

Modely zborcených ploch

Modely geometrických těles jsou vhodným názorným doplňkem pro zvyšování prostorové představivosti. U zborcených ploch, což jsou plochy přímkové, pak mohou být modely obzvláště jednoduché.

Při studiu ploch a tvorbě jejich modelů byl jejich autor inspirován publikacemi R. Sturma, A. B. Basseta a dalších matematiků, jejichž historické klasické práce jsou přístupné v digitální podobě na www.digital.library.cornell.edu. Dále publikacemi českých „klasiků“ J. Kounovského, J. Klímy a F. Kadeřávka, především jejich Deskriptivní geometrií z roku 1932. Inspirující jsou také archivní čísla Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky z konce 19. stol. a počátku 20. století.

U všech modelů jsou zachovávány stejné zásady zvýrazňující hlavní charakteristiky přímek ploch. Tvořící přímky jsou vyrobeny z bambusových tyček, torzální přímky mají barvu modrou, dvojné tvořící přímky mají barvu zelenou. Dvojné řídící přímky jsou červené, stejně jako řídící křivky vyřezané z balsy.

U každého modelu je uvedena jeho základní charakteristika a také jeho dvouparametrická rovnice v obvyklém vektorovém tvaru. Zájemci mohou využít parametrické rovnice pro konstrukci ploch ve vhodném grafickém 3D programu. Je lepší zahajovat vlastní experimentování s rozsahem parametru směrového vektoru $g \in (0,1)$, což odpovídá vykreslení plochy mezi řídícími útvary a s druhým parametrem ϕ v rozsahu blízkém nuly. Důvody odhalí zájemci velmi snadno.

Pro hlubší seznámení se zborcenými plochami je možno využít standardní vysokoškolské učebnice geometrie nebo některé z webových publikací autora modelů, ve kterých jsou uvedeny podrobné vlastnosti zborcených ploch, včetně odvození jejich rovnic.

Modely jsou umístěny v prostorách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze.

Alena Šarounová	ideový námět a organizátorka projektu	(PhDr., CSc.)
Jaroslav Ryšavý	návrh a realizace modelů, autor textu	(Ing., CSc.)
Jakub Šaroun	fotografické zpracování	

Jaroslav Ryšavý

Racionální zborcené plochy 4°

www.aula.wz.cz

Zborcené plochy 3°

www.geometrie.kvalitne.cz

Zborcené plochy 4° rodu 1

www.zborcenina.cz

Imaginární prvky na zborcených plochách

www.imagin.wz.cz

Zborcené plochy

www.geometrie.wz.cz

Rotační jednodílný hyperboloid

Zborcená plocha 2° tvořená dvěma soustavami (reguly) povrchových přímek. Dvě různé přímky téže soustavy jsou navzájem mimoběžné, přičemž každé dvě přímky různých soustav se navzájem protínají. Plocha se může vytvořit nejen rotací přímky kolem osy hyperboloidu, která je s touto přímkou mimoběžná, ale také rotací hyperboly kolem její vedlejší osy.

Prostorovou afinitou lze dospět ke zborcenému hyperboloidu, kdy řezem plochy rovinou kolmou k ose plochy není kružnice, ale elipsa.

Jednodílný hyperboloid je velmi často používanou plochou v architektuře a ve stavebnictví. Znamé jsou např. chladičí věže elektráren.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} g \cos(\phi) - (1-g) \sin(\phi) \\ g \sin(\phi) + a(1-g)\cos(\phi) \\ g \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$



Hyperbolický paraboloid

Je plochou 2° určenou dvěma mimoběžnými přímkami a řídící rovinou, která s přímkami není rovnoběžná. Může být rovněž zadán dvěma podobnými řadami na dvou mimoběžkách. Pak hovoříme o zadání pomocí zborceného čtyřúhelníku. Ten se tak může stát samostatným předmětem zájmu.

Rozdělením protějších mimoběžných stran čtyřúhelníku na stejný počet úseků a spojením bodů, které si odpovídají, dostaneme dvě soustavy povrchových přímek.

Je často používán ve stavební praxi, např. pro různé typy zastřešení.

$$\mathbf{n}(u, g) = \begin{vmatrix} u + g \\ \pm g \\ u^2 + 2ug \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Přímý konoid kruhu

Je plochou 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace. Řídící kuželosečkou je kružnice, řídící rovinou je rovina kolmá na rovinu kružnice. Třetím řídícím útvarem je dvojná řídící přímka, kolmá na řídící rovinu. Plocha obsahuje čtyři reálné torzální přímky a čtyři reálné kuspídní body. Zajímavostí plochy je existence nevlastní dvojně tvořící přímky, která je však součástí plochy.

Části konoidu jsou využívány ve stavební praxi pro různé střešní světlíky a pod.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ rg \sin(\phi) \\ g \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$



Plocha klikového pohybu se zpožděním.

Je racionální plochou 4°, typu VIII dle Sturmovy klasifikace. Je určena řídící kuželosečkou (kružnice, elipsa) a dvěma dvojnými řídícími přímkami, které se sloučí v jednu. Plochu vytváří např. pohybující se mechanická klika, která jedním svým kloubem opisuje obvod kuželosečky a druhým svým kloubem klouže po řídícím táhlu se zpožděním $\pi/2$ vůči pohybu po kuželosečce. Roviny, protínající plochu, ji protínají v racionálních křivkách 4° se třemi dvojnými body.

Plocha je teoreticky zajímavá koincencí dvou řídících přímek.

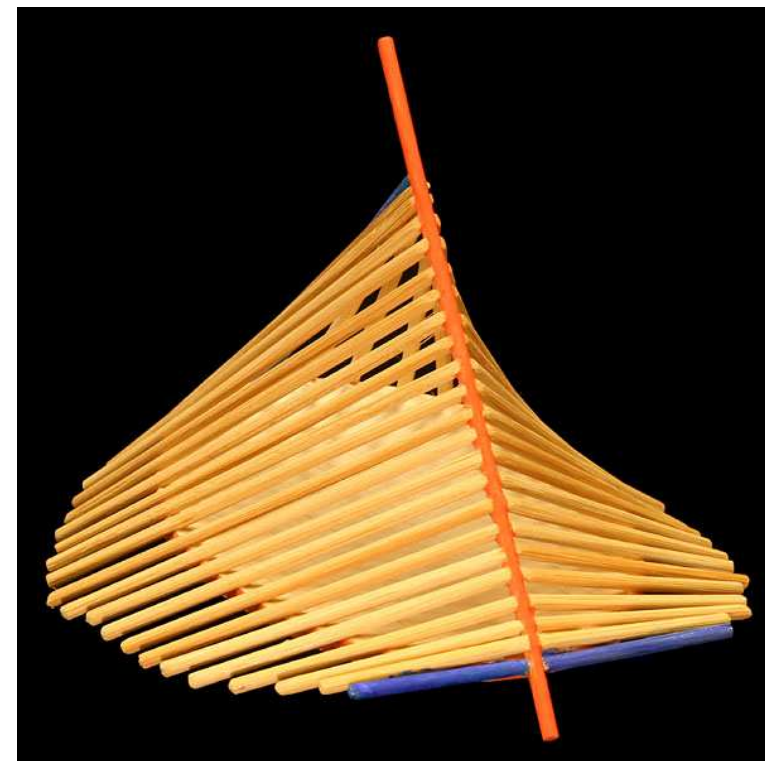
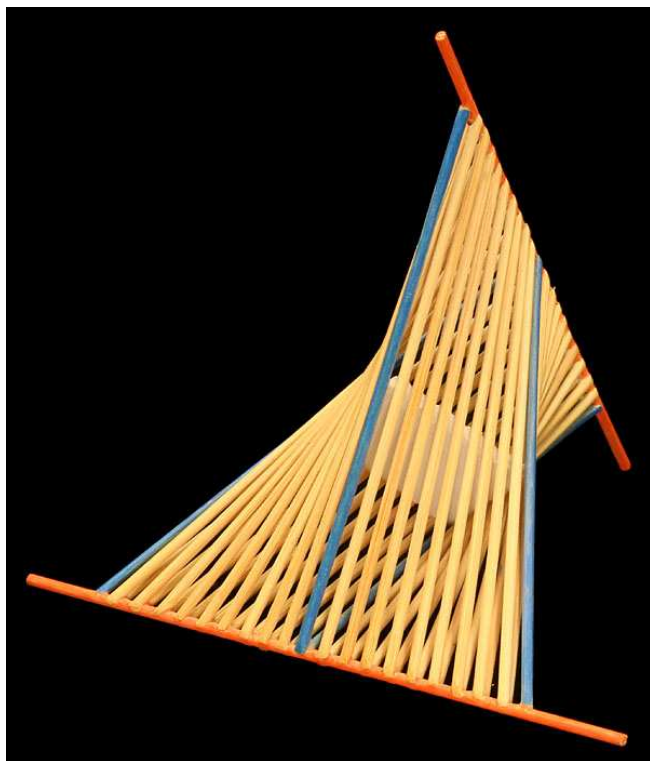
$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) + rg[\sin(\phi) - \cos(\phi)] \\ r(1 - g) \sin(\phi) \\ g \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

Plückerův konoid

Je plochou 3°, II. typu. Řídící křivkou je elipsa, která vzniká šikmým řezem přímého kruhového válce, řídící přímkou je povrchová přímka válce a řídící rovinou je rovina rovnoběžná s kruhovou základnou válce. Jednoduchá řídící přímka neprochází plochou řídící kuželosečky, což je charakteristika tohoto typu kubických zborcených ploch.

Protože Plückerův konoid vykazuje řadu zajímavých vlastností, byl dokonale analyzován již v samotných počátcích zájmu o zborcené plochy v průběhu 19. století.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} g \cos(\phi) \\ g \sin(\phi) \\ \sin(2\phi) \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, 2\pi) \end{array}$$



Plocha prostorového eliptického pohybu.

Je racionální plochou 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace.. Řídící křivkou je jednoduchá kružnice a dvě, navzájem kolmé, dvojné mimoběžky.

