DRUHÁ PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE
Adolf Karger, Karlova Univerzita
Matematicko-fyzikální fakulta
Praha

**Úvod**

Tento materiál obsahuje základní teoretickou výbavu pro výuku předmětu Projektivní geometrie II na učitelské kombinaci matematika, deskriptivní geometrie pro třetí ročník bakalářského studia. Látka je pro zmíněné studenty poměrně obtížná, patřila by spíše na magisterské studium. Nicméně je dobrou příležitostí pro pěstování logického uvažování, což považuji za důležité zvláště u této učitelské kombinace, kde se klade velký důraz na prostorovou představivost.

Při tvorbě tohoto materiálu jsem se opíral o vynikající učební text Miroslava Lávičky, (3), který se však pro značnou rozsáhlost pro tento předmět nehodí. Část týkající se polarity jsem převzal, protože lepší způsob výkladu této látky neznám. Podstatný rozdíl je však v tom, že v zde předloženém textu se pracuje téměř výhradně v oboru reálných čísel, což považuji za výhodné z didaktického hlediska, i když to způsobuje drobné komplikace.

# 1 Opakování z lineární algebry

## 1.1 Vektory a matice

Uvažujme vektorový prostor $V_n$ nad tělesem reálných čísel $\Re$. Je-li
$\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_s\}$ skupina $s$ vektorů z tohoto prostoru a
$M = (a_{ij}), i = 1, ..., s, j = 1, ..., t$
matice mající s řádků a t sloupců, definujeme skupinu $t$ vektorů
$\mathcal{T} = \mathcal{S}M = \{v_1, ..., v_t\}$
jako formální součin řádkové matice $\mathcal{S}$ a matice M.

Výsledkem je řádková matice sestávající z $t$ vektorů, $v = \Sigma_{j=1}^{t} u_j a_{ji}$. Výsledná matice je vlastně skupina vektorů vzniklých jako lineární kombinace původních vektorů a matice $M$ je matice koeficientů této kombinace. Z toho se snadno vyvodí vlastnosti této formální operace.

Příklad. $\{u, v\} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \{u + 4v, 2u + 5v, 3u + 6v\}$

Po nás je nejdůležitější, že regulární matice převádí nezávislou skupinu vektorů na nezávislou a obráceně jsou-li obě skupiny nezávislé a mají stejný počet vektorů, je převádějící matice regulární.

Uvažujme nyní bázi $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ ve $V_n$ a $x$ buď libovolný vektor. Pak můžeme jednoznačně napsat

$x = \Sigma_{i=1}^{n} u_i x_i = \{u_1, ..., u_n\}(x_1, ..., x_n)^T = \mathcal{B} x_{\mathcal{B}}$,

kde $x_{\mathcal{B}} = (x_1, ..., x_n)^T$ je sloupec souřadnic vektoru $x$ v bázi $\mathcal{B}$.

Zcela formálně nyní odvodíme:

Buď $\mathcal{C} = \{v_1, ..., v_n\}$ jiná báze ve $V_n$, pak $\mathcal{C} = \mathcal{B}P$, kde $P$ je regulární matice (tzv. matice přechodu). Pak máme

$x = \mathcal{B}(x_1, ..., x_n)^T = \mathcal{B}x_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}x_{\mathcal{C}} = \mathcal{B}Px_{\mathcal{C}}$,

což znamená, že $x_{\mathcal{B}} = Px_{\mathcal{C}}$, neboli $x_{\mathcal{C}} = P^{-1}x_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}P^{-1}$.

Je-li dále $V_m$ vektorový prostor nad $\Re$ dimenze $m$, a $\phi$ lineární zobrazení z $V_n$ do $V_m$, definujeme pro skupinu s vektorů $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_s\}$ z $V_n$

$\phi(\mathcal{S}) = \{\phi(u_1), ..., \phi(u_s)\}$.

Jestliže jsou $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ a $\mathcal{C} = \{v_1, ..., v_m\}$ báze ve $V_n$ a $V_m$, máme $\phi(\mathcal{B}) = \mathcal{C}A$ a matici $A$ nazýváme maticí zobrazení $\phi$ v bazích $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Jsou-li $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{C}_1$ jiné báze, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}P$ a $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}Q$, máme

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 Q^{-1}$,$\phi(\mathcal{B}_1) = \phi(\mathcal{B})P = \mathcal{C}AP = \mathcal{C}_1 Q^{-1}AP$.

Vzhledem k bazím $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{C}_1$ je tedy matice $B$ zobrazení $\phi$ dána vztahem $B = Q^{-1}AP$.

## 1.2 Kanonický tvar matice lineárního zobrazení

Buď $\phi : V_n \to V_m$ lineární zobrazení. Najdeme takové báze ve $V_n$ a ve $V_m$, že matice tohoto zobrazení bude mít nejjednodušší možný tvar. Označme $\tilde{V}_p$ obraz prostoru $V_m$, při zobrazení $\phi$, jeho dimenze nechť je $p$. Je-li $W_{n-p}$ jádro zobrazení $\phi$, je jeho dimenze skutečně $n - p$, jak víme z lineární algebry. Pak pro libovolný podprostor $\tilde{W}_p$ ve $V_n$ takový, že $V_n = W_{n-p} \oplus \tilde{W}_p$ platí, že $\phi$ je isomorfismus $\tilde{W}_p$ na $\tilde{V}_p$, $\oplus$ značí direktní součet. K tomu stačí ukázat, že $\phi$ je prosté.

Buďte tedy $x_1, x_2 \in \tilde{W}_n$. Nechť $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Můžeme napsat $x_2 = x_1 + x_3$, kde $\phi(x_3) = 0$. Je tedy $x_3$ z jádra a tudíž je $x_3 = 0$, protože rozklad do složek je v případě direktního součtu jednoznačný.

Zvolíme nyní bázi $\{e_1, ..., e_p\}$ ve $\tilde{W}_p$ libovolně a doplníme jakoukoliv bází v prostoru $W_{n-p}$, na bázi ve $V_n$. Ve $V_m$ zvolíme do báze nejdříve vektory $\phi(e_1), ..., \phi(e_p)$ a doplníme je libovolně do báze celého prostoru $V_m$. Matice zobrazení $\phi$ se vzhledem k takto zvoleným bázím skládá ze čtyř bloků, horní levý blok je jednotková matice stupně $p$ a ostatní bloky jsou nulové. Vidíme tedy, že jediná vlastnost lineárního zobrazení dvou prostorů je jeho hodnost, neboli dimenze obrazu,

$$\phi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To nám ukazuje, že lineární zobrazení různých vektorových prostorů nejsou zajímavá, jediná vlastnost takového zobrazení je jeho hodnost. Podobná vlastnost platí i pro projektivní zobrazení, která budeme zkoumat později.

## 1.3 Reálný Jordanův tvar matice

Uvažujme komplexní rozšíření $V_n^C$ prostoru $V_n$ jako prostor vektorů tvaru $x = y + Iz$, kde $y, z \in V_n$, a $I$ je imaginární jednotka. Uvažujme matici $A$ lineárního zobrazení tohoto prostoru do sebe jako prostoru nad komplexními čísly (matice $A$ může mít imaginární prvky).

**Poznámka** $V_n^C$ je vektorový prostor na komplexními čísly, ale má ještě něco navíc, a sice to, že stále ještě víme, které vektory jsou reálné. Z lineární algebry víme, že existuje podobná matice k matici $A$, která má tzv. Jordanův kanonický tvar. Matice v komplexním Jordanově kanonickém tvaru se skládá z tzv. Jordanových bloků kolem hlavní diagonály a ostatní bloky jsou nulové. Označme $J$ jeden takový blok. Potom je

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

matice, která má na hlavní diagonále vlastní číslo $\lambda$ a na vedlejší diagonále nad ní samé jedničky.

Uvažujme nyní případ, kdy je matice $A$ reálná. Pak s každým imaginárním vlastním číslem má též vlastní číslo imaginárně sdružené a také k němu odpovídající Jordanův blok. Uvažujme nyní lineární zobrazení mající Jordanův blok stupně $p$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = a + Ib$ v části báze $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_p\}$. Pak $\mathcal{B}' = \mathcal{B}J$, $\mathcal{B}' = \{e'_1, ..., e'_p\}$, obrazy vektorů označíme čárkou. Dostaneme

$e'_i = (a + Ib)e_i + e_{i-1}$, kde $e_0 = 0$. Podobně pro komplexně sdružené vektory $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_p\}$ bude

$\bar{e}'_i = (a - Ib)\bar{e}_i + \bar{e}_{i-1}$, kde $\bar{e}_0 = 0$. Z toho plyne

$$(e'_i + \bar{e}'_i)/2 = a(e_i + \bar{e}_i)/2 - b(e_i - \bar{e}_i)/(2I) + (e_{i-1} + \bar{e}_{i-1})/2,$$

$$(e'_i - \bar{e}'_i)/(2I) = a(e_i - \bar{e}_i)/(2I) + b(e_i + \bar{e}_i)/2 + (e_{i-1} + \bar{e}_{i-1})/(2I).$$

Po označení

$$(e'_i + \bar{e}'_i)/2 = f_i, (e'_i - \bar{e}'_i)/(2I) = g_i, i = 1, ..., p, f_0 = g_0 = 0,$$

dostáváme

$$f'_i = af_i + bg_i + f_{i-1}, g'_i = -bf_i + ag_i + g_{i-1}.$$

Pro reálné vektory $f_i, g_i, i = 1, ..., p$ uspořádané střídavě tj. v pořadí

$f_1, g_1, f_2, g_2, ..., f_p, g_p$, dostáváme Jordanův blok v reálném tvaru, který pro větší názornost uvádíme pro $p = 3$.

$$J = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

Tomuto tvaru matice říkáme reálný Jordanův tvar matice a má podobné vlastnosti jako v případě komplexním. Specielně je určen jednoznačně až na pořadí bloků. Matice podobnosti je rovněž reálná, protože obě báze jsou reálné.

## 1.4 Kvadratické formy

Nakonec se budeme věnovat kvadratickým formám.
Buď $F(x,y)$ symetrická bilineární forma na $V_n$, $F(x,y)=F(y,x)$.
Uvažujme bázi $\mathcal{B}=\{u_1,...,u_n\}$ ve $V_n$ a $x,y$ buďte libovolné vektory,
$x=\mathcal{B}u_{\mathcal{B}}=u_1x_1+...+u_nx_n$, $y=\mathcal{B}u_{\mathcal{B}}=u_1y_1+...+u_ny_n$.
Pak $F(x,y)=\Sigma^n_{i,j=1,...,n}x_iy_jF(u_i,v_j)=x^T_{\mathcal{B}}Fy_{\mathcal{B}}$, kde $F$ je symetrická matice $F=(F_{ij})=(F(u_i,v_j),i,j=1,...,n$. $F$ se nazývá matice bilineární formy $F(x,y)$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

Je-li $\mathcal{C}$ jiná báze, máme $x_{\mathcal{B}}=Px_{\mathcal{C}}$, $y_{\mathcal{B}}=Py_{\mathcal{C}}$.

Je tedy $F(x,y)=x^T_{\mathcal{B}}Fy_{\mathcal{B}}=x^T_{\mathcal{C}}Gy_{\mathcal{C}}=x^T_{\mathcal{B}}P^TFPy_{\mathcal{C}}$,
kde $G$ je matice $F$ v bázi $\mathcal{C}$ a platí $G=P^TFP$.

Pro podprostory $V$ a $W$ ve $V_n$ definujeme
$V\uplus W=\{\text{množina všech} \quad \mathrm{v}+\mathrm{w}, \quad \text{kde} \quad \mathrm{v}\in \mathrm{V},\mathrm{w}\in \mathrm{W}.\}$

Je to nejmenší podprostor v celém prostoru, který obsahuje dané dva podprostory, nazývá se součet nebo spojení podprostorů $V$ a $W$.
Pro jejich dimenze platí:
$\dim(V)+\dim(W)=\dim(V\cap W)+\dim(V\uplus W)$.

Víme, že ke každé kvadratické formě existuje báze, ve které je matice této kvadratické formy diagonální, přičemž prvky na diagonále jsou rovny plus nebo minus jedné, nebo nuly.

Definujme signaturu $\sigma(F)$ kvadratické formy $F(x,x)$ ve $V_n$ jako trojici $\sigma(F)=(p,q,r)$, kde $p$ je počet plus jedniček, $q$ je počet minus jedniček a $r$ je počet nul. Samozřejmě je $p+q+r=n$.

Můžeme také předpokládát, že $p\geq q$, protože vynásobíme-li formu minus jedničkou, plus jedničky a minus jedničky se zamění. To budeme též v dalším předpokládat.
Sylvestrova věta říká, že signatura kvadratické formy je vlastnost této formy, to znamená, že signatura nezávisí na bázi, ve které byla forma diagonalizována. Tato věta se též nazývá zákon setrvačnosti kvadratických forem. Jelikož tuto větu budeme hodně používat, uvedeme její důkaz, který je velice jednoduchý.

Předpokládejme, že kvadratická forma $F(x,x)$ má v bázi $\mathcal{B}=(u_1,...,u_n)$ a souřadnicích $y_i, i=1,...,n$ tvar

$$F(x,x)=y_1^2+...+y_p^2-y_{p+1}^2...-y_{p+q}^2$$

a v bázi $\mathcal{C} = \{v_1, ..., v_n\}$ a souřadnicích $z_i, i = 1, ..., n$ tvar

$$F(x, x) = z_1^2 + ... + z_r^2 - z_{r+1}^2 ... - z_{r+s}^2.$$

Předpokládejme nyní, že $p > r$.
Označme $V$ podprostor generovaný vektory $u_1, ..., u_p$, $W$ podprostor generovaný vektory $v_{r+1}, ..., v_n$.

Platí $F(v, v) > 0$ pro všechny nenulové vektory z $V$, $F(w, w) \leq 0$ pro všechny vektory z $W$. Ukážeme, že prostor $V \cap W$ je netriviální, tj. že má kladnou dimenzi.
Platí $\dim(v) = p$, $\dim(W) = n - s, \dim(V \uplus W) \leq n$,
$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \uplus W) \geq p + n - r - n = p - r > 0$.

Pro nenulový vektor $u$ z $V \cap W$ tedy je $F(u, u) > 0, F(u, u) \leq 0$, a to je spor.

