listech, které jí věnujeme.

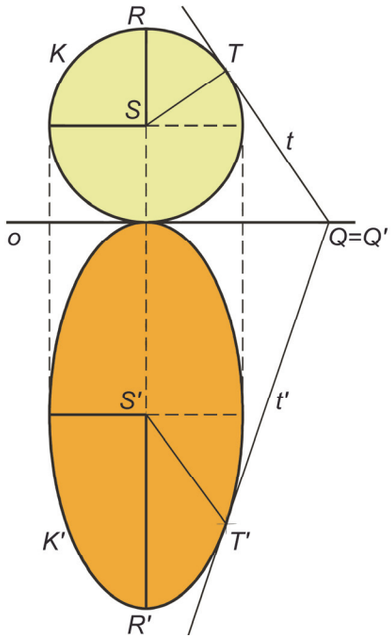
Skupina osových afinit je velmi užitečná pro geometry i výtvarníky. Pomocí osové afinity lze přesně sestrojit obrazy podstav těles (mnohoúhelníky, kružnice) ve volném rovnoběžném promítání (obrázky v učebnicích), konstruovat elipsy i jiné křivky, obrazy rovinných řezů na hranolech a válcích, sestrojovat obrazy stínů těles, rozšiřovat škálu „dlaždic k pokrývání“ nebo v písmomalířství výtvarně dotvářet nápisy. Afinní obrazy písma a různých značek vidíme na vodorovném dopravním značení…

Osovou afinitu nevědomky užíváme i při sestrojování grafů k-násobků funkce, je-li dán graf funkce původní. Také při změně velikosti jednotkové úsečky na jedné z os x, y bude nový graf funkce afinním obrazem původního grafu. Na obr. 7 je graf části funkce $y = \sin x$ a graf jeího dvojnásobku, tj. funkce $y = 2\sin x$. Ploška omezená osou x a grafem druhé funkce má obsah dvojnásobný ve srovnání s vyšrafovanou ploškou funkce původní.

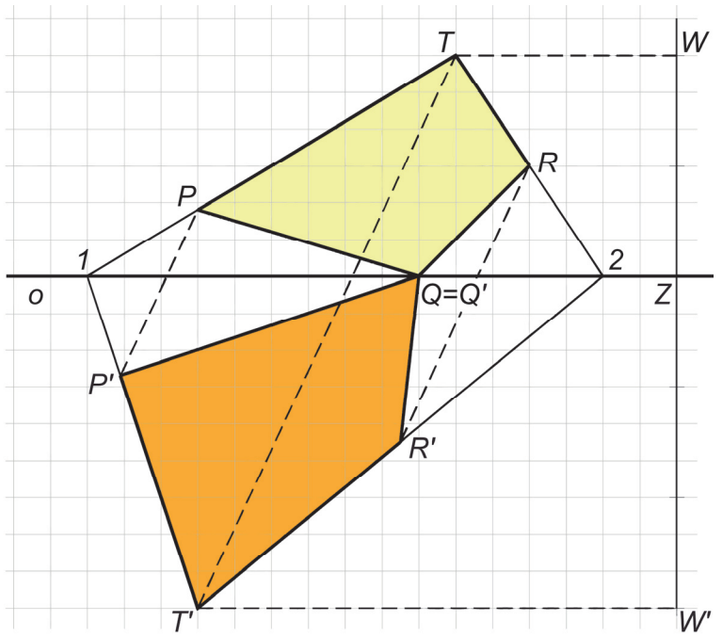


Obr. 7 – Afinní obraz grafu funkce $y = \sin x$

Obecně lze při zadání afinity osou a dvojicí bodů X, X' určit, v jakém poměru budou obsahy každého útvaru a jeho obrazu. Tak na obr. 8 je obsah K', obrazu kruhu K, dvojnásobkem obsahu kruhu K, protože vzdálenosti středu S a jeho obrazu S' od osy afinity jsou v poměru 1 : 2. (Odtud lze také ukázat, že lze obsah vnitřku elipsy vypočíst podle vzorce $S' = \pi ab$. Důkaz to ovšem není.) Poměr obsahů čtyřúhelníků na obrázku 9 je roven 2 : 3.



Obr. 8 – Elipsa jako obraz kružnice k

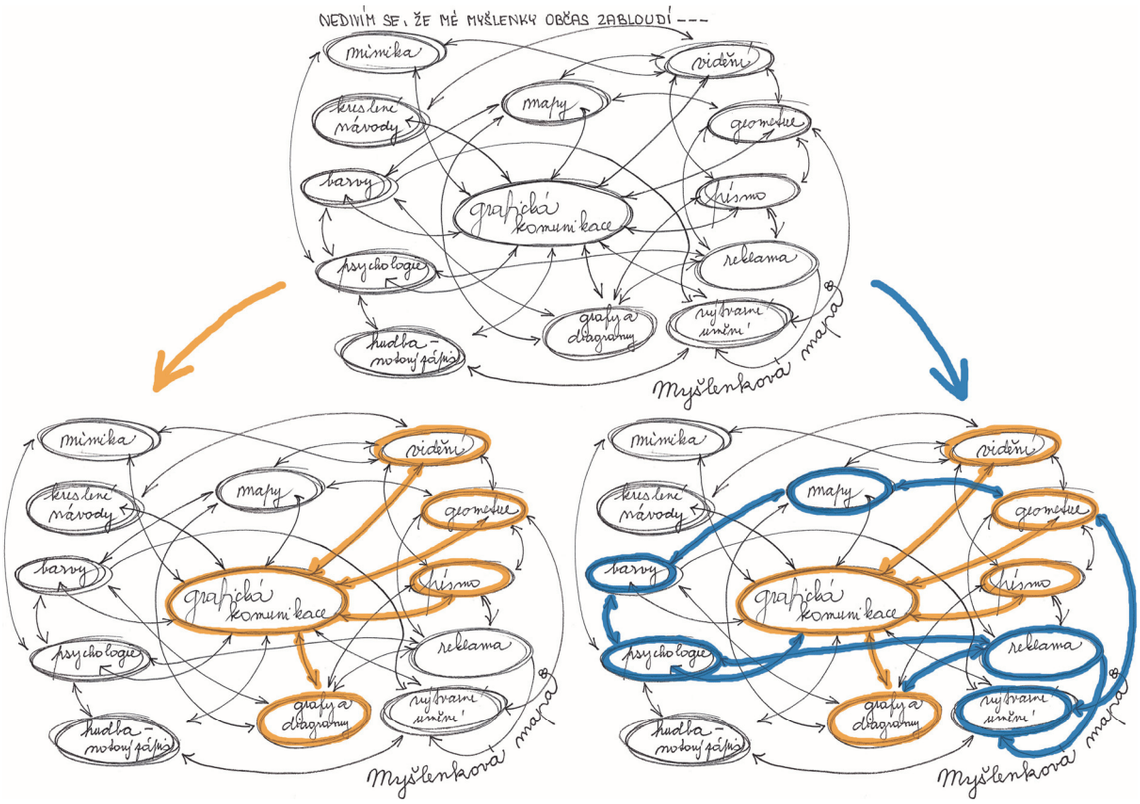


Obr. 9 – Čtyřúhelník a jeho afinní obraz

1.4 Grafická komunikace všude kolem nás

Vše, co nás obklopuje od dětství, považujeme za samozřejmost. Dokonce za takovou samozřejmost, že si mnohé z toho ani neuvědomujeme. Nenapadne nás prostě o tom přemýšlet. Všichni víme, jak důležitý je pro náš život zrak. Chápeme důležitost psaného textu i obrazů, víme, že jsme obklopeni reklamou, řídíme se dopravními značkami, hudebníci dovedou ozvučit notový part… Ale hledat mezi těmito jevy něco společného? Proč?

Kdysi jsem připravovala pro letní školu učitelů matematiky přednášku, která na toto společné chtěla upozornit. Slíbila jsem, že pohovořím obecně o grafické komunikaci. Shodou náhod tehdy v pořadu ČT byla beseda o „správném myšlení“ (nemám ráda takto slibné názvy) a jeden z příspěvků se zabýval tím, že takové přemýšlení o problému musí začít tzv. myšlenkovou mapou. (Není to ovšem pravda, cesty našich myšlenek mohou být mnohem košatější.) A trochu jako recesi jsem si takovou mapu stvořila ke své řeči (obr. 10). V jednotlivých „rybníčcích“ kolem ústředního pojmu grafická komunikace tu plavou slova popisující oblasti, kde lze nějak předávat informace zrakem a obrazem. Těch oblastí je samozřejmě mnohem víc, ale i takto vznikla dost složitá spleť čar. Na obr. 11 jsem barevně zvýraznila, čemu se budu ve své přednášce více věnovat. Tak vznikl myslím dost přehledný obrázek, z něhož mohli učitelé poznat, co je v mém vystoupení čeká. Ve svém barevném rozletu jsem pokračovala zvýrazňováním oblastí a souvislostí „druhého řádu“ (obr. 12). Modrá barva sice obrázek oživila, ale pro letmou prohlídku (tj. stručné seznámení s obsahem řeči) byl výsledek už poněkud nepřehledný.

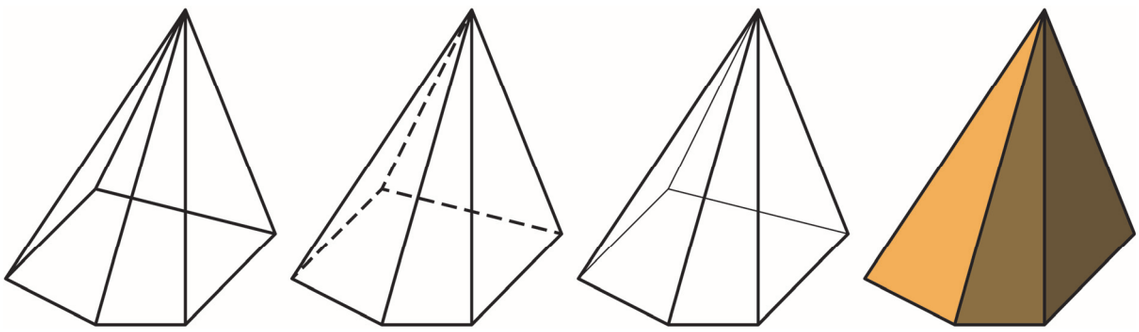


Obr. 10, 11, 12 – Myšlenkové mapy

Z těchto obrázků můžeme vyvodit několik postřehů:
(1) Grafická komunikace je důležitá, protože se týká mnoha oborů a jevů našeho života.
(2) Barva může být nositelem informace.
(3) Je-li něčeho moc, je toho příliš, jak se říká. (Obrázek se může změnit v chaos.)

Grafickou komunikací je jakékoli zachycení a předávání informací pomocí obrazu. Znali ji už naši prapředci rýpající do kůry a kostí značky a obrázky zvěře. V naší době jsou díky snadné reprodukovatelnosti její možnosti takřka neomezené. Proto jsem jejím nejdůležitějším projevům věnovala v brožuře Geometrie a náš svět [5] obecný text pro učitele i poučení pro žáky. (Dále jsem se tam zabývala zejména grafy a možnostmi jejich úprav, protože se o nich málo mluví, ale hojně se s nimi setkáváme. Jejich grafická úprava silně ovlivňuje náš „dojem" z obrazu – tedy to, co si jako informaci odneseme v paměti. Právě „sílu obrazu" často využívá reklama – a to i nekalými prostředky včetně nekorektně geometricky zpracovaných grafů. I s tímto (zne)užitím geometrie bychom měli být všichni seznámeni.)

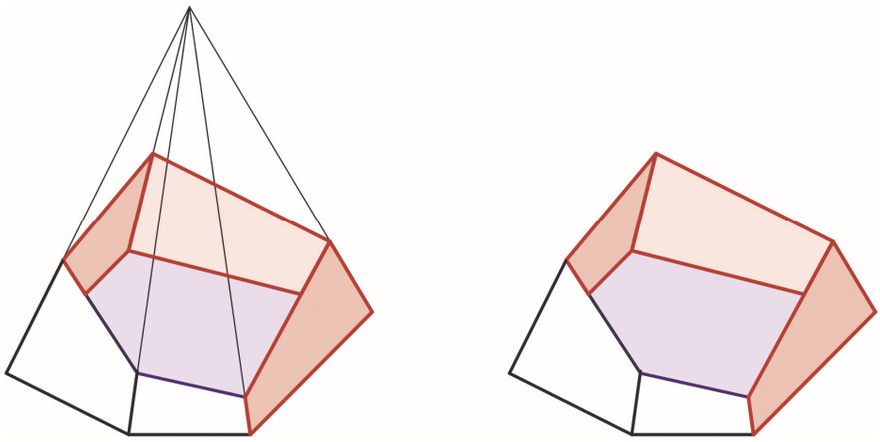
Grafickou komunikací jsou i geometrické obrázky, zakreslené planimetrické útvary i obrazy těles atd. Motivačně vděčné je pokrývání roviny, velmi užitečná jako „lehká nadstavba" je osová afinita. Protože se v brožurce nevěnuji více obrazům stereometrických těles, uvádím aspoň zde na příkladu, jak grafická úprava proměňuje čitelnost obrázků nepravidelného jehlanu.



Obr. 13 – Několik různých úprav obrázků téhož jehlanu

Na obr. 13a vidíme deset různě pospojovaných úseček. Cvičené oko v něm vidí obraz jehlanu, ale po chvilce prohlížení znejistí, protože se mu nabízejí dvě možnosti výkladu viděného. Jde o nadhled, jak jsme zvyklí vlivem školních učebnic, nebo podhled? Obr. 13b díky trojici čárkovaných čar tuto dvojznačnost odstraní. Pro laiky je však ještě vhodnější úprava na obr. 13c. Barevný jehlan je sice nejzajímavější, ale obrázek už ztrácí část informace. Nepoznáme, zda se jedná o trojici trojúhelníků v rovině či jehlan. A pokud jehlan – tak jaký? Vedeni snahou o „krásu či zajímavost" jsme celý obraz vlastně zkazili.

Jestliže jehlan seříznememe rovinou, můžeme jeho obrázek upravit opět několika způsoby. Budeme-li považovat jehlan za „pevné neprůhledné těleso“, vyznačíme z pětiúhelníku řezu jen úsečky ležící na jeho viditelných stěnách. Můžeme též horní část jehlanu odstranit, takže uvidíme obraz řezu, tedy celého pětiúhelníku. Další možnosti (obr. 14) užívají představy „dutého jehlanu“ (řekněme prázdné krabičky tvaru jehlanu). Z obr. 14a je patrné, že jde o spodní díl seříznutého jehlanu, protože jsou zde tence vyznačeny jeho celé hrany. Obr. 14b sice odpovídá lépe skutečnosti (takto bychom opravdu viděli spodní díl oné krabičky), ale už by nebylo tak zřejmé, že jde o část jehlanu. Ony ve skutečnosti pouze pomocné čáry z obr. 14a jsou velmi důležité pro správné pochopení obrazu. (Důležitost takových pomocných čar pro správné čtení informací z grafů popisuje např. kapitolka o jejich úpravách v Atlasu geometrie [4].)

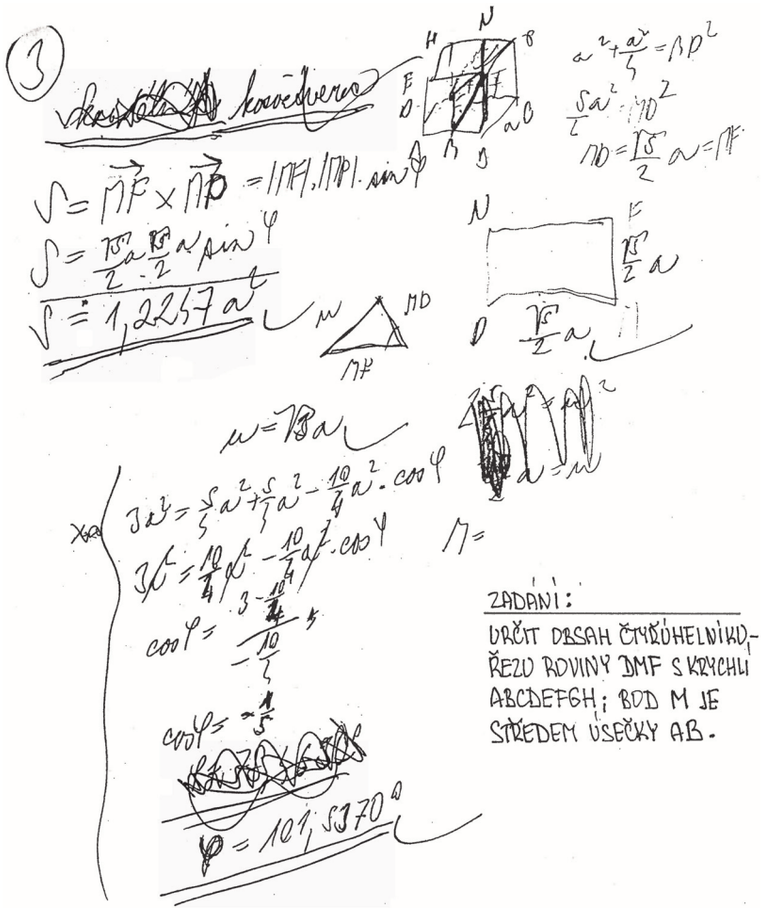


Obr. 14a, b – Duté jehlany seříznuté rovinou

Na závěr mi dovolte několik kritických poznámek o písmu a obecně úpravě písemností. Nyní se stalo takřka módou znevažovat důležitost úpravy (ručního) písemného projevu. Začíná to tvrzením, že děti se nemohou naučit slušně psát, případně že je to vlastně přežitek něco takového po nich chtít, protože přece máme počítače. Počítače sice máme, ale ne vždy po ruce (a hrozím se představy, co se stane, až jednou „nebudou fungovat“), a jejich výtvory jsou vysoce neosobní. To je jistě důležité pro veřejné dokumenty, ale vlastnoručně psaný pozdrav je něco úplně jiného… Můžete namítnout, že jsem staromilec, ale mám i závažné argumenty, proč by se ve škole písmu a celkové úpravě měla věnovat mnohem větší pozornost. Je dokázáno, že rozvíjení motoriky rukou podporuje také rozvoj mozku. Zejména hra na hudební nástroje od raného dětství je velmi přínosná, protože vyžaduje souhru obou rukou a rozvíjí spolupráci mozkových hemisfér. Písmo samo vyžaduje jemnou motoriku a jeho nácvik ji výrazně rozvíjí. Chce to ovšem čas a trpělivost i důslednost učitele (i rodičů, kteří se bohužel snaží nerozumně chránit děti před jakoukoli náročnější „prací“ s výjimkou sportu apod.). A pečlivost spolu s trpělivostí budou potřebovat v životě i děti. Musí se tomu někde učit.

Slušná úprava psaného textu může zlepšit jeho čtivost a zdůraznit logické vazby. My, učitelé matematiky, víme, jak důležitá jsou vhodná schémata a úpravy stránek pro systematické řešení úloh. Často se „vyloupne“ obecné řešení právě ze systematicky zapisovaných postupů několika konkrétních úloh.

U přijímacích zkoušek na MFF jsem často vídala, že ani zájemci o vysokoškolské studium nedovedou vhodně logicky rozvrhnout zápisy řešení na stránce (a občas ani přečíst to, co sami napsali). Značnou měrou se na tom podílí soustavné zneužívání příliš „předkousaných" pracovních sešitů a listů, které nejen že svou úpravou přímo nutí žáky použít jedno určité řešení, ale naznačuje i kam zapsat výsledek v předtištěné odpovědi… Jestliže se dříve takové pracovní sešity jako doplněk učebnic používaly jen v nejnižších ročnících ZŠ, dostaly se postupně až do devátých tříd. (Až budeme mít ve třídách na SŠ žáky píšící zatím ještě pokusným písmem Comenia Script, bude ještě hůře.) Kdo rozezná začátky a konce slov a vzorců, jestliže už nyní studenti nezapíší a nepřečtou po sobě řádně indexy, mocniny a jiné symboly? Tiskací písmo obecně více namáhá ruku, plynulá čára je fyziologicky mnohem snadnější než řada různých krátkých čar.) Neměli bychom z ciziny bezhlavě přejímat „novinky", abychom se jí vyrovnali, abychom „učili nově". Dobrý učitel – pokud mu to systém dovolí – vybírá metody, které nejlépe vyhovují a jsou perspektivní z dlouhodobého hlediska, nikoli metody „hlavně nové, netradiční". (Rozhodovat by nemělo stáří metod, ale jejich úspěšnost.) Také ví, že „okamžitý úspěch" není zdaleka tak důležitý jako celkové trvalé vzdělání, které si absolventi školy odnesou do života.



Obr. 15 – Písemná práce maturanta

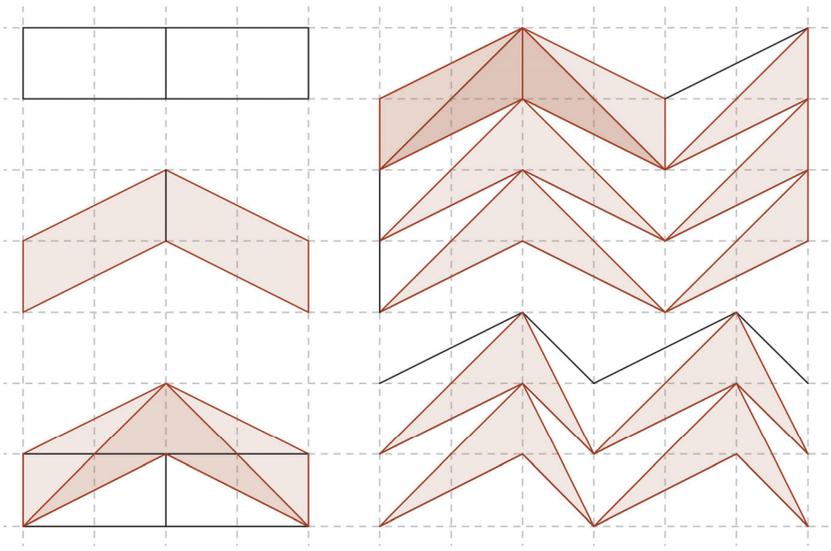
Jistě jste se pokochali obr. 15 – úpravou písemné práce maturanta u přijímacích zkoušek na VŠ. Jak je to s úrovní jeho grafické komunikace posuďte sami.

1.5 Ukázky pracovních listů

Nekonvexní čtyřúhelníkové dlaždice

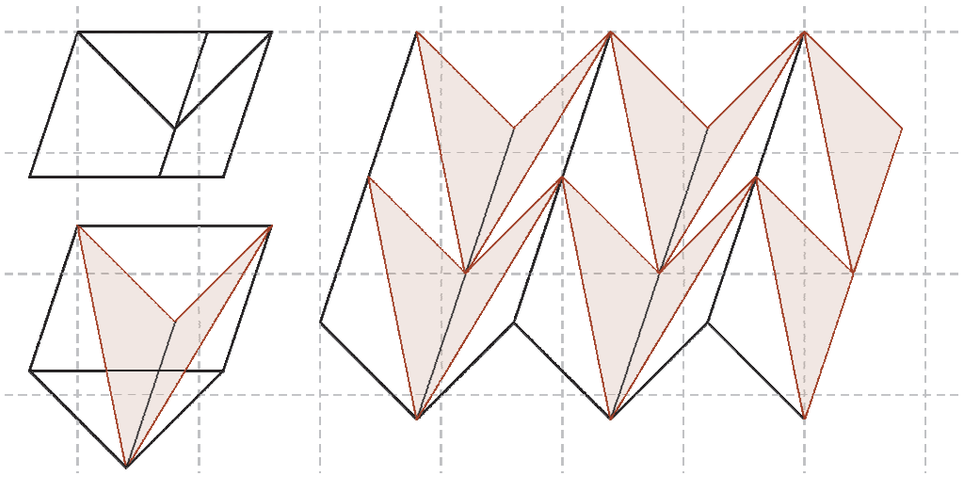
Zajímavé dlaždice můžeme vytvářet pomocí čtvercové, obdélníkové nebo kosodélníkové sítě. Ukažme si jeden z možných postupů takové práce.

1. Nakreslíme síť např. obdélníků (viz obr. 1) a na každé druhé svislé přímce vyznačíme, o kolik „povytáhneme“ vrcholy obdélníků, které na těchto svislých přímkách leží.
2. Nakreslíme šikmé strany všech kosodélníků, které z původních obdélníků vznikly.
3. Ve všech kosodélnících zakreslíme delší úhlopříčku.



Obr. 1 – Konstrukce v obdélníkové síti

Každý nekonvexní čtyřúhelník na obr. 1 se skládá ze dvou trojúhelníků, které patří dvěma sousedním kosodélníkům. Když dlaždice barevně rozlišíme, získáme zajímavý vzor.



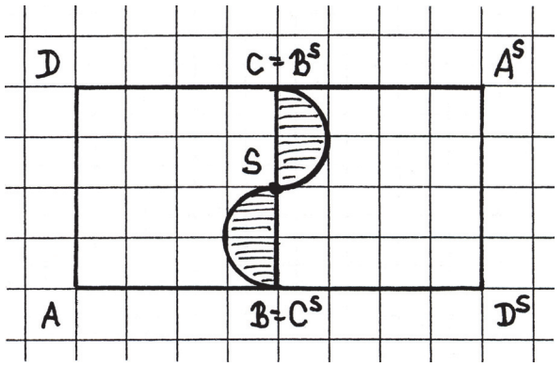
Obr. 2 – Konstrukce v kosodélníkové síti

Dlaždice odvozené ze čtverce

Pomocí středových souměrností lze ze čtverce vytvořit dlaždičky roztodivných tvarů. Popišme si vznik takové dlaždice pomocí obrázků.

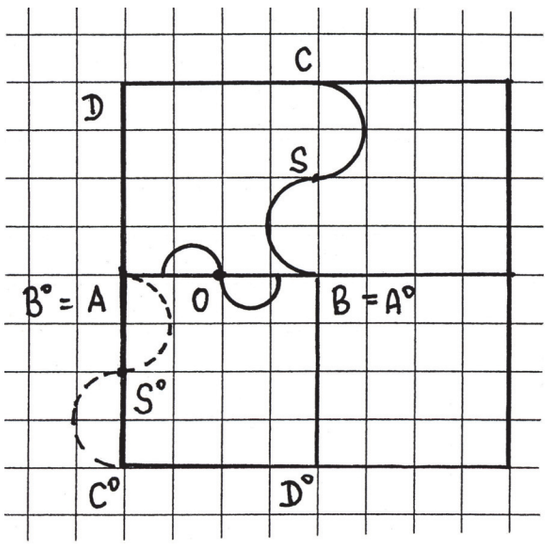
Na obr. 1 jsou zakresleny dvě sousední čtvercové dlaždice. Chceme-li dlaždici *ABCD* upravit na zajímavější tvar, nebudeme měnit polohu vrcholů *A*, *B*, *C*, *D*, ale můžeme zaměnit strany za zajímavější čáry než jsou úsečky. Úsečku *BC* můžeme nahradit jen takovou čárou, která je středově souměrná podle bodu *S*, středu úsečky *BC*, aby se k ní dala sousední dlaždice přiložit. Také vyšrafovaný půlkruh, který jsme dlaždici *ABCD* přidali, byl odkrojen ze sousední dlaždice a proto se jí musí vrátit. (Obsah plochy dlaždic se při těchto proměnách musí zachovat.) Sousední dlaždice je středově souměrná k dlaždici *ABCD* podle středu *S*. Její vrcholy A^s,B^s,C^s,D^s jsou obrazy bodů *A*, *B*, *C*, *D*.