Její rovnici je možno odvodit z pohybu přímky, upevněné pod úhlem $\pi/4$ k obvodu kružnice o poloměru r , která se odvaluje po vnitřní straně kružnice o poloměru $2r$.

Plocha obsahuje čtyři reálné torzální přímky a čtyři reálné kuspidální body. Zajímavostí plochy je existence dvojné nevlastní tvořící přímky, která je ovšem součástí plochy. Dvojná tvořící přímka je osou rovinového svazku, jehož roviny protínají plochu v elipsách.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} \cos(\phi) (1 + g) \\ \sin(\phi) (1 - g) \\ g \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, 2\pi) \end{array}$$

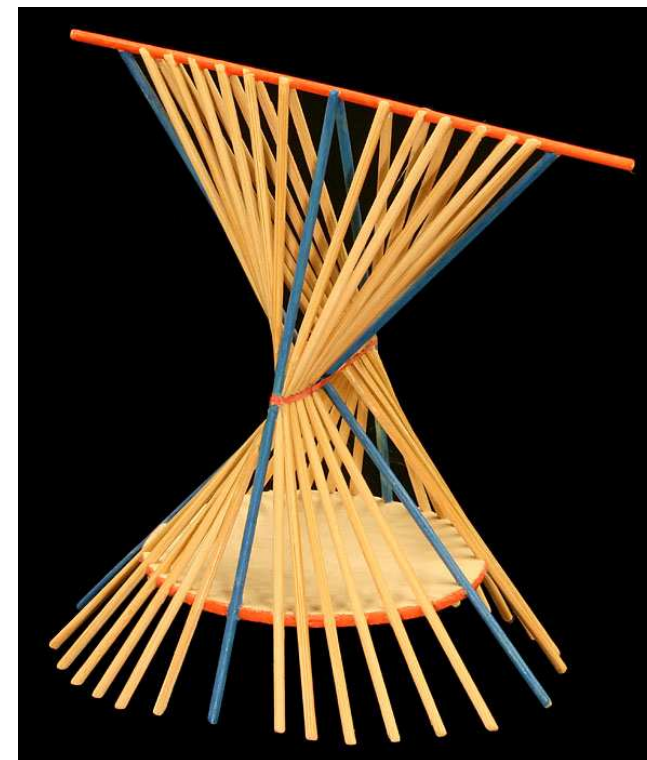
Štramberská trúba

Je v Čechách asi nejznámější zborcenou plochou 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace. Její název je odvozen od konstrukce střešní věže hradu ve Štramberku. Plocha patří mezi konusoidy, jejichž řídícími útvary jsou dvě dvojné řídící přímky a jednoduchá kuželosečka.

Plocha obsahuje čtyři torzální přímky a čtyři kuspídní body. Plocha také obsahuje nevlastní dvojnou tvořící přímku, která je osou rovinového svazku, jehož roviny protínají plochu v elipsách.

Obecně položená rovina protíná Štramberskou trubu v racionální křivce 4° rodu 0. Křivka tedy obsahuje tři dvojné body.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r(1-g)\cos(\phi) \\ r\sin(\phi)(1-gb/d) \\ bg \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} b > d \\ g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$



Küpperův konoid.

Je plochou 3°, II. typu. Konoid je určen řídící kuželosečkou a dvěma řídícími přímkami, z nichž jedna protíná řídící kuželosečku a druhá je nevlastní přímkou řídící roviny. Všechny tvořící přímky Küpperova konoidu protínají kuželosečku pod úhlem $\pi/4$.

Vlastní řídící přímka je přímkou dvojnou, nevlastní přímka řídící roviny je přímkou jednoduchou. Roviny protínají plochu v racionálních křivkách 3° rodu 0, jejichž uzel je v bodě průchodu roviny dvojnou řídící přímkou.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} 2r(1-g)\cos^2(\phi) \\ 2r(1-g)\sin(\phi)\cos(\phi) \\ 2rg\cos^2(\phi) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{matrix}$$

Normálie eliptického kužele s vrcholem mimo střed podstavy

Normálie je plochou normál. V tomto případě je vytvořena normálami na eliptickém řezu kužele o eliptické základně. Řídícím útvarem je tedy elipsa řezu a další dva útvary jsou zadány pojmem normály. Protože i dvě blízké normály křivé plochy se neprotínají, bude takto vytvořená normálie zborcenou plochou. Její charakter je dán vyosením vrcholu kužele. V tomto případě je vrchol vyosen ve směru hlavní poloosy eliptické základny.

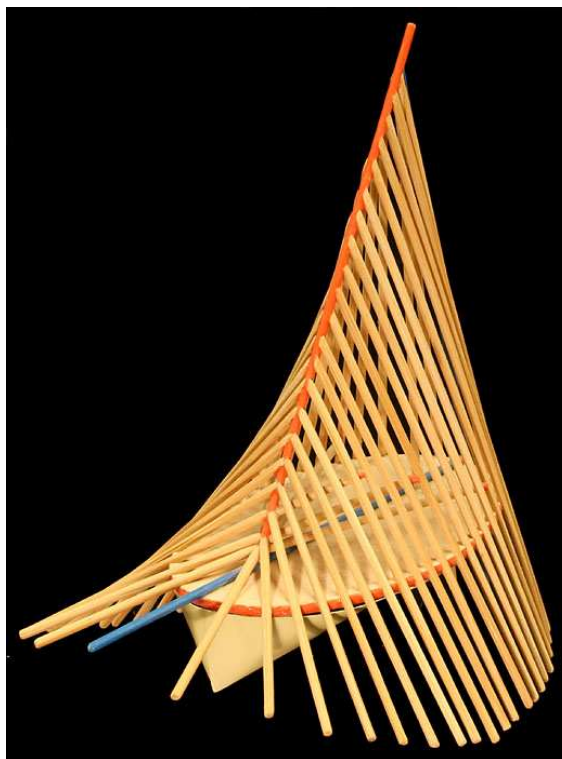
Plocha je racionální plochou 4°, typu V dle Sturmovy klasifikace, jejíž geometrickými řídícími útvary jsou dvě kuželosečky, dvojná a jednoduchá. Ty se protínají se ve dvou bodech. Třetím řídícím útvarem je dvojná přímka.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} (a - bvg) \cos(\phi) \\ (b - vga) \sin(\phi) \\ abg - bv_x g \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix}$$

a, b ... poloosy elipsy základny,

v ... vrchol kužele,

v_x ... vyosení vrcholu kužele.



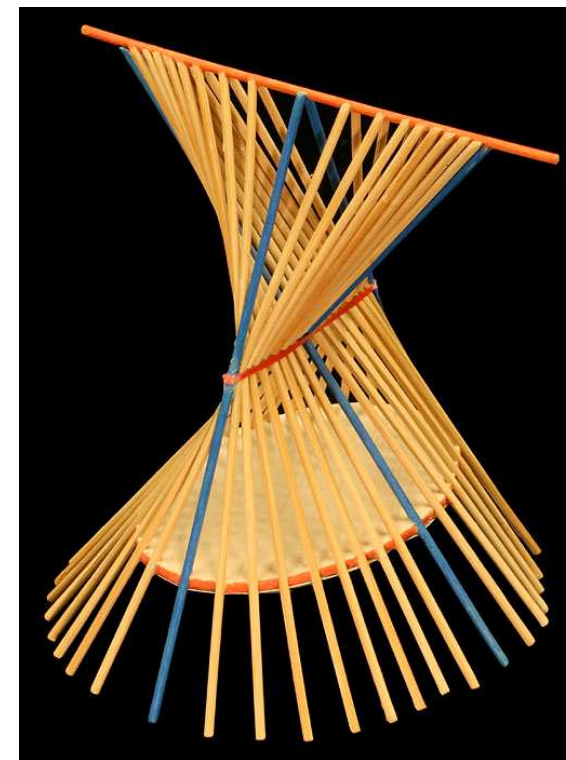
Normálie eliptického kužele s vrcholem nad středem podstavy

Normálie je plochou normál. V tomto případě je odvozena pomocí normál na eliptickém řezu kužele o eliptické základně. Řídící útvarem je tedy elipsa řezu a další dva útvary jsou zadány pojmem normály. Charakter normálie kužele je obecně dán vyosením jeho vrcholu. V tomto případě je vrchol v ose kužele.

Plocha je racionální plochou 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace. Geometrickými řídícími útvary jsou dvě dvojné řídící přímky a jednoduchá kuželosečka. Plocha obsahuje také nevlastní dvojnou tvořící přímku. Ta je osou rovinového svazku, jehož roviny protínají plochu v kuželosečkách. Obecně jsou to elipsy, které se ve dvou případech transformují na kružnice.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} (a - bvg) \cos(\phi) \\ (b - vga) \sin(\phi) \\ abg \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix}$$

$a, b \dots$ poloosy elipsy základny,
 $v \dots$ vrchol kužele.



Normálie kosého kužele s kruhovou základnou

Je plochou 4°, typu VI dle Sturmovy klasifikace. Její tvořící přímky jsou normálami kužele dle jeho kruhového řezu. Plocha, kromě jednoduché řídící kružnice, obsahuje ještě dvojnou kuželosečku – elipsu. Dvojná řídící přímka prochází středem kružnice. Dvě torzální přímky spojují kruhové body roviny základny s úběžným bodem dvojné řídící přímky.

Další dvě torzální přímky jsou vlastní a reálné, stejně jako odpovídající kuspídní body.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r(1 - vg) \cos(\phi) \\ r(1 - vg) \sin(\phi) \\ r^2 g - r v_x g \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix}$$

$v \dots$ vrchol kužele,
 $v_x \dots$ vyosení vrcholu kužele.