Ještě několik poznámek o vztahu symetrické bilineární formy $F(x, y)$ a příslušné kvadratické formy $F(x, x)$. Vzorcem

$$F(x, y) = (F(x + y, x + y) - F(x, x) - F(y, y))/2$$

je jednoznačně definována symetrická bilineární forma příslušná k dané kvadratické formě. V případě euklidovské geometrie je to tak zvaná kosinová věta, dávající vztah mezi stranami a úhly v trojúhelníku. V projektivní geometrii tato věta říká, že polarita vzhledem ke kvadrice je jednoznačně určena kvadrikou (tj. jejími body, je-li tato kvadrika reálná a regulární).

# 2 Projektivní prostor

Nejdříve uvedeme obecnou definici projektivního prostoru a jeho základních vlastností a pak teprve se budeme věnovat příkladům.
**Definice**. Buď $V_{n+1}$ vektorový prostor dimenze $n + 1$ nad $\Re$. Množinu jednorozměrných podprostorů $\{\lambda x | x \in V_{n+1}, x \neq 0, \lambda \in \Re, \lambda \neq 0\}$ z $V_{n+1}$ nazýváme projektivním prostorem $\mathbf{P_n}$ dimenze $n$ (nad $\Re$) a jeho prvky nazýváme body tohoto prostoru.
**Definice.** Zobrazení $\pi : (V_{n+1} - \{0\}) \to \mathbf{P_n} : \mathbf{x} \to \{\lambda \mathbf{x}\}$ nazýváme přirozenou projekcí a pro každý bod $\mathbf{x}$ z $\mathbf{P_n}$ nazýváme každý vektor z $\pi^{-1}\mathbf{x}$ aritmetickým zástupcem tohoto bodu.
Je-li pro $m \geq 0$ $V_{m+1}$ $(m + 1)$-dimenzionálním podprostorem prostoru $V_{n+1}$,

nazýváme $\pi(V_{m+1})$ $m$-dimenzionálním podprostorem $\mathbf{P_m}$ prostoru $\mathbf{P_n}$.
**Poznámka.** Jednodimenzionální podprostor se nazývá přímka, dvoudimenzionální podprostor se nazývá rovina, k-dimenzionální podprostor je $k$-dimenzionální rovina, $n-1$ dimenzionální podprostor je nadrovina.

## 2.1 Operace s podprostory

Zatímco průnik podprostorů má přirozený smysl i pro projektivní podprostory, operaci spojení je třeba věnovat určitou pozornost. Spojení podprostorů budeme definovat tak, aby byla v souladu s přirozenou projekcí.
**Definice.** Buďte $\mathbf{P_m}$ a $\mathbf{P_r}$ podprostory v $\mathbf{P_n}$, pak definujeme

$\mathbf{P_m} \uplus \mathbf{P_r} = \{\mathbf{AB} | \mathbf{A} \in \mathbf{P_m}, \mathbf{B} \in \mathbf{P_r}\}$, kde $\mathbf{AB}$ značí přímku spojující body $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

**Poznámka.** Definice je v souladu s přirozenou projekcí, protože projekce spojení vektorových prostorů je spojením jejich projekcí.

**Platí**
$\pi(V_{m+1} \cap V_{r+1}) = \pi(V_{m+1}) \cap \pi(V_{r+1})$,
$\pi(V_{m+1} \uplus V_{r+1}) = \pi(V_{m+1}) \uplus \pi(V_{r+1})$.
**2.1.1. Věta o dimenzích.**
Buďte $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ podprostory v $\mathbf{P_n}$. Pak platí
$\dim(\mathbf{P}) + \dim(\mathbf{Q}) = \dim(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) + \dim(\mathbf{P} \uplus \mathbf{Q})$.
**Důkaz.**
Máme
$\dim \pi^{-1}(\mathbf{P}) + \dim \pi^{-1}(\mathbf{Q}) = \dim \pi^{-1}(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) + \dim \pi^{-1}(\mathbf{P} \uplus \mathbf{Q})$
z věty o dimenzích podprostorů vektorového prostoru s výjimkou případu, kdy průnik podprostorů $\pi^{-1}(\mathbf{P})$ a $\pi^{-1}(\mathbf{P})$ je triviální. Pak průnikem $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ je prázdná množina a ta zatím nemá dimenzi.

Pro zachování obecnosti dokazované formule definujeme dimenzi prázdné množiny jako $-1$ a věta pak platí i v tomto speciálním případě, protože je-li $\dim(\mathbf{P}) = r, \dim(\mathbf{Q}) = s$, je $\dim \pi^{-1}(\mathbf{P}) = r+1$, $\dim \pi^{-1}(\mathbf{Q}) = s+1$.

$\dim(\pi^{-1}(\mathbf{P}) \uplus \pi^{-1}(\mathbf{Q})) = \dim(\pi^{-1}(\mathbf{P} \uplus \mathbf{Q})) = r+s+2$,

$\dim(\mathbf{P} \uplus \mathbf{Q}) = r+s+1$. Je tedy

$\dim(\mathbf{P}) + \dim(\mathbf{Q}) = -1 + \dim(\mathbf{P} \uplus \mathbf{Q}) + 1$.

**Definice.** Podprostory $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ v $\mathbf{P_n}$. se nazývají doplňkové mají-li prázdný průnik a jejich spojení je celý prostor (tj. $V_{n+1}$ je direktním součtem jejich aritmetických základů). Znamená to, že jejich příčky vyplní celý prostor.

**Příklady.** V $P_3$ jsou doplňkovými podprostory dvě mimoběžky nebo rovina a bod mimo ni. V $P_4$ je to například přímka a s ní mimoběžná rovina, v $P_5$ to mohou být dvě roviny.

## 2.2 Souřadnice

Zvolíme-li v prostoru $V_{n+1}$ bázi $\mathcal{U} = \{u_0, ..., u_n\}$, pak jsou každému bodu $\mathbf{A}$ z $\mathbf{P_n}$ přiřazeny souřadnice $(a_0, ..., u_n)$ jeho libovolného aritmetického zástupce $a$, $a = a_0u_0 + ... + a_nu_n$. Tyto souřadnice jsou určeny až na libovolný nenulový násobek. Proto jim budeme říkat homogenní souřadnice bodu $a$.

Množina bodů $\mathbf{A_0}, ..., \mathbf{A_r}$ se nazývá lineárně nezávislá, jestliže existují jejich aritmetičtí zástupci, kteří tvoří lineárně nezávislou množinu. Všimněme si, že lineární závislost a nezávislost bodů nezávisí na volbě aritmetických zástupců. Je-li $\mathbf{A_0}, ..., \mathbf{A_r}$ lineárně nezávislá, určuje podprostor $\mathbf{P_r}$ dimenze $r$ v $P_n$ jako podprostor nejmenší dimenze tyto body obsahující.

Homogenní souřadnice $X$ libovolného bodu $\mathbf{X}$ tohoto podprostoru se dají vyjádřit pomocí parametrické rovnice $X = x_0v_0 + ... + x_rv_r$, kde $v_0, ..., v_r$ jsou libovolní aritmetičtí zástupci bodů $\mathbf{A_0}, ..., \mathbf{A_r}$.

Vyloučením parametrů dostáváme lineární rovnice podprostoru a obráceně Gaussova eliminační metoda použitá na systém rovnic podprostoru dává parametrické vyjádření podprostoru. Speciálně nadrovina se dá vyjádřit jednou rovnicí.

**Úmluva.** Pro zjednodušení označení budeme bod a jeho aritmetického zástupce označovat stejným písmenem, nebude-li nebezpečí z nedorozumění.

## 2.3 Příklady projektivních prostorů

1. Základním příkladem projektivního prostoru je projektivní prostor vytvořený z aritmetického prostoru $R^{n+1}$ $(n+1)-$ tic reálných čísel. Tento projektivní prostor je v jistém smyslu jediný $n$-dimenzionální projektivní prostor; pokud si v libovolném vektorovém prostoru zvolíme bázi, můžeme jej ztotožnit s prostorem $(n+1)-$ tic, podrobnostmi se nebudeme zabývat.

2. Projektivní rozšíření euklidovské roviny.

Uvažujme pro jednoduchost euklidovskou rovinu $E^2$ jako množinu dvojic reálných čísel $A = [x, y]$, ve které je obvyklým způsobem zavedena vzdálenost $d(A_1, A_2)$ podle Pythagorovy věty,
$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ pro $A_1 = [x_1, y_1], A_2 = [x_2, y_2]$.

Tuto množinu rozšíříme o další t.zv. nevlastní prvky (prvky v nekonečnu) a tak získáme rozšíření euklidovské roviny, které označíme $\tilde{E}_2$ následujícím způsobem:

Nevlastním bodem (bodem v nekonečnu) $A_\infty$ nazveme množinu všech přímek rovnoběžných s nějakou přímkou, representantem nevlastního bodu je libovolný vektor $u = (u_1, u_2)$ v rovině, který tento systém přímek určuje. Tento vektor je tedy z definice nenulový. Ukážeme, že takto vzniklá množina je projektivní rovina (projektivní prostor dimenze 2) podle hořejší definice.

Uvažujme vektorový prostor $R^3$. Bodu $A = [x, y]$, z $E^2$ přiřadíme aritmetického zástupce $(1, x, y)$ (a všechny nenulové násobky), nevlastnímu bodu $A_\infty$ určenému vektorem $u = (u_1, u_2)$ přiřadíme trojici $(0, u_1, u_2)$. Aby byla definice formálně v pořádku, musíme ještě říct, že množina všech nevlastních bodů tvoří přímku tzv. nevlastní přímku.

Definujeme-li incidenci pro nevlastní prvky přirozeným způsobem, tj. množinově, snadno nahlédneme, že vzniklá množina má vlastnosti projektivní roviny, každé dvě různé přímky se protínají právě v jednom bodě a každé dva různé body určují právě jednu přímku.

3. Analogicky se zavede projektivní rozšíření euklidovského prostoru.

Poznamenejme pouze, že nevlastní rovina projektivního rozšíření euklidovského postoru je jiná rovina, než jsou roviny euklidovského prostoru, neboť je to projektivní rovina. To znamená například to, že dvě různé nevlastní přímky mají společný právě jeden bod, neboli každé dvě různoběžné roviny v euklidovském prostoru mají společný směr.

## 2.4 Geometrická báze

Zvolíme-li množinu $n + 1$ nezávislých bodů $\mathbf{A_0}, ..., \mathbf{A_n}$ v $P_n$, pak lze souřadnice libovolného bodu $\mathbf{A}$ vyjádřit pomocí lineární kombinace aritmetických zástupců těchto bodů. Bylo by příjemné, kdybychom koeficienty této lineární kombinace mohli považovat za homogenní souřadnice bodu $\mathbf{A}$. Bohužel tomu tak ale není.

Skutečně, buďte $u_0, ..., u_n$ aritmetičtí zástupci bodů $\mathbf{A_0}, ..., \mathbf{A_n}$. Pak je $u = \lambda_0 u_0 + ... + \lambda_n u_n$ pro aritmetického zástupce $u$ bodu $A$.
Zvolíme-li jiné aritmetické zástupce bodů $\mathbf{A}, \mathbf{A_0}, ..., \mathbf{A_n}$, označme je

$v, v_0, ..., v_n$, $v = \mu_0 u_0 + ... + \mu_n u_n$, dostáváme

$u_i = \alpha_i v_i, i = 0, ..., n, u = \alpha v$, a tedy

$u = \lambda_0 u_0 + ... + \lambda_n u_n = \alpha v = \lambda_0 \alpha_0 v_0 + ... + \lambda_n \alpha_n v_n.$

Nakonec
$$\mu_0 = \lambda_0\alpha_0/\alpha, ..., \mu_n = \lambda_n\alpha_n/\alpha,$$
přitom $\alpha, \alpha_i, i = 0, ..., n$ jsou volitelná čísla.

Vidíme tedy, že koeficienty lineární kombinace nejsou určeny až na násobek, jak bychom potřebovali. Problém vyřešíme tak, že vybereme jeden bod a jeho souřadnice pevně zvolíme (až na násobek). Obvykle se volí bod, jehož souřadnice jsou všechny stejné, což uděláme i my.

Zvolme tedy libovolný bod $\mathbf{A}$, takový, aby žádná množina $n+1$ bodů z množiny $\mathbf{A_0}, ..., \mathbf{A_n}, \mathbf{A}$ nebyla lineárně závislá (tj. $\mathbf{A}$ neleží v žádné souřadnicové nadrovině), $\lambda_i \neq 0, i = 0, ..., n$. Pak $\mu_i = \mu_j, i, j = 0, ..., n$ a podle předchozího jsou čísla $\alpha_i$ určena až na násobek a $\lambda_i = \lambda_j, \mu_i = \mu_j, i, j = 0, ..., n$ dává $\alpha_i = \alpha_j$.

Takto zvolený bod se nazývá jednotkový a budeme jej značit $\mathbf{J}$.

**Definice.** Buď $P_r$ podprostor dimenze $r$ v $P_n$. Skupina bodů $A_0, ..., A_r, J$ se nazývá geometrická báze podprostoru $P_r$, jestliže každá podskupina $n+1$ bodů z této skupiny je lineárně nezávislá a $J = \lambda(A_0 + ... + A_r)$. Souřadnice bodů tohoto podprotoru jsou pak určeny až na násobek.

## 2.5 Dvojpoměr

Pro tři různé body $A, B, C$ na euklidovské přímce definujeme jejich dělicí poměr jako $(A, B, C) = d(A, C)/d(B, C)$, kde $d(A, B)$ je vzdálenost bodů $A$ a $B$. Pro čtyři body A,B,C,D definujeme jejich dvojpoměr jako poměr dělicích poměrů $(A, B, C)/(A, B, D)$ (předpokládáme, že jsou definovány). Ukážeme nyní, že takto definovaný dvojpoměr je pojmem projektivní geometrie, tj. že se nemění při projektivních transformacích. Zavedeme-li homogenní souřadnice $(x_0, x_1)$ pro bod $x$, dostáváme

$(A, B, C, D) =$
$$\frac{(c-a)/(c-b)}{(d-a)/(d-b)} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{(c_1a_0 - a_1c_0)(d_1b_0 - b_1d_0)}{(c_1b_0 - b_1c_0)(d_1a_0 - a_1d_0)}.$$

Uvedený výraz je poměr součinů determinantů homogenních souřadnic bodů. Víme, že tento determinant se při změně báze násobí determinantem transformace a to dokazuje invariantnost vzhledem k volbě soustavy souřadnic na přímce. Zvolíme-li body $A, B, C$ jako geometrickou soustavu souřadnic na přímce, bude $a_1 = 0, b_0 = 0, c_1 = c_0$ a dvojpoměr bodů je pak roven poměru homogenních souřadnic bodu $D$ vzhledem k této soustavě souřadnic, $(A, B, C, D) = d_1/d_0$.