Pokud chceme ještě složitější tvar dlaždice, provedeme totéž s jejími dalšími stranami. Na obr. 2 je tento postup naznačen pro úsečku *AB*. Středem souměrnosti je bod *O*. Čárkovaně je vyznačena upravená strana dlaždice *ABCD* v nové poloze A^o B^o C^o D^o. Celou čtveřici těchto dlaždic – tedy i výsledný dojem z části dlažby – vidíme na obr. 3.

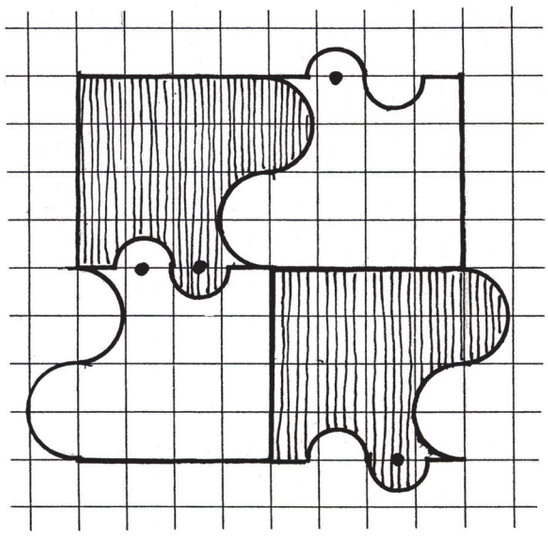


Obr. 1 – Úprava strany BC dlaždice

Úloha (1) Navrhněte ve čtvercové síti podobné dlaždice.



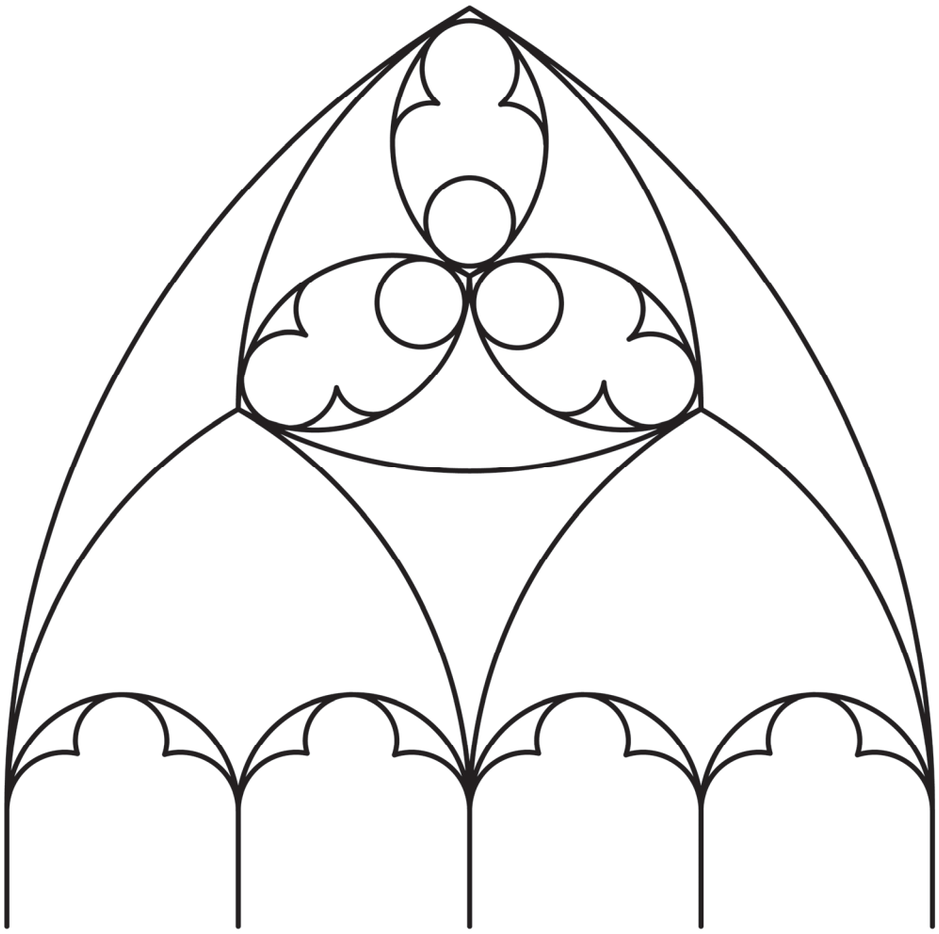
Obr. 2 – Odvození druhé strany dlaždice



Obr. 3 – Celkový vzhled části dlažby

Rekonstrukce sítě gotického okna

Na obrázku je zakreslena část okna gotické katedrály. Pokuste se o rekonstrukci jeho geometrické sítě!



Obr. 1

Úloha (1) Vyhledejte a vyznačte středy všech kružnic sítě.

Úloha (2) Zapište postup vytváření této sítě, která je dána šířkou okenního otvoru. Jednotlivé prvky pečlivě popisujte v textu i na obrázku.

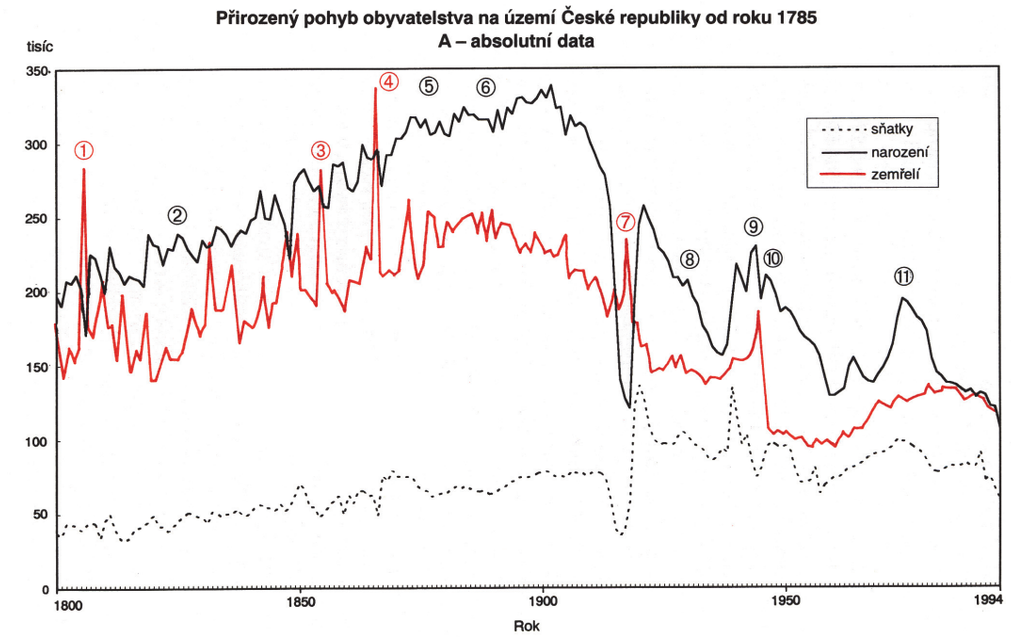
Úloha (3) Vypočtěte obsah „křivočarého trojúhelníku“ (to není termín geometrický, ale užívá se v architektuře), jehož vrcholy splývají s vrcholy tří lomených oblouků sítě. (Porovnejte navzájem své výsledky. Pokud vycházíme z reálného měření, jsou vždy jen přibližné. O způsobech, jak minimalizovat chyby měření, jedná celá matematická disciplína.)

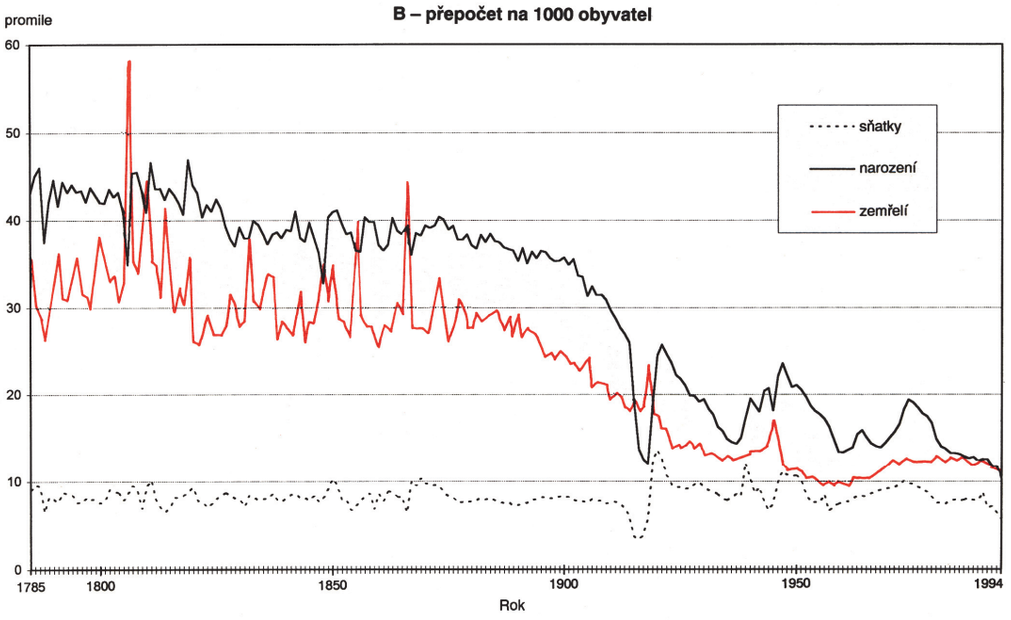
Úloha (4) Navrhněte barevná skla do okna a obrázek lehce kolorujte.

Rekonstrukce kružeb lze provádět také zpracováním fotografií v některých grafických a geometrických programech (AutoCad, Rhino…)

Přepočty hodnot na 1000 obyvatel

Následující dva grafy zachycují tutéž situaci – jednou v „absolutních číslech“, podruhé v přepočtu na 1000 obyvatel. Přepočty nejsou zkresleny změnou celkového počtu obyvatel, vystihují tedy reálný stav (z hlediska obyvatel) lépe. Všimněte si jednotek na svislých osách grafů! Porovnejte třeba skutečný počet úmrtí k významnému vrcholu (4) – pruskorakouská válka – s údajem téhož v přepočtu. Z těchto dvou údajů lze odvodit celkový počet obyvatel našich zemí v této době.



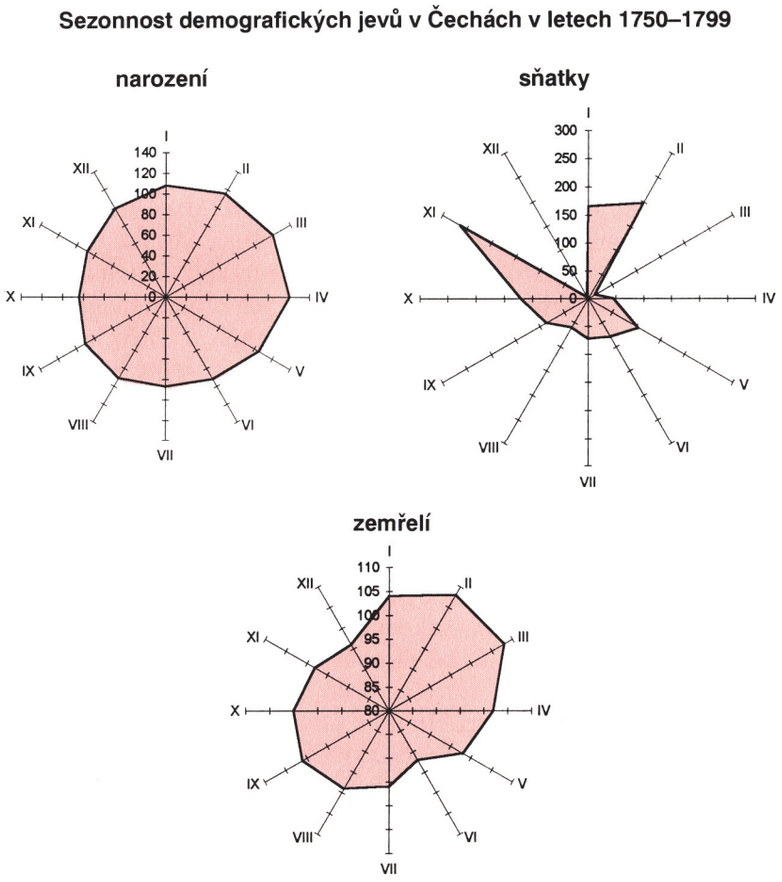


1 epidemie neštovic, 2 počátek poklesu sňatečnosti, 3 epidemie cholery, 4 prusko-rakouská válka a epidemie cholery, 5 počátek poklesu plodnosti, 6 počátek poklesu úmrtnosti, 7 první světová válka, 8 hospodářská krize, 9 vzestup sňatečnosti a „baby-boom“, 10 odsun Němců, 11 natalitní vlna

Polární grafy

Situace, které se opakují v pravidelných intervalech, je možné znázornit tzv. polárním grafem. Jde např. o průměrné srážky naměřené v jednotlivých měsících za n roků, roční (průměrný) chod teplot ap. (Řadu takových údajů najdete v zeměpisném atlase pro střední školy.)

Na našem obrázku jsou na polopřímky vycházející z počátku vyneseny počty narozených, sňatků a úmrtí v jednotlivých měsících roků. Každý z těchto údajů je aritmetickým průměrem počtů 50 zjišťěných událostí z let 1750–1799. Připomínám, že v této době většina obyvatel žila na venkově a žila v podstatě „bez rezerv“ v hospodářství. Zimní úmrtí byla zpravidla způsobena nedostatkem stravy. Naproti tomu sňatky (díky katolickému venkovu) byly ovlivněny církevním kalendářem (v adventu a půstu před velikonocemi svatba nepřipadala v úvahu) a letní usilovnou prací na polích.



Úloha (1) Sestrojte na základě takového grafu graf sloupkový (stejně jako v atlase). Nezapomínejte, že lomená čára ohraničující „vnitřek grafu“ nic nevypovídá. Slouží pouze k tomu, abychom snadněji našli vyznačené hodnoty pro jednotlivé měsíce.

Úloha (2) Vyhledejte v atlase sloupkový graf průměrných dešťových srážek během roku a sestrojte jemu odpovídající graf polární.

Stromy života

Zajímavý celkový přehled o složení společnosti s přihlédnutím k pohlaví, věku a rodinného stavu umožňuje grafické znázornění, jemuž se někdy říká strom života. K jeho sestavení je zapotřebí provést nejprve důkladné statistické zjišťování: sčítání obyvatel, které v současné době organizuje statistický úřad naší republiky. Současně se vždy provádí i sběr dalších dat (národnost, bydliště, vybavení domácností atd.), která se dále zpracovávají pro potřeby plánování ap.

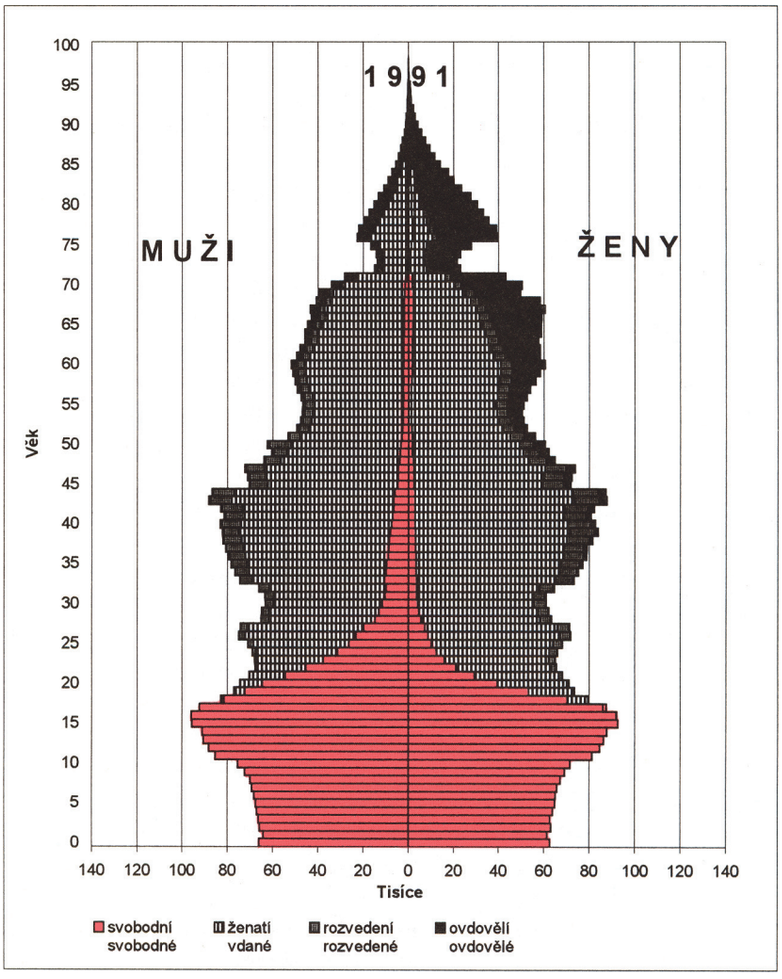
Strom života na obrázku popisuje obyvatelstvo k roku 1991. V tomto roce žilo v naší republice zhruba 65 tisíc chlapců mladších jednoho roku a jen o málo méně stejně starých děvčat. To nám říká nejnižší vodorovná vrstvička v grafu. Porovnáním pravé a levé strany stromu života rychle zjistíme např. že svobodných třicetiletých mužů bylo více než svobodných žen téhož věku, že mezi penzisty převažují ženy, že zhruba od roku 1975 klesala porodnost (rodilo se ročně stále méně dětí) a mnoho jiných zajímavostí.

Úloha (1) Vezměte si průhledné pravítko a přiložte ho vodorovně tak, abyste správně odhadli počty sedmdesátiletých mužů a žen. Mužů i žen jen o 2 roky starších je mnohem méně. Zjistěte, co by mohlo být příčinou tohoto nápadného úbytku!

Úloha (2) Připomeňte si historické události 20. století a zjistěte, jak ovlivnily tvar stromu života.

Úloha (3) Vyhledejte na grafu roky narození rodičů a zjistěte, kolik lidí tehdy v našich zemích (Čechy, Morava) žilo.

Úloha (4) Umíte z grafu vyčíst ještě něco?



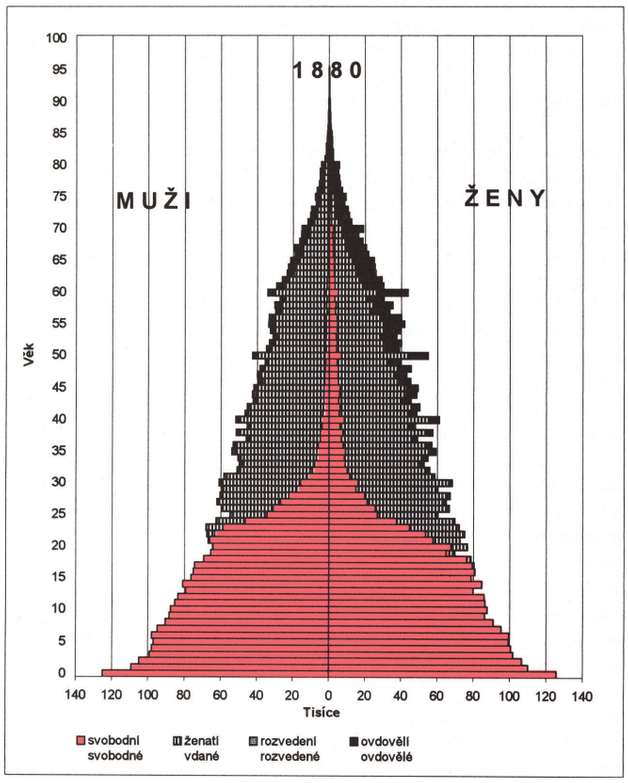
Mnohem více než z „jednoho stromu“ (tedy z jednoho statistického šetření) můžeme zjistit porovnáním většího počtu šetření z různých let. Pro zajímavost jsou zde ještě grafy pro roky 1930 a 1880.

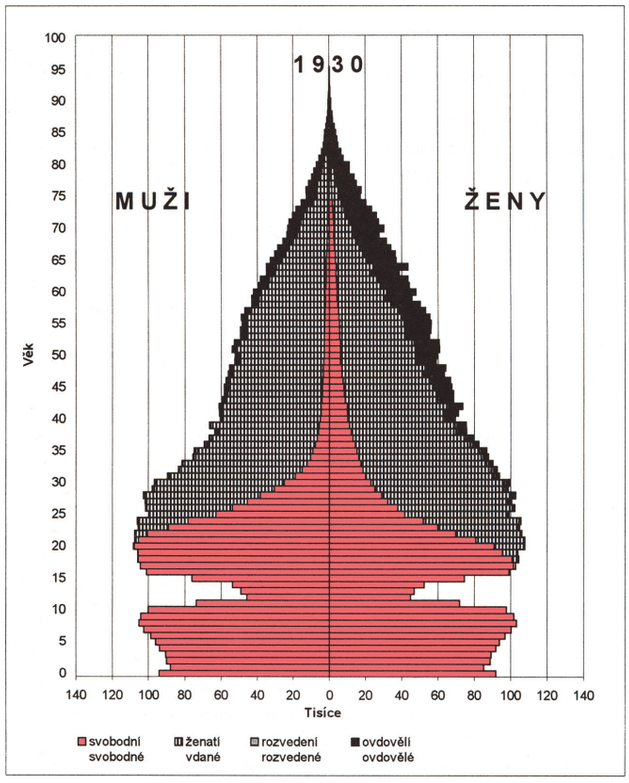
Úloha (5) Graf pro rok 1880 má zhruba tvar rovnoramenného trojúhelníku. Porovnejte počty novorozenců a dětí jednoletých! (Velká dětská úmrtnost!) Lze něčím zdůvodnit skokové nárůsty počtu lidí padesáti a šedesátiletých? (Prolistujte učebnice dějepisu!) V podstatě ale zde populace stárne přirozeně. Graf svědčí o celkem konstantních podmínkách k životu.

Úloha (6) Porodnost v roce 1930 byla menší než v roce 1880. Nejnápadnější na tvaru grafu je jeho „vykousnutí“, obraz krizového období pro společnost. Čím bylo způsobeno? Taková nerovnoměrnost přináší dále různé problémy hospodářské i sociologické.

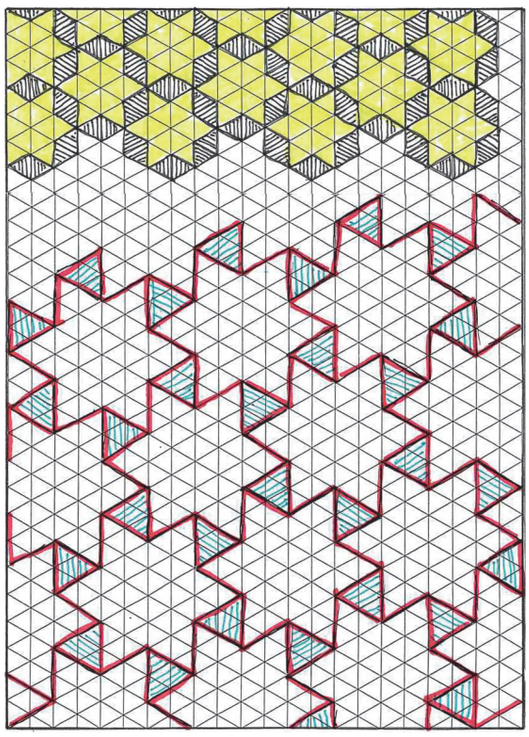
Úloha (7) Strom života pro rok 1991 je velmi nepravidelný. Svědčí o špatném, nenormálním stavu populace.

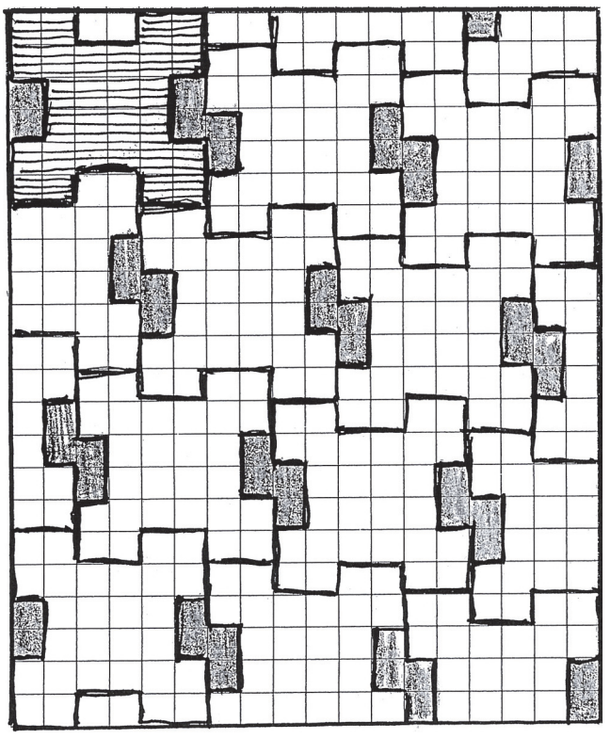
Podobně lze znázornit i stav jakékoli populace živých jedinců z říše zvířat i rostlin.