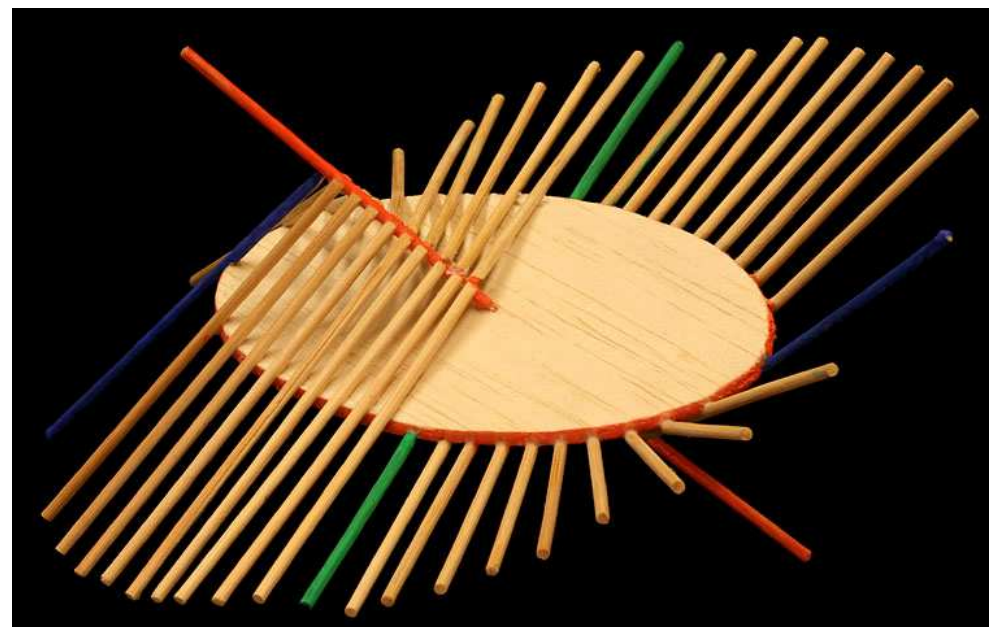
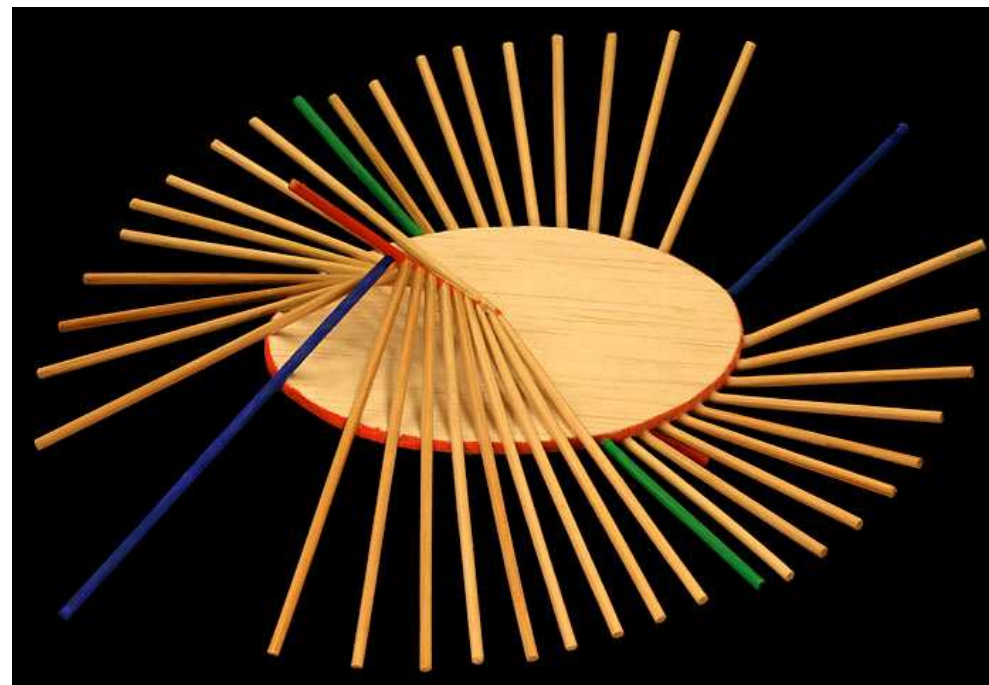
Normálie šikmého řezu přímého eliptického válce

Je racionální plochou 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace. Protože všechny normály, kolmé k plášti válce, budou rovnoběžné s touž rovinou, normálie bude konoidem. Jeho řídící křivkou bude elipsa řezu a nevlastní dvojná přímka řídící roviny rovnoběžné se základnou válce. Vždy dvě tvořící přímky se protínají ve dvojně přímce, jejíž pravoúhlý průmět do roviny kolmé k ose splývá s průmětem hlavní osy řídící elipsy. Protože řídící dvojná přímka prochází elipsou, bude mít plocha dvě torzální přímky reálné a dvě imaginární, stejně jako dva reálné a dva imaginární kuspidální body.

Zajímavostí je poloha reálných kuspidálních bodů, které se promítají do středů křivosti řídící elipsy.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) [(a^2 - b^2)/a + gb^2/a] \\ bg \sin(\phi) \\ v_z \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix}$$

$a, b \dots$ poloosy eliptického řezu,
 $v_z \dots$ výška řezu.



Přímý konoid koule

Je eliptickou plochou 4°, typu I dle Sturmovy klasifikace. Řídícími útvary jsou koule, řídící přímka a řídící rovina kolmá k řídící přímce.

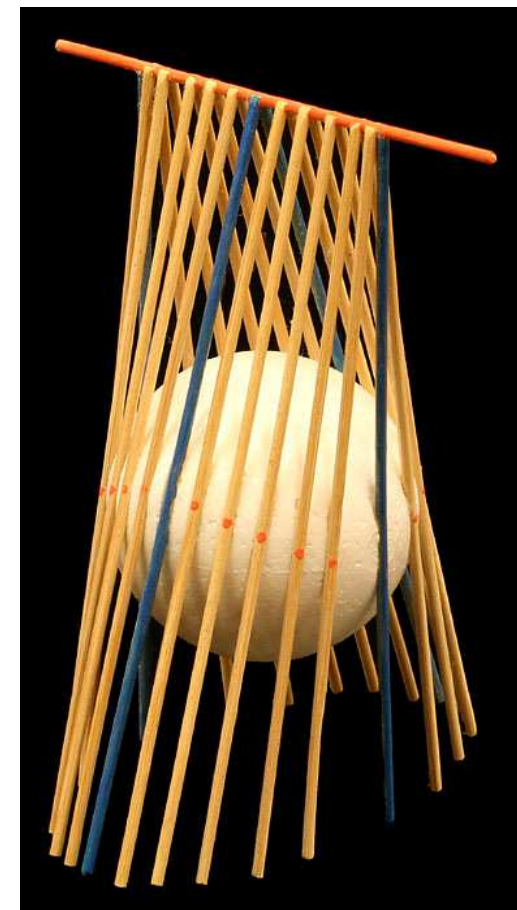
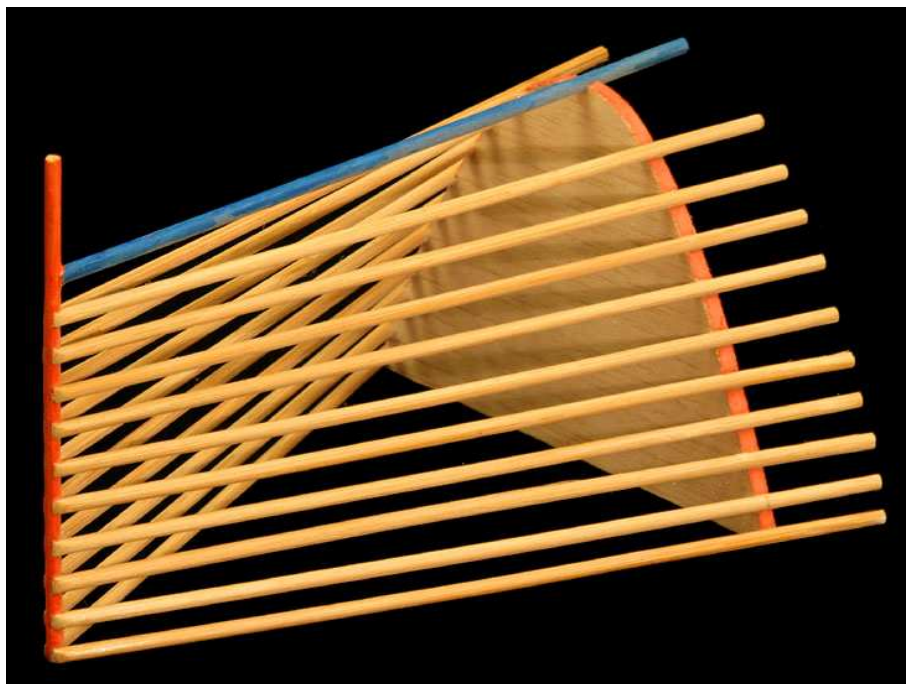
Roviny protínají konoid v eliptických křivkách 4°, které obsahují pouze dva dvojné body a to v místě průniku roviny vlastní řídící dvojnou přímkou a dvojnou nevlastní přímkou řídící roviny. Dotýká-li se řídící přímka koule, stává se plocha racionální a v místě dotyku vytvářejí přímky dvojnou tvořící přímku.

Pro $R = r \cos(\phi)$, $a = \pm a \sin(R/L)$,

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} L(1 - g) \\ L g \operatorname{tg}(\alpha) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{matrix}$$

r ...poloměr koule, .

L ...vzdálenost řídící přímky od středu koule.



Přímý konoid paraboly

Je plochou 3°, II. typu. Řídícími útvary je jednoduchá parabola, dvojná řídící přímka v rovině rovnoběžné s parabolou (rovnoběžná s osou paraboly) a řídící rovina kolmá na rovinu paraboly.