Je-li dvojpoměr čtyř bodů roven $-1$ , říkáme, že body tvoří harmonickou čtveřici, nebo že se harmonicky oddělují (v euklidovské geometrii je to na příklad střed úsečky a nevlastní bod).

# 3 Geometrie vzniklé zmenšením projektivní grupy

Podle Erlangenského programu Felixe Kleina z roku 1872 se geometrie zabývá studiem vlastností, které zachovává nějaká grupa transformací prostoru. Obráceně, máme-li už nějakou geometrickou teorii, lze k ní najít grupu transformací, které její vlastnosti zachovávají.

V projektivním prostoru jsou to transformace vzniklé promítnutím lineárních transformací prostoru $V_{n+1}$ do $\mathbf{P_n}$ pomocí $\pi$. Podrobněji řečeno to znamená, že ke každému lineárnímu zobrazení $\phi : V_{n+1} \to V_{n+1} : u \to \phi(u)$ je jednoznačně definováno indukované zobrazení, které označíme stejným písmenem, podle pravidla

$\phi : \mathbf{P_n} \to \mathbf{P_n} : \phi(\pi(u)) \to \pi(\phi(u))$.

Ihned vidíme, že definice nezáleží na volbě aritmetického zástupce, a že převádí podprostory do podprostorů. Není ovšem na první pohled zřejmé, že takto získáme všechna zobrazení, které zachovávají projektivní geometrii. Kdybychom přijali stanovisko Kleinovo a začali grupou, problém zmizí.

Snadno nahlédneme, že nenulové násobky identického zobrazení ve vektorovém prostoru dávají identitu v projektivním prostoru.

Zvolíme-li bázi ve $V_{n+1}$, jsou všechna regulární zobrazení v tomto prostoru popsána regulárními maticemi stupně $n+1$, tedy maticemi grupy $\mathbf{GL(n+1}, \Re)$. Tuto grupu je třeba faktorizovat násobky jednotkové matice a můžeme tedy předpokládat, že determinant této matice je v absolutní hodnotě roven jedné. S malou nepřesností tedy lze za grupu transformací projektivního prostoru považovat grupu $\mathbf{SL(n+1,R)}$, je to grupa matic stupně $n+1$ s determinantem rovným jedné, nazývá se speciální lineární grupa.

(Malá nepřesnost je v tom, že determinat matice $-E$ může být plus nebo minus jedna podle parity dimenze)

## 3.1 Afinní geometrie

Vybereme-li nějakou podgrupu grupy $\mathbf{GL(n+1}, \Re)$, získáme geometrii, která má všechny vlastnosti projektivní geometrie, ale může získat další, které se sice projektivními transformacemi nezachovávají, ale naše vybraná podgrupa je zachovává. My se budeme zabývat pouze některými podgrupami. Nejjednodušší je z tohoto hlediska geometrie afinní, která se zabývá projektivními transformacemi, které zachovávají jednu pevnou nadrovinu.(Čím menší je grupa, tím více má geometrie vlastností, proto je nejjednodušší.)

Předpokládejme, že jsme si zvolili bázi $\mathcal{B} = \{e_0, ..., e_n\}$ ve $V_{n+1}$ a uvažujeme nadrovinu danou rovnicí $x_0 = 0$. Podívejme se, jak vypadají projektivní transformace, které tuto rovinu zachovávají. Buď $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matice projektivní transformace, kde $a \in \Re, b$ je řádek délky $n$, $c$ je sloupec délky $n$ a $d$ je matice stupně $n$. Je-li dále $\hat{u}$ vektor representující bod nadroviny $x_0 = 0$, je $\hat{u} = (0, u)^T$ kde $u$ je řádek délky $n$. Pro matici transformace zachovávající nadrovinu $x_0 = 0$ máme $m\hat{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bu \\ du \end{pmatrix}$. Vidíme, že $b = 0$ je nutná a postačující podmínka, pro to, aby matice $m$ zachovávala vybranou nadrovinu $x_0 = 0$. V takovém případě je $a \neq 0$ a můžeme tedy vynásobit matici vhodným koeficientem, aby bylo $a = 1$.

**Definice**. Obecnou afinní grupou stupně $n$ $\mathbf{GA(n, \Re)}$ nazýváme grupu matic stupně $n + 1$ tvaru $= \{m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & r \end{pmatrix}$, kde v prvním řádku je číslo 1 a nulový řádek, $t$ je sloupec $n$ čísel a $r$ je regulární matice stupně $n$ .

Tato grupa působí v části $\mathbf{P_n}$ bez nadroviny $x_0 = 0$ jako grupa transformací, tuto část nazýváme afinním prostorem dimenze $n$. Můžeme předpokládat že první souřadnice bodu je rovna jedné a tím se zbavíme homogenních souřadnic.

Přidáme-li k afinnímu prostoru vybranou nadrovinu $x_0 = 0$ (a nazveme ji nevlastní nadrovinou), dostáváme projektivní rozšíření afinního prostoru, což je projektivní prostor mající ještě další vlastnosti. Nebudeme tyto prostory rozlišovat.

Přirozenou realizací afinní geometrie je na příklad prostor $\Re^n$, kde grupa afinních transformací působí podle pravidla $x' = rx + t$, kde $x$ je bod a $x'$ je jeho obraz. Toto je hodně používaný způsob, jak se afinní geometrie definuje, zde se ovšem ztrácí přirozené působení maticové grupy ve vektorovém prostoru, které známe z lineární algebry.

Z tohoto hlediska je přirozenější realizovat afinní prostor jako podmnožinu v $\Re_{n+1}$ danou rovnicí $x_0 = 1$. Působení grupy transformací je pak přirozené.

Specializací matice $r$ dostáváme pak další geometrie, je-li determinant matice r roven jedné, dostáváme tzv. speciální afinní grupu $\mathbf{SA(n, \Re)}$, a ekviafinní geometrii. V této geometrii je možné definovat objem tělesa. Podobně dostaneme geometrii euklidovskou, jestliže $r$ je ortogonální matice, $r.r^T = E$, nebo geometrii ekviformní, jestliže platí $r.r^T = k^2E, k \neq 0$. V této geometrii neumíme rozlišit podobné útvary. Podobným způsobem lze definovat i Minkovského geometrii a některé další. Lobačevského geometrie není odvozena z afinní geometrie, bylo by třeba ji definovat jinak.

# 4 Projektivní transformace

Projektivní transformace (projektivita), je vzájemně jednoznačné zobrazení projektivního prostoru na sebe, které vznikne projekcí isomorfismu příslušného vektorového prostoru. Jak jsme ukázali v první kapitole, změní se matice isomorfizmu při změně báze v matici podobnou. Je-li $M$ matice daného isomorfizmu v nějaké bázi, je jeho matice v jiné bázi rovna matici $M' = Q^{-1}MQ$, kde Q je matice přechodu. Kanonické tvary matic vzhledem k podobnosti jsou Jordanovy kanonické tvary těchto matic. Takže klasifikace projektivit je dána klasifikací matic podle Jordanových tvarů, nesmíme ovšem zapomenout, že hledáme reálné Jordanovy tvary určené až na násobek a nemající nulu jako vlastní číslo. Jako příklad uvedeme projektivnosti na přímce a v rovině.

To znamená, že matice každé projektivní transformace se dá převést na reálný Jordanův kanonický tvar. Ne všechny Jordanovy kanonické tvary určují projektivní transformace, musejí to být regulární matice.

## 4.1 Projektivity na přímce

Jordanovy kanonické tvary regulárních matic stupně dva jsou tyto:

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$,

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$,

Pro projektivity na přímce tedy dostáváme následující případy:

a) $\lambda_1, \lambda_2$ reálná. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$,

Pro $\lambda \neq 1$ má projektivita dva různé samodružné body, pro $\lambda = 1$, je to identita.

b) $\lambda_1, \lambda_2$ imaginární. $\lambda_1 = \cos\phi + I\sin\phi, \lambda_2 = \cos\phi - I\sin\phi$.

$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi, \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, $\sin\phi \neq 0$.

Projektivita nemá samodružné body.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, projektivita má jeden samodružný bod.

Poslední změna je podle následujícího výpočtu:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$

Zajímavé jsou involuce tj. projektivity, které nejsou identity, ale jejich čtverec je identita. Podívejme se, které to jsou podle jednotlivých případů:

a) Zde musí být $\lambda^2 = 1$, tj. $\lambda = -1$, má dva samodružné body. Samodružné body, bod a jeho obraz tvoří harmonickou čtveřici. Involuce se nazývá hyperbolická.

b) Čtverec matice projektivity je

$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi, \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}$, musí tedy být $\sin 2\phi = 2\cos\phi \sin\phi = 0$, a tedy $\cos\phi = 0$, takže $\sin\phi = \pm 1$, a tedy

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Výsledná involuce nemá samodružné body, páry odpovídajících bodů se harmonicky oddělují. involuce se nazývá eliptická.

c) Neexistuje.

## 4.2 Projektivity v rovině

Pro matice třetího stupně máme následující Jordanovy kanonické tvary

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Ne všechny tyto matice mohou být maticemi projektivit. Jelikož se jedná o regulární matice, nesmí žádné vlastní číslo být rovné nule. Dále víme, že alespoň jedno vlastní číslo musí být reálné, dvě mohou být imaginární. To může nastat pouze v případě $J_1$, neboť v případě $J_2$ musí být $\lambda_2$ reálné a $\lambda_1$ také, protože pro imaginární bychom neměli komplexně sdružený blok.

Celkem tedy dostáváme následující případy (nad reálnými čísly):

**Poznámka**. Přímka se nazývá silně samodružná, jestliže každý její bod je samodružný a slabě samodružná v opačném případě. Podobně bod se nazývá silně samodružný, jestliže přímky tímto bodem procházející jsou samodružné a nazývá se slabě samodružný v opačném případě.

Nyní rozebereme jednotlivé případy.

$$J_{1a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 1, \lambda_1\lambda_2 \neq 0$$

To je obecná projektivnost, má tři slabě samodružné body a tři slabě samodružné přímky.

$$J_{1b} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b \neq 0$$

Tato projektivita má jeden slabě samodružný bod a jednu slabě samodružnou přímku.

$$J_{1c} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \neq 1, \lambda \neq 0,$$

To je tzv. perspektivní kolineace, její vlastnosti popíšeme později. Má jednu silně samodružnou přímku a jeden silně samodružný bod.

$$J_{1d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To je identita.

$$J_{2a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \lambda \neq 0, \lambda \neq 1$$

Tato projektivita má dvě slabě samodružné přímky a dva slabě samodružné body.

$$J_{2b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tato projektivita má podobné vlastnosti jako perspektivní kolineace, ale její střed leží na její ose. Má silně samodružný bod a silně samodružnou přímku a pak ještě nekonečně mnoho slabě samodružných bodů a slabě samodružných přímek.

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tato projektivita má jednu slabě samodružnou přímku a jeden slabě samodružný bod.

Je jasné, že každá afinita nebo shodnost patří k některému typu těchto transformací, doplníme-li totiž afinní rovinu do projektivně rozšířené projektivní roviny, musíme dostat projektivitu, která patří k některému z uvedených typů. To necháme na čtenáři, aby si to zkusil.

Pro lepší názornost se podíváme, jestli se uvedené typy projektivit dají realizovat v některé ze speciálních geometrií. Vidíme, že každá projektivita v rovině zachovává alespoň jednu přímku. Vezmeme-li ji jako přímku nevlastní, můžeme každou projektivnost realizovat jako afinní zobrazení ve vhodném projektivním rozšíření afinní roviny.

**Poznámka.** Zde se opíráme o některé speciální vlastnosti roviny. Pro libovolnou dimenzi uvedené úvahy neplatí. V liché dimenzi nemusí mít matice projektivity žádné reálné vlastní číslo, takže nemusí mít žádný samodružný bod, ani samodružnou rovinu. Zde využíváme toho, že algebraická rovnice třetího stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Předpokládejme, že ve $V_3$ patřícímu projektivní rovině máme bázi odpovídající Jordanově kanonickému tvaru, která v projektivní rovině určuje body $\{A_0, A_1, A_2\}$. Bod $A_0$ je počátek soustavy souřadnic, $A_1, A_2$ jsou nevlastní body na souřadnicových osách $x$ a $y$, přímka $A_1 A_2$ je nevlastní.

Začneme případem $J_{1b}$, protože ten je jednodušší, než $J_{1a}$. Matici projektivity přepíšeme ve vhodnějším tvaru, dosadíme $a = k\cos(u), b = k\sin(u)$ a dostaneme

$$\tilde{J}_{1b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k\cos(u), & k\sin(u) \\ 0 & -k\sin(u) & k\cos(u), \end{pmatrix}$$

kde $k > 0, \sin(u) \neq 0$. Tato transformace je tedy složení otočení kolem počátku se stejnolehlostí se středem v počátku, specielně pak otočení kolem počátku pro $k = 1$.

Podobně pro $J_{1a}$ dostáváme matici

$$\tilde{J}_{1a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k\cosh(u), & k\sinh(u) \\ 0 & k\sinh(u) & k\cosh(u), \end{pmatrix}$$

která má podobný Jordanův tvar a tedy máme podobnou transformaci jako v předchozím případě, ale pro Minkovského geometrii, která má místo kružnic hyperboly. Touto geometrií se nebudeme zabývat.

Matici pro $J_{1c}$ přepíšeme do tvaru

$$\tilde{J}_{1c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 1, \lambda \neq 0.$$

Vidíme hned, že je to stejnolehlost se středem v počátku. To znamená, že nevlastní přímka je silně samodružná a přímky procházející počátkem jsou slabě samodružné. To znamená, že je také možné za nevlastní přímku vzít slabě samodružnou přímku, na příklad přímku $A_0A_1$. Matici se pak změní na následující tvar.

$$\tilde{J}_{1c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 1, \lambda \neq 0.$$

(Zaměnili jsme třetí řádek a sloupec s prvním a dělili matici číslem $\lambda$.) Dostaneme osovou afinitu s osou v ose $x$ která zachovává přímky rovnoběžné s osou $y$, směr afinity je rovnoběžný s osou $y$.