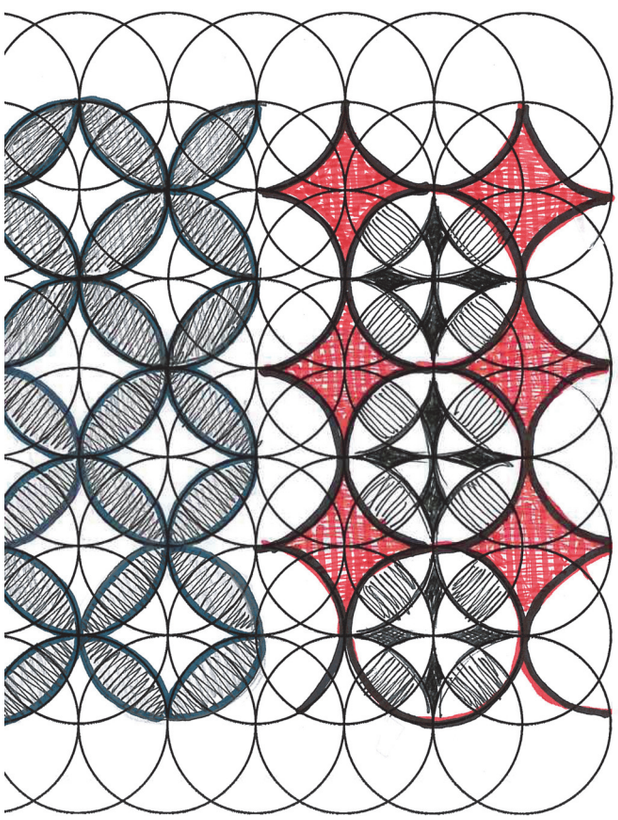


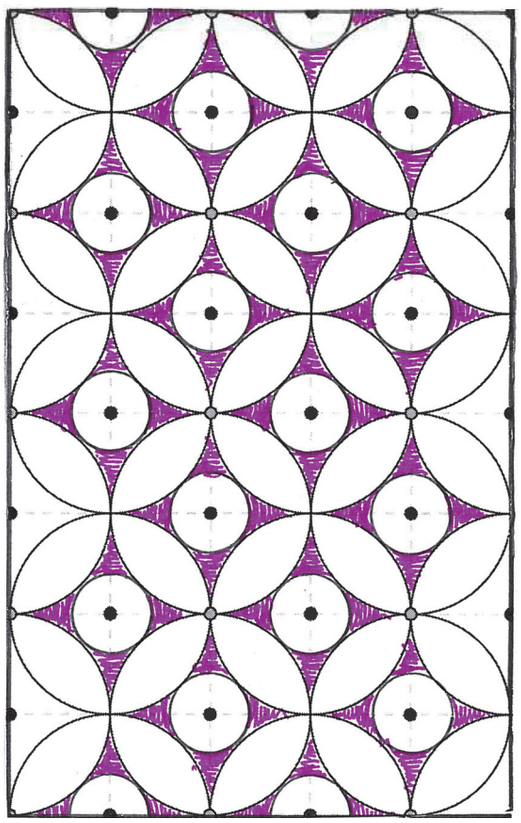


Ukázky z částí pracovních listů









1.6 Literatura

[1] Fialová L. a kol, *Dějiny obyvatelstva českých zemí*, Mladá fronta, 1998

[2] Issam as-Said, Parman Ayse, *Geometrická koncepce v islámském umění*, Argo, 2008

[3] Klíma J., Šimek K., *Kamenořez*, Praha, Edice Cesta k umění, 1942

[4] Kolektiv, *Atlas geometrie aneb Geometrie krásná a užitečná*, Praha, Academia, 2012

[5] Šarounová A., *Geometrie a náš svět*, výukový a metodický text z projektu OPPA, Praha, 2012

[6] Šarounová A., *Souměrnosti v rovině*, Veset Plzeň, 1993

Webové stránky MFF UK Praha – Katedra didaktiky matematiky – studentské práce diplomové a bakalářské <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/index.php>:

[A] Quitnerová L., *Geometria v reklame – grafické zobrazovanie*, 2006

[B] Stodolová K., *Úvod do ovládání Geogebry*, 2011

2. Matematika a budování finanční gramotnosti

Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní a rodinný rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků s ohledem na měnící se životní situace.

2.1 Složky finanční gramotnosti

Finanční gramotnost se skládá ze tří složek:

- peněžní gramotnosti
- cenové gramotnosti
- rozpočtové gramotnosti

Peněžní gramotnost zahrnuje kompetence nutné pro správu hotovostních a bezhotovostních peněz a transakcí s nimi. Jedná se například o kontrolu faktur, vyúčtování služeb za elektrickou energii, plyn, telefon, internet, o kontrolu výpisů z bankovních účtů, stavebního spoření, důchodového či životního připojištění. K důležitým transakcím s penězi, se kterými se žák ve svém životě může setkat, patří také směna korun za zahraniční měnu.

Cenová gramotnost vymezuje kompetence nezbytné pro porozumění cenovým mechanismům a inflaci. Součástí této složky je porozumění ceně jako součtu nákladů, zisku a DPH a jejím změnám v souvislosti s místem a časovým obdobím. V této souvislosti je důležité u žáků rozvíjet dovednost rozpoznávat běžné cenové triky. Jedná se například o slevy zboží typu „sleva na **vybrané** druhy zboží“ (sleva se většinou týká jen neatraktivního zboží či malé části sortimentu), „sleva 30 % až 70 %“ (většina zboží je zlevněna jen o 30 %), „sleva **až** o 70 %“ (některé druhy zboží nejsou zlevněny, mohou být dokonce zdraženy). Dalším příkladem cenových lákadel jsou „cena **od**“ (cena nejzákladnější verze automobilu, cena zájezdu mimo sezónu), „dva za cenu jednoho“, (blížící se konec spotřební lhůty, neprodejnost výrobku), „1+1“ (neprodejnost druhého výrobku).

S tématem slev souvisí rovněž porozumění vztahu mezi výší slevy a cenou zboží před zlevněním (menší sleva z nižšího základu v jedné prodejně může být výhodnější než větší sleva z vyššího základu ve druhé prodejně). Opatrnost je na místě i při nabízení výrobku či služby bez uvedení DPH (zvýšení konečné ceny).

Rozpočtová gramotnost je založena na kompetencích nezbytných pro správu osobního a rodinného rozpočtu, finančních aktiv (např. vkladů, investic a pojištění) a finančních závazků (např. úvěrů, koupě na splátky nebo leasingu). To předpokládá orientaci na trhu finančních produktů a služeb, schopnost mezi sebou jednotlivé produkty či služby porovnávat a volit ty nejvhodnější s ohledem na konkrétní životní situaci.

Jednotlivé složky finanční gramotnosti se na střední škole prolínají v různých vzdělávacích oblastech. *Matematika a její aplikace* by se měla zaměřit zejména na rozvíjení rozpočtové gramotnosti, neboť zde se uplatní matematický aparát pro široký repertoár úloh spadajících do finanční matematiky. V dalším textu se proto soustředíme na různé okruhy problémů z rozpočtové gramotnosti, uvedeme i konkrétní ilustrace.

Podrobnější informace lze nalézt například na těchto stránkách:

- http://www.msmt.cz/vzdelavani/system-budovani-financni-gramotnosti-na-zakladnich-a-strednich-skolach
- http://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=2939

2.2 Úroková sazba a úrok

Základním předpokladem pro úspěšné řešení úloh ze světa finanční matematiky je pochopení pojmů úroková sazba, úrok a daň z úroku.

Úrok je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz.
Roční **úroková sazba (úroková míra)** odpovídá podílu úroku získaného za rok a zapůjčeného kapitálu. Vyjadřuje se v procentech nebo ve tvaru desetinného čísla.
Daň z úroku je procentuální část úroku, jejíž výši stanovuje pro jednotlivé vkladové produkty stát a která se také státu odvádí.

Dalšími důležitými pojmy jsou úroková doba a úrokovací období.

Úroková doba je časový úsek, po který je kapitál (vklad, resp. úvěr) úročen.
Úrokovací období je časový úsek mezi dvěma bezprostředně po sobě následujícími úročeními.

Finanční instituce při výpočtech úroku užívají různé finanční standardy. V celé kapitole budeme používat **standard 30E/360**, ve kterém má každý finanční měsíc 30 dní a finanční rok 360 dní. Tento standard je pro odvození vzorců a výpočty nejjednodušší.

Nyní se zaměříme na termínované vklady a ukážeme si, co ovlivňuje výši úrokové sazby, a tedy i úrok. U termínovaných vkladů se vždy uvádí doba jejich splatnosti.

Doba splatnosti vkladu je doba, po jejímž ukončení je věřitel oprávněn získat od dlužníka zapůjčený kapitál zpět.

Termínovaný vklad (termínovaný účet) je typ vkladu, jehož doba splatnosti může být několik dnů až několik let.
Daň z úroku pro termínované vklady činí 15 %.

V následující tabulce jsou uvedeny *roční* úrokové sazby v závislosti na výši vloženého kapitálu a úrokové době. Předpokládáme, že banka úročí vždy pouze jednou, v den splatnosti vkladu. Vzhledem k tomu, že uvedené úrokové sazby jsou roční, je třeba při výpočtu úroku počítat s odpovídající částí roku, a tedy i s částí úrokové sazby (např. při roční úrokové sazbě i a při úrokové době 6 měsíců je odpovídající části úrokové sazby $\frac{i}{2}$).

Tab. 1 – Termínovaný vklad

Termínovaný vklad				
Úroková doba	**1. pásmo**	**2. pásmo**	**3. pásmo**	**4. pásmo**
	do 149 999 Kč	**od 150 000 Kč do 499 999 Kč**	**od 500 000 Kč do 999 999 Kč**	**od 1 000 000 Kč**
1 měsíc	0,20	0,25	0,30	0,30
3 měsíce	0,25	0,30	0,35	0,40
6 měsíců	0,40	0,50	0,55	0,65
9 měsíců	0,60	0,70	0,75	0,80
12 měsíců	0,85	0,85	0,90	1,00

Z tabulky je vidět, že úroková sazba je podle výše vkladu rozdělena do čtyř pásem. Při přechodu do vyššího pásma se úroková sazba zvyšuje nebo zůstává aspoň stejná. Banka tím oceňuje vkladatele, kteří přicházejí s vyšším kapitálem. Následující ilustrace názorně ukazuje „skok“ úroku z vloženého kapitálu při přechodu do vyššího pásma.

Ilustrace
Pokud klient uloží na termínovaný vklad na 6 měsíců částku 149 999 Kč, činí úrok u před zdaněním a po zaokrouhlení na haléře

$$u = \frac{0{,}004\,0}{2} \cdot 149\ 999\ \text{Kč} \doteq 300{,}00\ \text{Kč}$$

a úrok u' po zdanění a zaokrouhlení na haléře

$$u' = 0{,}85 \cdot \frac{0{,}004\,0}{2} \cdot 149\ 999\ \text{Kč} \doteq 255{,}00\ \text{Kč}.$$

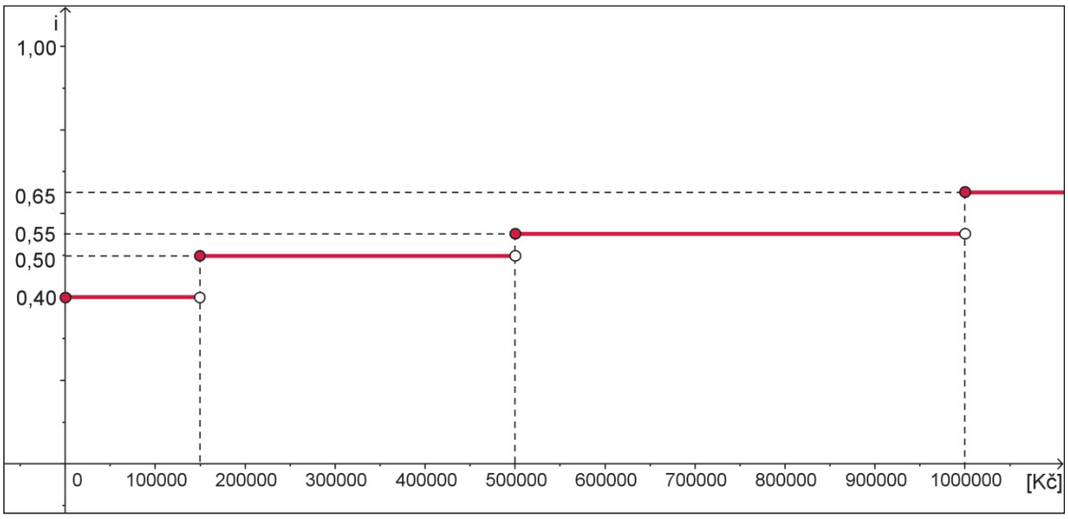
Vloží-li o korunu více, tj. 150 000 Kč, činí úrok po zdanění

$$u' = 0{,}85 \cdot \frac{0{,}005\,0}{2} \cdot 150\ 000\ \text{Kč} = 318{,}75\ \text{Kč}.$$

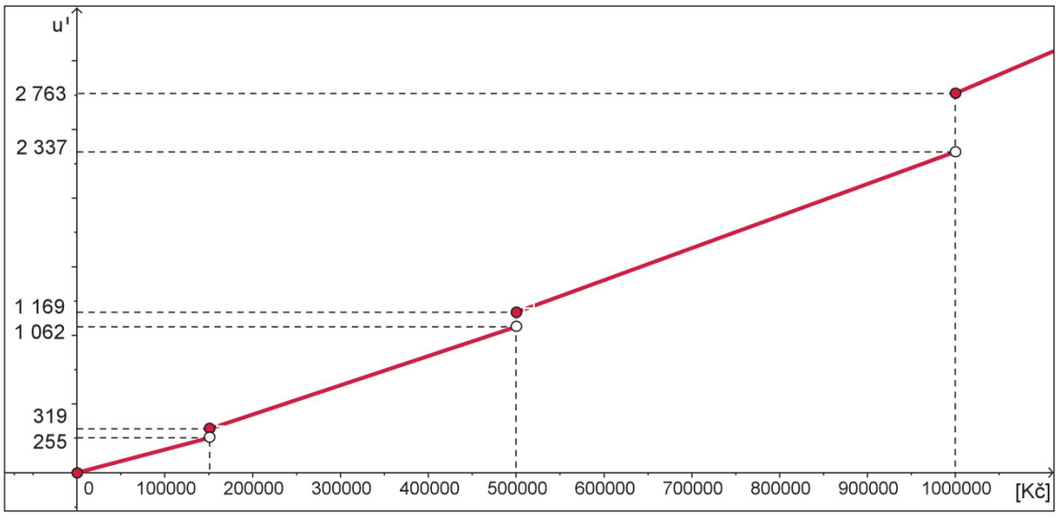
Rozdíl v úrocích po zdanění tedy činí 63,75 Kč.

Obrázky 1 a 2 na následující straně zachycují závislost úrokové sazby i a úroku u' po zdanění na vložené částce (údaje jsou vztaženy k tab. 1).

Dalším parametrem, který ovlivňuje výši úrokové sazby, a tedy i úroku, je úroková doba. Z tabulky 1 je opět vidět, že s rostoucí úrokovou dobou se v každém pásmu zvyšuje úroková sazba. Důvodem je skutečnost, že banka může disponovat s penězi vkladatele po delší dobu.



Obr. 1 – Závislost úrokové sazby *i* na vložené částce pro úrokovou dobu 6 měsíců



Obr. 2 – Závislost zdaněného úroku *u'* na vložené částce pro úrokovou dobu 6 měsíců

Z tabulky 1 je vidět, že uvedené úrokové sazby jsou poměrně nízké a nepokrývají v současné době ani inflaci. Reálná úroková míra je pak nižší než míra inflace a reálná hodnota vloženého kapitálu ve skutečnosti klesá.

Inflace je znehodnocování měny způsobené růstem cen.
Reálná úroková míra i_r je úroková míra, která je při nízkých hodnotách míry inflace i_i a při dani z úroku d % dána vztahem

$$i_r \approx \left(1 - \frac{d}{100}\right) \cdot i - i_i ,$$

kde *i* je roční úroková sazba (tzv. nominální úroková sazba, kterou udávají banky). Z výše reálné úrokové míry lze usoudit, zda hodnota vloženého kapitálu *reálně* vzroste (a jde tedy skutečně o zisk), nebo zda *reálně* poklesne (a jde tedy o ztrátu).

Termínované vklady představují pro občana bezpečné uložení peněz. Založení termínovaného vkladu však často pro vkladatele znamená, že vložený kapitál ani jeho část nemůže bez sankcí předčasně vyzvednout.

Sankce (sankční poplatek) u termínovaných vkladů je poplatek, který odvede majitel vkladu bance při nedodržení podmínek vkladu (tj. při předčasném výběru).

Ilustrace
Klient uložil na termínovaný vklad na 6 měsíců částku 150 000 Kč s úrokovou sazbou 0,50 %. Po 3 měsících zjistil, že vložené peníze nutně potřebuje, a rozhodl se peníze předčasně vybrat a převést je na běžný účet. Sankce za předčasný výběr činí 1,50 % z vybírané částky. Banka nejdříve klientovi vklad zúročí a zdaní (počítá s jednou čtvrtinou uvedené úrokové sazby):

$$u' = 0{,}85 \cdot \frac{0{,}005\,0}{4} \cdot 150\,000\ \text{Kč} \doteq 159{,}38\ \text{Kč}$$

Úrok po zdanění činí 159, 38 Kč.
Následně banka vypočítá sankční poplatek *s*:

$$s = 150\,000\ \text{Kč} \cdot 0{,}015 = 2\,250\ \text{Kč}$$

Klient tedy dostane

150 000 Kč + 159,38 Kč – 2 250 Kč = 147 909,38 Kč.

Klient tak místo zisku má ztrátu ve výši 2 090,62 Kč.

Některé banky v dané situaci nepožadují nutně sankční poplatek, ale nabízejí klientovi na zbývající dobu do dne splatnosti úvěr, který je garantován příslušným termínovaným vkladem.

Ilustrace
Klient uložil na termínovaný vklad na 6 měsíců částku 150 000 Kč s úrokovou sazbou 0,50 %. Po 3 měsících zjistil, že vložené peníze nutně potřebuje, a rozhodl se peníze předčasně vybrat a převést je na běžný účet. Banka nabídla klientovi úvěr ve výši 150 000 Kč na dobu tří měsíců s úrokovou sazbou 13 %. Předpokládá se, že banka úročí pouze jednou, a to v den splatnosti úvěru.
Na konci šestého měsíce banka termínovaný vklad zúročí a úrok zdaní:

$$u' = 0{,}85 \cdot \frac{0{,}005\,0}{2} \cdot 150\,000\ \text{Kč} = 318{,}75\ \text{Kč}$$

Dále banka vypočítá úrok z úvěru:

$$u = \frac{0{,}13}{4} \cdot 150\,000\ \text{Kč} = 4\,875\ \text{Kč}$$

Klient tedy dostane

150 000 Kč + 318,75 Kč – 4 875 Kč = 145 443,75 Kč.

Ztráta klienta je vyšší než v prvním případě, činí 4 556,25 Kč.

V poslední ilustraci jsme neuvažovali žádné poplatky za zřízení a vedení úvěru, ve skutečnosti by byla ztráta ještě vyšší.

Další informace jsou dostupné například na těchto stránkách:

- http://www.mesec.cz/sporeni/terminovane-vklady/pruvodce/
- http://www.finance.cz/ucty-a-sporeni/terminovane-vklady/
- http://www.penize.cz/terminovane-vklady

2.3 Jednoduché a složené úročení

Důležitou součástí finanční gramotnosti je pochopení podstaty jednoduchého úročení a složeného úročení a odlišností mezi nimi.

Jednoduché úročení je způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z počátečního kapitálu.

Pro úrok u_n před zdaněním, úrok u_n' po zdanění a výsledný kapitál K_n na konci n-tého úrokovacího období při jednoduchém úročení a při standardu 30E/360 platí tyto vzorce:

$$u_n = i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n$$

$$u_n' = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right)$$

Přitom
K_0 je počáteční kapitál,
i je roční úroková sazba ve tvaru desetinného čísla,
k je zdaňovací koeficient ($k = \frac{100 - d}{100}$, kde d je daň z úroku vyjádřená v procentech),
t je počet dní úrokovacího období,
n je počet úrokovacích období.

Složené úročení je způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období přičítá k již dosažené hodnotě kapitálu a spolu s ním se dále úročí.

Pro výsledný kapitál K_n na konci n-tého úrokovacího období při složeném úročení a při standardu 30E/360 platí tento vzorec:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

Symboly K_0, i, k, t a n mají stejný význam jako ve vzorci pro K_n při jednoduchém úročení.

Rozdíly mezi jednoduchým úročením a složeným úročením lze ilustrovat na příkladě.

Ilustrace

Petr (věřitel) půjčuje Pavlovi (dlužníkovi) 100 Kč na dva roky. Jako odměnu bude chtít za každý rok 10 % z dluhu. Petr splatí celý dluh i s úroky až na konci druhého roku. Kolik to bude korun celkem?

Jsou dvě možnosti:

- Petr očekává na konci prvního i druhého roku 10 % z půjčené částky, tj. 10 Kč. Celkově tedy Pavel bude vracet Petrovi na konci druhého roku 120 Kč.
- Petr počítá s tím, že na konci prvního roku vzroste dluh na 110 Kč, úrok z této částky činí na konci druhého roku 11 Kč. Pavel by musel vrátit Petrovi na konci druhého roku 121 Kč.

V uvedené ilustraci jde v prvním případě o jednoduché úročení (úrok se stále počítá z vloženého kapitálu), ve druhém případě se jedná o složené úročení (úrok se na konci prvního roku přičítá k vloženému kapitálu a spolu s ním se dále úročí).

Při řešení konkrétních úloh z oblasti vkladů a úvěrů je třeba zjistit, zda se v dané situaci jedná o jednoduché či složené úročení. Typickým příkladem využití jednoduchého úročení v praxi jsou dluhopisy. Dluhopisy jsou příkladem cenných papírů.

Cenný papír je listina či listinu nahrazující záznam, s nímž je svázána určitá hodnota, majetek a majetkový prospěch.

Při investování do cenných papírů se obvykle namísto o úroku před zdaněním a úroku po zdanění hovoří o **hrubém výnosu** a **čistém výnosu.** Namísto termínu úroková sazba se užívá častěji **míra výnosu** (nebo míra výnosnosti, výnosnost, výnosové procento, výkon apod.).

Dluhopis (obligace) je *cenný papír*, kterým se dlužník vydávající tento papír zavazuje jeho majiteli, že mu splatí dlužnou částku včetně odpovídajícího úroku, a to ve stanovených termínech. Dluhopisy lze dělit podle dlužníka na státní, komunální, korporátní (podnikové), bankovní.

Ilustrace

Klient zakoupil 5leté dluhopisy po jedné koruně, celkem za 50 000 Kč. Z úroků se v tomto případě daň neplatí. Roční úrokové sazby (míry výnosu) jsou uvedeny v tabulce 2.

Tab. 2 – Úroková sazba dluhopisu

5letý dluhopis	
Období	**Úroková sazba**
První rok	1,00 %
Druhý rok	2,00 %
Třetí rok	3,00 %
Čtvrtý rok	4,50 %
Pátý rok	6,00 %

Na konci každého roku bude klient po dobu 5 let dostávat na běžný účet úrok z vložené částky, tj. z 50 000 Kč. Na konci pátého roku obdrží spolu s úrokem (výnosem) i vložený kapitál.
Na konci prvního roku získá 500 Kč, na konci druhého roku 1 000 Kč, na konci třetího roku 1 500 Kč, na konci čtvrtého roku 2 250 Kč a na konci pátého roku obdrží 53 000 Kč. Celkový zisk je 8 250 Kč. (Průměrná roční míra výnosu je 3,3 %.)

Některé dluhopisy mohou být diskontované. K vysvětlení tohoto pojmu je třeba nejdříve vysvětlit, co je diskont a diskontní sazba.

Diskont je úrok, který se nevztahuje k počátečnímu kapitálu, ale ke splatné částce, tj. k částce, kterou dlužník vyplácí věřiteli na konci úrokové doby.
Diskontní sazba je úroková sazba vázaná na splatnou částku.

Vysvětlíme si tyto pojmy pomocí jednoduché ilustrace.

Ilustrace
Petr si opět potřebuje půjčit od Pavla 100 Kč, tentokrát na rok.
Jsou dva možné případy.

- Pavel půjčí Petrovi 100 Kč s úrokovou sazbou 10 % na jeden rok. Po roce obdrží od Petra 110 Kč.
- Pavel si ponechá 10 % z požadované částky 100 Kč a půjčí Petrovi jen 90 Kč. Po jednom roce obdrží od Petra 100 Kč. (Zde jde o diskontní sazbu vztaženou k cílové částce 100 Kč.)

V obou případech je sazba 10 %, ale vztahuje se k různým základům. Výhodnější je pro Pavla (věřitele) diskontní sazba, neboť půjčuje menší částku a přitom odměna 10 Kč je stejná jako v prvním případě.

Petr je v druhém případě právem nespokojen. Chtěl si půjčit 100 Kč a dostal jen 90 Kč. O kolik korun musí požádat Pavla, aby skutečně 100 Kč obdržel?
Když požádá o x Kč, dostane $0{,}9x$ Kč a mělo by platit

$$0{,}9x = 100,$$

odkud je

$$x = 111{,}111\ldots$$

Stačí, aby Petr požádal o 111 Kč. Pokud Pavel zaokrouhluje podle matematických pravidel, na výplatu 100 Kč to stačí.

Nyní už můžeme přistoupit k řešení reálné úlohy týkající se diskontovaného dluhopisu.

Ilustrace
První klient zakoupil jednoletý dluhopis za 50 000 Kč s úrokovou sazbou 2 %.
Druhý klient zakoupil jednoletý diskontovaný dluhopis o celkové hodnotě 50 000 Kč s diskontní sazbou 2 %.
V obou případech činila daň z úroku 15 %.

- První klient po roce obdržel 50 000 Kč a zdaněný úrok:

$$u' = 0{,}85 \cdot 0{,}02 \cdot 50\ 000\ Kč = 850\ \text{Kč}$$

  Na konci roku tedy obdržel 50 850 Kč.
- Druhý klient při koupi zaplatil

$$(1{,}00 - 0{,}02) \cdot 50\ 000\ \text{Kč} = 49\ 000\ \text{Kč}.$$

  Úrok před zdaněním činil 1 000 Kč, po zdanění 850 Kč. Na konci roku tak druhý klient obdržel částku 49 850 Kč.

Zisk obou klientů je stejný, druhý klient jej však získal z nižšího vkladu. Diskontní sazba 2 % je pro věřitele výhodnější než úroková sazba 2 %.

Jedním z charakteristických příkladů užití složeného úročení v praxi je termínovaný vklad s revolvingem (s opakováním).

Termínovaný vklad s revolvingem (s opakováním) je typ termínovaného vkladu, který je automaticky obnovován, pokud není vypovězen.

Ilustrace

Klient vložil na termínovaný vklad s revolvingem na 1 měsíc částku 150 000 Kč. Termínovaný vklad je tedy automaticky obnovován vždy po jednom měsíci, pokud klient nepožádá o ukončení vkladu. Daň z úroku je 15 %.

Klient vypověděl vklad po 6 měsících, po celou dobu byla úroková sazba neměnná a činila 0,25 %.

Jedná se o složené úročení v délce 6 měsíčních úrokovacích období, úroková sazba činí v každém tomto období jednu dvanáctinu z 0,25 %. Pro výsledný kapitál platí:

$$K_6 = K_0 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{i}{12}\right)^6 = 150\ 000\ \text{Kč} \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}002\,5}{12}\right)^6 \doteq 150\ 159{,}45\ \text{Kč}$$

Zisk klienta je 159,45 Kč.

V předchozí ilustraci byla úroková sazba po celou dobu neměnná. V praxi tomu však často nebývá, úroková sazba se může v jednotlivých úrokovacích obdobích měnit.

Ilustrace

Uvažujme předchozí situaci s jedinou změnou. V prvním a druhém měsíci byla úroková sazba 0,25 %, ve třetím až šestém měsíci se snížila na 0,15 %. Výsledný kapitál vypočítáme takto:

$$K_6' = 150\ 000\ \text{Kč} \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}002\,5}{12}\right)^2 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{0{,}001\,5}{12}\right)^4 \doteq 150\ 116{,}91\ \text{Kč}$$

Zisk klienta je menší než v předchozím případě, činí 116,91 Kč.

Podrobnější informace lze dohledat například na následujících stránkách:

- http://cs.wikipedia.org/wiki/Dluhopis
- http://www.penize.cz/15922-cleneni-dluhopisu
- http://www.sporicidluhopisycr.cz/cs/

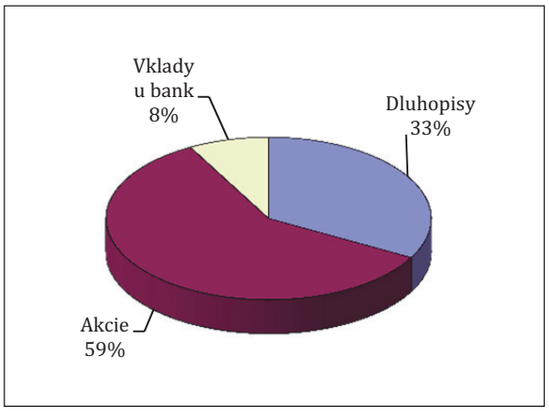
2.4 Investice

V této části se zaměříme na dva typy investic: na podílové listy a na akcie.