Každý rovinný řez protíná plochu v kubické křivce s jedním uzlem. Jde tedy o plochu racionální. Prochází-li sečná rovina tvořící přímkou, pak prochází jistě i jinou tvořící přímkou a nevlastní jednoduchou přímkou řídící roviny. Kubická křivka se tedy v tomto případě rozpadá na tři přímky.

$$\mathbf{n}(u, g) = \begin{pmatrix} g \\ u(1 - g) \\ (u^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Plocha šikmého průchodu

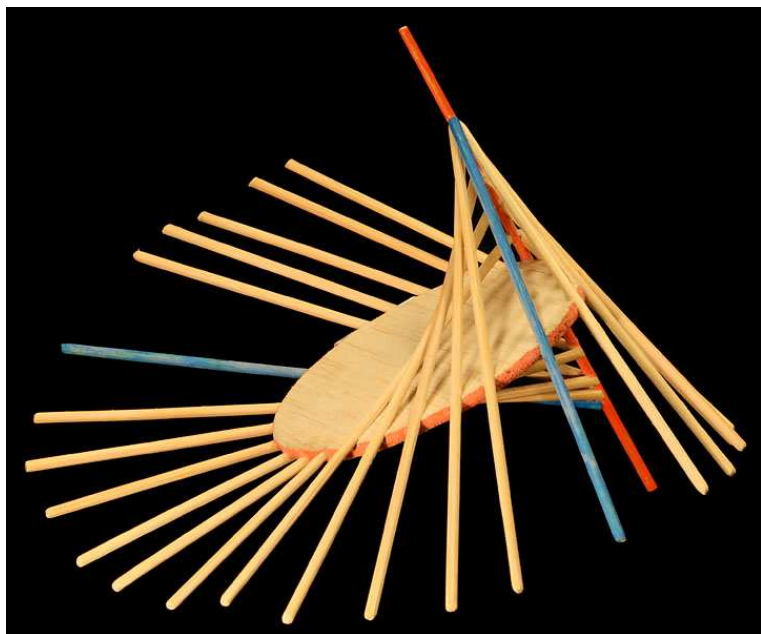
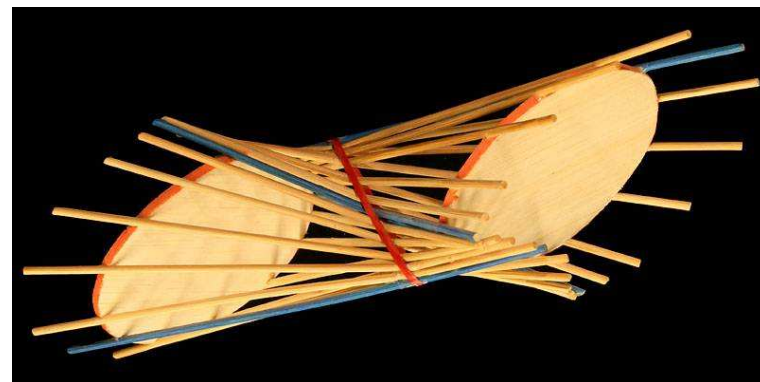
Je plochou 4°, typu V dle Sturmovy klasifikace. Při jejím praktickém vytváření se za řídicí útvary považují dvě jednoduché kružnice o stejném poloměru ležící v rovnoběžných rovinách a dvojná přímka, ležící mezi středy obou kružnic kolmo na jejich roviny. Charakter plochy určuje poloha řídicí přímky. Na uvedeném modelu je vzdálenost přímky od středu kružnice větší než její poloměr.

Kromě dvojné řídicí přímky plocha obsahuje ještě dvojnou úběžnou kuželosečku. Na obou dvojných útvarech se nacházejí dva kuspídní body, kterými procházejí celkem čtyři torzální přímky.

Části plochy šikmého průchodu se používají ve stavebnictví. V Praze se pomocí šikmého průchodu realizoval např. podjezd železniční tratě v Sokolovské ulici (tzv. Negrelliho viadukt).

$$\text{Pro } \rho_1 = d \cos(\phi) + \sqrt{[d^2 \cos^2(\phi) + (d^2 - r^2)]}, \quad \rho_3 = -d \cos(\phi) + \sqrt{[d^2 \cos^2(\phi) + (d^2 - r^2)]},$$

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} \rho_1 \cos(\phi) + g \cos(\phi) (\rho_3 - \rho_1) \\ g \\ \rho_1 \sin(\phi) + g \sin(\phi) (\rho_3 - \rho_1) \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix} \quad \begin{matrix} r \dots \text{poloměr kružnic,} \\ \pm d > r \dots \text{vzdálenost řídicí přímky od středů kružnic.} \end{matrix}$$



Konoid 3°

Plocha je určena řídicí kružnicí, dvojnou řídicí přímkou procházející kružnicí a řídicí rovinou, která svírá s rovinou kružnice úhel $\pi/4$. Plocha je tedy konoidem se dvěma reálnými torzálními přímkami. Obecná rovina protínající plochu ji bude protínat v racionální kubické křivce s jedním dvojným bodem. Rovina, která bude procházet tvořící přímkou plochy, ji bude protínat v další tvořící přímce a v nevlastní přímce řídicí roviny. Obecná kubická křivka se tak rozpadne na tři jednoduché přímky.

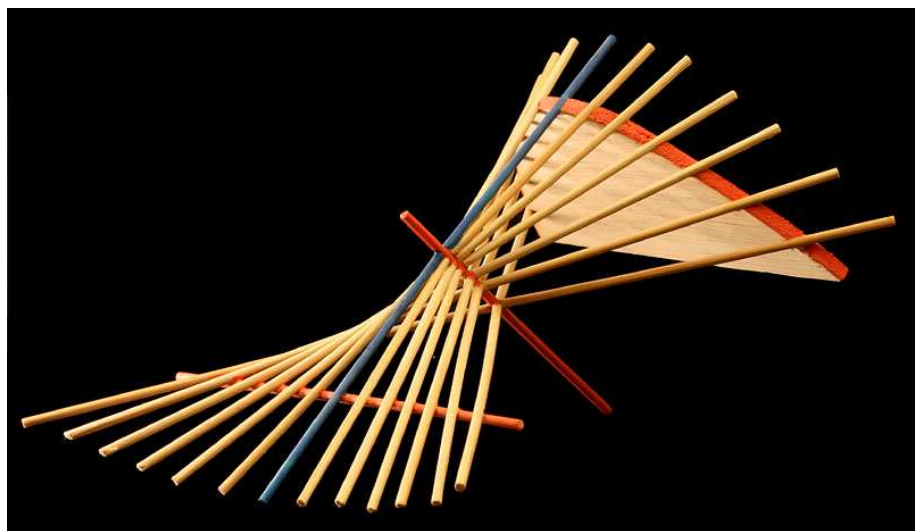
$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} 2rg \cos(\phi) \sin(\phi) \\ 2rg \cos^2(\phi) \\ r(1 - g) \sin(2\phi) \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{matrix}$$

Plocha dvourychlostního kruhového pohybu.

Je racionální plochou 4°, typu V dle Sturmovy klasifikace. Plochu vytvoří přímka, která se při pohybu po obvodu jedné kružnice pohybuje úhlovou rychlostí ω a po druhé kružnici úhlovou rychlostí dvojnásobnou. Kružnice o stejném poloměru přitom leží v rovnoběžných rovinách. Tvořící přímky při pohybu vytvářejí svými průsečíky dvojnou řídící přímku. Plocha je tedy určena jednoduchou kružnicí, dvojnou kružnicí a dvojnou řídící přímkou. Kružnice mají dva společné kruhové body. Rovina, rovnoběžná s rovinami řídících kružnic, protíná plochu ve křivce 4°, v tzv. Pascalových závitnicích.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) + g r [\cos(2\phi) - \cos(\phi)] \\ r \sin(\phi) + g r [\sin(2\phi) - \sin(\phi)] \\ Lg \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix}$$

L ... vzdálenost kružnic,
r ... poloměr kružnic.



Kubická plocha s řídícím parabolickým obloukem.

Je plochou 3°, II. typu dle Sturmovy klasifikace. Zajímavostí plochy jsou všechny tři vlastní řídící útvary – jednoduchá parabola, dvojná řídící přímka a jednoduchá řídící přímka. Parabola a dvojná řídící přímka mají při tom společný bod. Plocha obsahuje jednu vlastní a jednu nevlastní torzální přímku, stejně jako jeden vlastní a jeden nevlastní kuspidální bod.

Rovinné řezy plochy jsou kubickými racionálními křivkami.

$$\mathbf{n}(u, g) = \begin{pmatrix} q(1 - 2g) \\ u(1 - 2g) \\ (1 - g)(s + u^2/2p) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