V případě $2a$ máme opět dvě možnosti, máme dvě slabě samodružné přímky, nejsou však rovnocenné. Vezmeme-li za nevlastní přímku přímku $A_1A_2$ jako na začátku, dostaneme

$$\tilde{J}_{2a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 1, \lambda \neq 0.$$

Osová afinita se směrem rovnoběžným s její osou se nazývá elace. Dostáváme tedy stejnolehlost se středem v počátku složenou s elací s osou v ose $x$.

Vezmeme-li za nevlastní přímku přímku $A_1A_0$, přepíše se matice do tvaru

$$\tilde{J}_{2aa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 1, \lambda \neq 0.$$

Dostáváme osovou afinitu z případu $1c$, složenou s translací podél osy afinity, na pořadí nezáleží.

Nyní dostáváme speciální případ případu $2a$, postupujeme obdobně. Vezmeme-li za nevlastní přímku přímku $A_1A_2$, (jako u $\tilde{J}_{1c}$) bude

$$\tilde{J}_{2b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Dostáváme zvláštní případ elace, přímky rovnoběžné s osou elace jsou samodružné.

Vezmeme-li za nevlastní přímku přímku $A_1A_0$, přepíše se matice do tvaru

$$\tilde{J}_{2bb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix},$$

To je translace ve směru osy $x$.

Případ 3 je speciální, vezmeme za nevlastní přímku samodružnou přímku $A_1A_0$. (Jako nahoře zaměníme první a třetí řádek a sloupec.) Matice se změní na

$$\tilde{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1. \end{pmatrix},$$

Výsledek je složení elace s translací ve směru odpovídajících si bodů. Tím jsme vyčerpali všechny případy.

## 4.3 Jednoparametrické podgrupy

Pro znázornění a procvičení základních projektivních transformací se budeme zabývat jednoparametrickými podgrupami transformací projektivní roviny. Jednoparametrická podgrupa je netriviální diferencovatelná křivka $g(t)$ na grupě projektivních transformací roviny, která dává isomorfismus jednoparametrické grupy na aditivní grupu reálných čísel. To znamená, že pro všechna reálná $r, s$ platí $g(r)g(s) = g(r+s)$. Z toho speciálně plyne, že $g(0) = E, g(-t) = g(t)^{-1}$. Trajektorie takové podgrupy se reprodukují tj. $g(t)(g(r)X) = g(t+r)X$ pro trajektorii libovolného bodu $X$. Jednoparametrické grupy jsou komutativní, protože $g(r+s) = g(r)g(s) = g(s)g(r)$. Význam těchto podgrup si uvědomíme, že v euklidovské geometrii v rovině jsou pouze dvě jednoparametrické podgrupy a to otáčení kolem pevného bodu a posunutí v daném směru. Nalézt všechny jednoparametrické projektivní podgrupy není obtížné. Stačí si uvědomit, že trajektorie takové podgrupy jsou řešeními lineární soustavy diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a tato řešení lze najít na počítači. Je totiž pro trajektorii $X(r) = g(r)X_0$ libovolného bodu $X_0$

$$X'(r) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[g(r+h) - g(r)]X_0 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[g(h)g(r) - g(r)]X_0 =$$

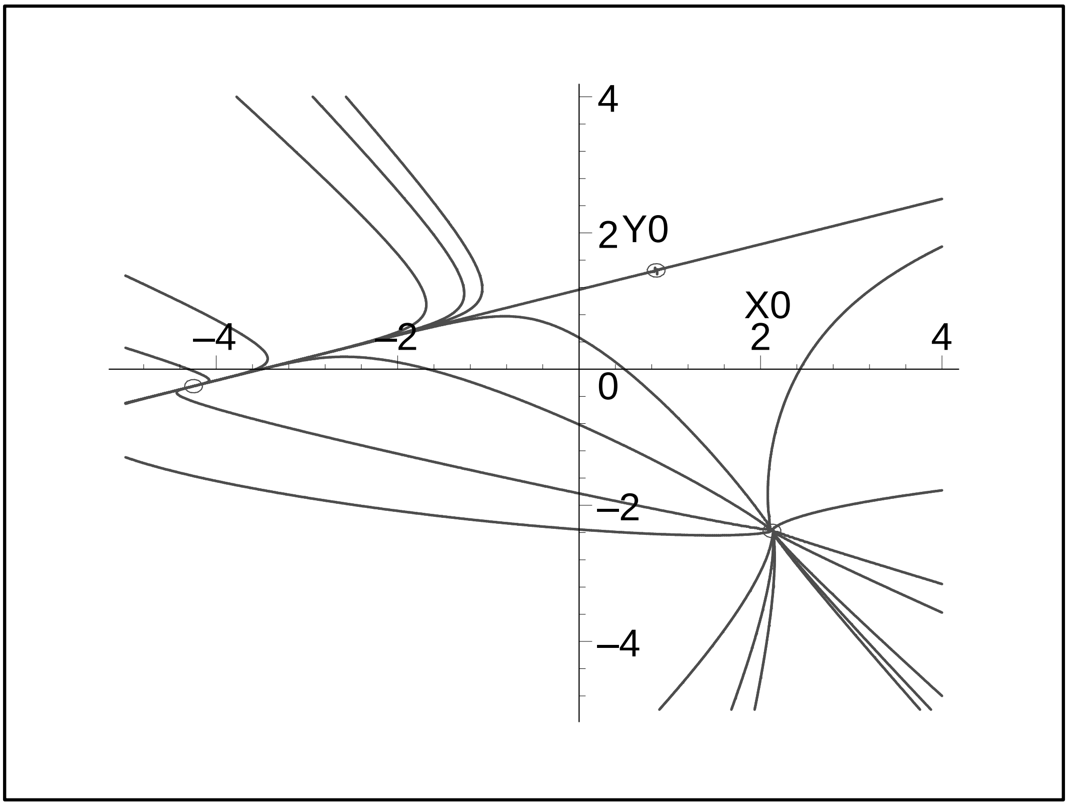
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[g(h) - E]g(r)X_0 = g'(0)X(r).$$

Označíme-li $g'(0) = T$ bude $X = TX$ ve všech bodech. $T$ budeme nazývat operátorem rychlostí v analogii s rovinným případem. Můžeme předpokládat, že operátor $T$ má nulovou stopu, protože $g(t)$ můžeme vynásobit vhodnou funkcí, aby determinant $g(t)$ byl roven jedné a derivace pro $t = 0$ pak dává nulovou stopu. Uvedeme si dva příklady.

1. Příklad. Uvedeme nejjednodušší případ tří nenulových různých reálných vlastních čísel.

Buď $T = diag(1, 2, -3)$. Pak $g(t) = diag(\exp(t), \exp(2t), \exp(-3t))$ a trajektorie libovolného bodu $X = (x_0, y_0, z_0)$ má parametrické vyjádření $X(t) = (\exp(t)x_0, \exp(2t)y_0, \exp(-3t)z_0)$. Po změně parametru $\exp(t) = s$ to bude $X(s) = (sx_0, s^2y_0, s^{-3}z_0)$.

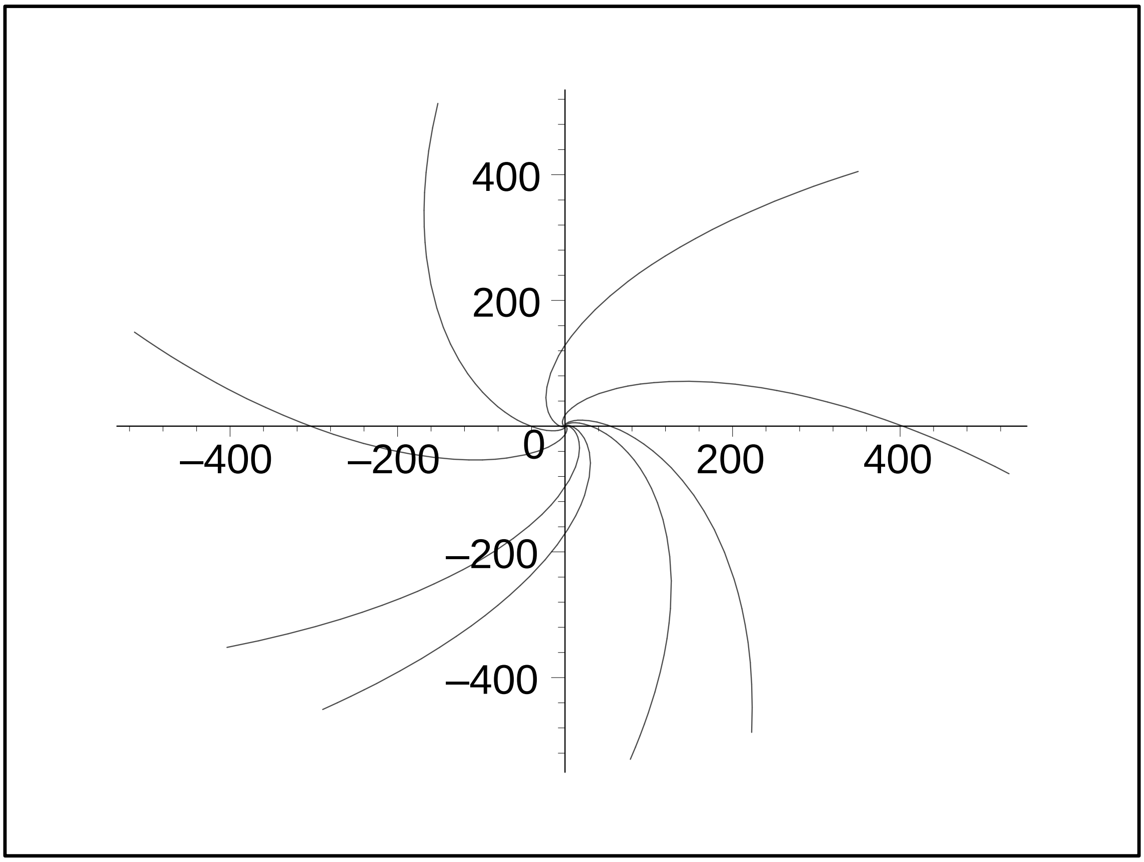
Na následujícím obrázku je znázorněno několik trajektorií bodů uvedené jednoparametrické podgrupy. Samodružné body jsou označeny kroužkem.



2. Příklad. Případ s imaginárním vlastním číslem.
$T = diag(-4, 2+3I, 2-3I)$. Pak

$$g(t) = \exp(2t) \begin{pmatrix} \exp(-6t) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(3t) & \sin(3t) \\ 0 & -\sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}.$$

Na následujícím obrázku je několik trajektorií této podgrupy. Imaginární samodružné body jsou na nevlastní přímce, která je samodružná, zobrazení je tedy v afinní rovině a proto je mnohem jednodušší, než v předešlém případě.




## 4.4 Perspektivní kolineace v $P_n$

V praxi se často používá perspektivní kolineace, což je kolineace s jednou silně samodružnou rovinou a jedním silně samodružným bodem. Užívá se například při tvorbě perspektivního reliefu. Vlastnosti této kolineace se snadno rozšíří na vícedimensionální případ.

Uvažujme tedy perspektivitu v $\mathbf{P_n}$, která má ve vhodné bázi matici

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

kde $E$ je jednotková matice stupně $n$ a $\lambda \in \Re$, $\lambda \neq 1, \lambda \neq 0$, zbytek jsou nuly.

Vidíme téměř ihned, že bod $A_0 = (1, 0, ..., 0)$ je samodružný a nadrovina $x_0 = 0$ je také samodružná.

Je-li dále $X = (x_0, x_1, ..., x_n)$ libovolný bod, je jeho obrazem v dané projektivitě bod $X' = (\lambda x_0, x_1, ..., x_n)$. To znamená, že jestliže bod ležící v nadrovině procházející bodem $A_0$ splňuje rovnici tvaru $\Sigma_{i=1}^{n} a_i x_i$, splňuje ji i jeho obraz v této projektivitě. Podobně každý bod v samodružné rovině je samodružný.

Ukažme ještě jaký je geometrický význam vlastního čísla $\lambda$. Uvažujme bod $Y$, který je průsečíkem přímky $A_0X$ se samodružnou nadrovinou $x_0 = 0$. Na této přímce leží také bod $X'$. Jelikož dva body přímky $A_0X$ jsou samodružné, je i celá přímka samodružná. Spočtěme dvojpoměr bodů $A_0, Y, X, X'$. Buď $i-$tá souřadnice bodu $X$ nenulová, $i > 0$, taková jistě existuje. Pak souřadnice bodů $A_0, Y, X, X'$ na spojnici procházející $i$-tým souřadnicovým bodem budou po řadě $(1, 0), (0, 1), (x_0, x_i), (\lambda x_0, x_i)$. Jako jejich dvojpoměr vychází číslo $\lambda$.

Takovou kolineaci nazýváme perspektivní kolineací. I ve vícedimensionálním prostoru je určena samodružnými elementy (střed neleží v samodružné nadrovině) a párem odpovídajících si bodů. Známe-li jeden takový pár (označme jej $X, X'$), pak pro každý bod $Z$ najdeme jeho obraz v rovině určené body $X, X', Z$ obvyklým způsobem.

# 5 Kvadriky

## 5.1 Definice kvadriky a její kanonický tvar

Je-li $F(x, y)$ bilineární forma, $\mathcal{B} = \{e_0, ..., e_n\}$ báze a $A$ její matice, je její matice v jiné bázi s maticí přechodu $P$ rovna matici $B = P^T AP$. Ukážeme, jak lze pomocí vhodné matice přechodu převést matici kvadratické formy na diagonální tvar. Převedení provedeme postupně podle počtu proměnných.

Napišme matici $A$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^T & \alpha \end{pmatrix},$$

kde předpokládáme, že $a_{11} \neq 0$, a tudíž je možné ho vytknout, což jsme učinili. Pak pro

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

máme $B = P^T A P$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Zde $a = (a_{12}, ..., a_{1n})$, a $\alpha, \beta$ jsou symetrické matice.