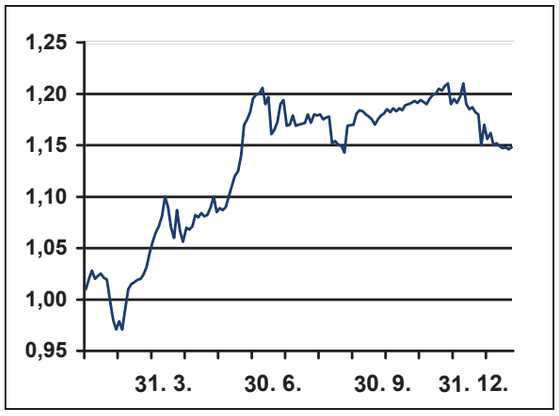
Podílový list patří mezi *cenné papíry*, které vydávají investiční společnosti. Vydáváním podílových listů shromažďují investiční společnosti peněžní prostředky v podílových fondech. Majitelé podílových listů mají právo na odpovídající podíl majetku v podílovém fondu a právo podílet se na ziscích získaných zhodnocením tohoto majetku.
Podílový fond vytváří a obhospodařuje investiční společnost za účelem kolektivního investování. Základní princip podílových fondů spočívá v tom, že větší počet investorů svěří správu svých prostředků investiční společnosti, která fond spravuje a zhodnocuje. Podstatné je, že při kolektivním investování mohou investoři vkládat nízké částky.
Otevřený podílový fond je podílový fond, který nemá omezen počet vydávaných podílových listů, vlastníci podílových listů mají právo na jejich odkoupení investiční společností.
Kurz podílového listu je hodnota, za kterou lze podílový list prodat nebo koupit.
Portfolio je sestava cenných papírů, které jsou v majetku podílového fondu.
Typy podílových fondů podle obsahu portfolia dělíme na fondy peněžního trhu, smíšené fondy, dluhopisové fondy, akciové fondy a fondy fondů. Obecně platí, že čím vyšší jsou výnosy fondu, tím vyšší je míra rizika.

Ilustrace

Následující kruhový diagram na obr. 3 ukazuje portfolio jednoho otevřeného podílového fondu, graf na obr. 4 znázorňuje vývoj kurzu podílového listu v čase za jeden rok.



Obr. 3 – Portfolio podílového fondu



Obr. 4 – Vývoj kurzu podílového listu v čase

U termínovaných vkladů je předem dána úroková sazba (kladná), a tedy i kladný zisk, u podílových fondů tomu tak není. Zde může docházet ke značnému kolísání výnosnosti (zvláště u akciových fondů) jak směrem nahoru, tak dolů.

Minulá ani současná výkonnost fondu nezaručuje výkonnost budoucí. Investice do podílových listů v sobě obsahuje riziko kolísání aktuální hodnoty investované částky a výnosů z ní, není zaručena návratnost původně investované částky.

Ilustrace

Klient nakoupil 30. 9. minulého roku 500 kusů podílových listů dluhopisového fondu *J, Korporátní*, 400 kusů podílových listů fondu *PI, Obligační* a 300 kusů podílových listů akciového fondu *BT, Plus*. V tabulce 3 jsou uvedeny údaje o vývoji kurzů podílových listů v posledním roce.

Určete celkový výnos z nakoupených podílových listů ke dni 30. 9. tohoto roku. Při vlastnictví podílových listů v délce aspoň 6 měsíců se zisk nedaní.

Tab. 3 – Kurzy podílových listů některých podílových fondů k 30. 9.

Otevřené podílové fondy							
Název	**Kurz Kč**	**Změna v % za 1M 3M 12M**	**Maj. mil.**	**Název**	**Kurz Kč**	**Změna v % za 1M 3M 12M**	**Maj. mil.**
Dluhopisové				**Akciové**			
J, Korporátní	1.8532	0.2 0.5 1.6	12306	**IJ, Topbond**	0.7942	-0.3 -6.5 -11.7	3781
PI, Obligační	1.9601	0.7 2.8 3.0	6520	**PI, Mix**	1.0711	0.80 -5.3 -7.2	1564
IS, Sporonet	1.4121	0.8 1.4 4.5	1849	**BT, Plus**	0.3284	-1.6 3.5 -20.2	397

Kurz znamená čisté obchodní jmění na podílový list ke dni 30. 9. Sloupec „Změna v %“ znamená změnu kurzu za 1 měsíc, za 3 měsíce a 12 měsíců. Sloupec „Maj. mil.“ znamená celkové čisté jmění fondu v milionech Kč. Předpokládáme, že kurz je zaokrouhlen na 4 desetinná místa podle matematických pravidel.

Pro výpočet výnosu nejdříve potřebujeme určit kurzy podílových listů před rokem při nákupu.

J, Korporátní

Z tabulky 3 vyplývá, že kurz 1,853 2 Kč je 101,6 % nákupního kurzu, kurz před rokem byl 1,824 0 Kč. Rozdíl je 0,029 2 Kč. Při nákupu 500 kusů těchto listů činí výnos 14,60 Kč.

PI, Obligační

Kurz 1,960 1 Kč je 103 % nákupního kurzu, nákupní kurz proto činil 1,903 0 Kč. Rozdíl je 0,057 1 Kč. Při nákupu 400 kusů těchto listů činí výnos 22,84 Kč.

BT, Plus

Kurz 0,328 4 Kč je 79,8 % nákupního kurzu, nákupní kurz tedy činil 0,411 5 Kč. Rozdíl je –0,083 1 Kč. Při nákupu 300 kusů činí výnos –24,93 Kč.

Celkový výnos je 14,60 Kč + 22,84 Kč – 24,93 Kč = 12,51 Kč. Klientův zisk je tedy 12,51 Kč.

Zajištěné podílové fondy jsou specifickým druhem podílových fondů, které jsou zajištěny proti ztrátě. U některých z nich je zaručeno i určité minimální zhodnocení. Tyto fondy jsou vhodné pro

dlouhodobé investice, doba trvání fondu je obvykle od 2 do 10 let, nejčastěji kolem 5 let. Nákup podílových listů lze obvykle realizovat bez vstupního poplatku v tzv. *upisovacím období*, které trvá několik týdnů po vzniku fondu. Podílové listy je možné předčasně prodat, avšak bez záruky návratu celé investované částky. Proto jsou tyto fondy vhodné pro investory, kteří předpokládají, že vložené prostředky nebudou potřebovat dříve. Výnos fondu závisí na růstu či poklesu nakoupených cenných papírů, v případě zajištěných fondů je stanoven maximální a minimální roční výnos. Výnos se za každé sledované období (např. půlrok, rok) obvykle *uzamkne*. Uzamčení výnosu znamená, že výnos získaný za uplynulé sledované období se již nemění. Uzamčené výnosy za příslušná období se na konci trvání fondu sečtou.

Ilustrace
Zajištěný fond *PT Jistota* investuje do 25 tuzemských i zahraničních akciových firem. Ve své nabídce uvádí:
Doba trvání: 5 let
Minimální investice: 10 000 Kč
Upisovací období: 1. 9. 2012 – 30. 11. 2012
Start fondu: 1. 12. 2012
Den splatnosti fondu: 1. 12. 2017
Vstupní poplatky: 0 % v upisovacím období, 2 % z vložené částky po upisovacím období
Výstupní poplatky: 0 % ode dne splatnosti fondu, 1 % z vybírané částky před dnem splatnosti
Uzamykání výnosu: každý rok od založení fondu
Maximální roční výnos: 5,8 % z vložené částky
Minimální roční výnos: 1,4 % z vložené částky
Celkový výnos fondu: 7 % – 29 % z vložené částky

Akcie je *cenný papír,* s nímž jsou spojena práva *akcionáře* jako společníka podílet se na řízení *akciové společnosti*, na jejím zisku a na likvidačním zůstatku při zániku společnosti.
Jmenovitá (nominální) hodnota akcie představuje podíl na majetku společnosti. Součet jmenovitých hodnot všech akcií se rovná výši *základního jmění společnosti*.
Cena akcie je její skutečná *tržní hodnota*, se kterou se obchoduje na kapitálovém trhu.
Dividenda je podíl akcionáře na zisku akciové společnosti vyplývající z vlastnictví akcie a odhlasovaný pro dané období *valnou hromadou* všech akcionářů.

Ilustrace
Klient nakoupil před rokem 700 kusů akcií společnosti *AA Progresivní* po 735 Kč a 400 kusů akcií *BB Stabilní* po 1 250 Kč. Po roce byla tržní hodnota jedné akcie *AA Progresivní* 758 Kč a jedné akcie *BB Stabilní* 1 235 Kč. V posledním roce žádná z uvedených společností nevyplácela dividendy. O kolik korun se zvýšil, resp. snížil, za poslední rok klientův majetek v těchto akciích?

Tržní cena akcií před rokem činila

$$700 \cdot 735 \text{ Kč} + 400 \cdot 1\,250 \text{ Kč} = 1\,014\,500 \text{ Kč}.$$

Současná tržní cena akcií je

$$700 \cdot 758 \text{ Kč} + 400 \cdot 1\,235 \text{ Kč} = 1\,024\,600 \text{ Kč}.$$

Klientův majetek v akciích se zvýšil o 10 100 Kč.

Podrobné informace jsou dostupné například na těchto stránkách:

- http://cs.wikipedia.org/wiki/Pod%C3%ADlov%C3%BD_fond
- http://trhy.mesec.cz/clanky/podilove-fondy-porovnani-vynosnosti-a-rizikovosti/
- http://www.rmsystem.cz
- http://www.plus500.cz/

2.5 Spoření

Kapitál lze zhodnocovat pomocí spořicích účtů, na které lze v pravidelných intervalech či nepravidelně ukládat.

Spořicí účet je účet, který je primárně určen ke spoření, ale lze ho používat i jako běžný účet.

V této části se zaměříme na porovnání výnosu spořicího účtu a stavebního spoření.

Stavební spoření je forma spoření podporovaná státem. Stavební spoření je primárně určeno k investování do bytových potřeb a je vhodné zvláště pro ty, kteří chtějí následně využívat úvěry bankovních institucí. Lze ho ovšem také využívat jako výhodný spořicí produkt.

Pro spoření používáme následující dva vzorce pro výsledný kapitál S_n.
Na **začátku** každého úrokovacího období se ukládá kapitál K_0:

$$S_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}$$

Na **konci** každého úrokovacího období se ukládá kapitál K_0:

$$S_n = K_0 \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}$$

Symboly i, k, t a n mají stejný význam jako ve vzorcích pro K_n v článku 2.3. Používá se standard 30E/360.

Ilustrace
Klientka ukládá na spořicí účet na začátku každého měsíce po dobu 6 let částku 1 500 Kč. Předpokládáme, že po celou dobu spoření bude roční úroková sazba spořicího účtu neměnná, bude činit 1,75 % a že klientka žádné peníze nebude vybírat.
Kolik korun po zdanění úroku bude na spořicím účtu po 6 letech?
Banka používá složené úročení a úročí na konci každého měsíce.

Počet úrokovacích období ..... $n = 72$
Částka K_0 uložená v jednom úrokovacím období ..... 1 500 Kč
Úroková sazba i 0,017 5
Zdaňovací koeficient k 0,85
Počet dní úrokovacího období 30
Kapitál S_n na konci 72. úrokovacího období ..... S_n =?

Dané údaje dosadíme do prvního z předchozích vzorců:

$$S_n = 1500 \text{ Kč} \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}017\,5 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}017\,5 \cdot \frac{30}{360}\right)^{72} - 1}{0{,}85 \cdot 0{,}017\,5 \cdot \frac{30}{360}}$$

$$S_n \doteq 113\,033 \text{ Kč}$$

Na spořicím účtu klientky bude na konci šestého roku 113 033 Kč.

Ilustrace

V následující tabulce jsou uvedeny některé informace ze stavební spořitelny, jedná se o spoření na 6 let. Všechny údaje jsou uvedeny v korunách.
Zajímá nás, jaké budou celkové úspory klienta, který spoří pravidelně na začátku každého měsíce částku 1 500 Kč.

Měsíční úložka	Poukázané platby	Úroky	Státní podpora	Daň z úroků	Celkový výnos	Celkové úspory
2 000	144 000	11 670	12 000	1 750	21 920	165 920
1 500	108 000	8 880	11 590	1 340	19 130	127 130
1 000	72 000	5 920	7 700	890	12 730	84 730
500	36 000	2 960	3 850	450	6 360	42 360

Roční státní podpora je 10 % ze základu pro výpočet státní podpory, maximálně 2 000 Kč.
Poplatek za uzavření smlouvy a za vedení účtu se platí zvlášť.

Z tabulky lze vyčíst, že při měsíční úložce 1 500 Kč po dobu 6 let je celková úspora klienta 127 130 Kč.

Srovnáme-li úspory na spořicím účtu z předchozí ilustrace s úsporami na stavebním spoření, zjistíme, že rozdíl činí 14 097 Kč ve prospěch stavebního spoření. Ve skutečnosti je zisk na stavebním spoření o něco nižší vzhledem k poplatkům za uzavření smlouvy a vedení účtu.
Je nutno také zdůraznit, že ze spořicího účtu může klient peníze vybírat bez sankcí kdykoliv, zatímco na stavebním spoření tomu tak není.

Podrobné informace jsou dostupné například na těchto stránkách:

- http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/stavebni_sporeni.html
- http://www.mesec.cz/sporeni/

2.6 Úvěry

Nejprve si ukážeme podstatu umořovacího plánu. K tomu si připomeneme dva základní pojmy.
Úmor úvěru (dluhu) je ta část splátky úvěru, která je určena na snížení dlužné částky.
Umořovací plán je dokument, který obsahuje pro jednotlivá období splácení úvěru výši splátky, výši úmoru dluhu, výši úroku z dluhu a stav dluhu po odečtení úmoru.

Ilustrace
Majitelka keramické dílny získala na začátku roku od banky podnikatelský úvěr ve výši 4 miliony korun s úrokovou sazbou 12 %. Úrokovací období je jeden rok. Podle smlouvy s bankou splatí majitelka úvěr ve třech ročních splátkách, vždy na konci roku. První splátka bude činit 1 200 000 Kč, druhá 1 800 000 Kč.
Zajímá nás, kolik korun bude činit třetí splátka a kolik korun celkem majitelka zaplatí.
Nejdříve vypočítáme stav dluhu na konci jednotlivých let (po připsání úroku a splátce).
Na konci prvního roku
Banka připíše úrok:

$$4\,000\,000\ \text{Kč} + 0{,}12 \cdot 4\,000\,000\ \text{Kč} = 4\,000\,000\ \text{Kč} + 480\,000\ \text{Kč} = 4\,480\,000\ \text{Kč}$$

Podnikatelka splatí 1 200 000 Kč:

$$4\,480\,000\ \text{Kč} - 1\,200\,000\ \text{Kč} = 3\,280\,000\ \text{Kč}$$

Na konci druhého roku
Banka připíše úrok:

$$3\,280\,000\ \text{Kč} + 0{,}12 \cdot 3\,280\,000\ \text{Kč} = 3\,280\,000\ \text{Kč} + 393\,600\ \text{Kč} = 3\,673\,600\ \text{Kč}$$

Podnikatelka splatí 1 800 000 Kč:

$$3\,673\,600\ \text{Kč} - 1\,800\,000\ \text{Kč} = 1\,873\,600\ \text{Kč}$$

Na konci třetího roku
Banka připíše úrok:

$$1\,873\,600\ \text{Kč} + 0{,}12 \cdot 1\,873\,600\ \text{Kč} = 1\,873\,600\ \text{Kč} + 224\,832\ \text{Kč} = 2\,098\,432\ \text{Kč}$$

Podnikatelka splatí 2 098 432 Kč.
Celkem majitelka zaplatí

$$1\,200\,000\ \text{Kč} + 1\,800\,000\ \text{Kč} + 2\,098\,432\ \text{Kč} = 5\,098\,432\ \text{Kč}$$

Nyní sestavíme z vypočítaných údajů umořovací plán:

	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	Stav dluhu (Kč)
Počáteční stav	–	–	–	4 000 000
Konec 1. roku	1 200 000	480 000	720 000	3 280 000
Konec 2. roku	1 800 000	393 600	1 406 400	1 873 600
Konec 3. roku	2 098 432	224 832	1 873 600	0

Z umořovacího plánu je velmi dobře vidět, jak se mění výše úroku a vzájemný poměr úroku a úmoru v jednotlivých letech. V tomto plánu však nejsou zahrnuty poplatky za zřízení a vedení úvěru. Celkové náklady úvěru vyjadřuje RPSN.
RPSN (**R**oční **P**rocentní **S**azba **N**ákladů) je číslo udávající procentuální podíl z dlužné částky, který musí spotřebitel zaplatit za jeden rok, a zahrnuje všechny náklady spojené s úvěrem

(splátky, správa úvěru a další výdaje související s čerpáním úvěru). RPSN je vždy vyšší než uváděná roční úroková sazba úvěru.

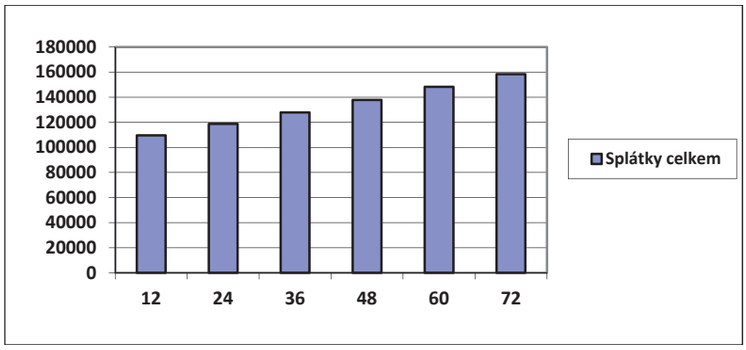
Dále se budeme věnovat problematice spotřebních a hypotečních úvěrů, zaměříme se na případy, kdy splátky úvěru mají stále stejnou výši a platí se pravidelně.
Anuita neboli **anuitní splátka** je splátka dané výše, která se opakuje v pravidelných časových intervalech.

Spotřebitelský úvěr (spotřební úvěr) je úvěr, který umožňuje financovat nepodnikatelské potřeby občanů.
Podnikatelský úvěr je úvěr poskytovaný fyzickým osobám-podnikatelům a právnickým osobám na financování jejich podnikatelských potřeb.
Hypoteční úvěr je dlouhodobý úvěr určený občanům i obcím k financování investic do nemovitostí (koupě, výstavba nemovitosti, rekonstrukce bytu, …). Hypoteční úvěr může být účelový i neúčelový (americká hypotéka). V obou případech je úvěr zajištěn zástavou nemovitosti na území ČR.

Ilustrace
Banka nabízí spotřebitelský úvěr se splatností 12 až 72 měsíců, jak ukazuje tabulka. Úvěr se splácí pravidelnými měsíčními splátkami, které jsou uvedeny v korunách v následující tabulce.

Výše úvěru (Kč)	12 splátek	24 splátek	36 splátek	48 splátek	60 splátek	72 splátek
100 000	9 132	4 946	3 552	2 872	2 471	2 199
200 000	18 167	9 775	7 014	5 650	4 845	4 286

Chceme zjistit, kolik celkem zaplatíme ve splátkách za úvěr 100 000 Kč v závislosti na jejich počtu. K tomu stačí vynásobit výši jedné splátky z tabulky příslušným počtem splátek. Situaci znázorňuje sloupkový diagram na obr. 5, kde splátky celkem jsou uvedeny v korunách.



Obr. 5 – Závislost celkové částky ve splátkách na jejich počtu

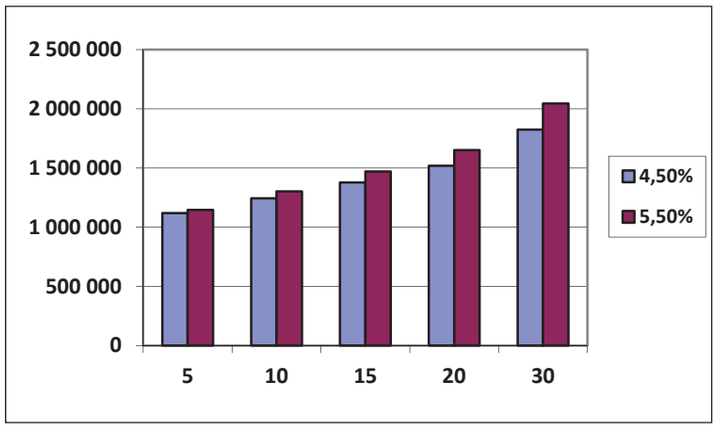
Ilustrace

V následující tabulce jsou uvedeny informace o výši pravidelných měsíčních splátek (v Kč) v závislosti na úrokové sazbě a na době splatnosti úvěru, výše úvěru je 1 000 000 Kč. Předpokládáme, že po celou dobu splatnosti úvěru se úroková sazba nemění.

Úroková sazba	Doba splatnosti úvěru v letech				
	5	10	15	20	30
4,0 %	18 417	10 125	7 397	6 060	4 774
4,5 %	18 643	10 364	7 650	6 326	5 067
5,0 %	18 871	10 607	7 908	6 600	5 368
5,5 %	19 101	10 853	8 171	6 879	5 678
6,0 %	19 333	11 102	8 439	7 164	5 996

Klienta zajímá závislost celkové zaplacené částky ve splátkách při různých úrokových sazbách a při všech uvedených úrokových dobách.

Na obr. 6 je sloupkový diagram, který pro úvěr 1 000 000 Kč zachycuje závislost celkové zaplacené částky (v Kč) ve splátkách při úrokových sazbách 4,5 % a 5,5 % pro úrokové doby 5 až 30 let.



Obr. 6 – Závislost celkové částky ve splátkách na úrokové sazbě 4,5 % a 5,5 % při různých úrokových dobách

Z grafu je vidět, že při úrokové sazbě 5,5 % a při úrokové době 30 let je celkový úrok vyšší než vypůjčená částka 1 000 000 Kč, úrok činí 1 044 080 Kč.

Detailnější informace lze nalézt například na těchto stránkách:

- http://www.finance.cz/bydleni/hypoteky/abeceda-hypotek/definice/
- http://cs.wikipedia.org/wiki/Hypoteční_úvěr
- http://www.mesec.cz/pujcky/hypoteky/pruvodce/

2.7 Literatura

[1] CIPRA, T., *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* 2. vydání. Praha: Ekopress, 2005. 308 s.

[2] DVOŘÁKOVÁ, Z.; SMRČKA, L. a kol., *Finanční vzdělávání pro střední školy se sbírkou řešených příkladů na CD.* 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2011. 312 s.

[3] HESOVÁ, A., *Metodický portál.* Metodická doporučení pro výuku finanční gramotnosti. ISSN 1802-4785. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/14431/METODICKA-DOPORUCENI-PRO-VYUKU-FINANCNI-GRAMOTNOSTI.html/>.

[4] HESOVÁ, A.; ZELENDOVÁ, E. a kol., *Finanční gramotnost ve výuce: Metodická příručka.* 1. vydání. Praha: NÚV, 2010. 59 s.

[5] ODVÁRKO, O., *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2005. 198 s.

[6] ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J., *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*. Praha: Prometheus, 2005. 100 s.

[7] ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J., *Matematika a budování finanční gramotnosti. Výukový a metodický text z projektu OPPA.* Praha: P3K, 2012. 52 s.

[8] ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J., *Metodický portál.* Budování finanční gramotnosti v matematice [online]. 2009. Dostupný z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVPD/6787/BUDOVANI-FINANCNI-GRAMOTNOSTI-V-MATEMATICE.html>.

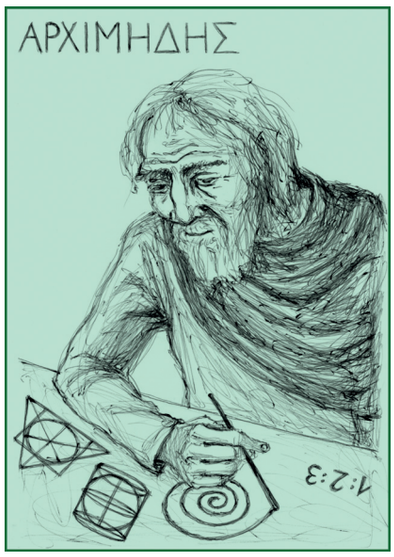
[9] ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J., *Metodický portál.* Jednoduché a složené úročení [online]. 2010. Dostupný z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVB/8287/JEDNODUCHE-A-SLOZENE-UROCENI.html/>.

[10] ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J., Nebezpečí finanční negramotnosti. *Matematika-fyzika-informatika.* 2010, roč. 19, č. 8. s. 449–456.

[11] ROBOVÁ, J., *Metodický portál.* Finanční gramotnosti v učebnicích matematiky [online]. 2009. Dostupný z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/G/7347/financni-gramotnost-v-ucebnicich-matematiky.html/>.

[12] RADOVÁ, J. – DVOŘÁK, P. – MÁLEK, J., *Finanční matematika pro každého.* 7. Aktualizované vydání. Praha: Grada, 2009. 296 s.

3. Vývoj matematiky jako popularizující stimul



V tomto textu se seznámíme s životem a dílem Archiméda, největšího vědce starověku, a s několika jeho výsledky, které jsou důležité nejen pro školskou matematiku. Byl to Archimédés, kdo jako první (v dnešní řeči) ukázal, že konstanta značená písmenem π se objevuje jak ve vzorcích pro obvod a obsah kruhu, tak ve vzorcích pro objem a povrch koule.

Budeme poměrně podrobně prezentovat a komentovat výsledky Archimédova spisu „Měření kruhu“ a volně navážeme několika výsledky týkajícími se objemu a povrchu koule. Uvědomíme si, že znalost některých okamžiků vývoje matematiky může být pro naše žáky a studenty motivující.[1]

3.1 Archimédés ze Syrákús

Archiméda můžeme považovat za největšího vědce starověku. Jeho spisy mají – i v dnešním slova smyslu – charakter původních vědeckých prací. Patří k vrcholům antické vědy.