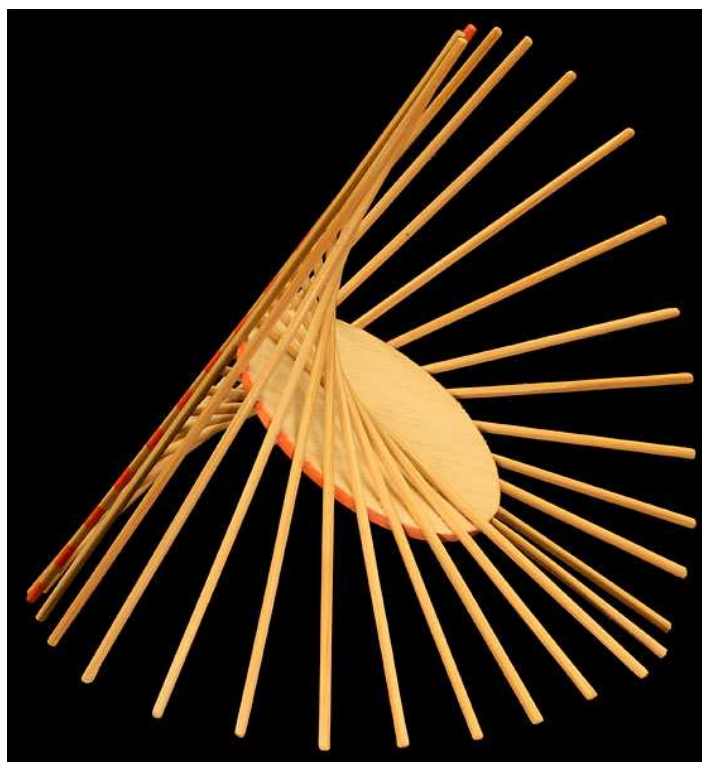
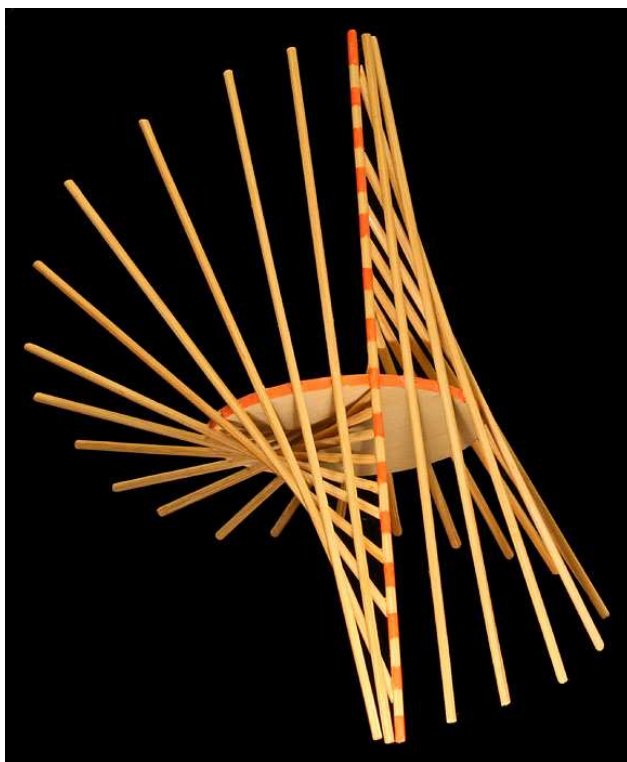
$\pm q$... vzdálenost parabolického oblouku resp. dvojně řídící přímky od počátku soustavy,
 s ... výška jednoduché řídící přímky nad vrcholem paraboly,
 p ... parametr paraboly.

Cayleyova plocha

Je plochou 3°. Je pojmenována podle významného matematika 19. století, který je jedním z průkopníků teorie zborcených ploch.

Zajímavostí plochy je existence dvojné přímky, která je jednoduchou řídící přímkou a zároveň také přímkou tvořící. Kubická plocha tedy nemá klasicky pojímanou dvojnou řídící přímku. Dalším řídícím útvarem je kružnice protnutá řídící přímkou. Tvořící přímky vytvářejí na kružnici a na řídící přímce dvě projektivní řady, přičemž jejich společný bod není bodem samodružným.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} 2r \cos(\phi) \sin(\phi) (1-g) \\ 2r \cos^2(\phi) (1-g) \\ rg \tan(\phi) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$

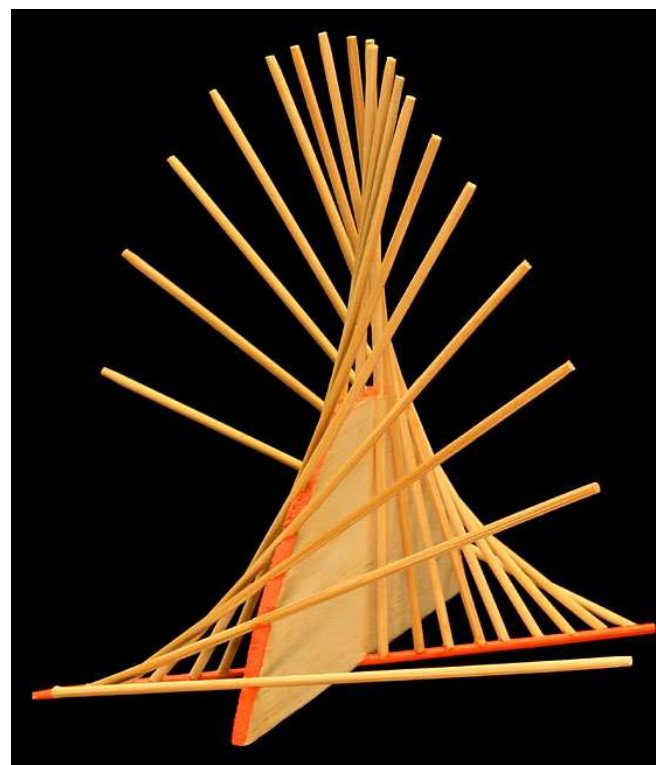
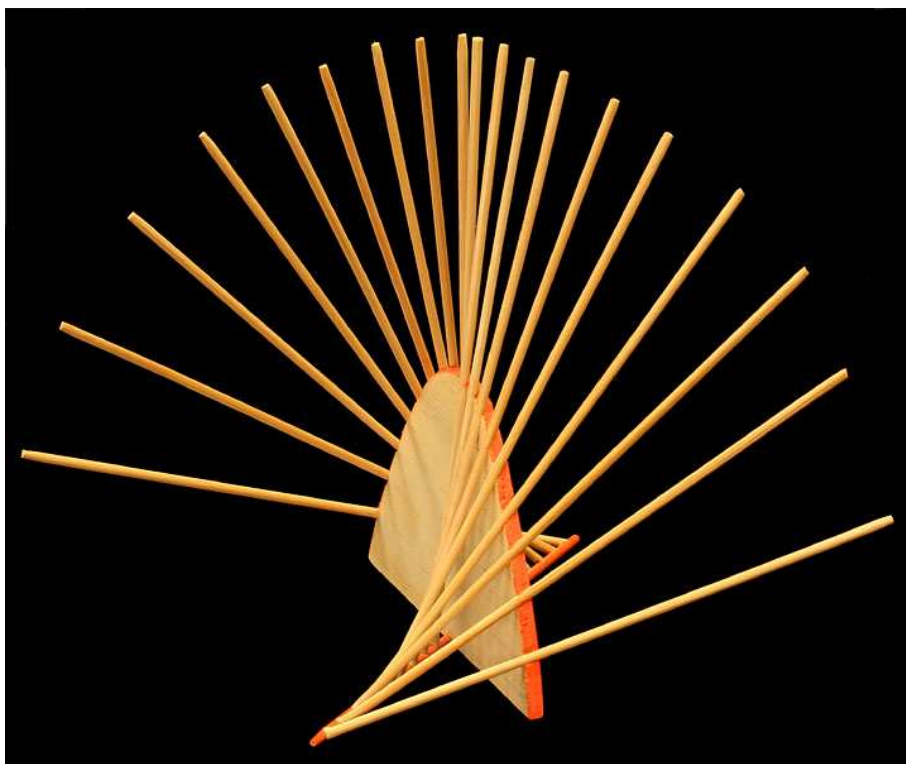


Konoid parabolického oblouku

Je plochou 3°, I. typu. Jeho řídícími útvary je parabolický oblouk a jednoduchá řídící přímka procházející osou paraboly v rovině kolmé na její rovinou přičemž s rovinou svírá úhel $\pi/4$. Řídící dvojnou přímkou je nevlastní přímka řídící roviny, která má s parabolickým obloukem společný bod.

Zajímavostí plochy je, že obsahuje pouze imaginární torzální přímky a imaginární kuspidální body, což je typické pro kubické zborčené plochy II. typu.

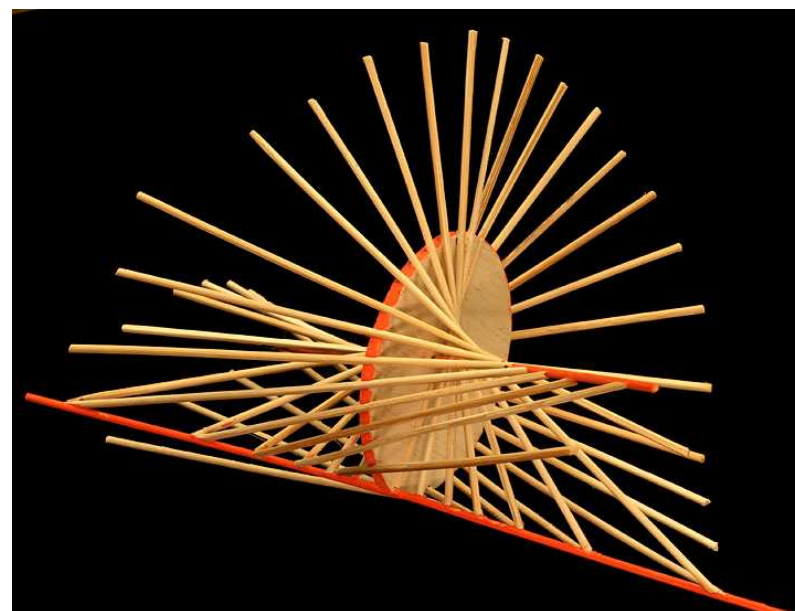
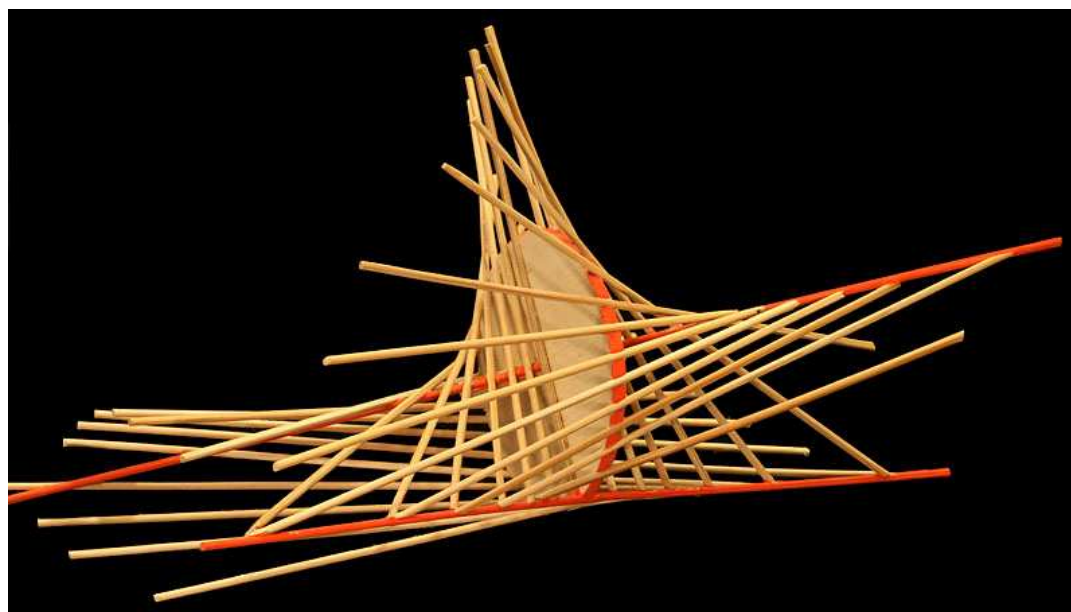
$$\mathbf{n}(u,g) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + g(1 - u^2) \\ ug \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{R} \end{array}$$