Je-li v matici $A$ stupně 2 $a_{11} = 0, a_{22} = 0$, využijeme toho, že pro

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, a \in \Re$$

máme pro

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = P^T A P = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix},$$

a problém zmizí.

**Definice.** Buď $V_{n+1}$ aritmetický základ projektivního prostoru $P_n$. Je-li $F(x,x)$ kvadratická forma na $V_{n+1}$, pak množina bodů v $P_n$, jejichž aritmetičtí zástupci splňují rovnici $F(x,x) = 0$ se nazývá kvadrika určená kvadratickou formou $F$, označme ji $Q$. V rovině se kvadrika nazývá kuželosečka. Matice kvadratické formy se nazývá maticí kvadriky, její determinant se nazývá diskriminant kvadriky, její hodnost je hodnost kvadriky (předpokládáme, že je to alespoň jedna).

Tyto pojmy nezávisejí na volbě matice kvadriky ani na volbě báze, protože matice kvadriky je určena až na nenulovou konstantu a matice přechodu je regulární maticí, takže při násobení touto maticí se hodnost zachová.

Je-li matice kvadriky regulární, nazývá se kvadrika regulární, v opačném případě se nazývá singulární.

**Poznámka.** Všimněme-si, že body kvadriky nemusejí vždy určovat příslušnou kvadratickou formu, například je li to kuželosečka $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ resp. $x_0^2 + x_1^2 = 0$. Vidíme ihned, že například $x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 = 0$ resp. $x_0^2 + 7x_1^2 = 0$ určují stejnou kuželosečku, tj. prázdnou množinu resp. bod $(1, 0, 0)$. Touto otázkou se nebudeme dále zabývat, budeme vždy předpokládat, že s kvadrikou je dána i její kvadratická forma (určená až na násobek).

**Příklad.**

Kuželosečky jsou:

a) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, imaginární kuželosečka (regulární), též formálně reálná.

b) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, reálná regulární kuželosečka (kružnice).

c) $x_0^2 + x_1^2 = 0$, bod $(1, 0, 0)$

d) $x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$, dvě různoběžky

e) $x_0^2 = 0$, přímka $x_0 = 0$.

## 5.2 Polární vlastnosti kvadrik

**Definice** Body $X, Y \in P_n$ se nazývají polárně sdružené vzhledem ke kvadrice $Q$ určené kvadratickou formou $F$, jestliže platí $F(x, y) = x^T F y = 0$, kde $\pi(x) = X, \pi(y) = Y$ a matici kvadriky označíme stejným písmenem. Toto označení budeme užívat i nadále, arimetický zástupce bodu označeného velkým písmenem bude označen stejným malým písmenem.

Je zřejmé, že je-li bod $X$ polárně sdružen s body $X_1, ..., X_s$, je sdružen i se všemi jejich lineárními kombinacemi, to znamená, že se všemi body podprostoru, který tyto body vytvářejí. Je totiž $F(x, \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_s f x_s) = \lambda_1 F(x, x_1) + ... + \lambda_s F(x, x_s) = 0$, $\lambda_i \in \Re$. Ještě si všimněme, že vlastnost polární sdruženosti je symetrická.

**Definice** Bod $Y$ nazveme singulárním bodem kvadriky $Q$, jestliže je polárně sdružen se všemi body prostoru. Ostatní body se nazývají regulární.

Jelikož singulární bod kvadriky je polárně sdružen se všemi body prostoru, je polárně sdružen i sám se sebou, platí $y^T F y = 0$, což znamená, že $Y \in Q$. Z podmínky $x^T F y = 0$, která má platit pro všechna $x$, dostáváme soustavu rovnic pro singulární body ve tvaru $Fy = 0$.

To znamená, že množina všech singulárních bodů kvadriky je podprostor dimenze $n - h$, kde $h$ je hodnost kvadriky, tj. hodnost matice $F$. Je-li totiž $h$ hodnost matice kvadriky, je řešení rovnice $Fy = 0$ podprostor ve $V_{n+1}$, který má dimenzi $n + 1 - h$ a ten se promítá do $P_n$ jako podprostor dimenze $n - h$.

Podprostor všech singulárních bodů kvadriky se nazývá vrchol kvadriky a označíme jej $V(Q)$.

Je-li kvadrika regulární, je hodnost $F$ rovna $n+1$, její vrchol je prázdná množina (a má dimenzi $-1$).

**5.2.1.Věta** Buď $Y$ bod kvadriky $Q$. Pak podprostor generovaný $V(Q)$ a bodem $Y$ patří ke kvadrice.

**Důkaz** Buď $X$ singulární bod kvadriky. každý bod $Z$ přímky spojující body $X$ a $Y$ má parametrické vyjádření $z = \alpha x + \beta y$ a platí

$z^T F z = (\alpha x + \beta y)^T F(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 x^T F x + 2\alpha\beta x^T F y + \beta^2 y^T F y = 0,$
protože všechny tři sčítance jsou nulové.

**Poznámka.** Buď $Q$ kvadrika a $S_r$ libovolný podprostor v $P_n$. Pak $Q \cap S_r$ buďto patří ke kvadrice, nebo je to opět kvadrika, jejíž vyjádření získáme dosazením rovnic podprostoru do vyjádření kvadriky. Můžeme předpokládat, že $S_r$ je dáno rovnicemi $x_{r+1} = 0, ..., x_n = 0$. Dosazením těchto rovnic do rovnice kvadriky dostáváme kvadriku v $S_r$ nebo triviální rovnici, což znamená, že podprostor patří ke kvadrice.

Ukážeme, že každá singulární kvadrika se dá chápat jako zobecněná kuželová plocha tj. že se skládá z podprostorů, které spojují jeden bod kvadriky s jejím vrcholem. To ale neznamená, že na kvadrice nemohou ležet podprostory vyšší dimenze, jak ještě uvidíme.

**Definice** Průnik podprostoru doplňkového k vrcholu kvadriky se nazývá podstava kvadriky.

**5.2.2.Lemma** Podstava kvadriky je regulární kvadrika (ve svém podprostoru tj. podprostoru doplňkovém k vrcholu).

**Důkaz** Nechť kvadrika má signaturu $p, q, r$, $p + q + r = n + 1$. Zvolme, bázi $\mathcal{B} = \{e_0, ..., e_n\}$ tak, aby vektory $e_{n-r}, ..., e_n$ tvořily bázi vrcholu. Matice kvadriky má potom tvar

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix},$$

kde $f$ je regulární matice stupně $p + q + 1$. To je matice kvadriky v prostoru dimenze $p + q$, tj. kvadrika je v tomto prostoru regulární.

**5.2.3.Věta** (Strukturální věta pro kvadriky.) Každá kvadrika sestává z podprostorů, které spojují bod podstavy s vrcholem.

**Důkaz** Věta je přímým důsledkem věty 5.2.1 a Lemmatu 5.2.2.

**Poznámka.** Předchozí věta říká, že každá kvadrika v $n-$ rozměrném prostoru je zobecněnou kuželovou plochou, místo površek, na které jsme zvyklí u kuželové plochy v třírozměrném prostoru máme obecně podprostory vyšší dimenze. Věta ovšem v sobě zahrnuje též triviální případy. Ty nastávají, když vrchol kvadriky nebo podstava kvadriky je prázdná množina. Pak nemáme co spojovat.

Je-li vrchol prázdná množina, je kvadrika regulární. Je-li podstava kvadriky prázdná, je to proto, že je to kvadrika $F(x,x) = x_0^2 + ... + x_p^2 = 0$. Taková kvadrika je v prostoru dimenze $p+1$ formálně reálná, protože má reálnou rovnici a žádné reálné body. V takovém případě celá kvadrika sestává pouze z vrcholu.

Celkem můžeme říct, že v obecném případě jsou zajímavé kromě regulárních kvadrik kvadriky hodnosti o jednu menší než maximální. Taková kvadrika nejlépe vyhovuje představě kuželové plochy, má jako vrchol jeden bod a každý bod podstavy je spojen s tímto vrcholem jednou površkou. Všimněmě si ještě, že kvadrikou může být jakýkoliv podprostor projektivního prostoru jako vrchol kvadriky, jejíž podstava je formálně reálná.

**Definice** Buď $Q$ regulární kvadrika. Lineárně nezávislá skupina $n+1$ bodů $\{A_0, ..., A_n\}$ se nazývá polární simplex kvadriky $Q$, jestliže každý bod této skupiny je polárně sdružen se zbývajícími.

Z definice ihned plyne, že žádný z bodů polárního simplexu neleží na kvadrice $Q$.

**5.2.4.Věta** Polární simplexy existují.

**Důkaz** Zvolme libovolný bod mimo kvadriku, označme jej $A_0$, a libovolného jeho aritmetického zástupce zvolme za první vektor báze. Bázi pak doplníme pomocí dalších libovolných vektorů polárně sdružených s bodem $A_0$. V této bázi pro kvadriku $Q$ dostáváme

$$F(X,Y) = (1,0)\begin{pmatrix} a_{00} & a^T \\ a & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix} = a_{00}y_0 + a^T y = 0,$$

kde $a_{00}, y_0$ jsou čísla, $a, y$ sloupce $n$ čísel a $M$ matice stupně $n$. Jelikož bod $A_0$ není bodem kvadriky, je nutně $a_{00} \neq 0$. Vzhledem k tomu, že každý bod $Y_i = (0,0,...,y_i,0...,0), y_i = 1, i = 1,...,n$ je polárně sdružen s bodem $A_0$, je $a_i = 0, i = 1,...,n$. Matice kvadriky je tedy tvaru

$$F(X,Y) = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

$M$ je regulární a pokračujeme indukcí.

**Poznámka** Všimněme si, že pro sestrojení polárního simplexu máme poměrně dost velikou libovůli pro volbu bodů báze. Zvolíme-li aritmetické zástupce bodů polárního simplexu jako vektory báze, bude mít kvadratická forma kvadriky diagonální tvar.

## 5.3 Tečny a tečné nadroviny

**Definice** Buď $P = (p_0, ..., p_n)$ libovolný bod, který není singulárním bodem kvadriky $F$. Množina všech bodů polárně sdružených s bodem $P$ vzhledem ke kvadrice $F$ je nadrovina, kterou nazýváme polární nadrovinou bodu $P$ vzhledem k $F$. Bod $P$ je pólem této nadroviny vzhledem k $F$.

Vyjádření polární nadroviny je dáno rovnicí

$$p^T.F.x = (p_0, ..., p_n) \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0n} \\ f_{01} & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{0n} & f_{1n} & \cdots & f_{nn}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

což po úpravě znamená

$$(f_{00}p_0 + ... + f_{0n}p_n)x_0 + ... + (f_{0n}x_0 + ... + f_{nn}p_n)x_n = 0.$$

Vidíme, že aspoň jedna závorka je nenulová právě tehdy, není-li $P$ singulární bod.

Koeficienty polární nadroviny bodu $P$ jsou tedy dány řádkem $p^T.F$, sloupec $x$ jsou proměnné v této rovnici.

**Poznámka** Všimněme si, že polární nadrovina vždycky obsahuje vrchol kvadriky.

**5.3.1. Věta** Buďte $X, Y$ polárně sdružené vzhledem ke kvadrice $F$ a nechť na ní neleží. Nechť dále přímka spojující tyto dva body protíná kvadriku ve dvou různých bodech $M, N$. Pak se dvojice $X, Y$ a $M, N$ harmonicky oddělují.

**Důkaz**. Buď $Z = \alpha X + \beta Y$ přímka spojující body $X$ a $Y$. Pak pro její průsečíky s kvadrikou máme $F(Z, Z) = F(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = \alpha^2 F(X, X) + \beta^2 F(Y, Y) = 0$. Pak $\alpha = \pm\beta\sqrt{(} - F(Y, Y)/F(X, X))$. Zřejmě $F(X, X)$ a $F(Y, Y)$ musí mít různá znamení.

**Důsledek**. Z věty plyne též, že involutorní perspektivní kolineace se středem v bodě $X$ a samodružnou nadrovinou v polární nadrovině tohoto bodu zachovává kvadriku $F$.

**Definice** Nechť přímka $p$ neleží ve vrcholu kvadriky $F$. Pak $p$ se nazývá tečnou kvadriky $F$, jestliže buďto leží na kvadrice, nebo má s kvadrikou společný právě jeden bod, který je regulární. Tento bod se nazývá bodem dotyku.

**Poznámka.** Tečna kvadriky může obsahovat singulární bod kvadriky, ale jenom jeden. Kdyby totiž obsahovala dva, byla by to přímka singulárních bodů a patřila by do vrcholu. Tečna v singulárním bodě kvadriky musí ležet na kvadrice, neboť kdyby to tak nebylo, musela by protínat kvadriku v jednom singulárním a v jednom regulárním bodě a to nejde.

**Poznámka.** Polární nadrovina bodu na kvadrice tímto bodem prochází, protože bod kvadriky je sdružen sám se sebou.

**5.3.2. Věta** Buď $T$ regulární bod kvadriky $F$. Pak všechny tečny kvadriky s bodem dotyku $T$ leží v polární nadrovině tohoto bodu a všechny přímky této nadroviny procházející bodem dotyku jsou tečnami kvadriky.

**Důkaz**. Buď $X = \alpha T + \beta Y$ tečna kvadriky $F$. Pak pro průsečíky přímky $X$ s kvadrikou platí $F(X, X) = F(\alpha T + \beta Y, \alpha T + \beta Y) = \alpha^2 F(T, T) + \beta^2 F(Y, Y) + 2\alpha\beta F(T, Y) = 0$. Vzhledem k tomu, že $T$ leží na kvadrice, máme $F(T, T) = 0$. To znamená, že je $\beta(\beta F(Y, Y) + 2\alpha F(T, Y)) = 0$. Pro $\beta = 0$ máme jeden průsečík. Musí být $F(Y, Y) \neq 0$, protože v opačném případě by tečna měla dva průsečíky s kvadrikou a ležela by tedy na kvadrice podle definice tečny. Je tedy $\beta = \alpha F(T, Y)/F(Y, Y)$. Je-li $\alpha = 0$, je i $\beta = 0$, což není možné, alespoň jeden z koeficientů lineární kombinace musí být nenulový. Druhý průsečík je tedy totožný s bodem $T$ právě tehdy, když $F(T, Y) = 0$.