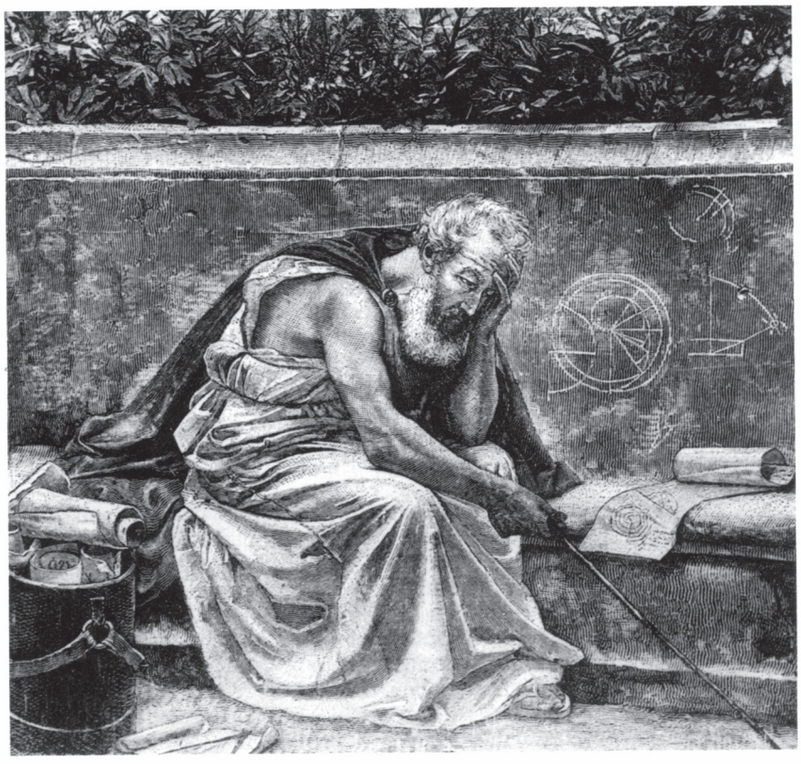
O Archimédově životě mnoho spolehlivých informací nemáme. Narodil se v Syrákúsách kolem roku 287 př. Kr., prožil v nich skoro celý život a zemřel při jejich dobytí Římany roku 212 př. Kr. Jeho život spadá do období vlády Hieróna II. (asi 306–215) a jeho syna (a spoluvládce) Gelóna (asi 270–216).

Archimédés studoval nějakou dobu v Alexandrii, kde byl ve styku s generací Eukleidových žáků. Není vyloučeno, že Alexandrii navštívil vícekrát. Osvojil si tam Eukleidův exaktní přístup k budování matematické teorie, k přesnému formulování a dokazování poznatků. S matematiky alexandrijské školy byl v úzkém kontaktu, posílal jim své práce. O Archimédově životě podal zprávy historik Polybios (asi 200 až 120), z jeho informací pak vycházel Plútarchos (asi 46 až 126), Titus Livius (59 př. Kr. až 17 po Kr.) a další. Plútarchos, jeden z nejplodnějších řeckých autorů doby římské, psal poměrně podrobně o Archimédovi v kapitole „Pelopidás a Marcellus“ svých „Životopisů slavných Řeků a Římanů“. Další informace o Archimédovi a jeho díle přinesli Pappos (konec 3. stol.), jeden z posledních významných matematiků antiky, Proklos (asi 410 až 484), novoplatónský filozof, vzdělanec a komentátor, a Ióannés Tzetzés (12. stol.), byzantský gramatik a komentátor.

[1] V tomto textu využil autor některé partie svých připravovaných článků o Archimédovi.

Archiméda můžeme i v dnešním slova smyslu označit za matematika, fyzika a technika.

Jako matematik intenzivně rozvíjel zejména infinitesimální postupy. Výrazně rozpracoval a v řadě situací geniálně využíval tzv. exhaustivní metodu, která je někdy označována jako „starověká teorie limit“. Vymyslel řadu originálních postupů, s jejichž pomocí počítal obsahy rovinných útvarů ohraničených křivkami a objemy těles omezených různými plochami. Tyto myšlenky rozvinul zejména ve spisech „Měření kruhu“, „O kvadratuře paraboly“, „O spirálách“, „O kouli a válci“, „O konoidech a sféroidech“. V jeho postupech nalézáme hluboké myšlenky úzce související s moderní teorií integrace. Těmito idejemi inspiroval matematiky 17. století, kteří připravovali nástup infinitesimálního počtu. Byli to zejména Johannes Kepler (1571–1630), Paul Guldin (1577–1643), Grégoire de Saint Vincento (1584–1667), René Descartes (1596–1650), Bonaventura Cavalieri (1598–1647), Pierre de Fermat (1601–1665), John Wallis (1616–1703), Isaac Barrow (1630–1677), Christian Huyghens (1629–1695) a posléze Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Zatímco Archimédés musel pro každou situaci nápaditě vymýšlet, jakým způsobem použít exhaustivní metodu, Newton a Leibniz přišli s metodou obecnou.



Gustave Courtois: Smrt Archimeda (1891) – detail

Jako fyzik se Archimédés zabýval problematikou jednoduchých strojů. Podal přesný matematický výklad rovnováhy na páce, exaktně vyložil problematiku těžiště rovinných obrazců a věnoval se hydrostatice. Jeho jméno dnes nese známý zákon o vztlakové síle. Myšlenku rovnováhy na páce a rovněž pojem těžiště využíval i při ryze matematických úvahách. Tato témata rozvíjel hlavně v pracích „O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců I., II.“ a „O plovoucích tělesech I., II.“

Jako technik rozpracoval ideje jednoduchých strojů až k bezprostřednímu technickému provedení. Známý Archimédův šroub byl jistě používán již dříve, Archimédés se s ním patrně v nějaké podobě seznámil v Egyptě a technicky jej zdokonalil. Jeho vynálezy – válečné stroje a obranné mechanismy – došly svého využití při obraně Syrákús proti římskému vojsku.

Na Archimédovy plodné myšlenky navázala po mnoha staletích až moderní novověká matematika a fyzika.[2]

3.1.1 Heuréka

Uvádí se, že byl Archimédés vždy plně zaujat vědeckými či technickými problémy, které právě řešil. Vše ostatní pro něho nebylo důležité, ať již to byla strava či hygiena. Stručně a výstižně to popisuje Plútarchos:

„Proto také jsou věrohodné anekdoty, které se o Archimédovi vypravují, že jej vždy očarovala jakási vlastní vnitřní Siréna, takže zapomněl na jídlo a zanedbával péči o tělo, často ho násilím přivedli ke koupeli a natřeli, v popelu krbu kreslil geometrické obrazce, podobně když byl po koupeli natřen olejem, prstem kreslil po svém těle křivky jsa úplně omámen pocitem štěstí a posedlý matematickou vášní. Ačkoli objevil mnoho krásných věcí, prosil prý své přátele a příbuzné, aby mu po smrti postavili na hrob válec, do něhož je vepsána koule a číselný údaj, o kolik je opsané těleso větší než vepsané.“ ([Pl], str. 526)

Výkřik „Heuréka“[3] je dnes spojován buď s Archimédovým zákonem, nebo s historkou o tzv. „koruně krále Hieróna“. Ve skutečnosti se jednalo o zlatý vavřínový věnec (stephanos), který byl určen k obětování bohům.

Římský architekt a stavitel Marcus Vitruvius Pollio (1. stol. př. Kr.) napsal ve svém díle „Deset knih o architektuře“ („De architectura libri decem“) slova, která na jedné straně ukazují Archimédův zápal pro vědecké bádání, na druhé straně však jeho roztržitost:

„Ačkoliv Archimédových objevů bylo mnoho a podivuhodných, zdá se, že největším důmyslem a bystrostí ze všech se vyznačuje ten, který uvedu. Když se totiž Hierón v Syrákúsách povznesl ke královské moci, rozhodl se, že za štěstí, které měl při svém počínání, obětuje v nějaké svatyni zlatý věnec, který zaslíbil nesmrtelným bohům. Dal jej udělat na zakázku a zlato na něj výrobci přesně odvážil. Za nějaký čas předložil výrobce králi vkusně provedené dílo svých rukou k jeho úplné spokojenosti, přičemž se zdálo, že dodržel přesně váhu věnce.

Když přišlo později ovšem udání, že zlata bylo ubráno a že do zpracovávaného věnce bylo přimíšeno stejné množství stříbra, požádal Hierón, rozmrzelý nad tím, že byl takhle podveden, a že nemohl přijít na to, jak by se mohla zpronevěra prokázat, Archiméda, aby se pro něho ujal prozkoumání této záležitosti. Archimédés, který toho měl plnou hlavu, přišel náhodou do lázní a při vstupování do vany si všiml, že z ní vytéká takové množství vody

[2] O Archimédovi a jeho díle viz např. [BŠ] a [Ka].
[3] Slovo „Heuréka“ je používáno jako stručný a výstižný výraz, který symbolizuje náhlou intuici.

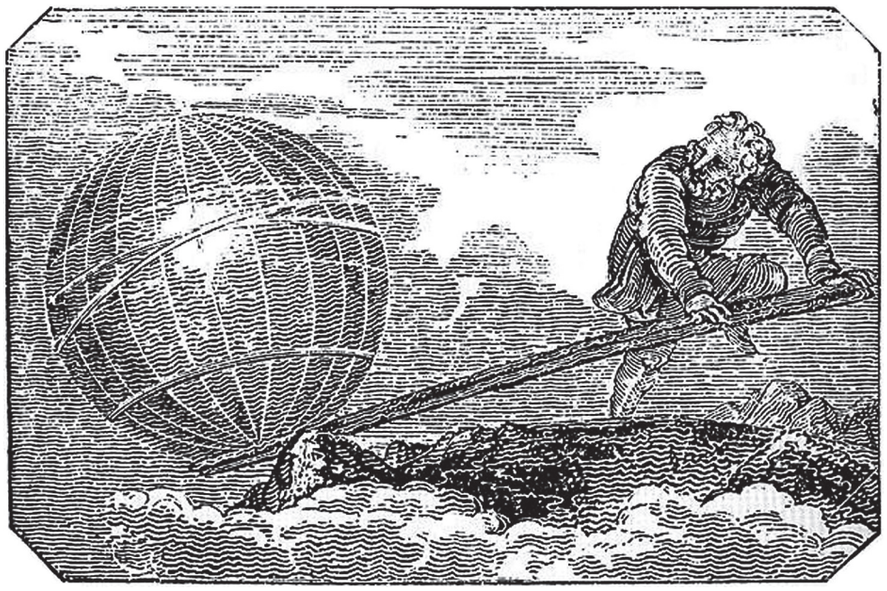
ven, jak se do ní ponořovalo jeho tělo. Když mu to poskytlo vysvětlení dané otázky, nemeškal, nýbrž vyskočil samou radostí z vany, pospíchal nahý domů a všem lidem zvěstoval jasným hlasem, že objevil, po čem pátral. Vykřikoval totiž v běhu a stále řecky heuréka, heuréka (našel jsem to, našel jsem to).“ ([Vi], str. 293–295)

3.1.2 Využití jednoduchých strojů

Archimédés nebyl jen teoretik. Uvědomoval si dosah a sílu svých teoretických poznatků a uměl je velmi dobře prakticky využít. Jeho slavný výrok

„Dós moi pú stó kai kinó tén gén.“

„Dejte mi, kde bych stanul, a pohnu Zemí.“



můžeme chápat nejen jako reklamní slogan propagující páku, ale i jako oslavu jednoduchých strojů vůbec.[4]

„ … Archimédés, který byl příbuzný a přítel krále Hieróna, napsal mu v dopise, že danou silou je možné zvednout každé dané břímě, a v mladicky odvážné víře v sílu svého důkazu prý prohlásil, že kdyby měl jinou Zemi, přemístil by se na ni a odtud by hnul naší Zemí. Hierón se tomu podivil a žádal Archiméda, aby problém prakticky uskutečnil a ukázal mu, jak veliké těleso může být uvedeno v pohyb malou silou. Archimédés dal na královský nákladní trojstěžník, který jen s velkou námahou množství rukou vytáhlo na břeh, naložit velký počet mužstva a obvyklý náklad, sám seděl opodál a bez námahy a lehce uváděl rukou v pohyb konec kladkostroje, takže loď běžela lehce a bez nárazu jako po moři. Užaslý král zajisté pochopil význam vědy a přiměl Archiméda k tomu, aby sestrojil stroje vhodné pro každý způsob obléhání, a to pro obranu i pro útok.“ ([Pl], str. 523–524)

[4] Uvedený obrázek se objevil roku 1824 na obálce druhého svazku časopisu Mechanic's Magazine (Knight & Lacey, London).

3.1.3 Obrana Syrákús

Král Hierón II. byl za punských válek spojencem Říma proti Kartágu.[5] Po jeho smrti však jeho vnuk Hierónymos (230–214), nový syrákúský vládce, vystoupil proti Římanům a snažil se o spojení s Kartágem, jehož vojsko tehdy vedl proslulý Hannibal (247–183), a s Egyptem. Roku 214 byl Hierónymos zavražděn. Syrákúsy však již oblehlo římské válečné loďstvo a před hradbami rozložil své legie významný římský politik a vojevůdce Marcus Claudius Marcellus (asi 268 až 208).

Syrákúsané vedeni vojevůdcem Hippokratem plně využili při obraně města Archimédovy obranné mechanismy. Plútarchos líčí dobývání města takto:

„Když Římané zaútočili ze dvou stran, zavládlo v Syrákúsách zděšení a úzkostné ticho, protože se každý ve svém strachu domníval, že proti tak hrozné síle není možný odpor. Nyní spustil Archimédés svoje stroje. Na pozemní vojsko létaly střely různého druhu a obrovské kamenné bloky, které dopadaly s hlukem a neuvěřitelnou rychlostí, rozdrtily svou vahou všechny, kteří se nekryli, a působily zmatek v řadách vojska. Současně se z hradeb proti lodím vysoko vysunuly berany a silou obrovského tlaku shora je potápěly do hlubin nebo železnými chapadly či kleštěmi podobnými zobanům jeřábů uchopily loď, zvedly ji přídí do výše, takže stála na zádi, a ponořily ji, jinou loď lany a háky z vnitřku přitahovali k břehu a točili jí do kruhu, až narazila na skaliska pod hradbami, takže posádka lodi byla většinou zničena a zahynula. Často se stávalo, že některá loď byla úplně vyzdvižena z moře, točila se jako ve víru a vznášejíc se ve výši skýtala hrůznou podívanou; nakonec námořníci z lodi vypadli nebo byli vymrštěni a prázdná loď narazila na hradby, anebo když chapadlo povolilo, spadla do moře.

Strojové zařízení, s kterým Marcellus postupoval k městu, se pro podobu s hudebním nástrojem nazývalo sambuka. Bylo ještě ve značné vzdálenosti od hradeb, když přiletěl balvan deset talentů těžký, po něm druhý a třetí; některé z nich dopadly s hrozným hřmotem a silným vlnobitím na strojové zařízení, rozbily jeho podstavec, uvolnily a roztrhly spojení lodí, takže bezradný Marcellus vydal rozkaz, aby lodi co nejrychleji odpluly a pozemní vojsko aby ustoupilo.

Na válečné poradě bylo rozhodnuto ještě v noci, bude-li to možné, přiblížit se až k hradbám; neboť jak se domnívali, vlivem veliké síly strojů, kterých užíval Archimédés, byla dráha střel vysoká a dlouhá, zatímco v blízkosti hradeb byly stroje pro krátkou vzdálenost neúčinné. Avšak Archimédés, jak se ukázalo, už dávno upravil své stroje pro pohyby a střely s krátkou drahou letu, vhodné pro každou vzdálenost, a protože po celé délce hradeb byly souvisle ve velikém počtu neveliké střílny, stály v nich malé metací stroje přizpůsobené pro krátké vzdálenosti a nepřátelům neviditelné.

Římané se přibližovali v domnění, že nejsou pozorováni, ale znova se ocitli v dešti šípů a jiných střel, kameny jim padaly přímo na hlavu, z hradeb se sypaly šípy, takže byli nuceni ustoupit zpět. Když se jejich jednotky rozvinuly do větší vzdálenosti, i tam je dostihovaly

[5] První punská válka proběhla v letech 264 až 241, druhá v letech 218 až 201, třetí v letech 149 až 146. Po první punské válce se Sicílie stala římskou provincií.

a zasahovaly střely, jak se vzdalovali, a způsobovaly jim značné ztráty. Současně docházelo k častým srážkám lodí. Římané však nebyli nijak schopni oplatit nepřátelům jejich údery, protože většina strojů, které Archimédés sestrojil, byla skryta za hradbami a Římané se podobali bojovníkům, kteří bojují s bohy, ježto z neviditelných prostorů se na ně valily nesčíslné pohromy.

Marcellovi se přesto podařilo ustoupit. ...

Ve skutečnosti byli zajisté všichni ostatní Syrákúsané tělem Archimédovy obrany, zatímco on sám byl jedinou duší, která vše uvádí v pohyb a všemu dává směr; ostatní zbraně odpočívaly, kdežto město používalo tehdy jen jeho zbraní, a to k obraně i k útoku.

Nakonec Marcellus pozoroval, že Římané jsou tak přestrašeni, že kdykoli viděli, že se přes hradby vysunuje nějaký provaz nebo kus dřeva, začali křičet, že Archimédés zas na ně zaměřuje nějaký stroj, obraceli se a prchali. Rozhodl se proto zdržet se boje a zastavit útok a úspěch obléhání ponechal času." ([Pl], str. 524–525)

Plútarchovo líčení obrany Syrákús a účinků Archimédových strojů je zcela jistě zveličené. Obležení města sice trvalo zhruba dva roky, boje však jistě neprobíhaly soustavně. Marcellus postupně dobýval a obsazoval Sicílii, je pravděpodobné, že by byl přivítal kapitulaci města bez boje. Není vyloučeno, že úmyslně posílal do Říma zveličené zprávy o potížích, s nimiž se u Syrákús potýká, aby zdůvodnil svoji malou aktivitu při jejich dobývání. A tyto zprávy se pak mohly stát základem pozdějších textů, které byly o dobývání Syrákús a jejich statečné obraně sepsány.

3.1.4 Archimédova smrt

Po dlouhém obléhání se Římanům nakonec podařilo obránce města přelstít a do města proniknout. Bylo to roku 212 př. Kr. Plútarchos líčí Marcellovo dobytí Syrákús takto:

„ ... vyčíhav si vhodnou chvíli, kdy Syrákúsané slavili slavnosti k poctě Artemidině a oddávali se pití vína a veselí, nepozorovaně obsadil nejen věž, ale ještě před rozedněním dokola po hradbách rozestavil vojáky a prolomil budovu Hexapýl. Syrákúsané to zpozorovali a tu se teprve probudili.

Archimédés byl právě zabrán úvahou nad nějakým obrazcem, k jehož vyřešení soustředil mysl i oči tak, že ani včas nezpozoroval, že Římané podnikli útok a že města je dobyto. Když před ním náhle stanul římský voják a kázal mu, aby ho následoval k Marcellovi, Archimédés odepřel, dokud nevyřeší problém a nedovede důkaz do konce. Tu se voják rozhněval, vytáhl meč a probodl ho." ([Pl], str. 527–528)

Při dobytí města přišel Archimédés o život. Jeho smrt je připomínána po dlouhá staletí zhruba ve stejné podobě. Traduje se, že Archimédés odbyl římského vojáka slovy:

„Noli tangere (turbare) circulos meos!"[6]

„Neruš mé kruhy!", resp. „Nedotýkej se mých kruhů!"

[6] Řecky: „Apostéthi, ó anthrópe, tú diagrammatos mú!"

3.1.5 Archimédův hrob

Marcus Tullius Cicero (106–43), slavný římský politik, státník, filozof, spisovatel a řečník, se stal roku 75 př. Kr. kvéstorem (místodržícím) Sicílie a nalezl v Syrákúsách Archimédův hrob. V „Tuskulských hovorech“ („Tusculanae disputationes“) sepsaných v letech 45 až 44 uvádí, že byl v té době, tedy 137 let po Archimédově smrti, jeho hrob místními obyvateli zcela zapomenut.

„Když jsem byl kvéstorem, objevil jsem jeho hrob kolem dokola zarostlý a zakrytý trnitým křovím. Syrákúsané o něm nevěděli, dokonce tvrdili, že vůbec neexistuje. Pamatoval jsem si totiž několik veršíků, které měly být, jak jsem slyšel, napsány na jeho náhrobku, a z nich bylo jasné, že nahoře na jeho náhrobku je koule a válec.

Když jsem si vše důkladně prohlédl – u Agrigentské brány je totiž velké množství náhrobků – zpozoroval jsem sloupek, který jen trochu vyčníval nad křoví, a na něm byla podoba koule a válce. Hned jsem řekl Syrákúsanům (přední občané ze Syrákús byli totiž se mnou), že si myslím, že to je to, co hledám. Poslali tam pak mnoho lidí se srpy a ti to místo vyčistili a vyklidili.

Když bylo místo přístupné, přiblížili jsme se k přední straně podstavce. Bylo vidět nápis, konce veršů skoro až do poloviny byly však zničeny.“ ([Ci], str. 231)

3.2 Archimédovo dílo

Z Archimédova díla se dochovalo třináct spisů. Deset z nich badatelé seřadili do následujícího soupisu podle pravděpodobné doby jejich vzniku. A v závěru připojili tři další, které se seriózním zařazení vymykají.

- O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců, kniha I.,
- O kvadratuře paraboly,
- O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců, kniha II.,
- Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh,
- O kouli a válci, kniha I., II.,
- O spirálách,
- O konoidech a sféroidech,
- O plovoucích tělesech, kniha I., II.,
- Měření kruhu,
- Počítání písku,
- Kratochvíle,
- Poučky,
- Problém dobytka.

Podle dochovaných zpráv je Archimédés autorem ještě několika dalších děl, která však byla během staletí ztracena. Zmiňují se o nich např. Pappos a Proklos.

Podnětné myšlenky Archimédových prací jsou podrobně vyloženy jednak v některých souborných vydáních jeho děl, jednak v řadě specializovaných monografií, učebnic a knih o matematice a jejím vývoji. Viz např. v [A1], [A2], [Cl], [Di], [E], [Hea], [Hei], [Lu] a [Sch].

V české verzi máme tyto Archimédovy spisy:

- Archimedovo měření kruhu [V1],
- Archimeda Syrakusského Počet pískový [V2],
- Archimedův výklad Eratosthenovi o mechanických způsobech zkoumání [Vr],
- Problém dobytka [St], [M].

Na počátku 20. století přeložil do češtiny Archimédovy práce „Měření kruhu“ a „Počítání písku“ Miloslav Valouch (1878–1952), středoškolský profesor matematiky a fyziky (Olomouc, Rokycany, Litomyšl, Praha), autor řady vydání logaritmických tabulek (od r. 1904). V letech 1918 až 1927 pracoval na Ministerstvu školství a národní osvěty, věnoval se otázkám výuky matematiky a fyziky a školským reformám. Řadu let byl ředitelem Jednoty československých matematiků a fyziků. Překlady Archimédových děl vydal ve výročních zprávách gymnázia v Litomyšli.

Český překlad krátké úlohy „Problém dobytka“ publikoval roku 1898 František Josef Studnička (1836–1903), profesor matematiky na České univerzitě v Praze. Roku 2001 uveřejnil nový překlad této úlohy Karel Mačák. Viz [St], [M].

Připomeňme relativně nedávný, velmi zajímavý příběh objevu Archimédových prací. Roku 1899 nalezl petrohradský učenec Papadopulos-Kerameus při studiu katalogu knihovny kláštera metochia Panagiou Taphou v Istanbulu (dceřiný klášter jeruzalémského kláštera Božího hrobu) zvláštní palimpsest[7] s náboženským textem, z pod něhož prosvítal jiný text s podivnými geometrickými obrázky. Na tento nález byl upozorněn Johan Ludwig Heiberg (1854–1928), dánský filolog a matematik, velký znalec antické matematiky, zejména Eukleida a Archiméda. Když palimpsest prostudoval, zjistil, že pochází z 10. století a že obsahuje některé Archimédovy práce. Jedna z nich byla velkým překvapením, neboť nebyla do té doby známa. Bylo to „Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh“. Heiberg je vydal roku 1907.[8] Ve výroční zprávě prostějovského gymnázia z roku 1908/09 toto Archimédovo pojednání publikoval v české verzi pod názvem „Archimédův výklad Eratosthenovi o mechanických způsobech zkoumání“ středoškolský učitel František Vrána, o němž dnes není téměř nic známo. V letech 1902 až 1919 učil matematiku a fyziku na gymnáziu v Prostějově a od roku 1919 na reálce v Praze VII.[9]

Další osud tzv. Archimédova kodexu je velmi zajímavý. Roku 1998 byl v New Yorku vydražen za dva miliony dolarů. V dalších letech byl nejmodernějšími metodami pečlivě zkoumán. Výsledky náročného studia byly publikovány roku 2011. Napínavý příběh objevu, restaurování, luštění a analyzování palimpsestu je podán v pěkně napsané knize „Archimédův kodex“ [NN].

[7] Palimpsest je pergamenový svitek, případně kodex, z něhož byl původní text mechanickou a chemickou cestou odstraněn a získaný „čistý“ pergamen byl znovu popsán. Někdy byl současně rozřezán a svázán do kodexu jiného formátu. Původní text se většinou nepodařilo zcela odstranit. Někdy značně prosvítal a některé jeho partie byly čitelné, zejména za pomoci infračervených paprsků.

[8] J. L. Heiberg: Eine neue Archimedes-Handschrift, Hermes – Zeitschrift für klassische Philologie 42(1907), str. 235–303 + tabulka.

[9] O českých překladech Archimédových děl viz [BM].

Výroční zpráva

c. k.

STÁTNÍHO

vyššího gymnasia

V LITOMYŠLI.

Podává

ředitel ústavu za školní rok

1903.

OBSAH:

1.) Archimedovo měření kruhu. Napsal skut. učitel M. Valouch.
2.) Zprávy školní. Podává ředitel ústavu Em. Seifert.

V LITOMYŠLI.
Tiskem V. Augusty. — Nákladem c. k. vyš. gymnasia.

Výroční zpráva

C. K.

státního vyššího gymnasia

V LITOMYŠLI

ROKU

1905–06.

OBSAH:

1. Archimeda Syrakusského Počet pískový. Přeložil prof. Miloslav Valouch.
2. Zprávy školní. Podává ředitel ústavu Em. Seifert.

V LITOMYŠLI.
Tiskem V. Augusty v Litomyšli. — Nákladem c. k. vyšš. gymnasia.

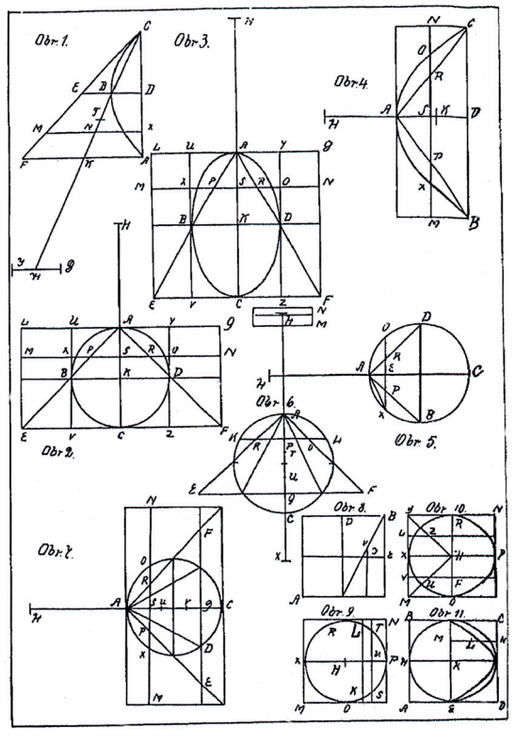
Archimedes Eratosthenovi pozdrav vzkazuje.

Odeslal jsem Ti dříve některé z nalezených vět, napsav jejich obsah, a vybídl jsem Té, bys nalezl tyto důkazy, které jsem až do přítomné doby nevyslovil. Byly pak nalezených vět obsahy tyto:

První: Vepíše-li se do přímého hranolu, majícího za základnu rovnoběžník, válec, mající základny v protilehlých rovnoběžnících, plášť pak na ostatních stěnách hranolu, a proloží-li se rovina středem kruhu, který jest základnou válce a jednou stranou čtverce v protilehlé rovině, odetne proložená rovina z válce úsek, který jest omezen pláštěm válce a dvěma rovinami a to jednou proloženou, druhou však, v níž jest základna válce, a pláštěm válce mezi řečenými rovinami. Jest pak úsek z válce oddělený šestým dílem celého hranolu.