Kružnice protnutá řídicí přímkou jejím středem

Je plochou 3°, I. typu. Dvojná řídicí přímka protíná řídicí kružnici a jednoduchá řídicí přímka prochází jejím středem pod úhlem $\pi/4$ vůči její rovině. Plocha nemá reálné torzální přímky ani reálné kuspidální body. Roviny rovnoběžné s rovinou řídicí kružnice protínají plochu v kubických strofoidách s uzlem v bodě dvojně řídicí přímky.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} 2r \cos^2(\phi)(1-g) \\ r \sin(2\phi)(1-g) \\ rg \operatorname{tg}(2\phi) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$



Marseillský oblouk

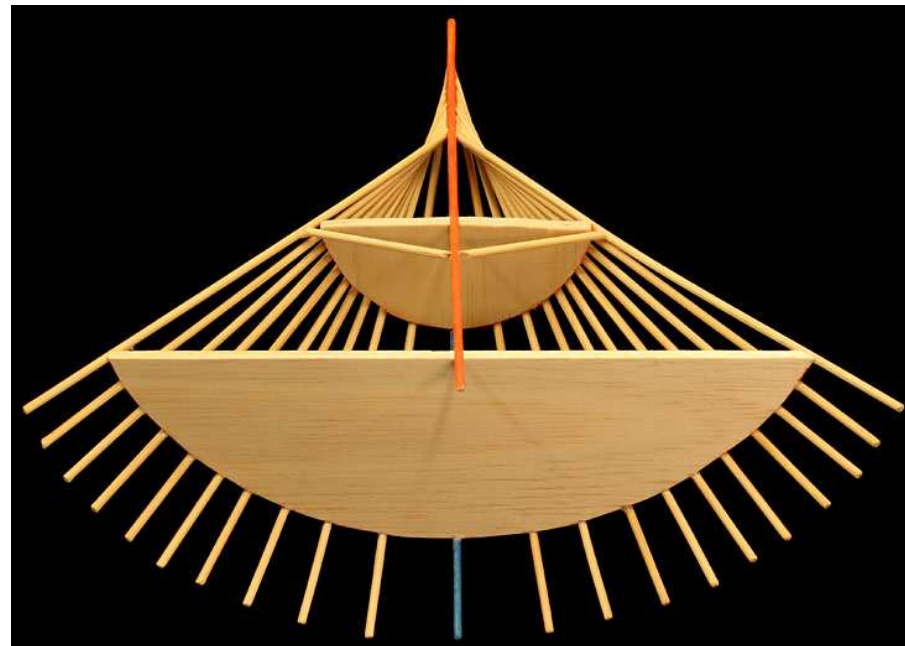
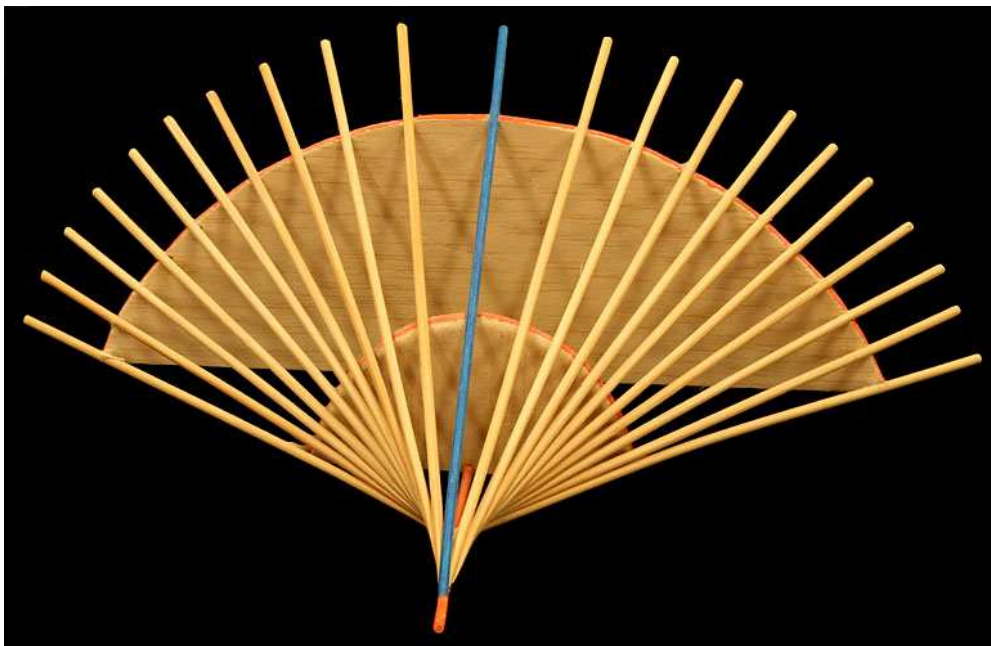
Je racionální plochou 6° . Má dvě dvojné řídící kružnice ležící v rovnoběžných rovinách a dvojnou řídící přímkou, která prochází kolmo k rovinám kružnic středem jedné z nich. Řídící kružnice nestejných průměrů mají společné kruhové body.

Model plochy je značně zjednodušen. Z důvodu srozumitelnosti na něm není zvýrazněn dvojný charakter řídících kružnic. Marseillský oblouk byl často využíván ve stavební praxi, kdy část plochy mezi řídícími kružnicemi je vhodná pro obloukové klenby.

Pro $\rho_{23} = q \cos(\phi) \pm \sqrt{(q^2 \sin^2(\phi) + R^2)}$

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r \sin(\phi) + g(\rho_{23} - r) \sin(\phi) \\ r \cos(\phi) + g(\rho_{23} - r) \cos(\phi) \\ g \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$

r ... poloměr malé kružnice,
 R ... poloměr velké kružnice,
 q ... vzdálenost středů kružnic.



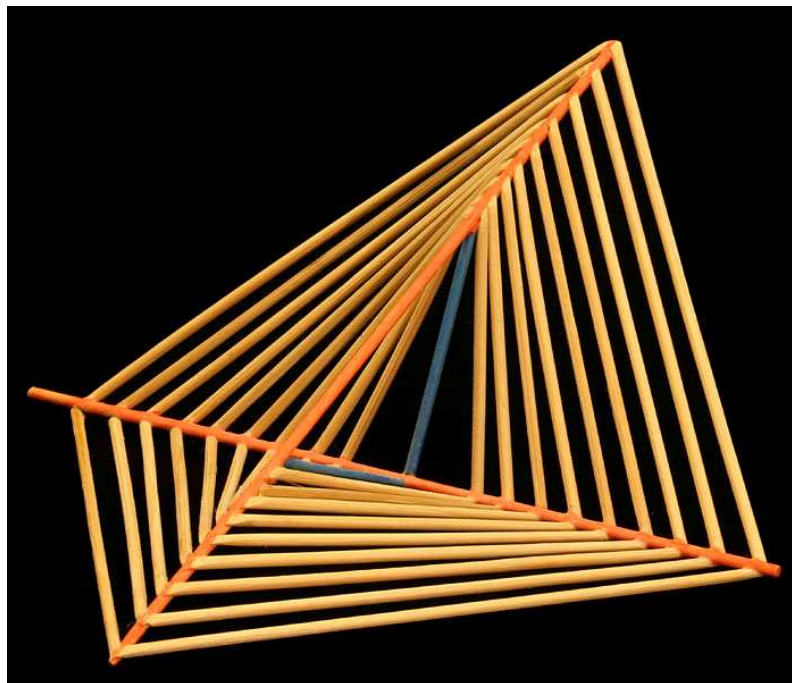
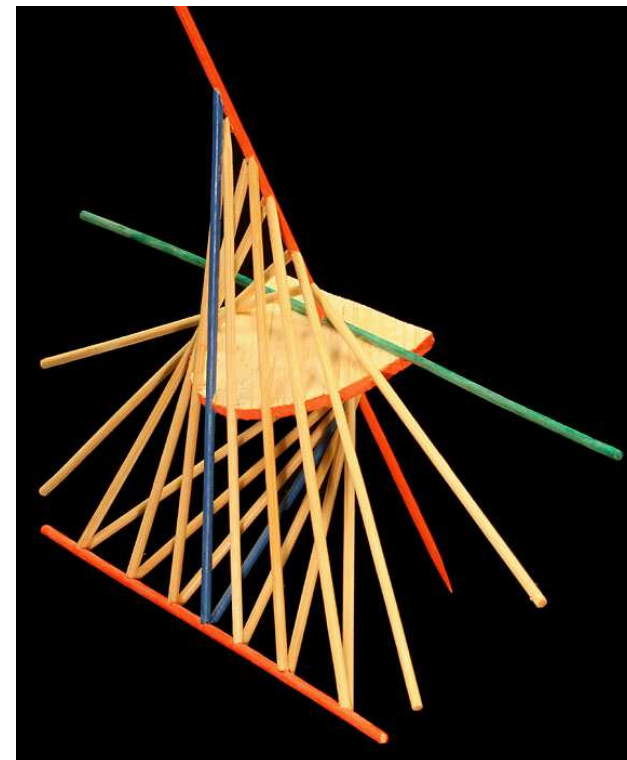
Montpellierský oblouk

Plocha je 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace. Je určena kružnicí, dvojnou přímkou ležící v rovině rovnoběžné s rovinou kružnice a další dvojnou přímkou procházející středem kružnice. Plocha obsahuje dvojnou tvořící přímku. Ta je osou rovinového svazku, jehož roviny protínají plochu v kuželosečkách. Dvě torzální přímky jsou reálné, dvě torzální přímky jsou imaginární.