Obráceně, jestliže je $F(T, Y) = 0$, je $F(X, X) = F(\alpha T + \beta Y, \alpha T + \beta Y) = \beta^2 F(Y, Y) = 0$, je buďto $\beta = 0$, nebo je celá přímka na kvadrice.

**Definice** Polární nadrovina v (regulárním) bodě kvadriky se nazývá tečná rovina.

Podle předchozího víme, že tečná nadrovina vždycky obsahuje vrchol kvadriky,

**5.3.3. Věta** Buď $F$ regulární kvadrika, $X$ nechť je bod, který na ní neleží. Označíme-li $F_X$ průnik polární nadroviny $p(X)$ bodu $X$ vzhledem k $F$ s kvadrikou $F$, pak $F_X$ je regulární kvadrika v $p(X)$ tj. má hodnost $n$. Spojnice bodu $X$ s body kvadriky $F_X$ je tečna kvadriky $F$. Množina všech těchto tečen vytvoří singulární kvadriku s vrcholem v bodě $X$ a podstavou $F_X$ hodnosti $n$.

Kvadrika z předchozí věty se nazývá tečná kuželová nadplocha kvadriky $F$ v bodě $X$.

**Důkaz.** $F(X, Y) = 0$ je rovnice polární nadroviny bodu $X$, v proměnných $Y$. Je-li $Y$ bod kvadriky $F$, máme navíc $F(Y, Y) = 0$. Pro každý bod $Z$ přímky $Z = \alpha X + \beta Y$ pak máme $F(Z, Z) = F(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = \alpha^2 F(X, X) = 0$

je možné pouze pro $\alpha = 0$, neboť $F(X, X)$ není rovno nule. To znamená, že spojnice bodu $X$ s bodem kvadriky $F_X$ je tečnou kvadriky $F$.

Obráceně, rovnice $F(Z, Z) = F(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = \alpha^2 F(X, X) + 2\alpha\beta F(X, Y) + \beta^2 F(Y, Y) = 0$ má určovat tečnu v bodě $Y$. Je tedy $F(Y, Y) = 0$, a $\alpha$ má být dvojnásobným kořenem této rovnice. Jelikož $F(X, X) \neq 0$, je $F(X, Y) = 0$ a přímka leží na dotykové kuželové ploše. Zbývá ukázat, že kvadrika $F_X$ má hodnost $n$. Zvolme soustavu souřadnic tak, že zástupce bodu $X$ je první vektor báze a zbývající vytvářejí polární nadrovinu tohoto bodu. Matice kvadratické formy je tvaru

$$F = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

kde $a_{00}$ je číslo a $M$ je matice stupně $n$. Pak máme $X^T F X = a_{00}$. Bod $X$ podle předpokladu není bodem kvadriky, což znamená, že $a_{00}$ se nerovná nule. Z toho plyne, že $M$ je regulární. Tím je tvrzení dokázáno.

**Poznámka.** Všimněme si, že je-li podstava dotykové kuželové plochy prázdná, dotyková kuželová plocha sestává pouze z vrcholu.

**5.3.4.Věta** Tečná nadrovina protíná regulární kvadriku v singulární kvadrice (vzhledem k tečné nadrovině) hodnosti $n - 1$, bod dotyku je její vrchol.

**Důkaz** Buď $X$ bod na kvadrice. Zvolme bázi z polárního simplexu tak, aby bod $X$ ležel na přímce spojující body $A_0$ a $A_1$. To lze, zvolíme-li $A_0$ libovolně mimo kvadriku, pak přímka spojující body $X$ a $A_0$ musí protnout polární nadrovinu bodu $A_0$. Kvadrika pak má matici $F = Diag(a_0, ..., a_n)$, s nenulovými prvky na hlavní diagonále. Nechť bod $X$ má souřadnice $(r, s, 0, ..., 0)$. Pak máme $a_0 r^2 + a_1 s^2 = 0$.

Polární nadrovina bodu $X$ má rovnici

$$F(X, Y) = (r, s, 0) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} (y_0, y_1, y)^T = r a_0 y_0 + s a_1 y_1 = 0,$$

kde $y = (y_2, ..., y_n)$. Je tedy $y_0 = -s a_1 y_1 / (r a_0)$.

Kvadrika v polární nadrovině tedy má rovnici

$F(Y, Y) = a_0 y_0^2 + a_1 y_1^2 + ... + a_n y_n^2 = a_1 y_1^2 (a_0 r^2 + a_1 s^2)/(r^2 a_0) + a_2 y_2^2 + ... + a_n y_n^2 = a_2 y_2^2 + ... + a_n y_n^2$. Tím je důkaz dokončen.

## 5.4 Maximální podprostory na kvadrice

**5.4.1.Věta**. Buď $F$ kvadrika signatury $(p, q, r)$, kde $p \geq q, p + q + r = n + 1$.

Pak

1)největší dimenze podprostoru neprotínajícího kvadriku je rovna $p-1$,

2) největší dimenze podprostoru ležícího na kvadrice je rovna $q+r-1=n-p$.

**Důkaz.** Buď $F$ v kanonickém tvaru $F = x_0^2+...+x_{p-1}^2-x_p^2-...-x_{p+q-1}^2$. Pak

$\alpha$) dokážeme existenci:

Podprostor $R$ daný rovnicemi $x_p = 0, ...., x_n = 0$, nemá společný žádný bod s kvadrikou $F$ a má dimenzi $\dim(R) = p-1$, protože je určen $n-p+1$ rovnicemi, takže jeho aritmetický základ má dimenzi $n+1-(n-p+1) = p$.

Rovnici kvadriky přepíšeme ve tvaru

$F = (x_0^2 - x_p^2) + (x_1^2 - x_{p+1}^2) + ... + (x_{p-1}^2 - x_{p+q-1}^2) + (x_{q-1}^2 - x_{p+q-1}^2) + x_q^2 + ... + x_n^2 =$

$(x_0 - x_p)(x_0 + x_p) + (x_1 - x_{p+1})(x_1 + x_{p+1}) + ... + (x_{q-1} - x_{p+q-1})(x_{q-1} + x_{p+q-1}) + x_q^2 + ... + x_n^2 = 0.$

Podprostor $S$ o rovnicích

$x_0 = x_p, ..., x_{q-1} = x_{p+q-1}, x_q = 0, ..., x_{p-1} = 0$

leží na kvadrice. Máme pro něj $q + (p-q) = p$ rovnic, což znamená, že jeho vektorový základ má dimenzi $n+1-p = p+q+r-p = q+r$.

$S$ má tedy dimenzi $n-p = q+r-1$.

$\beta$) dokážeme maximálnost:

a) Buď $\tilde{R}$ takový podprostor, že $\dim \tilde{\geq} p$ a nemá žádný společný bod s kvadrikou. Pak $\dim(\tilde{R} \cap S) + \dim(\tilde{R} \uplus S) = \dim(\tilde{R}) + \dim(S)$. Protože $\dim(\tilde{R}) + \dim(S) \geq n$, je i $\dim(\tilde{R} \cap S) + \dim(\tilde{R} \uplus S) \geq n$. Jelikož $\dim(\tilde{R} \uplus S)$ je nejvýše $n$, je $\dim(\tilde{R} \cap S) \geq 0$ a to je spor, jelikož jeden z těchto podprostorů nemá společné body s kvadrikou a druhý leží na kvadrice.

b) Buď $\tilde{S}$ podprostor ležící na kvadrice a nechť $\dim(\tilde{S}) > n-p$. Pak $\dim(\tilde{S} \cap R) + \dim(\tilde{S} \uplus R) = \dim(\tilde{S}) + \dim(R)$. Protože $\dim(\tilde{S}) + \dim(R) \geq n$, je i $\dim(\tilde{S} \cap R) + \dim(\tilde{S} \uplus R) \geq n$ Jelikož $\dim(\tilde{S} \uplus R)$ je nejvýše $n$, je $\dim(\tilde{S} \cap R)$ alespoň rovna nule, tj. průnik $\tilde{S}$ a $R$ je neprázdný, a to je spor.

**Poznámka**. Z konstrukce podprostoru $S$ ihned vidíme, že na kvadrice leží dvě soustavy lineárních podprostorů.

**Příklad**. Abychom měli kvadriku se dvěma soustavami lineárních podprostorů, musí mít kanonický tvar matice kvadriky alespoň dvě znaménka minus. Takže nejjednodušší je případ $F = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, známý případ jednodílného hyperboloidu (v afinní verzi). Kvadrika se stejnou rovnicí v $P_4$ má na sobě dva systémy rovin, které všechny procházejí vrcholem kvadriky, zatímco kvadrika $F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ v témže prostoru má pouze jednodimensionální podprostory.

## 5.5 Projektivní klasifikace kvadrik

Projektivní klasifikace kvadrik je popsána klasifikací kvadratických forem, můžeme tedy předpokládat, že matice kvadriky je v kanonickém tvaru. Podle základní strukturální věty pro kvadriky víme, že každá kvadrika je určena jednoznačně svým vrcholem a podstavou. Vrchol je podprostor projektivního prostoru a má tedy jedinou charakteristiku, a to je dimenze. Podstava je regulární kvadrika. Je tedy každá kvadrika plně charakterizována dimenzí vrcholu a počtem plusových znamének v kanonickém tvaru (podstavy nebo kvadriky, to je stejné). Podívejme se tedy, jak vypadají typy regulárních kvadrik v $P_n$.

a) $F = x_0^2 + ... + x_n^2 = 0$. Tato kvadrika nemá žádné body, říká se jí formálně reálná.

b) $F = x_0^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$. Toto je kvadrika typu elipsoid v afinní verzi, budeme jí říkat oválná kvadrika.

c) $F = x_0^2 + ... + x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$. To je kvadrika nejvíce se podobající jednodílnému hyperboloidu v afinní verzi, je tvořena kvadrikou oválného typu, z jejíhož každého bodu vycházejí dvě přímky.

d) Obecný případ je stejný jako v předchozím případě, z každého bodu oválné kvadriky vycházejí dva podprostory.

V každé dimenzi $n$ tedy máme $reg(n) = [(n+1)/2] + 1$ typů kvadrik, hranaté závorky označují celou část čísla. Všech typů kvadrik tedy je $K(n) = \Sigma_{j=0}^{n} reg(j)$.

**Poznámka** V každé dimenzi máme také $n$ kvadrik zcela triviálních, jsou to podprostory všech dimenzí, včetně kvadriky formálně reálné. V rovině je to například kromě prázdné množiny ještě kuželosečka sestávající z jednoho bodu a kuželosečka sestávající z přímky. V prostoru přibude navíc ještě rovina.

## 5.6 Afinní klasifikace kvadrik

V této části popíšeme algoritmus jak se najde kanonický tvar kvadriky v afinním prostoru vzhledem k afinní grupě transformací. Nejdříve zopakujeme, jak se popíše grupa afinních transformací v afinním prostoru. Jak jsme již řekli v předchozím textu, afinní prostor chápeme jako projektivní prostor, ve kterém jsme si vybrali jednu nadrovinu, která bude invariantní a to nadrovinu $x_0 = 0$, jako jsme to udělali v části 3.1. Grupa afinních transformací je pak grupa všech matic tvaru

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & m \end{pmatrix},$$

kde $t$ je sloupec $n$ čísel a $m$ je regulární matice stupně $n$. Předpokládáme, že jsme zvolili afinní soustavu souřadnic, která sestává z počátku (tj. vlastního bodu $A_0$ a báze vektorového prostoru, který je aritmetickým základem nevlastní roviny (tj. zaměření) afinního prostoru.

Bodu $X = (1, x)^T$ pak matice $K$ přiřadí bod $X' = (1, x')^T$, kde $x' = t + mx$, kde $t$ znamená posunutí a $m$ charakterizuje působení afinní grupy na vektory.

Uvažujeme-li nevlastní rovinu afinního prostoru jako projektivní prostor dimenze $n - 1$, působí matice $K$ v tomto prostoru jako matice projektivní transformace. To znamená, že afinní grupa působí v nevlastní rovině jako grupa projektivních transformací v $P_{n-1}$. Toho využijeme při afinní klasifikaci kvadrik.

Buď $F(X, Y)$ kvadrika, jejíž matici zapíšeme v příhodném tvaru

$$F = \begin{pmatrix} a_0 & a^T \\ a & f \end{pmatrix},$$

kde $a_0$ je číslo, $a$ je sloupec $n$ čísel a $f = (f_{ij}), i, j = 1, ..., n$ je matice kvadriky, která vznikne jako průnik $F$ s nevlastní rovinou. Podívejme se, jak se změní matice $F$ na $F'$ působením afinní transformace:

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & t^T \\ 0 & m^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 & a^T \\ a & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + 2t^T a + t^T f t & (a^T + t^T f)m \\ m^T(a + ft) & m^T f m \end{pmatrix}.$$

Máme tedy

$$a_0' = a_0 + 2t^T a + t^T f t,$$
$$a' = m^T(a + ft), m' = m^T f m,$$

kde obrazy značíme s čárkou. Můžeme tedy matici $m$ zvolit tak, aby kvadrika $f$ byla v kanonickém tvaru, $f = Diag\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$, se signaturou $(p, q, r)$, přitom $p + q + r = n, p \geq q$.

Zbývají ještě $a_0$ a $a$. Je-li $r = 0$, je kvadrika v nevlastní rovině regulární a můžeme zvolit posunutí $t$ tak, aby $a' = 0$. Volba $t$ je jednoznačná protože $t = f^{-1}a$. Můžeme ještě zvolit $m = \lambda E$. Pak pro $a_0 \neq 0$ zvolíme $\lambda = \sqrt{(|a_0|)}$. Bude $\epsilon_i' = \epsilon_i |a_0|$. Máme tedy následující větu:

**5.6.1.Věta** Je-li průnik kvadriky s nevlastní nadrovinou regulární kvadrika v nevlastní rovině, lze rovnici kvadriky uvést na kanonický tvar

$F = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_n^2 = \epsilon$, kde $\epsilon$ je $\pm 1$ nebo nula. Taková kvadrika se nazývá středová a počátek soustavy souřadnic je její střed.