Druhé věty obsah jest tento: Vepíše-li se do krychle válec, mající základny v protilehlých rovnoběžnících, plášť však dotýkající se ostatních čtyř stěn a vepíše-li se pak do téže krychle jiný válec, mající základny v jiných rovnoběžnících, plášť však dotýkající se ostatních čtyř stěn, jest útvar omezený plášti válců, který jest v obou válcích obsažen, polovici celé krychle.

Přihází se však, že tyto výsledky zkoumání se liší od těch dříve vyslovených. Neboť zajisté ony útvary, totiž sféroidy a konoidy a jejich úseky, srovnali jsme co do velikosti s útvary kužolů a válců, žádný však z nich nebyl shledán rovný tělesnému útvaru omezenému rovinami; z těchto však útvarů dvěma rovinami a plášti válců omezených každý jednomu tělesnému útvaru z omezených rovinami rovný se shledává. Těchto tedy vět důkazy v této knize napsav Tobě odesílám. Vida pak Tebe, jak právě říkám, ve vědě horlivého a v popředí filosofie stojícího pamětihodně . . . . . a zkoumání si vážícího, rozhodl jsem se Tobě dopsati a do této knihy vložiti zvláštnost jakéhosi způsobu, kterým Ti bude dána příležitost obdržeti prostředky, aby se mohlo něco z oboru mathematiky zkoumati pomocí mechaniky. Jsem pak přesvědčen, že toto jest prospěšno nicméně i k důkazu vět samých. A přece, ačkoliv se mně některé z nich dříve objevily mechanicky, byly dokázány později i geometricky, poněvadž zkoumání pomocí tohoto způsobu jest jakoby bez důkazu; snadnější však zajisté jest podati důkaz, když se napřed obdrží pomocí tohoto způsobu



3.2.1 Archimédovo „Měření kruhu“

Archimédův spis „Měření kruhu“ obsahuje pouze tři matematické věty. Domníváme se, že se dochovalo jen torzo původního díla, snad nějaký stručný výpis, který byl dále přepisován a šířen.

V následujícím textu uvedeme tyto tři věty v českém překladu Miloslava Valoucha. Dokážeme je v duchu Archimédova „Měření kruhu“, ale současným jazykem a symbolikou a připojíme stručné komentáře.

Věta 1. „Každý kruh rovná se pravoúhlému trojúhelníku, je-li poloměr roven jednomu rameni pravého úhlu, obvod pak podstavě.“ ([V1], str. 13)

Dnes bychom tvrzení této Archimédovy věty zformulovali takto:

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou poloměr a obvod tohoto kruhu.

A vyjádřili bychom je vzorcem $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o$.

Archimédés dokázal tvrzení Věty 1 exhaustivní metodou, kterou přiblížíme v následujícím důkazu.

Důkaz. Uvažujme kruh K o poloměru r a obvodu o a pravoúhlý trojúhelník T, jehož odvěsny mají délky r a o. Předpokládejme nejprve, že je obsah S_K kruhu K větší než obsah S_T trojúhelníku T. Potom existuje pravidelný n-úhelník N, který je do kruhu K vepsán a má větší obsah než trojúhelník T:

$$S_K > S_N > S_T.$$

Obsah n-úhelníku N je však roven součtu obsahů n rovnoramenných trojúhelníků, jejichž výšky jsou menší než r a součet délek všech jejich základen je menší než o. Proto je $S_N < S_T$, a to je spor.

Předpokládejme nyní, že je obsah S_K kruhu K menší než obsah S_T trojúhelníku T. Potom existuje pravidelný n-úhelník N, který je kruhu K opsán a má menší obsah než trojúhelník T:

$$S_K < S_N < S_T.$$

Obsah n-úhelníku N je však roven součtu obsahů n rovnoramenných trojúhelníků, jejichž výšky jsou rovny r a součet délek všech jejich základen je větší než o. Proto je $S_N > S_T$, a to je spor.

Archimédés tak exaktně ukázal, patrně jako první matematik vůbec, vztah obvodu a obsahu kruhu.

Připomeňme, že číslo π je definováno jako poměr obvodu a průměru kruhu, tj.

$$\pi = \frac{o}{2r};$$

odtud vyplývá vzorec pro výpočet obvodu kruhu:

$$o = 2\pi r.$$

Známý vzorec pro výpočet obsahu kruhu je důsledkem Archimédovy Věty 1.

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Konstanta π, kterou jsme definovali pomocí obvodu a průměru kruhu, figuruje tedy i ve vzorci pro obsah kruhu.

Věta 2. „Kruh jest ke čtverci průměru v poměru jako 11 ke 14.“ ([V1], str. 15)

Dnes bychom tvrzení druhé Archimédovy věty zformulovali takto:

Obsah kruhu je přibližně roven jedenácti čtrnáctinám obsahu čtverce jehož stranou je průměr kruhu.

Věta 2 využívá výsledek následující Věty 3, která říká, že obvod kruhu o poloměru r je přibližně roven $\frac{22}{7} \cdot 2r$. Snad byla Věta 2 původně zařazena jako důsledek Věty 3 a při nějakém pozdějším přepisu bylo pořadí těchto vět obráceno.

Důkaz. Podle Věty 1 a následující Věty 3 je obsah S_K kruhu K přibližně roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek r a $\frac{22}{7} \cdot 2r$. Nyní je

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{22}{7} \cdot 2r = \frac{11}{14} \cdot (2r)^2.$$

Věta 3. „Obvod každého kruhu rovná se trojnásobnému průměru a ještě přesahuje o něco méně než sedminu průměru, ale o více než deset jedenasedmdesátin.“ ([V1], str. 15)

Dnes bychom tvrzení Věty 3 zformulovali takto:

Pro obvod o kruhu o poloměru r platí

$$3\,\frac{10}{71} \cdot 2r \;<\; o \;<\; 3\,\frac{1}{7} \cdot 2r.$$

V důkazu této věty Archimédés vypočítal horní a dolní odhad obvodu o kruhu přesněji:

$$\frac{6\,336}{2\,017\,\frac{1}{4}} \cdot 2r \;<\; o \;<\; \frac{14\,688}{4\,673\,\frac{1}{2}} \cdot 2r.$$

Horní mez potom zaokrouhlil nahoru a dolní dolů:

$$3\,\frac{10}{71} \cdot 2r \;<\; \frac{6\,336}{2\,017\,\frac{1}{4}} \cdot 2r \;<\; o \;<\; \frac{14\,688}{4\,673\,\frac{1}{2}} \cdot 2r \;<\; 3\,\frac{1}{7} \cdot 2r.$$

Převedeme-li tyto zlomky na desetinná čísla, bude přesnost Archimédových výsledků zjevnější:

$$3,140\,845\ldots \cdot 2r \;<\; 3,140\,909\ldots \cdot 2r \;<\; o \;<\; 3,142\,826\ldots \cdot 2r \;<\; 3,142\,857\ldots \cdot 2r.$$

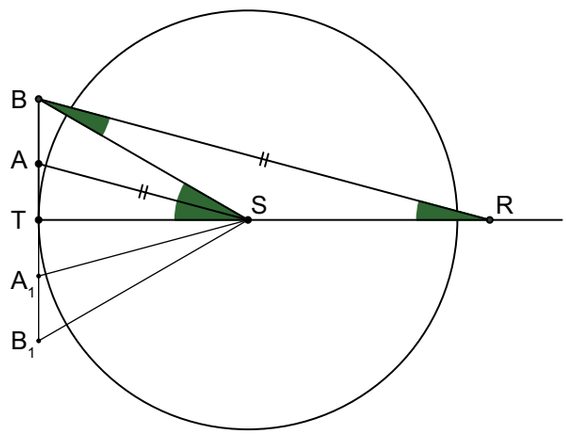
Archimédův výsledek můžeme interpretovat jako odhad čísla $\pi = 3,141\,592\ldots$, který je přesný na dvě desetinná čísla:

$$3,140\,909\ldots \;<\; \pi \;<\; 3,142\,826\ldots$$

Archimédés nejprve vypočetl obvod vepsaného pravidelného šestiúhelníku a obvod opsaného pravidelného šestiúhelníku, rozpůlením středových úhlů získal pravidelné dvanáctiúhelníky, vypočetl jejich obvody, a tak postupoval až k 96-úhelníkům. Obvod kruhu pak odhadl shora obvodem opsaného pravidelného 96-úhelníku a zdola pak obvodem vepsaného pravidelného 96-úhelníku.

Předchozí dva Archimédovy důkazy jsme jen nepodstatně modifikovali – pouze jsme je převedli do současné řeči a symboliky. Třetí důkaz však přepracujeme podstatně výrazněji, využijeme totiž algebraickou symboliku, kterou Archimédés k disposici neměl.

Důkaz. Uvažujme pro jednoduchost jednotkovou kružnici (viz obr. 1), které byl opsán pravidelný n-úhelník a rozpůlením středových úhlů vznikl pravidelný $2n$-úhelník.



Obr. 1

Na obr. 1 je $|ST| = 1$, BT je polovina strany opsaného n-úhelníku a AT je polovina strany opsaného $2n$-úhelníku (tedy $|\sphericalangle TSA| = |\sphericalangle ASB|$), jejich délky označme t_n a t_{2n}, tj. $|BT| = t_n$ a $|AT| = t_{2n}$. Nechť je přímka BR rovnoběžná s přímkou AS, je tedy

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle SBR| = |\sphericalangle SRB|,$$

a tedy $SB = SR$. Trojúhelník $\triangle ATS$ je podobný trojúhelníku $\triangle BTR$ (věta „uuu“), proto je

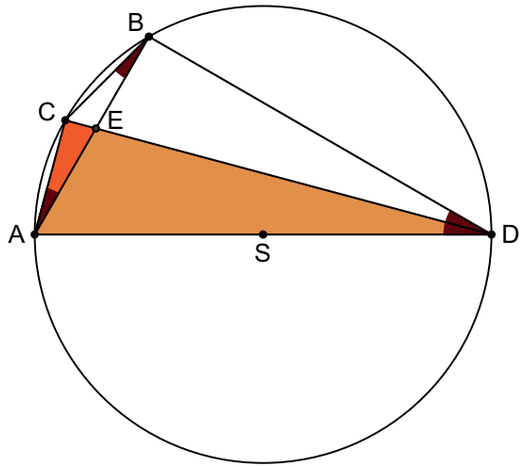
$$\frac{|AT|}{|TS|} = \frac{|BT|}{|TR|} = \frac{|BT|}{|TS| + |SR|} = \frac{|BT|}{|TS| + |SB|}$$

a po dosazení je

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}}. \tag{1}$$

Nyní je třeba si uvědomit, že $t_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Podle vztahu (1) vypočteme t_{12}, potom t_{24}, potom t_{48} a nakonec t_{96}. Vypočetli jsme tedy obvod opsaného 96-úhelníku: $96 \cdot 2t_{96} = 192 \cdot t_{96}$.

Uvažujme opět jednotkovou kružnici, do níž byl vepsán pravidelný n-úhelník a rozpůlením středových úhlů vznikl pravidelný $2n$-úhelník.



Obr. 2

Na obr. 2 je $|SA| = 1$, AB je strana vepsaného n-úhelníku, AC a BC strany vepsaného $2n$-úhelníku. Jejich délky označme s_n a s_{2n}, tj. $|AB| = s_n$ a $|AC| = |BC| = s_{2n}$. Pomocí elementárních geometrických poznatků zjistíme, že trojúhelníky $\triangle ADC$ a $\triangle EAC$ jsou podobné (věta „uuu“) a rovněž trojúhelníky $\triangle CDB$ a $\triangle CBE$ jsou podobné (věta „uuu“).[10] Z těchto podobností vyplývají vztahy

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|EA|}{|CA|}, \qquad \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|EB|}{|CB|} = \frac{|EB|}{|CA|}.$$

Odtud

$$\frac{|AD| + |BD|}{|CD|} = \frac{|EA| + |EB|}{|CA|} = \frac{|AB|}{|CA|},$$

po dosazení je

$$\frac{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}{\sqrt{4 - s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}$$

a po malé úpravě

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}. \tag{2}$$

Nyní je třeba si uvědomit, že $s_6 = 1$; podle předchozího vztahu (2) snadno získáme s_{12}, potom vypočteme s_{24}, potom s_{48} a nakonec obdržíme s_{96}. Vypočetli jsme tedy obvod vepsaného 96-úhelníku: $96 \cdot s_{96}$.

Obvod kruhu tedy můžeme odhadnout shora obvodem opsaného 96-úhelníka a zdola obvodem vepsaného 96-úhelníka. Pro obvod o kruhu platí:

$$96 \cdot s_{96} \ < \ o \ < \ 192 \cdot t_{96}.$$

[10] Úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CDB$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAB$ jsou obvodové úhly ke stejně dlouhému oblouku, a mají tedy stejnou velikost.

Podle výše uvedených vzorců (1) a (2) lze výpočet přibližné hodnoty obvodu kruhu (resp. čísla π) provést i na malé kalkulačce. Pro $n = 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96$ dostáváme:

$$\begin{aligned} n &= 6 && 3,000 < \pi < 3,464 \\ n &= 12 && 3,106 < \pi < 3,215 \\ n &= 24 && 3,133 < \pi < 3,160 \\ n &= 48 && 3,139 < \pi < 3,146 \\ n &= 96 && 3,141 < \pi < 3,143 \end{aligned}$$

Odhadli jsme tedy číslo π s přesností na dvě desetinná místa.

Archimédés však počítal s konkrétními čísly a postupoval po jednotlivých krocích. Od obvodu opsaného (vepsaného) šestiúhelníku přešel k obvodu opsaného (vepsaného) dvanáctiúhelníku, a tak postupoval až k 96-úhelníkům. V každém kroku navíc pečlivě zvažoval, zda počítá dolní nebo horní odhad, a podle toho (v závislosti na tom, zda přičítal, odčítal, násobil či dělil) volil dolní nebo horní odhad čísla, s nímž právě pracoval.

3.2.2 Poznámky

Archimédův výpočet poměru obvodu a průměru kruhu inspiroval řadu matematiků. Byl to například Leonardo Pisánský (zvaný též Fibonacci, asi 1170 až 1250), který Archimédův výpočet zopakoval ve svém díle „Practica geometriae“ z roku 1220 nebo 1221. Dospěl k vymezení hodnoty čísla π nerovnostmi

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}} \qquad \text{a k přibližné hodnotě} \qquad \frac{864}{275} \doteq 3,141\,818\ldots$$

Ocitujme příslušnou pasáž:

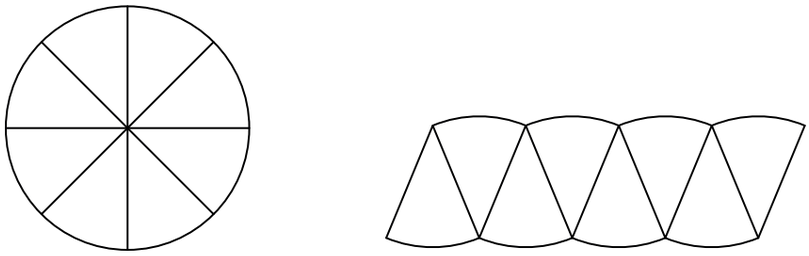
„… erit proportio circulj ad suum dyametrum, sicut 1 440 ad $\frac{1}{3}$458, cum sint in medio inter $\frac{4}{9}$458 et $\frac{1}{5}$458. Sed proportio de 1 440 ad $\frac{1}{3}$458 est sicut triplum unius numerorum ad triplum alterius, hoc est sicut 4 320 ad 1 375; quorum proportio in minimis numeris est sicut 864 ad 275: sed proportio de 864 ad 275, minus $\frac{1}{11}$, est sicut $\frac{1}{7}$3 ad 1 …“ ([LP], str. 91)[11]

Z mnoha úspěšných pokusů o výpočet čísla π připomeňme ještě dva. Perský matematik a astronom Al-Kashi (14. až 15. stol.), který působil v Samarkandu, vypočetl roku 1429 hodnotu čísla π na 16 desetinných míst a holandský matematik Ludolf van Ceulen (1540–1610) vypočítal roku 1596 číslo π podle Archimédova vzoru na 20 desetinných míst (došel k $15 \cdot 2^{37}$-úhelníku) a roku 1603 na 32 desetinných míst. Při svých výpočtech dospěl až k 2^{62}-úhelníku.[12]

Populární zdůvodnění Archimédova vztahu $P = \frac{1}{2} \cdot o \cdot r$ lze ve škole provést pomocí následujícího obrázku (viz obr. 3). Kruh rozdělíme na n shodných výsečí, které „přeskládáme“ do jakéhosi „křivočarého obdélníka“. Jedna jeho strana je poloměr uvažovaného kruhu, druhá

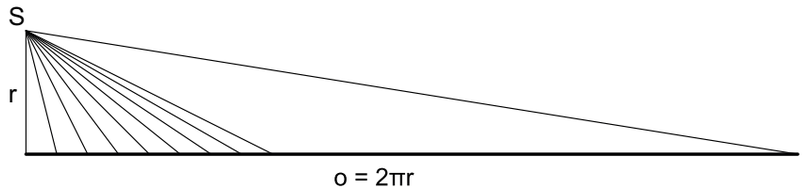
[11] O životě a díle Leonarda Pisánského viz např. [BJ].
[12] O historii a výpočtech čísla π viz např. [Ve]. Podrobněji viz [B], [BBB], [EL], [P], [S].

je polovina obvodu kruhu. Pokud zvětšujeme počet výsečí (tj. číslo n neomezeně roste), blíží se „křivočarý“ obdélník ke skutečnému obdélníku.



Obr. 3

Druhé možné populární vysvětlení spočívá na následujícím obrázku. Kruh „odkutálíme“ tak, aby se jeho obvod „narovnal“. Obsahy jednotlivých kruhových výsečí jsou potom rovny obsahům trojúhelníků, jejichž základny dohromady dají obvod kruhu a výška je rovna poloměru.



Obr. 4

Archimédův vtipný výpočet čísla π pomocí aproximace obvodu kruhu obvody pravidelných n-úhelníků (opsaných i vepsaných) můžeme (v modernizované podobě) využít i na střední škole v matematickém semináři, resp. při zadání projektu. Studenti si zopakují řadu poznatků základní a střední školy: Thalétova věta, Pýthagorova věta, obvodový úhel, podobné trojúhelníky, rovnost vhodných dvojic úhlů, úprava algebraického výrazu, práce s odmocninami atd. Archimédův postup může být proveden na počítači, podnětné bude programování jednotlivých kroků výpočtu. Lze jej rovněž modifikovat a začít s opsaným a vepsaným čtvercem a oba postupy a jejich výsledky pak porovnat. Je možno se dokonce vydat přesně po Archimédových stopách a počítat v jeho duchu horní a dolní odhady.

3.2.3 Objem a povrch koule

Připomeňme nyní výsledky, kterých si Archimédés nejvíce cenil.[13] Týkají se vztahu objemu koule a objemu opsaného válce a vztahu povrchu koule a povrchu opsaného válce. Archimédés je vyložil jednak ve spise „O kouli a válci“, jednak ve svém „Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh“. V obou případech zde hraje velkou roli koeficient $\frac{2}{3}$. Věnujme se nejprve objemu koule a prezentujme velmi nápaditý a poučný Archimédův „fyzikální“ přístup k tomuto problému.

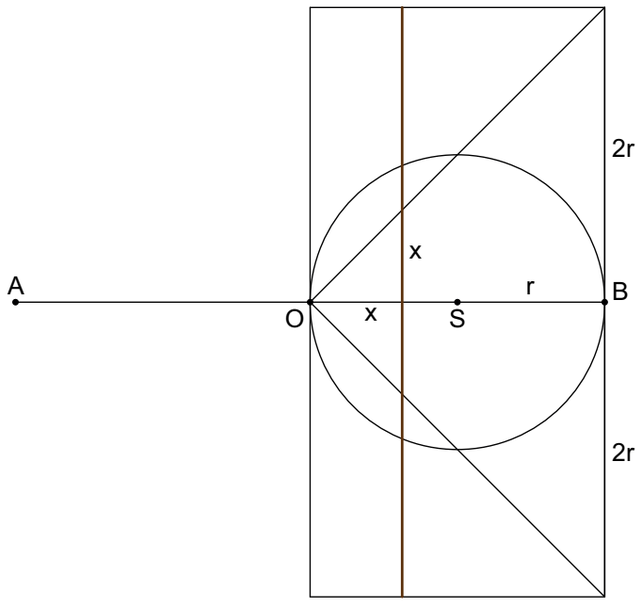
[13] Srovnejme s výše uvedeným citátem z Ciceronových „Tuskulských hovorů“.

Věta A. Objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce.

Uvažujme válec o poloměru podstavy r a výšce r, kužel se stejnou podstavou a stejnou výškou a kouli o poloměru r. Víme-li již, že objem kužele je roven jedné třetině objemu válce se stejnou základnou a stejnou výškou, pak jsou – podle předchozí věty – objemy kužele, koule a válce v poměru $1 : 2 : 3$.

Dokažme nyní Archimédovo tvrzení o objemu koule, které je vysloveno v předchozí větě. Vyložme jeho myšlenku využívající rovnováhu na rovnoramenné páce.

Důkaz. Uvažujme kouli o poloměru r, kužel o poloměru podstavy $2r$ a výšce $2r$ a válec o poloměru základny $2r$ a výšce $2r$. Mějme dále rovnoramennou páku AB, která je podepřená v bodě O. Všechna tři tělesa jsou v prvním okamžiku „navlečena“ na jednom rameni páky (viz obr. 5). Zdůrazněme, že jde o myšlenkový pokus; uvažovaná tělesa zaujímají z velké části týž prostor, a proto nemohou být současně v poloze znázorněné na obr. 5. Nyní ukážeme, že objem V_V válce ponechaný na původním místě je vyvážen objemem V_K koule a objemem $\frac{1}{3}V_V$ kužele, které budou zavěšeny v bodě A.



Obr. 5

Uvažujme řez ve vzdálenosti x od bodu O, který prochází všemi třemi uvažovanými tělesy. Obsah řezu kuželem je πx^2, obsah řezu koulí je $\pi x \cdot (2r - x)$ (podle Eukleidovy věty o výšce), obsah řezu válcem je $\pi \cdot (2r)^2$. Zavěsíme-li obsah řezu kuželem a obsah řezu koulí v bodě A, bude jimi vyvážen obsah řezu válcem ponechaný na místě. Je totiž

$$[\pi x^2 + \pi x \cdot (2r - x)] \cdot 2r = \pi (2r)^2 \cdot x.$$

Označme symbolem V_K objem uvažované koule a symbolem V_V objem uvažovaného válce. Sumarizujme nyní všechny obsahy řezů pro všechna $x \in \langle 0, 2r \rangle$. Objemy V_K a $\frac{1}{3}V_V$ koule a kužele zavěšené v bodě A tedy vyváží objem V_V válce ponechaný na místě. Objem válce

však můžeme uvažovat soustředěný do jeho těžiště. Rovnováha na páce tedy vypadá takto:

$$(V_K + \frac{1}{3}V_V) \cdot 2r = V_V \cdot r.$$

Odtud snadno vypočteme, že

$$V_K = \frac{1}{6}V_V.$$

Válec, který je opsán uvažované kouli, má poloměr r a výšku $2r$. Jeho objem V je proto roven jedné čtvrtině objemu V_V, tj.

$$V = \frac{1}{4}V_V.$$

Odtud

$$V_K = \frac{2}{3}V.$$

Dokázali jsme tedy, že objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce. Po dosazení hodnoty objemu válce $V = \pi r^2 \cdot 2r$ dostáváme vzorec pro objem koule:

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Konstanta π, která figuruje ve vzorcích pro obvod a obsah kruhu a ve vzorcích pro objem a povrch válce, resp. kužele, se tedy objevila i ve vzorci pro objem koule. Nyní ji přeneseme do vzorce pro povrch koule. Provedeme obdobnou úvahu jako Archimédés pro obvod a obsah kruhu, kterou vyjádřil vztahem $P = \frac{1}{2} \cdot o \cdot r$.

Věta B. Povrch koule je roven dvěma třetinám povrchu opsaného válce.

Důkaz. Objem koule rozložíme na součet objemů velkého počtu „jehlanů“, jejichž podstavami jsou malé sférické trojúhelníčky pokrývající povrch koule a jejichž společným vrcholem je střed koule. Zvětšujeme-li počet uvažovaných jehlanů, tj. pokrýváme-li povrch koule stále větším počtem menších sférických trojúhelníků, blíží se tvar uvažovaných „jehlanů“ tvaru jehlanů skutečných. Objem V_K koule je tedy roven (sčítáme přes všechny jehlany j)

$$V_K = \sum_j \frac{1}{3} \cdot P_j \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \Big(\sum_j P_j\Big) \cdot r = \frac{1}{3}S \cdot r,$$

kde S_K je povrch koule. Podle předešlého je $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$, tedy

$$S_K = 4\pi r^2.$$

Přitom je povrch S opsaného válce vyjádřen vztahem $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$. Povrch koule je tedy roven dvěma třetinám povrchu opsaného válce.

Povšimněme si ještě, že výraz ve vzorci pro povrch koule získáme zderivováním výrazu ve vzorci pro objem koule a výraz ve vzorci pro obvod kruhu získáme zderivováním výrazu pro obsah kruhu. Opačným směrem se dostaneme integrováním.

Využijme při výuce Archimédovy myšlenky. Nenuťme studenty biflovat vzorce pro objem a povrch koule. Neodkazujme je ani na nejrůznější přehledy vzorců, taháky, tabulky apod. Snažme se, aby si zapamatovali koeficienty $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ a jejich význam pro objem kužele a koule.

3.3 Literatura

[A1] Archimed, *Sočinenija. Perevod, stat'ja i komentarii I. N. Veselovskogo*, Moskva, 1962.

[A2] Archimed, *Izmerenie kruga*, in F. Rudio (ed.): O kvadrature kruga, 3. vydání, Moskva, Leningrad, 1936.

[B] Beckmann P., *A History of* π, St. Martin's Press, New York, 1971, česky: „Historie čísla π“, Academia, Praha, 1998.

[BŠ] Bečvář J., Štoll I., *Archimedes. Největší vědec starověku*, edice Velké postavy vědeckého nebe, sv. 11, Prometheus, Praha, 2005.

[BJ] Bečvář J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, sv. 19, Prometheus, Praha, 2001.

[BM] Bečvářová M., *Archimédovy práce česky*, in J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí 22. 8. – 26. 8. 2008, Matfyzpress, Praha, pp. 93–102.

[BBB] Berggren L., Borwein J. M., Borwein P., *Pi: A Source Book*, Springer-Verlag, New York, 1997, další vydání: 2000, 2004.

[Ci] Cicero M. T., *Tuskulské hovory*, Svoboda, Praha, 1976.

[Cl] Clagett M., *Archimedes in the Middle Ages I. – V.*, University of Wisconsin Press, Madison, 1964–1984.

[Di] Dijksterhuis E. J., *Archimedes*, Ejnar Munksgaard, Copenhagen, 1956.

[E] Eecke P., *Les Oeuvres Complètes d'Archimède*, Paris, Bruxelles, 1921.