Montpellierský oblouk byl často využíván ve stavební praxi, kdy část plochy mezi řídící kružnicí a vodorovnou řídící přímkou je vhodná pro obloukové klenby.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) (1 - g) + bg \cotg(\phi) \\ Lg \\ r \sin(\phi) (1 - g) + bg \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

L ... vzdálenost rovin kružnice a dvojně řídící přímky,
b ... výška řídící přímky.



Montpellierský oblouk s úběžnou kružnicí.

Je plochou 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace. Její konstrukce vychází ze známé plochy Montpellierského oblouku, kdy řídící kružnice přejde v úběžnou křivku rotační kuželové plochy, jejíž osa bude rovnoběžná s některou řídící přímkou oblouku.

Plocha je určena dvěma navzájem kolmými mimoběžnými dvojnými přímkami a řídící kuželovou plochou.

Obrysové křivky plochy, stejně jako křivky, ve kterých plochu protínají různě položené roviny, jsou teoreticky známé křivky. Proto je plocha i didakticky velmi zajímavá.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} dg \operatorname{tg}(\phi) \\ [r + d/\cos(\phi)] (1 - g) \\ dg \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} d, g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{matrix}$$

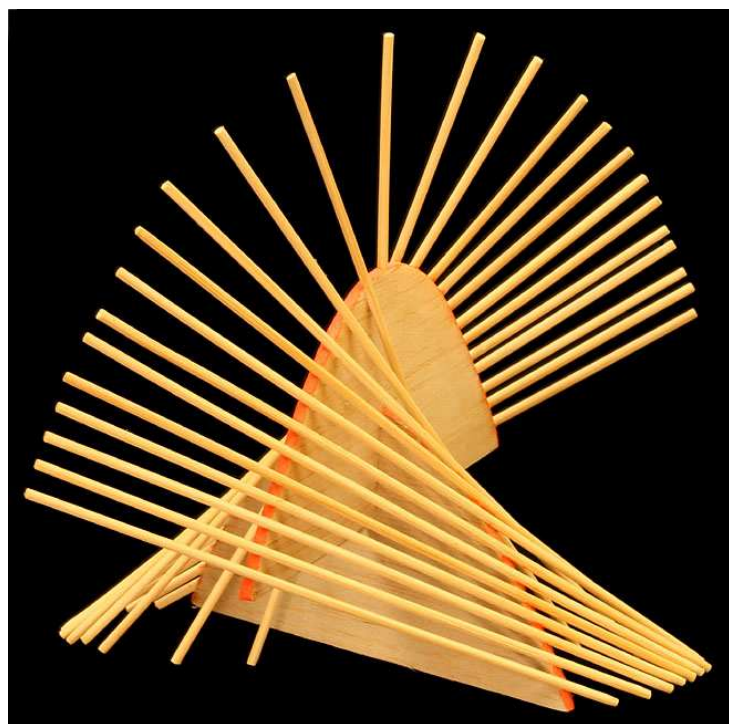
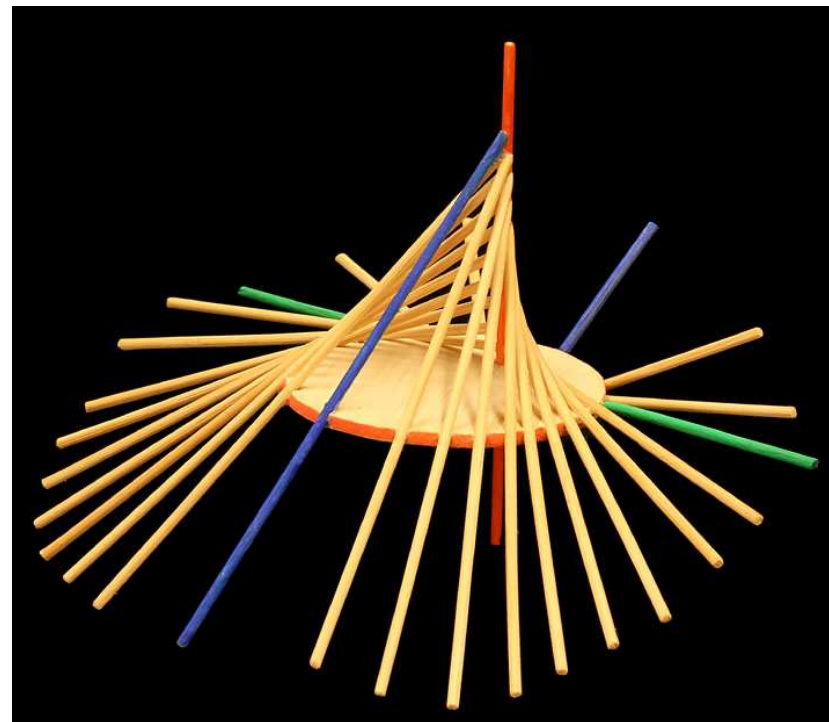
Stanová plocha nad kružnicí

Je konoidem 4°, typu VII dle Sturmovy klasifikace. Její dvojná řídící přímka prochází rovinou řídící kružnice a její řídící rovina s rovinou kružnice svírá úhel $\pi/4$. Plocha v základním provedení připomíná jednoduchý stan podepřený tyčí.

Protože jedna z řídících přímek prochází rovinou kružnice, má zborcená plocha dvě reálné a dvě imaginární torzální přímky. Zvláštností plochy je existence dvojně tvořící přímky v rovině řídící kružnice. Řídící kružnice je tedy jednou z kuželoseček, které vznikají na sečných rovinách svazku o ose dvojně tvořící přímky.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} -v_0 + g \rho_{12} \cos(\phi) \\ g \rho_{12} \sin(\phi) \\ (1 - g) \rho_{12} \cos(\phi) \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$

$\rho_{12} = v_0 \cos(\phi) \pm \sqrt{[r^2 - v_0^2 \sin^2(\phi)]}$,
 v_0 ... vzdálenost stopníku řídící přímky a středu kružnice.



Cayleyova plocha s řídícími parabolami

Plocha 3° je typem Cayleyovy plochy určené dvěma řídícími kuželosečkami v různých rovinách, které mají jeden společný bod a řídící přímku, která je protíná v bodech, ve kterých tečny obou kuželoseček leží ve stejné rovině.

Kuželosečkami jsou v tomto případě dvě paraboly, jejichž roviny jsou navzájem otočeny o úhel $\pi/2$. Řídící přímku plochy je úběžná přímka roviny, proto je plocha konoidem.

Plocha je zajímavá svojí výtvarnou architekturou.

$$\mathbf{n}(u, g) = \begin{vmatrix} u \\ u^2 + qg \\ u(1 - 2g) \end{vmatrix}, \quad u, g \in \mathbb{R}$$

q ... vzdálenost vrcholů parabol.

Konoid bisekant hipopédy

Je plochou 3° II. typu, kdy jednoduchá řídící přímka (nevlastní přímka řídící roviny) neprotíná plochu řídící kuželosečky.