Zbývá případ, kdy kvadrika v nevlastní rovině je singulární, tj. pro její signaturu $(p, q, r)$ platí, že $r > 0$. Nechť též $p \geq 1$. (To znamená, že kvadrika není nevlastní nadrovina.) Předpokládejme, že kvadrika v nevlastní nadrovině je v kanonickém tvaru a zapišme její matici ve tvaru příhodném pro další postup. Pišme

$$F = \begin{pmatrix} a_0 & a_1^T & a_2^T \\ a_1 & Diag(p,q) & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $a_1$ je sloupec $p+q$ čísel, $a_2$ je sloupec $r$ čísel, $Diag(p,q)$ je diagonální matice stupně $p+q$ mající na diagonále $p$ plus jedniček a $q$ minus jedniček.

Matici transformace zvolíme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & E & 0 \\ t_2 & 0 & m_1 \end{pmatrix},$$

kde podobně jako nahoře $t_1$ je sloupec $p+q$ čísel, $t_2$ je sloupec $r$ čísel, $E$ je jednotková matice stupně $p+q$.

Pro změněnou kvadriku dostáváme

$$a_1' = a_1 + Diag(r).t_1, a_2' = m_1^T a_2, Diag(r)' = Diag(r),$$
$$a_0' = a_0 + t_1^T a_1 + 2t_2^T a_2 + (a_1 + Diag(r).t_1)^T t_1.$$

Vidíme, že můžeme vždy zvolit $t_1$ tak, aby $a_1 = 0$. Nyní musíme rozlišit dva případy:

$\alpha$) $a_2 \neq 0$. Pak můžeme zvolit $m_1$ tak aby $a_2 = (-1, 0, ..., 0)$. Předpokládejme, že jsme to už udělali. Pak bude $t_1 = 0$ a $a_0' = a_0 + 2t_2^T a_2$. Lze tedy zvolit $t_2$ tak, aby $a_0' = 0$.

$\beta$) $a_2 = 0$. Pak $a_0' = a_0$ a podobně jako u regulárního případu změníme $a_0$ na $\pm 1$ nebo je to nula. Tím jsme hotovi.

**5.6.2 Věta** Je-li průnik kvadriky s nevlastní nadrovinou singulární kvadrika v nevlastní rovině, lze rovnici kvadriky uvést na jeden z následujících kanonických tvarů

$F \equiv x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2 = \epsilon$ kde $\epsilon$ je $\pm 1$ nebo nula,nebo

$F \equiv x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2 = x_{p+q+1}$.

**Poznámka** Je-li $p = q$, dostáváme záměnou znaménka u $\epsilon$ tytéž kvadriky. Tím je klasifikace skončena.

**Poznámka** Nyní by už nebylo obtížné provést euklidovskou klasifikaci kvadrik, výsledek je podobný, pouze na diagonále máme místo plus minus jedniček libovolná nenulová čísla. K tomu však potřebujeme větu o předvedení symetrické matice na diagonální tvar pomocí ortogonální matice a tato věta je již dosti vzdálená od elementární lineární algebry a též od projektivní geometrie. Proto se touto otázkou nebudeme zabývat.

**Příklad** Podívejme se ještě, jak to vypadá v afinní rovině a ve třírozměrném afinním prostoru.

V rovině tedy máme

$\alpha$) $x^2 + y^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ je to kružnice, pro $\epsilon = -1$ je to prázdná množina, pro $\epsilon = 0$ je to jeden bod.

$\beta$) $x^2 - y^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ je to hyperbola, pro $\epsilon = 0$ jsou to dvě různoběžky.

$\gamma$) $x^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ jsou to dvě rovnoběžky, pro $\epsilon = -1$ je to prázdná množina (jeden nevlastní bod), pro $\epsilon = 0$ je to přímka.

$\delta$) $x^2 = y$. Dostáváme parabolu.

V prostoru je situace mnohem složitější.

$\alpha$) $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ je to sféra, pro $\epsilon = -1$ je to prázdná množina, pro $\epsilon = 0$ je to jeden bod.

$\beta$) $x^2 + y^2 - z^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ je to jednodílný (přímkový) hyperboloid, pro $\epsilon = -1$ je to dvoudílný hyperboloid, pro $\epsilon = 0$ je to kužel s kruhovou podstavou.

$\gamma$) $x^2 + y^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ je to kruhový válec, pro $\epsilon = -1$ je to prázdná množina (bod v nevlastní rovině), pro $\epsilon = 0$ přímka.

$\delta$) $x^2 - y^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ je to válec s hyperbolickou podstavou, pro $\epsilon = 0$ jsou to dvě různoběžné roviny,

$\phi$)$x^2 = \epsilon$. Pro $\epsilon = 1$ jsou to dvě rovnoběžné roviny, pro $\epsilon = -1$ je to prázdná množina (přímka v nevlastní rovině), pro $\epsilon = 0$ je to rovina.

$\psi$) $x^2 + y^2 = z$ je eliptický paraboloid. $x^2 - y^2 = z$ hyperbolický paraboloid a $x^2 = z$ parabolický válec.

Všimněme si ještě, že prázdná množina se zde vyskytuje v několika podobách, prázná množina v nevlastní rovině, bod v nevlastní rovině, přímka v nevlastní rovině a celá nevlastní rovina.

# 6 Náměty na cvičení a reference

1)Dokažte algebraicky některou větu z projektivní geometrie v rovině, kterou jste dokazovali synteticky (např. Pascalovu větu).

2) Vyřešte početně některé euklidovské úlohy pro kuželosečky včetně eulidovské klasifikace.

3) Určete kuželosečku danou různými prvky např. polárním trojuhelníkem a dvěma body, čtyřmi body a tečnou, najděte sdružené průměry kuželosečky dané pěti body atd.

V každé úloze zvolte vhodnou soustavu souřadnic podle charakteru úlohy (projektivní, afinní, nebo kartézská).

Pomůcka pro řešení některých složitějších úloh na počítači: Nejdříve najdeme matici kolineace, která převádí danou geometrickou bázi do kanonické geometrické báze (určené kanonickou bází vektorového základu). Zadané prvky problému pak vhodně převedeme do prvků kanoniké báze. Tím se úloha může početně velice zjednodušit. Řešení úlohy pak pomocí inverzní matice převedeme do původního zadání.

4) Určete afinní typ dané kvadriky.

5) Řešte podobné úlohy pro kvadriky (např. najděte rovnici kuželové plochy, je-li dán vrchol, tři body pláště a dvě tečné roviny). Zde je volba vhodné soustavy souřadnic velice důležitá.

6) Je možné hledat různé příčky podprostorů v prostoru vyšší dimenze.

Ve většině případů uvedených úloh je řešení schůdné pouze s použitím matematického sofware, nejlépe Mathematica nebo Maple. Výsledek zobrazte, je-li to možné.

**Demonstrační příklad 1**

Sestroje příčku dvou mimoběžných rovin v $P_5$, která prochází daným bodem $X$ který neleží v žádné z nich. Řešení: Nechť rovina $r_1$ je dána body $A_0, A_1, A_2$, rovina $r_2$ je dána body $A_3, A_4, A_5$. Roviny $r_1$ a $r_2$ generují celý prostor, neboť dimenze jejich průniku je -1. Je-li nyní $X$ daný bod, můžeme jednoznačně napsat $X = m_0A_0 + ... + m_5A_5$ pro jejich aritmetické zástupce. Označíme-li $Y = m_0A_0 + m_1A_1 + m_2A_2$ a $Z = m_3A_3 + m_4A_4 + m_5A_5$, vidíme, že přímka $T = \alpha Y + \beta Z$ je hledaná příčka, neboť platí $X = Y + Z$ a $Y$ leží v $r_1$ a $Z$ leží v $r_2$. Numerický výpočet svěříme počítači, výsledek je v následující ukázce:

Zvolíme 6 vektorů $A_0, \dots, A_5$, a libovolný vektor $X$. Nejdříve se přesvědčíme, že roviny jsou mimoběžné a pak vektor $X$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $A_0, \dots, A_5$, jako řešení příslušné soustavy šesti rovnic o šesti neznámých.

```
with(linalg):
> A0:=vector(6,[1,2,3,4,5,6]);
> A1:=vector(6,[-1,2,3,4,5,6]);
> A2:=vector(6,[1,-2,3,4,5,6]);
> A3:=vector(6,[1,2,-3,4,5,6]);
> A4:=vector(6,[1,2,3,-4,5,6]);
> A5:=vector(6,[1,2,3,4,-5,6]);

> X:=vector(6,[-1,6,-3,-9,8,6]);

> Z:=evalm(m0*A0+m1*A1+m2*A2+m3*A3+m4*A4+m5*A5):
> solve({Z[1],Z[2],Z[3],Z[4],Z[5],Z[6]},{m0,m1,m2,m3,m4,m5});
       {m0 = 0, m1 = 0, m2 = 0, m3 = 0, m5 = 0, m4 = 0}

> Z:=evalm(m0*A0+m1*A1+m2*A2+m3*A3+m4*A4+m5*A5-X):
> solve({Z[1],Z[2],Z[3],Z[4],Z[5],Z[6]},{m0,m1,m2,m3,m4,m5});

                    -53       -3
     {m2 = -1, m0 = ---, m5 = --, m4 = 13/8, m3 = 1, m1 = 1}
                    40        10
> assign(%);
> Y:=m0*A0+m1*A1+m2*A2;

                              53
                      Y := - -- A0 + A1 - A2
                              40

> Z:=m3*A3+m4*A4+m5*A5;

                    Z := A3 + 13/8 A4 - 3/10 A5

> evalm(Y+Z-X);
```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

**Demonstrační příklad 2**

Pro demonstraci postupu na počítači pro úlohy o kuželosečkách uvedeme řešení následující úlohy: Sestrojte kuželosečku danou dvěma tečnami a třemi body. Uvedená úloha má obecně čtyři řešení. Je možné ji řešit přibližně na počítači tak, že napíšeme rovnici obecné kuželosečky a do ní dosadíme zadané podmínky. Dostaneme pět rovnic pro šest homogenních neznámých. Pro jejich řešení v žádném případě nepoužijeme příkaz „`solve`“, který nám software nabízí.

Nejříve vyřešíme lineární rovnice pro body, pak z kvadratických rovnic odstraníme jeden čtverec, příslušnou neznámou vyjádříme a dosadíme. Poslední rovnici čtvrtého stupně řešíme numericky.

Zadané tečny jsou $t_1 = 0, t_2 = 0$, body jsou $A, B, C$.

```
> k:=a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f;
        2              2
k := a x  + b x y + c y  + d x + e y + f
> t1:=y-x+1;
> t2:=2*x+5*y-1;
> A:= [3,4];
> B:= [4,8];
> C:= [6,6];
```

Do rovnice kuželosečky dosadíme dané body, dostaneme rovnice $r_1, r_2, r_3$.

```
r1:=subs(x=3,y=4,k);
r1 := 9 a + 12 b + 16 c + 3 d + 4 e + f
> r2:=subs(x=4,y=8,k);
r2 := 16 a + 32 b + 64 c + 4 d + 8 e + f
> r3:=subs(x=6,y=6,k);
r3 := 36 a + 36 b + 36 c + 6 d + 6 e + f
```

Vyjádříme tečny explicitně, dosadíme do rovnice kuželosečky a použijeme toho, že tečna má pouze jeden společný bod s kuželosečkou. Dostaneme rovnice $r_4, r_5$.

```
> solve(t1, y);

                                x - 1
```

```
> rr4: = subs(y=%,k);

                  2                                    2
     rr4 := a x  + b x (x - 1) + c (x - 1)  + d x + e (x - 1) + f
> solve(t2, y);
                                 - 2/3 x + 1/3
> rr5 := subs(y=%, k);

              2                                                2
  rr5 := a x  + b x (- 2/3 x + 1/3) + c (- 2/3 x + 1/3)  + d x
                                + e (- 2/3 x + 1/3) + f
> r4 := expand(coeff(rr4,x)^2-4*coeff(rr4,x,2)*coeff(rr4,x,0));

          2                            2            2
  r4 := b  - 2 b d + 2 b e - 4 c d + d  + 2 d e + e  - 4 a c + 4 a e
                          - 4 a f - 4 b f - 4 c f
> r5:=expand(coeff(rr5,x)^2-4*coeff(rr5,x,2)*coeff(rr5,x,0));

              2                                  2                   2
  r5 := 1/9 b  + 2/3 b d + 4/9 b e - 8/9 c d + d  - 4/3 d e + 4/9 e
              - 4/9 a c - 4/3 a e - 4 a f + 8/3 b f - 16/9 c f
```

Vyřešíme lineární rovnice $r_1, r_2, r_3$ například pro neznámé $a, b, c$ a výsledek se automaticky dosadí do $r_4, r_5$.

```
> solve({r1,r2,r3},{a,b,c});

                            31            289      47      31
  {c = 5/8 d + 3/4 e + -- f, b = - --- f - -- d - -- e,
                            96            288      24      12


                          47
        a = 5/3 e + -- f + 7/6 d}
                          72
> assign(%);
> r4:=numer(r4);

                  2                                  2
```

```
  r4 := 276624 d  + 611136 d e + 346176 e  + 194448 e f + 180264 f d

                2
         + 22801 f
> r5:=numer(r5);

               2                            2
  r5 := -566640 d  - 4386240 d e - 2045376 e  - 12008112 e f

                                  2
         - 8859480 f d - 4361711 f
```

Dostali jsme dvě kvadratické rovnice pro tři homogenní neznámé $d, e, f$. Odstraníme jeden kvadratický člen pomocí lineární kombinace, např. $d$, vyjádříme neznámou $d$ a dostáváme jednu rovnici pro $e, f$. Vidíme, že $f$ není nula, položíme $f$ rovno jedné, zbude jedna rovnice čtvrtého stupně pro $e$.