[EL] Eymard P., Lafon J.-P., *Autour du nombre* π, Hermann, Paris, 1999, anglický překlad: „The number π“, American Mathematical Society, 2004.

[Hea] Heath T. L., *The Works of Archimedes. Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*, Cambridge University Press, 1897, The Method of Archimedes, Recently Discovered by Heiberg. A Supplement to The Works of Archimedes, Cambridge University Press, 1912; další vydání: Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2002; německý překlad: Archimedes' Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen, Deutsch von Dr. Fritz Kliem, Verlag von O. Häring, Berlin, 1914.

[Hei] Heiberg J. L. (ed.), *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii I–III*, Teubner, Leipzig, 1910, 1913, 1915.

[Ka] Kagan V. F., *Archimedes*, Orbis, Praha, 1953, z ruštiny přeložil A. Felix.

[LP] Leonardo Pisano, *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, I.–II., pubblicati da Baldassarre Boncompagni*, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Roma, 1857, 1862.

[Lu] Lurie S. J., *Archimedes*, AV SSSR, Moskva, Leningrad, 1945.

[M] Mačák K., *Tři středověké sbírky matematických úloh. Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil*, Dějiny matematiky, sv. 15, Prometheus, Praha, 2001.

[NN] Netz R., Noel W., *Archimédův kodex*, Nakladatelství Deus, Praha, 2008.

[P] Phillips G. M., *Two Millenia of Mathematics*, Canadian Mathematical Society, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2000.

[Pl] Plutarchos, *Životy slavných Řeků a Římanů, Díl I.*, Živá díla minulosti, Odeon, Praha, 1967.

[S] Schepler H. C., *The Chronology of* π, Mathematics Magazine **23** (1950), 165–170, 216–228, 279–283.

[Sch] Schneider I., *Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979.

[St] Studnička F. J., *Archimedes*, Živa **8** (1898), 133–135, 178–180.

[V1] Valouch M., *Archimedovo měření kruhu. Napsal skut. učitel M. Valouch*, Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli za školní rok 1903, Litomyšl, 1903, str. 1–25.

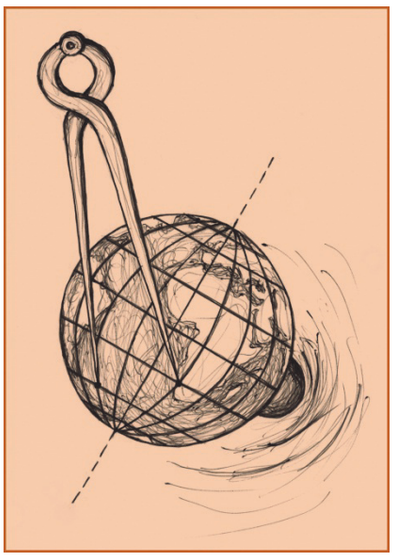
[V2] Valouch M., *Archimeda Syrakusského Počet pískový. Přeložil prof. Miloslav Valouch* (1906), Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli roku 1905–06, Litomyšl, str. 1–13, reprint: Matice technická, Praha, 1993.

[Ve] Veselý J., *π aneb 3,141 592 . . .*, Učitel matematiky **3** (1995), č. 3(15), 1–10, č. 4(16), 1–13.

[Vi] Vitruvius M., *Deset knih o architektuře*, Antická knihovna 42/R, Arista, Baset, Praha, 2001.

[Vr] Vrána F., *Archimedův výklad Eratosthenovi o mechanických způsobech zkoumání. (Z řečtiny přeložil Fr. Vrána)*, 3. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově za školní rok 1908/09, Prostějov, 1909, str. 2–18.

4. Využití matematiky v praxi



V této kapitole se budeme věnovat některým astronomickým jevům a navigaci. Soustředíme se přitom na několik problémů. První z nich bude spíše menší historickou poznámkou. Ukážeme si, jak byl už ve starověku znám ekvivalent zeměpisné šířky, a podíváme se na přesnost, které tehdejší lidé dosáhli. Druhý se bude týkat periodicity zatmění Slunce. Zde využijeme řetězových zlomků, které dále uplatníme při určování délky tzv. *Metónova cyklu.* Poslední problém se bude týkat současnosti: seznámíme se stručně s matematickou podstatou satelitní navigace, která je dnes hojně využívána v automobilech a mobilních telefonech.

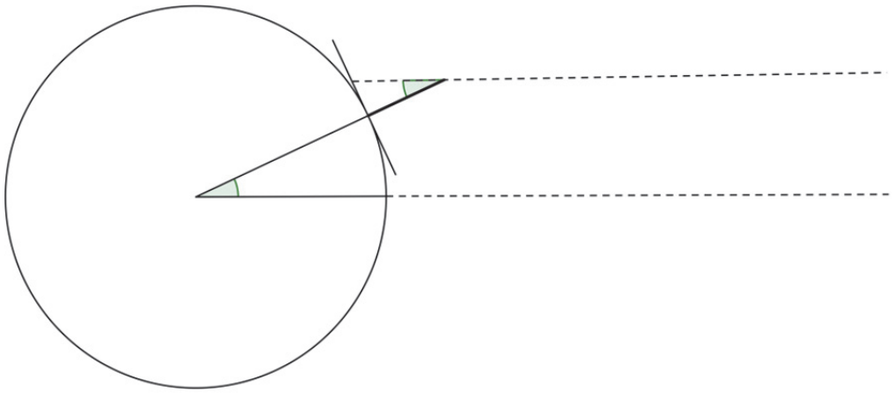
4.1 Zeměpisná šířka

Než přistoupíme k výpočtu periody zatmění Slunce a k výkladu matematické podstaty nejmodernější satelitní navigace, podívejme se, jak dovedli zeměpisnou šířku určovat naši předkové ve starověku. Zeměpisnou délkou se zde zabývat nebudeme – problém jejího určování byl uspokojivě vyřešen až konstrukcí přesného chronometru v 18. století. Ze starověkých dokladů určování zeměpisné šířky uvedeme krátký úryvek ze spisu *O architektuře*, který napsal koncem 1. stol. př. Kr. římský architekt Vitruvius. Ve svém díle chápe architekturu v širším smyslu, než je tomu dnes. Pojednává tedy také o stavbě válečných strojů, vodovodů, slunečních hodin a v omezené míře o tématech astronomických. V sedmé kapitole píše:[1]

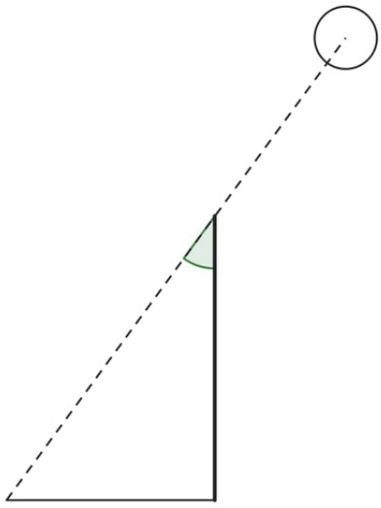
Slunce totiž v době rovnodennosti při svém průchodu Skopcem a Váhami vrhá v místech takové zeměpisné šíře, jako je Řím, stín, který měří 8/9 gnómonu. V Athénách má délka stínu 3/4 gnómonu, na Rhodu 5/7, v Tarentu 9/11, v Alexandrii 3/5, přičemž lze na všech ostatních místech zjistit, že příroda vytváří rovnodennostní stín gnómonu všude jinak.

Gnómonem rozumíme svisle postavenou tyč (sloup, obelisk), která vrhá stín na vodorovnou zemi. V době rovnodennosti se Slunce nachází přesně v rovině rovníku, v poledne tam tedy dopadají sluneční paprsky kolmo na zem. Princip určování zeměpisné šířky je znázorněn na následujícím schématu. Sluneční paprsky dopadající na Zemi můžeme považovat za vzájemně rovnoběžné vzhledem k velké vzdálenosti Země od Slunce.

[1] Citováno podle překladu A. Otoupalíka: *Marcus Vitruvius Pollio: Deset knih o architektuře.* Praha, Arista, 2001.



Situace pro pozorovatele na konkrétním místě na Zemi vypadá takto:



Velikost hledaného úhlu lze vypočítat pomocí funkce tangens – z poměru délky stínu k délce gnómonu. V době římské nebyla funkce tangens ještě známa, takže jsou ve Vitruviově ukázce uvedeny pouze poměry obou délek. V následující tabulce jsou shrnuty zeměpisné souřadnice míst uváděných v ukázce a v posledním sloupci jsou pro porovnání přesnosti převedeny Vitruviovy údaje na velikosti příslušných úhlů.

Řím	41° 53’ 25’’	12° 29’ 30’’	$\operatorname{arctg}\frac{8}{9} = 41° 38'$
Athény	37° 58’	23° 43’ 35’’	$\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = 36° 52'$
Rhodos	36° 10’	27° 55’	$\operatorname{arctg}\frac{5}{7} = 35° 32'$
Tarentos	40° 28’ 30’’	17° 14’	$\operatorname{arctg}\frac{9}{11} = 39° 17'$
Alexandrie	31° 11’	29° 54’	$\operatorname{arctg}\frac{3}{5} = 30° 58'$

Přestože jsou Vitruviovy údaje vyjádřeny pomocí poměrů malých celých čísel (snadno získaných měřením), vykazují obdivuhodnou přesnost.

4.2 Zatmění Slunce

Zatmění Slunce nastávají zakrytím Měsíce…
takže by se správně neměla nazývat zatmění, ale zakrytí.

Gemínos, 1. stol. př. Kr.

Zatmění Slunce patří bezesporu mezi ty jevy, které poutaly pozornost lidí od nepaměti. Jejich záznamy máme z většiny starověkých kultur.[2] Tyto záznamy pro nás mají nesmírnou hodnotu, neboť pomocí nich můžeme datovat mnohé historické události. Zatmění Slunce (i Měsíce) byla nejen velkolepou podívanou, ale působila také zmatek v armádách. Umění předpovídat zatmění Slunce bylo nejednou využito ve prospěch těch, kteří takovéto znalosti měli. Snad nejznámějším případem je zatmění, které předpověděl antický filosof Thalés z Mílétu. Proběhlo 28. května 585 př. Kr. a Hérodotos o něm píše v první knize svých Dějin:

Alyattés ke Kyaxarově žádosti Skythy nevydal, takže z toho potom vznikla pětiletá válka mezi Lýdy a Médy. V těch letech častokrát zvítězili Médové nad Lýdy, častokrát zase Lýdové nad Médy. Jednou došlo také k jakési noční bitvě. Když válka trvala se střídavým štěstím, došlo v šestém roce ke srážce, při které se stalo, že se po začátku boje pojednou den změnil v noc. Tuto změnu dne předpověděl Iónům Thalés z Mílétu a stanovil pro ni právě tento rok, ve kterém k ní také došlo. Když Lýdové a Médové spatřili, že nastala noc místo dne, ustali v boji a obě strany raději pospíchaly uzavřít mír. Mír sjednali syennesis z Kilikie a labynétos z Babylóna. Ti se také postarali o jeho stvrzení přísahami a sjednali vzájemné sňatky.[3]

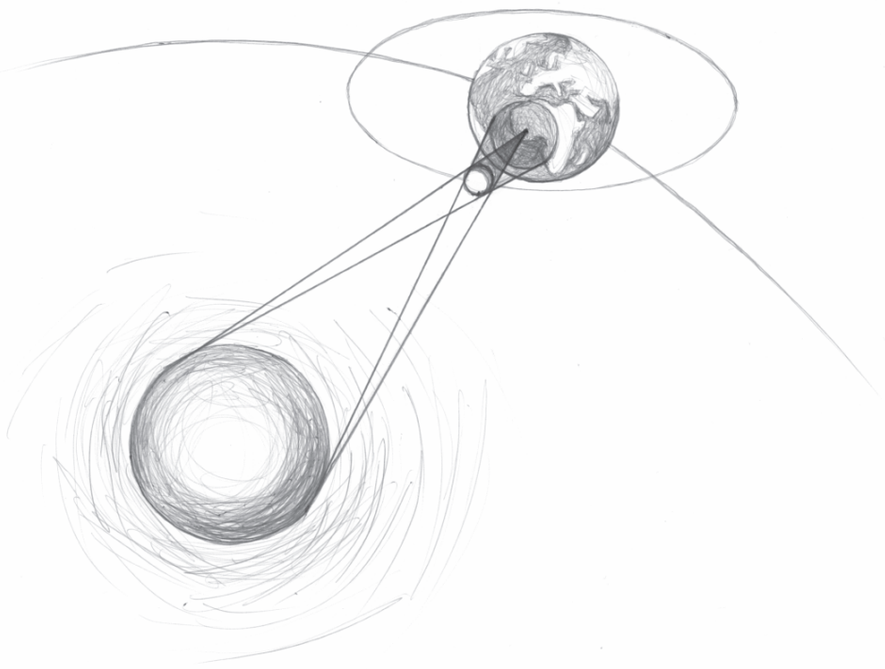
Zajímavých zatmění Slunce byla v dějinách lidstva celá řada. Přejděme však nyní k podstatě tohoto jevu. Zatmění Slunce nastává, pokud je (pro pozorovatele na Zemi) sluneční disk zakryt Měsícem. Měsíc se tedy nachází mezi Sluncem a Zemí, přičemž stín Měsíce dopadá na povrch Země. Slunce je od Země asi 400krát dále než Měsíc. Zároveň je však skutečný průměr Měsíce asi 400krát menší než průměr Slunce. Drobné odchylky ve vzdálenostech způsobených eliptičností drah Země kolem Slunce a Měsíce kolem Země pak způsobují, že může nastat zatmění *úplné* (pokud Měsíc zakryje celý sluneční disk) nebo *prstencové* (Měsíc je od Země vzdálen natolik, že měsíční disk se pak jeví menší než sluneční).

Výchozí situace je tedy pro vznik zatmění velmi příznivá. Kdyby navíc Měsíc obíhal kolem Země přesně v rovině ekliptiky[4], nastávalo by zatmění Slunce každý měsíc. Rovina dráhy Měsíce je však oproti ekliptice skloněna o asi 5°, zatmění tedy může nastat jen tehdy, když se Měsíc nachází v rovině ekliptiky, tj. v tzv. *uzlových bodech*. Zároveň se musí nacházet mezi Zemí a Sluncem, musí tedy být v *novu*.

Díky tomu, že se Měsíc (i Země) pohybují poměrně pravidelně, nastává splnění první i druhé podmínky periodicky. V uzlovém bodě se Měsíc nachází jednou za tzv. *drakonický měsíc*, který

[2] Čína, Ugarit, Asýrie, Řecko, … Známé je také zatmění, které podle Lukášova evangelia 23,44–45 nastalo při ukřižování Ježíše.
[3] Citováno podle překladu Jaroslava Šonky, který vyšel v nakladatelství Academia roku 2003.
[4] rovina, v níž obíhá Země kolem Slunce

trvá $D = 27{,}212\,220\,817$ dní (27 dní 5 hod. 5 min. 35,8 s). Fáze měsíce se vystřídají za tzv. *synodický měsíc*, jehož trvání je $S = 29{,}530\,588\,853$ dní (29 dní 12 hod. 44 min. 2,7 s).



Obr. 1 – Zatmění Slunce

Naším úkolem je nyní určit periodu, se kterou nastávají obě tyto podmínky současně. Přibližně řečeno, z matematického hlediska máme najít co nejmenší přirozená čísla P, Q, pro která platí s co nejmenší odchylkou rovnost

$$P \cdot S = Q \cdot D.$$

Přesné řešení, kdy je odchylka nulová, je zřejmé:

$$\frac{P}{Q} = \frac{D}{S} = \frac{27\,212\,220\,817}{29\,530\,588\,853}.$$

Perioda v řádu miliard měsíců je však prakticky neupotřebitelná. Jelikož je čitatel prvočíslo, jsou navíc obě čísla nesoudělná. Budeme tedy hledat aproximaci tohoto zlomku jiným zlomkem s co nejmenším čitatelem a jmenovatelem, která bude zároveň dostatečně přesná.

V tomto úkolu nám pomohou *řetězové zlomky*. Chceme-li například přibližně vyjádřit zlomek $\frac{87}{38}$ pomocí zlomku s menším jmenovatelem (například pro zjednodušení výpočtů), můžeme postupovat takto:

1. Odebereme celou část zadaného čísla – tj. provedeme dělení.
2. Pokud zbude po dělení nula, proces končí.

3. Zbude-li číslo mezi nulou a jedničkou, jeho převrácená hodnota je číslo větší než jedna. Můžeme tedy opět provést dělení.

Proveďme tento postup na zvoleném racionálním čísle $\frac{87}{38}$:

$$\frac{87}{38} = 2 + \frac{11}{38} = 2 + \frac{1}{\frac{38}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{11}{5}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}$$

Výraz, který jsme nakonec dostali, se nazývá *řetězový zlomek*. V čitatelích vznikajících zlomků je vždy číslo jedna, proto stačí zapisovat vždy prvního sčítance ve jmenovateli. Dostaneme tak velmi stručný zápis řetězového zlomku:

$$\frac{87}{38} = [2; 3, 2, 5].$$

Tento kondenzovaný zápis reprezentuje racionální číslo, které můžeme vypočítat například zpětnou úpravou řetězového zlomku.

Pokud bychom ve výpočtu tvaru řetězového zlomku vzali jednotlivé členy a zanedbali bychom v nich vždy druhý sčítanec v posledním jmenovateli, obdrželi bychom posloupnost zlomků:

$$2, \qquad 2 + \frac{1}{3}, \qquad 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}, \qquad 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}},$$

neboli po úpravě

$$2, \qquad \frac{7}{3}, \qquad \frac{16}{7}, \qquad \frac{87}{38}.$$

Dostali jsme zlomky, které jsou čím dál tím blíže zvolenému racionálnímu číslu. Nazývají se *konvergenty*. Navíc jsou tyto zlomky střídavě větší a menší než zadané racionální číslo $\frac{87}{38}$. Tuto vlastnost má obecně každá posloupnost konvergentů. Jelikož vždy odebereme celou část, a potom pracujeme s pouhým zbytkem, zdá se, že zlomky, které postupně dostáváme, jsou těmi „nejlepšími“ s daným jmenovatelem, tj. jsou danému racionálnímu číslu nejblíže. Přesně tuto myšlenku shrnuje následující věta.

Hodnota konvergentu $\frac{P_k}{Q_k}$ racionálního čísla $\frac{p}{q}$ se od hodnoty $\frac{p}{q}$ liší méně než hodnota kteréhokoli jiného zlomku $\frac{m}{n}$, jehož jmenovatel $n < Q_k$, tj. platí nerovnost

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right|.$$

Přesností, s jakou konvergent aproximuje zadané racionální číslo, rozumíme absolutní hodnotu rozdílu tohoto racionálního čísla a příslušného konvergentu. Můžeme ji snadno odhadnout pomocí této věty:

Ze dvou po sobě jdoucích konvergentů $\frac{P_i}{Q_i}$ *racionálního čísla* $\frac{p}{q}$ *má alespoň jeden tu vlastnost, že platí*

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{2\cdot Q_k^2}.$$

Zároveň platí, že konvergenty racionálního čísla $\frac{p}{q}$ jsou jeho nejlepším přiblížením. Přesněji vyjádřeno:

Pokud budeme hledat posloupnost konvergentů k zadanému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$, bude tato posloupnost konečná – posledním členem bude právě $\frac{p}{q}$. V posloupnosti konvergentů totiž postupně vzrůstají jmenovatele, největším z nich je pak právě q. Pro racionální čísla tedy dostaneme vždy řetězový zlomek konečný.

Pro iracionální čísla vnikají řetězové zlomky nekonečné. Posloupnost konvergentů je tedy také nekonečná. Je tvořena zlomky, kde ve jmenovateli (a čitateli) jsou čím dál tím větší čísla. Konečnou být tato posloupnost nemůže – končila by totiž racionálním číslem, které by nutně nebylo rovno zadanému číslu iracionálnímu, a proces vytváření řetězového zlomku by musel pokračovat. Dá se dokázat, že vezmeme-li konkrétní iracionální číslo α, aproximuje jej konvergent $\frac{P_k}{Q_k}$ s přesností

$$\left|\alpha-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_k\cdot Q_{k+1}},$$

přičemž Q_k a Q_{k+1} jsou jmenovatele dvou po sobě jdoucích konvergentů čísla α.

Velmi snadno se počítají konvergenty u odmocnin. V tomto případě nemusíme znát numerickou hodnotu zadané odmocniny na mnoho míst, stačí její celá část a usměrňování zlomků. Například:

$$\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}}=$$

$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=\cdots=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}=[1;\overline{2}]$$

Využili jsme zde toho, že $\left(\sqrt{2}-1\right)$ je číslo mezi nulou a jedničkou, hraje tedy podobnou roli, jako zbytek po dělení. Vidíme, že jsme dostali řetězový zlomek periodický. V případě odmocnin je to pravidlem.

Nyní jsme již vybaveni pro řešení problému, jak nalézt dostatečně přesnou aproximaci zlomku s velkým jmenovatelem i čitatelem

$$\frac{D}{S} = \frac{27\,212\,220\,817}{29\,530\,588\,853}$$

zlomkem, který má jmenovatel podstatně menší, přitom se však od původního zlomku liší co nejméně. K řešení tohoto problému využijeme řetězových zlomků. Budeme tedy hledat konvergenty zlomku $\frac{D}{S}$.

Pro výpočet řetězového zlomku a příslušných konvergentů můžeme použít kalkulátoru. Jelikož se však jedná o větší množství rutinních výpočtů, můžeme si napsat krátký program, který udělá veškerou práci za nás.

Zvolili jsme programovací jazyk Python kvůli jeho jednoduchosti a snadné dostupnosti.[5] Uvádíme zde pro přehled kompletní program i s komentáři. Ve spustitelné podobě se nachází na přiloženém CD.

Odchylka, kterou budeme počítat pro kontrolu přesnosti, vychází z toho, že požadujeme, aby

$$\frac{D}{S} \approx \frac{P_i}{Q_i}.$$

Nebudeme však brát přímo rozdíl zlomků na levé a pravé straně, ale rozdíl

$$P_i \cdot S - Q_i \cdot D,$$

který se blíží k nule se vzrůstající přesností aproximace. Výhoda takto zavedené odchylky plyne z toho, že se jedná o rozdíl poměrně velkých čísel, takže je prakticky eliminováno nebezpečí vlivu zaokrouhlení. Oba odčítané členy reprezentují délku hledané periody v dnech.

```
# Výpočet periody zatmění Slunce

Drakon = 27.212220817
Synod  = 29.530588853
x = Drakon / Synod                  # poměr délky drakonického a synodického měsíce
N = 9                               # počet konvergentů, který se bude počítat

print('drakonický/synodický měsíc, řetězový zlomek')
print(x)                            # tisk zadaného čísla (pro přehlednost)

        # Výpočet řetězového zlomku  x // 1 je celá část x (vlastně celočíselné dělení 1)
q = []                              # pole q – zde bude uložen řetězový zlomek
for i in range(0, N):               # x - (x//1) je zlomková část čísla x (číslo minus jeho celá část)
        q.append( int(x // 1) )     # do řetězového zlomku přidáváme jednotlivé členy
        x = 1 / ( x – (x//1) )      # zde se tvoří řetězový zlomek
print(q)                            # tisk řetězového zlomku
```

[5] K dispozici je zdarma ke stažení na http://www.python.org/download/

```
        # Výpočet konvergentů K: P jsou čitatele, Q jsou jmenovatele
P = [ q[0], q[0]*q[1]+1 ]                   # první dva konvergenty
Q = [ 1, q[1] ]
for i in range(2, N):                       # i-té konvergenty (i = 2, 3, ..., N)
        P.append( q[i]*P[i-1] + P[i-2] )    # přidáváme další čitatele a jmenovatele do pole
        Q.append( q[i]*Q[i-1] + Q[i-2] )

        # Sestavení konvergentů do tvaru:  čitatel P[i] / jmenovatel Q[i]
        # Odchylka – rozdíl P[i]*synodických a Q[i]*drakonických měsíců v minutách (24*60)
        # Délka periody v letech – Synod*P[i] / délkou roku
Konvergenty = []
Odchylka = []
DelkaPeriody = []
for i in range(0, N):
        Konvergenty.append( str(P[i]) + ' / ' + str(Q[i]) )
        Odchylka.append( (Synod*P[i] - Drakon*Q[i]) *24*60 )
        DelkaPeriody.append( Synod*P[i] / 365.2421956 )

        # Tisk konvergentů, příslušné odchylky a délky periody v letech
print('\nkonvergent' + '\t\t'+ 'odchylka (min.)' + '\t'+ 'délka periody (roky)')

for i in range(0, N):
        print( Konvergenty[i] + '\t\t'+ '{0:.7}'.format(Odchylka[i]) + '\t\t'+ '{0:.8}'.format(DelkaPeriody[i]) )
```

Výstup z programu:[6]

```
drakonický/synodický měsíc, řetězový zlomek
0.9214926580861431
[0; 1, 11, 1, 2, 1, 4, 3, 5]

konvergent      odchylka (min.)   délka periody (roky)
0 / 1           -39185.6          0.0
1 / 1           3338.45           0.080852
11 / 12         -2462.648         0.88937
12 / 13         875.8017          0.97022
35 / 38         -711.0449         2.8298
47 / 51         164.7568          3.8
223 / 242       -52.01783         18.03
716 / 777       8.703272          57.89
3803 / 4127     -8.501472         307.48
```

Vezmeme-li v úvahu délku periody a velikost odchylky, nalezneme kompromis poměrně snadno. Nejvhodnějšími kandidáty jsou konvergenty

$$\frac{223}{242} \quad \text{a} \quad \frac{716}{777}.$$

Následující konvergent už neznamená z hlediska odchylky výrazné zlepšení, navíc je perioda mnohem delší, než lidský život. U konvergentů předcházejících je zase délka periody sice krátká

[6] Spustitelná podoba programu se nachází na přiloženém CD.

(maximálně necelé čtyři roky), odchylka je však delší než několik hodin. Posuďme tedy konvergenty $\frac{223}{242}$ a $\frac{716}{777}$. Délka periody příslušná těmto konvergentům je:

$242 \cdot D$ = 6 585, 357 437 7 = 6 585 dní 8 hod. 35 min.

$223 \cdot S$ = 6 585, 321 314 2 = 6 585 dní 7 hod. 43 min.

$777 \cdot D$ = 21 143, 895 574 8 = 21 143 dní 21 hod. 30 min.

$716 \cdot S$ = 21 143, 901 618 75 = 21 143 dní 21 hod. 38 min.

V prvním případě tedy zatmění nastane po 6 585 dnech a přibližně osmi hodinách. Země se však otáčí kolem své osy a za jednu třetinu dne (osm hodin) se otočí o třetinu plného úhlu, tj. o 120°.[7] Následující zatmění tak nebude pozorovatelné na původním místě, ale na místě, které se nachází o 120° zeměpisné délky směrem na západ. Pozorovatel na témže místě uvidí zatmění po uplynutí tří period, tj. po přibližně 54 letech.

Druhý zlomek, přestože zde chyba činí necelých devět minut a délka periody téměř 58 let je také přijatelná, tuto výhodu brzkého „návratu" zatmění na původní místo na Zemi neposkytuje. Posun zde totiž činí přibližně 324°.