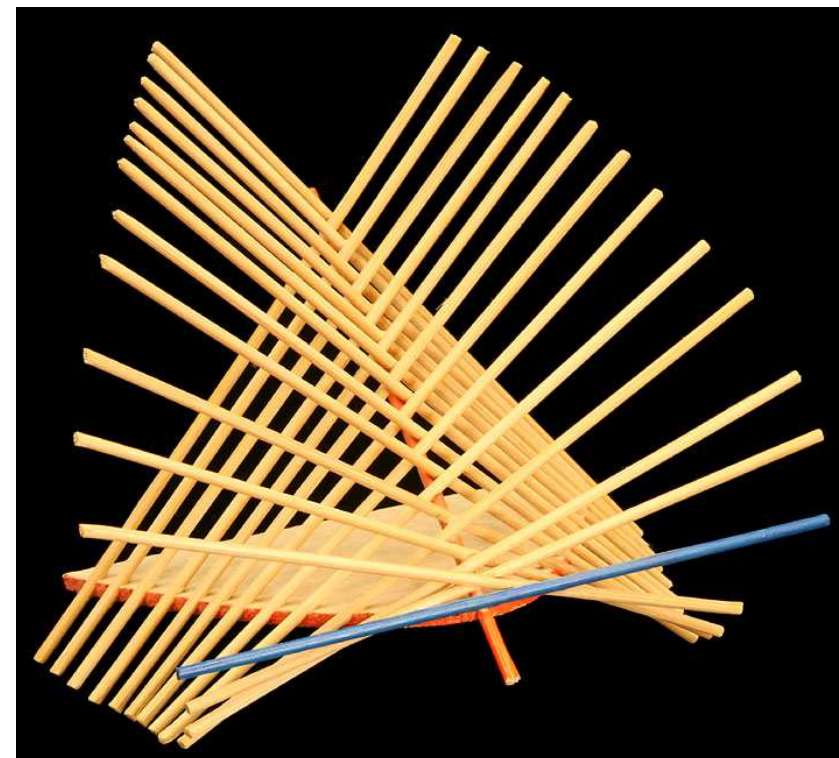
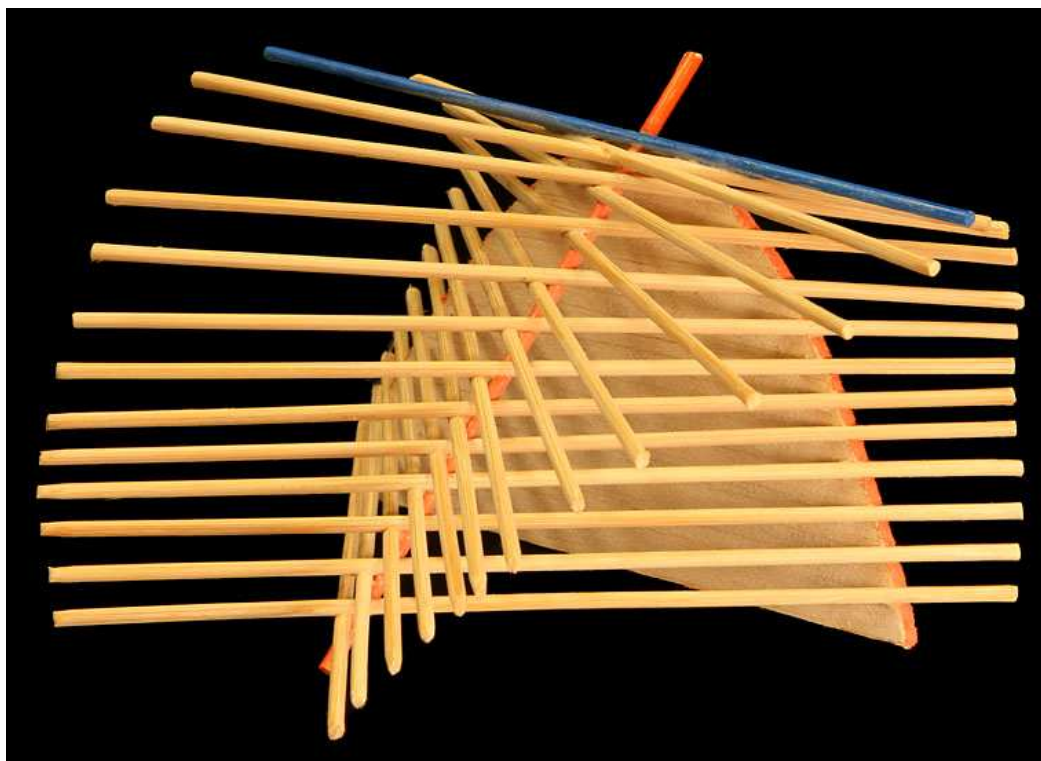
Řídící kuželosečkou je parabola, jejímž vrcholem prochází dvojná řídící přímka. Plocha je didakticky zajímavá svou konstrukcí pomocí bisekant hipopédy. Hipopéda je prostorová průniková křivka, která vzniká průnikem válce a koule.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{pmatrix} r \cos(2\phi) + rg [\cos(2v) - \cos(2\phi)] \\ r \sin(2\phi) + rg [\sin(2v) - \sin(2\phi)] \\ 2b \sin(\phi) + 2bg [\sin(v) - \sin(\phi)] \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix}$$

$v + \phi = \text{konst}$,

r ... poloměr válce,

b^2/r ... vzdálenost osy válce od osy koule.



Frezierův cylindroid

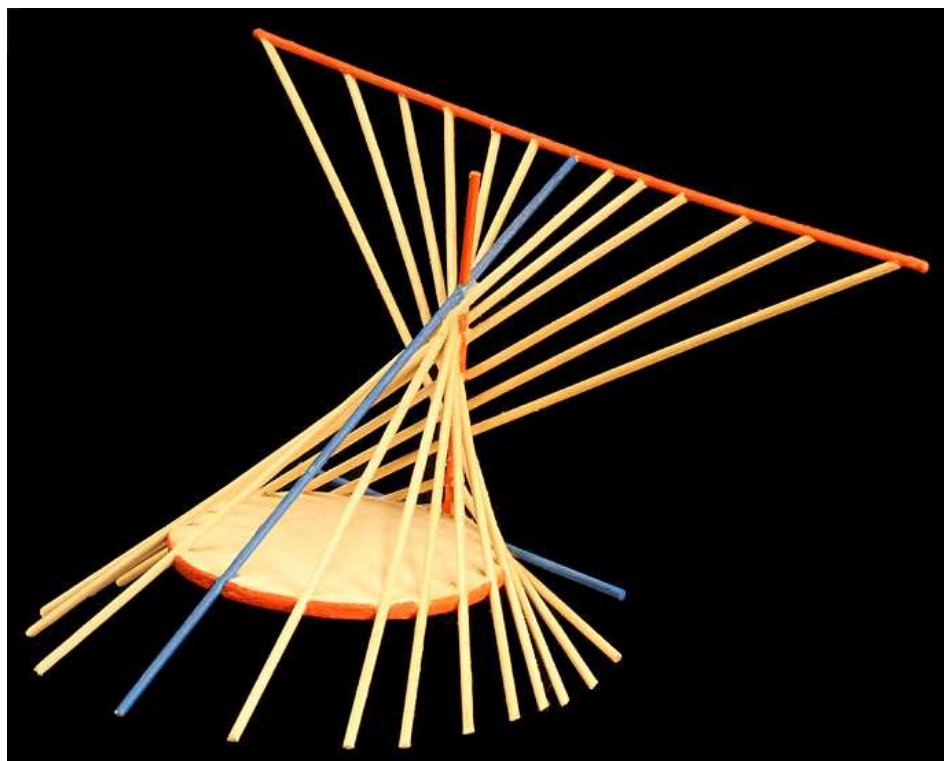
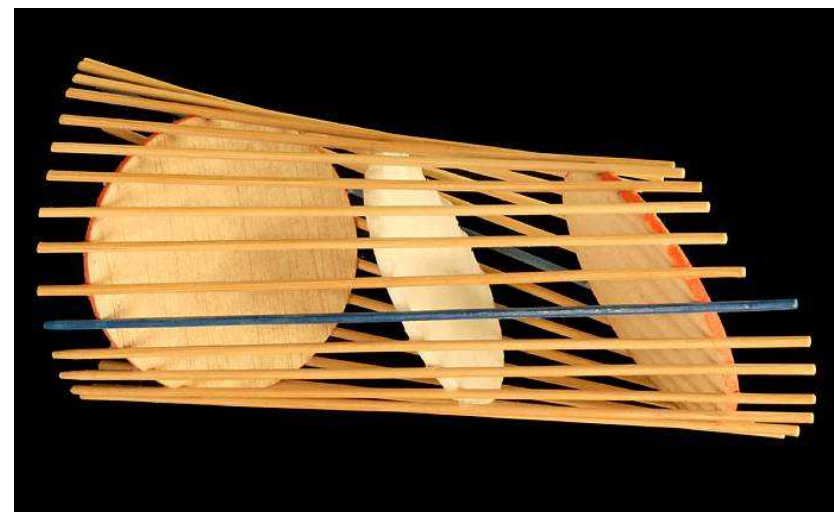
Je součtovou plochou 6°, která se rozpadá na plochu paraboloidu 2° a vlastní cylindroid 4°. Model plochy je vlastní cylindroid 4°.

Plocha je odvozena z povrchek spojujících dva různé šikmé řezy válce. Je tedy určena dvěma kuželosečkami a řídící rovinou. Plocha je konoidem. Zajímavostí plochy je koincidence dvou dvojných řídící přímek v jednu a v existenci dvojně tvořící přímky. Plocha je proto typu VIII dle Sturmovy klasifikace. Dvojná tvořící přímka je průsečnicí rovin řídících kuželoseček. Ta může být izolovaná nebo reálná.

Model je cylindroid s izolovanou dvojnou tvořící přímkou.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} a \cos(\phi) \\ b \sin(\phi) + g L \\ [v_0 + v_1 \cos(\phi)] (2g - 1) \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{matrix}$$

$a, b, L, v_0, v_1 \dots$ konstanty, charakterizující řezy válce.



Plocha s řídící přímkou rovnoběžnou s rovinou řídící kružnice.

Plocha je 3°, II. typu dle Sturmovy klasifikace. Jejími řídícími útvary je jednoduchá kružnice, dvojná přímka kružnici protínající a jednoduchá přímka, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou kružnice. Model reprezentuje případ, kdy jednoduchá přímka je kolmá k dvojně řídící přímce a je na stejné straně kružnice. Je vhodným příkladem pro ilustraci vlivu poloh řídících útvarů.

Plocha má dvě reálné torzální přímky a dva reálné vlastní kuspídní body.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} 2r \cos^2(\phi) (1 - g) + pg \\ r \sin(2\phi) (1 - g) + pg \tan(\phi) \\ Lg \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (-\pi/2, \pi/2) \end{matrix}$$

$L \dots$ výška jednoduché řídící přímky,
 $p \dots$ vzdálenost obou řídících přímek..

Plocha loukotí

Je plochou 4^o typu V dle Sturmovy klasifikace.

Plocha je zajímavá svým možným odvozením. Plochu vyplní jedna loukoť formanského kola, které se vzpřímeně pohybuje po kruhové dráze. Od toho vznikl název plochy. Kružnice, kterou opisuje střed kola, se tak stává jedním z řídících útvarů vzniklé plochy. Dalšími řídícími útvary je dvojná parabola a dvojná řídící přímka.

Obecně je plocha typu V dle Sturmovy klasifikace dána jednoduchou a dvojnou kuželosečkou, které mají dva společné body a dále dvojnou řídící přímkou, která protíná jednoduchou kuželosečku.

Na první fotografii je dvojnou kuželosečkou parabola, na druhé kružnice.

Zajímavostí plochy je teoretické odvození podstatné a izolované části dvojně řídící přímky.

$$\mathbf{n}(\phi, g) = \begin{vmatrix} r \cos(\phi) + rg \sin^2(\phi) \\ r \sin(\phi) - rg \sin(\phi)\cos(\phi) \\ r[1 - g \cos(\phi)] \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} g \in \mathbb{R} \\ \phi \in (0, \pi) \end{array}$$