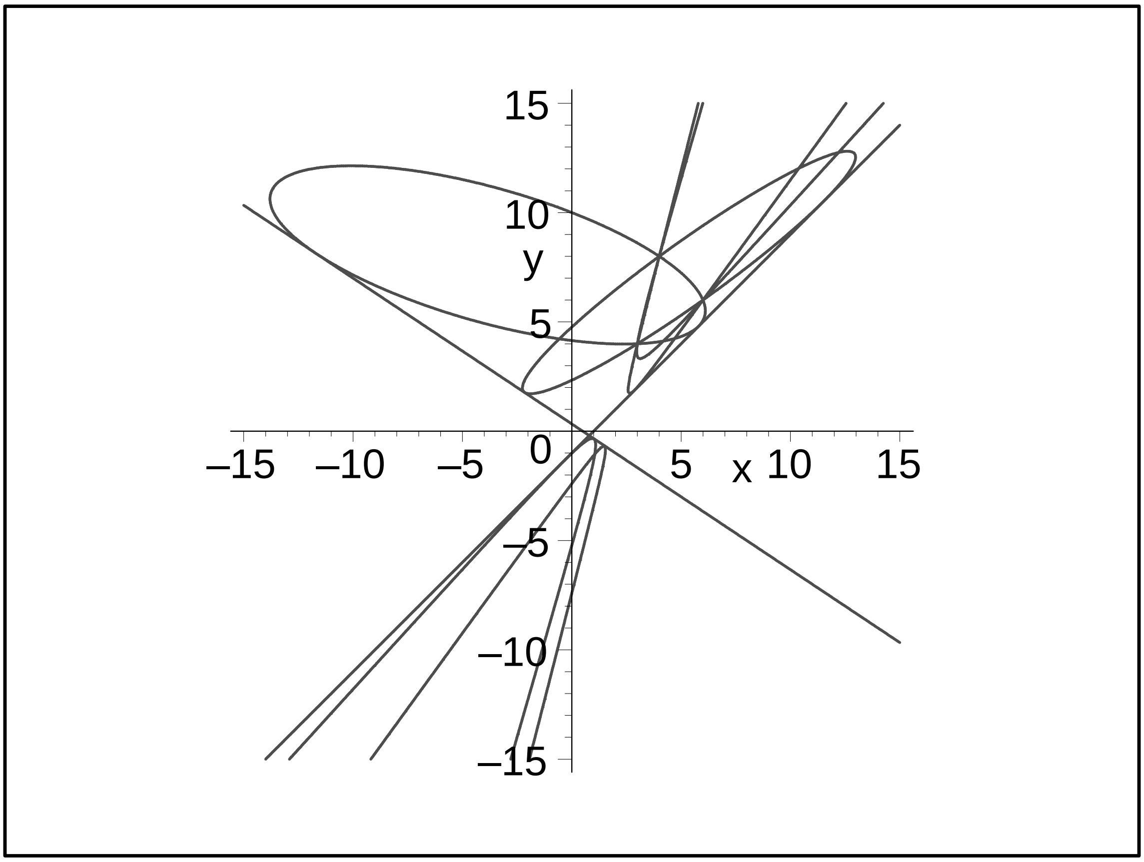
```
> r6:=coeff(r4,d,2)*r5-coeff(r5,d,2)*r4;

                                                2
  r6 := -867045150720 d e - 369642921984 e  - 3211549959168 e f

                                                    2
         - 2348600002560 f d - 1193633985024 f
> d:=solve(r6,d);

                             2              2
                  86345051 f  + 26739216 e  + 232316982 e f
        d := - 1/420 -----------------------------------------
                             404507 f + 149334 e
> r4:=numer(r4);

                                2  2                          3
  r4 := -307989548069982 5664 e  f  + 973222584217501824 e f

                                  4                         3
         + 371284857649927 0656 e  - 2807210441450290176 e  f
```

```
                                                  4
         + 528563761084576656 f
> f:=1;
                              f := 1
```

Obdrženou rovnici řešíme numericky, v tomto případě dostaneme čtyři reálná řešení, označíme je $e_1, e_2, e_3, e_4$ a postupně dosadíme. Výsledek zobrazíme.

```
X:=solve(r4,e);
      X := -.6387641980, -.3410498004, .5519521271, 1.183941842
> k:=numer(k);

                    2                 2  2              2
  k := 106121652 x  e + 146676096 x  e  + 20332886 x  - 2780909 x y

                                          2             2
         - 93748128 x y e - 219326184 x y e  + 1791210 y

                       2  2            2
         + 60656400 y  e  + 4950030 y  e - 172690102 x

                        2
         - 53478432 x e  - 464633964 x e + 339785880 e y

                       2
         + 125440560 e  y + 339785880 + 125440560 e
> k1:=subs(e=X[1],k);

                            8  2                  9                  8
  k1 := .1239291085 10  x  + .2596589413 10  - .3238736513 10  x y

                           8  2                  9                    9
         + .2337831423 10  y  + .1022811856 10  x - .1658608354 10  y
> k2:=subs(e=X[2],k):
> k3:=subs(e=X[3],k);
> k4:=subs(e=X[4],k);
> with(plots):
> implicitplot({k1,k2,k3,k4,t1,t2},x=-15..15,y=-15..15,
> numpoints=100000,thickness=3,scaling=constrained);
```

Na následujícím obrázku vidíme řešení tohoto problému.




Předpokládejme nyní, že víme, že zmíněná úloha je eukleidovsky řešitelná. Třeba od někoho, kdo studoval v době, kdy se geometrie ještě vyučovala. To znamená, že zmíněnou úlohu je možné řešit s použitím pouze pravítka a kružítka, jinými slovy, analytické řešení se dá vyjádřit pomocí druhých odmocnin. Zkusíme, jestli se nám to podaří. K tomu účelu použijeme vhodnou soustavu souřadnic. Zde výhodně využijeme našich znalostí projektivní geometrie. Vzhledem k tomu, že daná úloha je projektivní, můžeme použít kanonickou geometrickou soustavu souřednic v projektivní rovině, $A_1 = (1,0,0), A_2 = (0,1,0), A_3 = (0,0,1), J = (1,1,1)$. Zvolíme ji následujícím způsobem: Jako tečny použijeme přímky spojující body $A_1, A2$ a $A_1, A_3$, body $A, B$ nechť jsou na přímce spojující $A_2, A_3$, a bod $C$ bude jednotkový bod. Pro pohodlnost použijeme opět kartézskou soustavu souřadnic, což znamená, že tečny jsou přímky $x = 0, y = 0$, a máme sestrojit hyperbolu, jsou-li dány směry asymptot pomocí vektorů např. $(1, m), (1, p)$ a poslední bod má souřadnice $(s, s)$. Tím se rovnice drasticky zjednoduší a výsledek uvádíme.

```
  k:=a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+f;
                                2              2
                    k := a x  + b x y + c y  + d x + e y + f

> f:=1;
```

Zvolili jsme obecnou kuželosečku, f nemůže být nula. napíšeme podmínky pro tečny, vyřešíme a dosadíme.

```
> k1:=subs(x=0,k);

                                         2
                              k1 := 1 + c y  + e y
> r1:=e^2-4*c;

                                      2
                                r1 := e  - 4 c

> k2:=subs(y=0,k);

                                     2
                              k2 := a x  + 1 + d x

> r2:=d^2-4*a;

                                      2
                                r2 := d  - 4 a

> solve({r1,r2},{a,c});
```

```
                         2             2
             {c = 1/4 e , a = 1/4 d }
```

```
> assign(%);
```

Průnik s nevlastní přímkou dostaneme pomocí stupně homogennosti jednotlivých koeficientů. Dosadíme dané nevlastní body (pro pohodlí v nehomogenním tvaru) a daný bod do rovnice kuželosečky.

```
> subs(x=j*x,y=j*y,k);

          2  2  2      2            2  2  2
     1/4 d  j  x  + b j  x y + 1/4 e  j  y  + d j x + e j y + 1
> k3:=4*coeff(%,j^2);

                       2  2            2  2
              k3 := d  x  + 4 b x y + e  y
> r3:=subs(x=1,y=m,k3);

                       2          2  2
              r3 := d  + 4 b m + e  m
> r4:=subs(x=1,y=p,k3);

                       2          2  2
              r4 := d  + 4 b p + e  p
>r5:=subs(x=s,y=s,k);
                     2  2      2        2  2
       r5 := 1/4 d  s  + b s  + 1/4 e  s  + d s + e s + 1
```

Z $r_3$ a $r_4$ odstraníme $d^2$, rozložíme, řešíme, zavedeme znaménko $j$ abychom vyjádřili obě řešení.

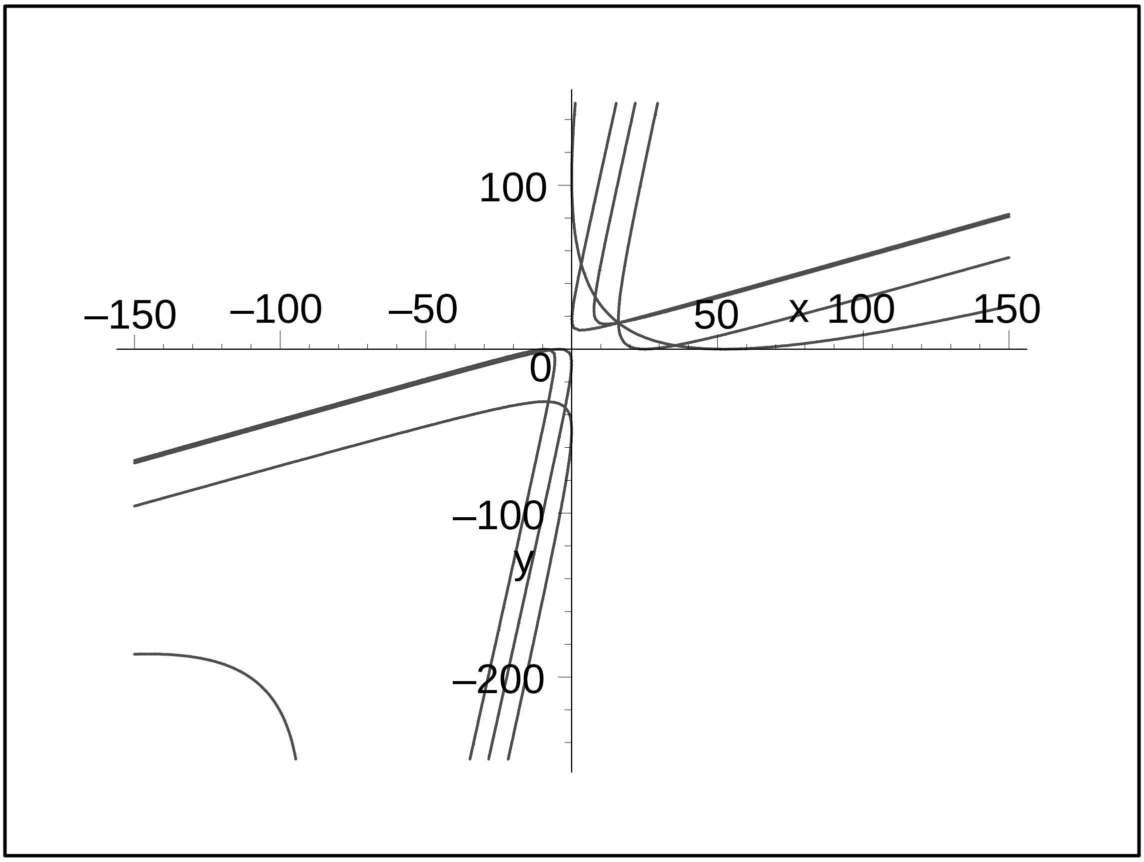
```
> r6:=factor(r3-r4);

                           2            2
             r6 := (m - p) (e  m + 4 b + e  p)

> b:=solve(op(2,%),b);
```

```
                                 2           2
                     b := - 1/4 e  m - 1/4 e  p
> solve(r3,d);
                   sqrt(m p) e, -sqrt(m p) e
> d:=j*%[1];
                       d := j sqrt(m p) e
> r5:=factor(subs(j^2=1,4*r5));

             2  2    2  2      2  2      2  2
  r5 := m p e  s  - s  e  m - s  e  p + e  s  + 4 j sqrt(m p) e s

         + 4 e s + 4
```

Tím je úloha vyřešena, dostáváme dvakrát kvadratickou rovnici, Pro ilustraci výsledek zobrazíme. Získané řešení je pak třeba pomocí projektivní transformace zobrazit podle původně zadaných dat.

```
> m:=1/2;p:=8;s:=16;
> r5;

                        2
                 -896 e  + 64 j sqrt(4) e + 64 e + 4
> X:=solve(r5,e);

                                            2
  X := 1/14 j + 1/28 + 1/56 sqrt(16 j  + 16 j + 18),

                                             2
        1/14 j + 1/28 - 1/56 sqrt(16 j  + 16 j + 18)
> e1:=subs(j^2=1,X[1]);
               e1 := 1/14 j + 1/28 + 1/56 sqrt(34 + 16 j)
> e2:=subs(j^2=1,X[2]);
e2 := 1/14 j + 1/28 - 1/56 sqrt(34 + 16 j)
> k11:=factor(subs(e=e1,j=1,k));

                                             2                2
  k11 := 1/12544 (43 + 30 sqrt(2)) (8 x  - 17 y x + 2 y  - 384 x
```

```
        + 320 x sqrt(2) - 192 y + 160 y sqrt(2) + 11008

        - 7680 sqrt(2))
> k12:=factor(subs(e=e1,j=-1,k));

                                              2                2
  k12 := 1/12544 (-11 + 6 sqrt(2)) (-8 x  + 17 y x - 2 y  + 128 x

        + 192 x sqrt(2) - 64 y - 96 y sqrt(2) - 2816 - 1536 sqrt(2))
> k21:=factor(subs(e=e2,j=1,k));

                                               2                2
  k21 := 1/12544 (-43 + 30 sqrt(2)) (-8 x  + 17 y x - 2 y  + 384 x

        + 320 x sqrt(2) + 192 y + 160 y sqrt(2) - 11008

        - 7680 sqrt(2))
> k22:=factor(subs(e=e2,j=-1,k));

                                            2                2
  k22 := 1/12544 (11 + 6 sqrt(2)) (8 x  - 17 y x + 2 y  - 128 x

        + 192 x sqrt(2) + 64 y - 96 y sqrt(2) + 2816 - 1536 sqrt(2))

> with(plots):
> h11:=implicitplot(k11,x=-150..150,y=-250..150,numpoints=30000):
> h12:=implicitplot(k12,x=-150..150,y=-250..150,numpoints=30000):
> h21:=implicitplot(k21,x=-150..150,y=-250..150,numpoints=30000):
> h22:=implicitplot(k22,x=-150..150,y=-250..150,numpoints=30000):
> display([h11,h12,h21,h22]);
```




## Použitá literatura

[1] Havlíček K.: Úvod do projektivní geometrie kuželoseček. SNTL 1955.

[2] Čech E.: Základy analytické geometrie II. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952.

[3] Lávička M.: Geometrie II, Západočeská Univerzita v Plzni. Plzeň 2006.