Hledanou nejvhodnější periodou je tedy 18 let 10 dní 8 hod.[8] Tato perioda byla známa už babylonským astronomům. Na základě (nesprávně interpretovaných) údajů z byzantské encyklopedie Súda ji pojmenoval roku 1691 anglický astronom Edmond Halley jako *saros*. Tento název se mezi astronomy ujal a používá se dodnes. Jednotlivá zatmění Slunce se řadí do tzv. *sarosových řad*. Je-li pozorováno jedno zatmění Slunce na nějakém místě na Zemi, lze potom pouhým přičítáním sarosové periody snadno vytvořit příslušnou sarosovou řadu. Pozorujeme-li zatmění na jiném místě na Zemi, vznikne další sarosová řada.

Poslední úplné zatmění Slunce bylo u nás (jižně od ČR) pozorovatelné 11. srpna 1999. Toto zatmění patří do sarosové řady číslo 145.[9] Příští zatmění z této řady bude pozorovatelné ve Spojených státech 21. srpna 2017 ve večerních hodinách. U nás bude pozorovatelné zatmění z této řady 12. září 2053.

4.3 Metónův cyklus

V antickém Řecku neexistoval jednotný kalendář, každá obec měla svůj vlastní. Jednotlivé kalendáře se lišily volbou začátku roku i v názvech měsíců. Přesný řád dokonce nepanoval ani v rámci jednotlivých obcí. Archonti (nejvyšší úředníci) občas vkládali podle potřeby či přání zvláštní dny, zejména proto, aby některé svátky připadly na vhodný den. Přesto však můžeme v této nepřehledné situaci najít několik společných rysů. Rok se dělil na dvanáct měsíců, které

[7] Přesněji se jedná o asi 115°.
[8] V závislosti na počtu přestupných roků je perioda 18 let 10 dní, nebo 18 let 11 dní.
[9] Sarosovou řadu číslo 145 lze nalézt na http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEsaros/SEsaros145.html, kde je také možno nalézt seznam všech ostatních sarosových řad.

měly buď 29, nebo 30 dní. Někdy bylo potřeba vložit třináctý měsíc, protože měsíc daný fázemi Měsíce je kratší než dvanáctina roku. Pro vkládání tohoto třináctého měsíce neexistovala jednotná a pevná pravidla.

Lunisolární podvojnost řeckého kalendáře zůstávala zejména kvůli svátkům a obětem; na jedné straně bylo potřeba počítat správně měsíce a dny, což se mělo dít podle Měsíce, na straně druhé bylo zejména kvůli zemědělství nutno také počítat roky, což se řídilo Sluncem. Stopy této podvojnosti se dochovaly v našem kalendáři dodnes.

Poměrně brzy se v Řecku objevily snahy o sjednocení kalendáře, zejména pravidel vkládání třináctého měsíce. První pokusy však nevedly k dobrým výsledkům, a tak se ukázalo, že je potřeba najít periodu, která by zahrnula jak pohyb Slunce, tak i Měsíce. Tedy takovou periodu, jež by zároveň obsahovala celočíselný počet měsíců (odpovídajících fázím Měsíce) a celočíselný počet roků.

Připomeňme, že doba, která uplyne mezi dvěma stejnými fázemi Měsíce (například od úplňku k úplňku), se nazývá synodický měsíc. Trvá 29 dní 12 hodin 44 minut a 2,7 sekundy. V našich výpočtech (bez újmy na přesnosti výsledku) použijeme antickou hodnotu $Syn = 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{33}$ dne. Délka roku, jak ji stanovili antičtí astronomové, je $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300}$ dne.[10] Za délku jednoho „slunečního“ měsíce budeme brát dvanáctinu délky roku, tj. $Sol = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300}\right) : 12$.

Nyní stojíme před úkolem určit, za kolik let připadnou fáze Měsíce opět na stejný den v roce. Budeme tedy hledat celá čísla P a Q taková, že

$$P \cdot Sol = Q \cdot Syn,$$

přičemž obě strany této rovnice vyjadřují délku hledané periody. Tuto rovnici přepišme do tvaru

$$\frac{P}{Q} = \frac{Syn}{Sol}.$$

Jelikož jsou obě čísla Syn i Sol racionální čísla, lze taková celá čísla P a Q snadno nalézt. Jsou však neúměrně velká[11], takže by takto nalezenou periodu nebylo možno použít. Budeme tedy hledat zlomek $\frac{P}{Q}$, který má co nejmenší čitatel i jmenovatel, přitom však požadujeme, aby byl rozdíl

$$P \cdot Sol - Q \cdot Syn$$

co nejmenší. Pro nalezení této periody použijeme s výhodou řetězových zlomků:[12]

[10] Opět budeme používat antickou hodnotu (365, 2466 dne). Gregoriánský kalendář počítá s délkou roku $365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} = 365, 2425$ dne. Obě hodnoty vedou ke stejnému výsledku.

[11] $\frac{Syn}{Sol} = \frac{584\,700}{602\,657}$

[12] Pro výpočet můžeme použít modifikaci programu z předchozí podkapitoly. Spustitelnou podobu lze nalézt na přiloženém CD.

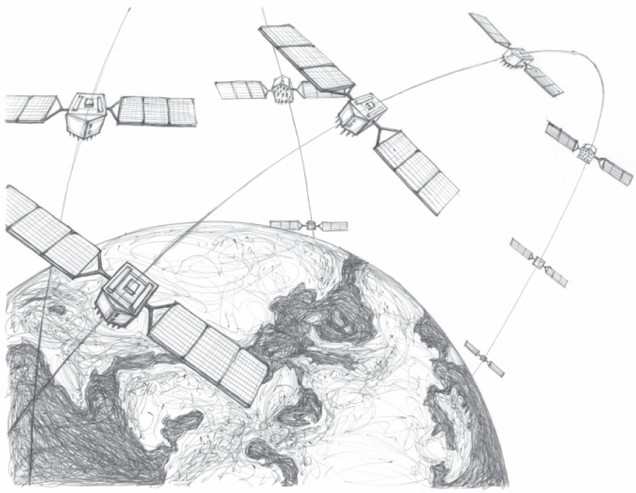
$$\frac{Syn}{Sol} = [0; 1, 32, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 3, 1, 1, 3, 3].$$

Výstupem z programu je řetězový zlomek, příslušné konvergenty, délka periody počítaná jako $\frac{P_i}{12}$ a odchylka $P_i \cdot Sol - Q_i \cdot Syn$ v hodinách:

0.9702036149916122
[0; 1, 32, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 3]

	Konvergent	Délka periody (roky): solární	Odchylka (hod.)
0 / 1 =	0.0	0.0	-708.727272727
1 / 1 =	1.0	0.08333333	21.76606060606
32 / 33 =	0.9696969696969697	2.66666666	-12.21333333333
33 / 34 =	0.9705882352941176	2.75	9.552727272727
65 / 67 =	0.9701492537313433	5.416666666	-2.660606060606
228 / 235 =	**0.9702127659574468**	**19.0**	**1.570909090909**
293 / 302 =	0.9701986754966887	24.41666666	-1.0896969696969
521 / 537 =	0.9702048417132216	43.41666666	0.48121212121212
1335 / 1376 =	0.970203488372093	111.25	-0.1272727272727
4526 / 4665 =	0.970203644158628	377.1666666	0.0993939393939

Vidíme, že požadovaný celočíselný počet roků jsme dostali pro 228 měsíců chápaných jako dvanáctina roku, tj. pro $\frac{228}{12} = 19$ let. To odpovídá s relativně dobrou přesností[13] 235 synodickým měsícům. Získali jsme tak periodu 19 let, což je dle našich výpočtů doba, po které fáze Měsíce připadnou na stejný den v roce. Tím se nám podařilo nalézt vztah mezi pohybem Slunce a Měsíce, který mimo jiné dává do souvislosti dva typy kalendáře: solární a lunární (používaný dodnes např. v islámských zemích). Tato perioda se nazývá *Metónův cyklus* na počest prvního antického astronoma Metóna.[14]



[13] Z předchozích konvergentů bychom mohli získat také periody: $2\frac{2}{3} \cdot 3 = 8$ let, $2\frac{3}{4} \cdot 4 = 11$ let, $5\frac{5}{12} \cdot 12 = 65$ let, ale s podstatně nižší přesností (chyba vždy větší než jeden den).

[14] Metón stál u zrodu empirické astronomie, spolu s Euktemónem jsou považováni za první astronomy. Působili v Athénách kolem roku 432 př. Kr. Poprvé pozorovali různou délku ročních období (tj. časové intervaly mezi slunovraty a rovnodennostmi). Soudí se, že právě tato pozorování spojená s kalendářem vedla ke vzniku astronomie založené na pozorování a matematice. Jako objevitelé Metónova cyklu se však také uvádějí Eudoxos a Kallippos. Jisté je, že jej znali už Babylóňané a Číňané.

4.4 Princip satelitní navigace

V současné době je nejpoužívanějším systémem satelitní navigace GPS (Global Positioning System). Nachází velmi širokého užití: od automobilů, záchranné služby, přes navádění lodí a letadel až po finanční sektor, kde slouží k přesnému určování času jednotlivých transakcí. Kromě navigace jsou globální navigační systémy důležité pro přesný čas (UTC – Universal Time Coordinated) a jeho šíření po celém světě. Přestože dnes GPS nachází široké civilní uplatnění, jedná se původně o systém vojenský. Měl totiž sloužit asi 40 000 vojenských uživatelů, nyní jej však využívá přes 20 milionů civilních a vojenských uživatelů po celém světě.

Zrod satelitní navigace můžeme datovat do začátku 60. let, kdy námořnictvo Spojených států rozhodlo vytvořit systém pro účely přesné navigace. Nazýval se *Navy Navigation Satellite System* neboli TRANSIT. Motivací byly zejména obtíže při dlouhodobém řízení ponorek – musely pravidelně obnovovat informace o své poloze. Dalším důvodem bylo usnadnění navádění balistických střel. Tento systém byl ještě velmi odlišný od současného GPS. Jeho provoz byl ukončen roku 1996.

V roce 1964 vytvořila výzkumná laboratoř *Naval Centre for Space Technologies* (NCST) program TIMATION (TIMe/navigATION). Výsledkem byly dva satelity vypuštěné v letech 1967 a 1969. Právě tyto satelity otevřely cestu k GPS. Určování pozice už bylo založeno na podobném principu, na jakém je založeno GPS. V rámci programu TIMATION byly v letech 1974 a 1977 vypuštěny další dva satelity NTS I a NTS II (Navigation Technology Satellite). Byly to první satelity, na nichž byly instalovány atomové hodiny – rubidiové a cesiové. Tím se staly prototypy satelitů GPS. V únoru roku 1978 pak byly v rámci programu NAVSTAR GPS vypuštěny první satelity GPS. Vše bylo tehdy pod kontrolou armády. Základní motto tehdy znělo:

> *vypustit 5 bomb do téhož kráteru,*
> *vybudovat levný (tj. pod 10 000 dolarů) systém pro navigaci.*

Po nehodě raketoplánu Challenger roku 1986 byl tento přístup přehodnocen.

První generace satelitů GPS byla tvořena dvanácti satelity. Tato konstelace, označovaná jako Block I, byla vypuštěna v letech 1978 až 1985. Dalších devět satelitů bylo vypuštěno v letech 1989 a 1990 (Block II). První velký test GPS proběhl v letech 1990 a 1991 při válce v Perském zálivu. Šestnáct satelitů GPS tehdy řídilo operaci Pouštní bouře s přesností asi 30 metrů. Přehled všech fází vypouštění satelitů je uveden v následující tabulce.

Tab. 1 – Vypouštění satelitů GPS

Série	Období	satelitů
Block I	1978–1985	10
Block II	1989–1990	9
Block IIA	1990–1997	19
Block IIR	1997–2004	12
Block III	od 2014	32

Roku 1993 začala snaha o co největší civilní využívání GPS. Signál pro terminály civilních uživatelů byl však narušen záměrnou systematickou chybou (tzv. Selective Availability – SA, která byla implementována kvůli možnému zneužití proti USA). Přesnost tak byla omezena na 100 metrů. Brzy se však ukázalo, že taková přesnost nebyla pro zamýšlená použití přiměřená. Vypnutí SA oznámil 1. května 2000 americký prezident Bill Clinton.[15] Hlavním důvodem byla jednak nevyhovující přesnost GPS s SA (například při záchranných akcích), jednak také technický pokrok, který umožnil snížení přesnosti lokálně. V případě válečného konfliktu by tedy bylo možné snížit přesnost jen na vymezeném území.

Od roku 2005 se na oběžných drahách pohybuje 32 satelitů, z nichž by mělo být v činnosti alespoň 24. Jednotlivé satelity jsou umístěny v 6 orbitálních rovinách, které mají oproti rovině rovníku sklon 55°. Vzdálenost satelitů od zemského povrchu je přibližně 20 000 km.

GPS není jediným systémem satelitní navigace. V bývalém Sovětském svazu vznikl za studené války systém GLONASS (Глоба́льная Навигацио́нная Спу́тниковая Систе́ма). Jeho kořeny sahají také až do šedesátých let. Vypouštění satelitů bylo zahájeno 12. října 1982, oficiálně však tento systém začal pracovat až 24. září 1993. V druhé polovině roku 1996 bylo schváleno civilní užití se zachováním přesnosti.

Posledním systémem satelitní navigace je GALILEO. Jedná se o systém čistě civilní, evropský a díky pozdějšímu datu svého vzniku také bude přesnější a modernější. Realizace byla započata v roce 2001. Systém je však výrazně dražší, než se původně očekávalo. Spuštění se tak stále odsouvá, termín je stanoven na rok 2014. Evropský úřad pro dohled nad globálním navigačním družicovým systémem Galileo (GSA) bude sídlit v pražských Holešovicích.

Podívejme se nyní na podstatu fungování GPS. Na oběžných drahách[16] ve výšce asi 20 000 km nad zemským povrchem se pohybují satelity,[17] které oběhnou Zemi za necelých dvanáct hodin. Základní výbavou každého z těchto satelitů jsou troje až čtvery atomové hodiny pro určování přesného[18] času a vysílač signálu. Do vybavení satelitů také patří systém NUDET (Nuclear Detonation) pro detekci a lokalizaci jaderných výbuchů.

Satelity GPS vysílají dva druhy signálů. Označují se *C/A-code* (Coarse Acquisition) a *P-code* (Precision). První je rychlejší, slouží zejména k prvnímu odhadu pozice. Druhý signál je pomalejší, poskytuje však velmi přesné informace o poloze.[19] Signál, který satelit vysílá, obsahuje zejména informace o jeho pozici a přesný čas.[20]

---

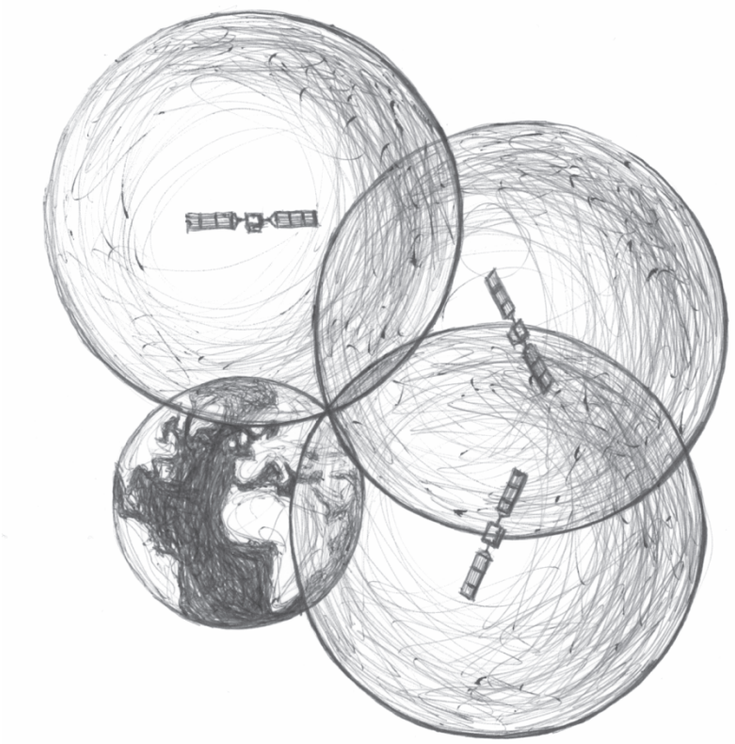
[15] K vypnutí SA došlo hned následujícího dne.
[16] Tyto eliptické dráhy jsou téměř kruhové, hlavní poloosa měří 26 578 km.
[17] Hmotnost jednoho satelitu se pohybuje kolem 1 100 kg, u novějších modelů kolem 1 700 kg. Každý z rozměrů jednoho satelitu (bez solárních panelů) je téměř 2 metry.
[18] Přesnost je řádově 10^{-13} s. Srovnáním údajů z více hodin lze snáze odhadnout a korigovat chybu.
[19] P-code je dostupný pouze *autorizovaným uživatelům*, tj. vojenskému sektoru (USA a spojenci) a geodetům (v zemích, kde nehrozí nebezpečí vojenského zneužití).
[20] Právě na znepřesnění údajů o čase a o pozici satelitu bylo založeno SA. V období války v Perském zálivu byla SA vypnuta.

Na pěti místech na Zemi jsou umístěny stanice, které monitorují satelity na oběžných drahách. Informace se posílají do řídicího centra v Coloradu, kde se na jejich základě určují přesné polohy a odchylky v určování času jednotlivých satelitů. Ty jsou také vybaveny malými raketovými motory, které umožňují drobné korekce dráhy.

Přesný čas a znalost pozice satelitu je pro určení polohy uživatele zásadní. Přijímač porovná čas, kdy byl signál ze satelitu vyslán, s časem, kdy jej přijal. Signál se šíří rychlostí světla c, proto lze snadno z rozdílu t těchto časů vypočítat vzdálenost r satelitu od přijímače:

$$r = c \cdot t \,.$$

Jeden takovýto údaj není postačující, protože množina všech bodů v zadané vzdálenosti tvoří kulovou plochu. Pokud přidáme údaje z dalšího satelitu, dostaneme průnik dvou kulových ploch. To stále není postačující pro přesnou lokalizaci. Teprve z průniku alespoň tří[21] kulových ploch můžeme získat aktuální pozici přijímače na zemském povrchu. Situace je zakreslena na následujícím obrázku.



Z matematického hlediska se jedná o úlohu nalézt průsečík tří kulových ploch. Ve středu každé z těchto kulových ploch se nachází satelit, jehož poloha je známá. Řešení provedeme pomocí analytické geometrie. Úloha tak přejde na soustavu tří kvadratických rovnic o třech neznámých.

[21] Jelikož není GPS přijímač přesně synchronizován se satelity, je pro určení polohy potřeba znát vzdálenosti přijímače od alespoň čtyř satelitů.

Zvolme nejprve kartézskou soustavu souřadnic tak, že její počátek se bude nacházet ve středu Země. Za osu z zvolíme zemskou osu. Rovinu xy ztotožníme s rovinou zemského rovníku. Za kladnou poloosu x přitom vezmeme poloosu procházející nultým poledníkem a za kladnou poloosu y zvolíme[22] poloosu procházející 90° východní délky. Označme dále polohu i-tého satelitu $[a_i, b_i, c_i]$, $i = 1, 2, 3$. Označíme-li poloměry příslušných kulových ploch po řadě r_1, r_2, r_3, dostaneme příslušnou soustavu kvadratických rovnic, která odpovídá průniku všech tří kulových ploch:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 = c^2 t_1^2$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 = c^2 t_2^2$$
$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 t_3^2$$

Odečtením třetí rovnice od první a druhé rovnice odstraníme z těchto prvních dvou rovnic druhé mocniny neznámých:

$$(2a_3 - 2a_1)\, x + (2b_3 - 2b_1)\, y + (2c_3 - 2c_1)\, z = D_1$$
$$(2a_3 - 2a_2)\, x + (2b_3 - 2b_2)\, y + (2c_3 - 2c_2)\, z = D_2$$
$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = c^2 t_3^2\,,$$

kde

$$D_1 = c^2(t_1^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2$$
$$D_2 = c^2(t_2^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2$$

jsou konstanty. První dvě rovnice jsou lineární, lze tedy snadno vyjádřit neznámé x a y pomocí z. Výrazy $x(z)$ a $y(z)$, které tak vzniknou, dosadíme do třetí rovnice a získáme tak kvadratickou rovnici s jedinou neznámou z. Tato rovnice má dvě řešení. Jedno však můžeme zcela vyloučit, protože se nachází příliš vysoko nad zemským povrchem. Tím dostaneme jediné vyhovující řešení (x_0, y_0, z_0) .

Nyní zbývá ze získaného řešení, které jsme počítali v kartézské soustavě souřadnic, vypočítat zeměpisnou šířku φ, zeměpisnou délku λ a nadmořskou výšku v. Připomeňme, že

$$\varphi \in \langle -90°, 90° \rangle \quad \text{a} \quad \lambda \in \langle -180°, 180°).$$

Zároveň vzdálenost bodu (x_0, y_0, z_0) od středu Země je

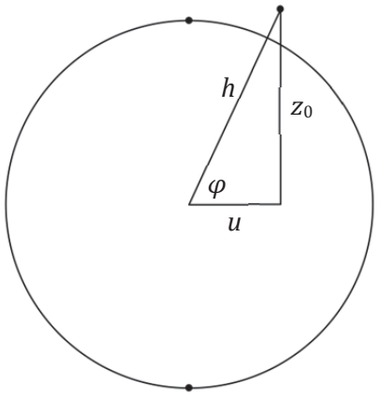
$$h = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\,.$$

Nadmořskou výšku pak získáme jako rozdíl vzdálenosti h a poloměru[23] Země $R = 6\,378,137$ m:

[22] Přesněji se v systému GPS volí kladná poloosa y tak, aby společně s poloosami x a z tvořila pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic.
[23] Zemi zde bereme pro jednoduchost jako kouli; v GPS se používá referenční elipsoid a celý systém korekcí.

$$v = h - R.$$

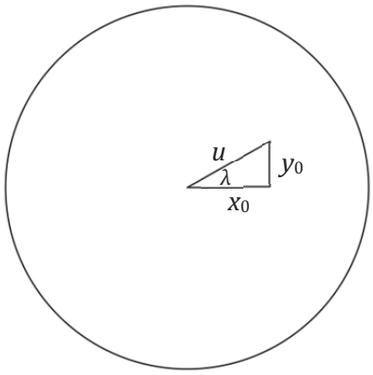
Znázorníme-li řez zeměkoulí oběma póly a naší výslednou pozicí (x_0, y_0, z_0), dostaneme



odkud plyne vztah $z_0 = h \cdot \sin\varphi$. Zeměpisnou šířku lze tedy vypočítat podle vztahu

$$\varphi = \arcsin\frac{z_0}{h}.$$

Poznamenejme ještě, že úsečka u se nachází v rovině rovníku, tj. v rovině xy. Tam vypadá situace následovně:



Vzhledem k tomu, že $u = h \cdot \cos\varphi$, dostáváme vztahy

$$x_0 = h \cdot \cos\varphi \cos\lambda$$
$$y_0 = h \cdot \cos\varphi \sin\lambda,$$

z nichž už lze dopočítat zeměpisnou délku λ. Tím jsme převedli kartézské souřadnice polohy přijímače na zeměpisnou šířku, délku a nadmořskou výšku.

V současné době dosahují běžné přijímače přesnosti 10–15 metrů. Pomocí dalších technických vylepšení lze tuto přesnost zvýšit až na desítky centimetrů. Poměrně velký vliv na konečnou přesnost má zemská atmosféra, kterou musí projít signál vyslaný satelitem. Největší problémy

činí troposféra[24] (do 20 km nad povrchem Země) a ionosféra[25] (60–1000 km nad zemským povrchem). Vysoká koncentrace volných elektronů v ionosféře má vliv na amplitudu i na fázi signálu, jenž se díky tomu může zpozdit o 2–50 nanosekund. Pokud je satelit nízko nad obzorem, tak signál prochází ionosférou mnohem déle a zpoždění tak může vzrůst až na trojnásobek, tj. 150 ns, což odpovídá chybě 45 m. To je jeden z důvodů, proč se raději satelity, které jsou méně než 5° nad obzorem, neberou v úvahu.

Troposféra a ionosféra mají na signál GPS negativní vliv, každá z těchto vrstev poněkud jiný. Do jisté míry jej lze snížit volbou vhodné frekvence. Požadavky na frekvenci jsou však v obou případech odlišné, takže nejlepší volba je vždy otázkou kompromisu. GPS pracuje na dvou frekvencích. Základní frekvencí je f_0 = 10, 23 MHz, druhá je jejím 154násobkem.

Volba dvou různých frekvencí má velkou výhodu – umožňuje mimo jiné minimalizaci důsledků negativního vlivu ionosféry na GPS signál. Tento vliv je totiž závislý na frekvenci signálu. Porovnáním údajů příslušných dvěma frekvencím je možné jej poměrně přesně odhadnout a korigovat.

Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, GPS není využíváno pouze pro určování polohy. Své aplikace nachází také velmi přesný čas, na němž je tento systém založen. Čas GPS (GPS system time) byl nastaven podle světového koordinovaného času (UTC, Universal Time Coordinated) 6. ledna 1980. Světový koordinovaný čas je však na rozdíl od času GPS korigován vkládáním[26] nebo odečítáním přestupných sekund tak, aby se lišil od času daného zemskou rotací o méně než 0,9 sekundy. Při využívání přesného času z GPS je tedy potřeba připočíst přestupné vteřiny, aby bylo dosaženo souhlasu se světovým koordinovaným časem.

[24] Jedná se o nejnižší vrstvu atmosféry. Právě zde se odehrávají změny atmosféry, které nazýváme počasím. V troposféře se nachází téměř všechna atmosférická voda. Signálu GPS působí potíže zejména postupné změny teploty a tlaku vzduchu a rozložení vody.
[25] Tato část atmosféry je vodivá a ionizovaná. Je udržována rentgenovým a ultrafialovým zářením Slunce. Stupeň ionizace tedy závisí zejména na sluneční činnosti; v průběhu dne značně kolísá.
[26] Reálně dochází ke vkládání. Sekunda byla totiž původně definována na základě zemské rotace měřené mezi lety 1756 a 1895. Rychlost zemské rotace se však stále snižuje. Koncem 20. století bylo vkládáno průměrně 9 sekund za jedno desetiletí.

4.5 Literatura

[1] Aujac, G. (ed.), *Géminos. Introduction aux phénomènes.* Paris, Les Belles Lettres, 1975.

[2] Gawłowicz, J., *Povídání o navigaci.* LiberaBooks, 2009.

[3] Evans, J., Berggren, J. L., *Geminos's Introduction to the Phenomena.* Princeton, PUP, 2006.

[4] Horský, Z., Plavec, M., *Poznávání vesmíru.* MME 37. Praha, Orbis, 1962.

[5] Kůst, J., *Sférická trigonometrie.* Praha, SPN, 1964.

[6] Marcus Vitruvius Pollio, *Deset knih o architektuře.* Přel. A. Otoupalík. Praha, Arista, 2001.

[7] Seeber, G., *Satellite Geodesy.*, 2nd ed. Berlin, Walter de Gruyter, 2003.

[8] Špelda, D., *Astronomie v antice.* Ostrava, Montanex, 2006.

[9] Taschner, R., *Numbers at Work. A Cultural Perspective.* Wellesley, A K Peters, 2007.

[10] Vít, P., *Řetězové zlomky.* ÚV MO. Praha, Mladá fronta, 1982.