KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

CESTY K MATEMATICE III

Sborník konference

Praha, 24. a 25. září 2018

Jana Hromadová,
Antonín Slavík (ed.)

matfyzpress
NAKLADATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY

Autoři

RNDr. Eva Davidová
Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
Mgr. Karel Pazourek, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
PhDr. Alena Šarounová, CSc.
RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Mgr. Jiří Vančura
Mgr. Tomáš Zadražil

Recenzenti

doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.
RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
PhDr. Alena Šarounová, CSc.
RNDr. Jiří Šrubař, Ph.D.
RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Mgr. Šárka Voráčová, Ph.D.
doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.

© Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2018

© MatfyzPress, 2018

ISBN 978-80-7378-373-0

ÚVODNÍ SLOVO

Ve dnech 24. a 25. září 2018 se v Profesním domě na Malostranském náměstí v Praze, v jedné z historických budov Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, koná 3. ročník celostátní konference *Cesty k matematice*. Organizuje ji Katedra didaktiky matematiky MFF UK[1], spolupořadatelem je Středočeská pobočka JČMF. Akce navazuje na konference *Jak připravit učitele matematiky*[2], *Matematika a reálný svět*[3] a *Cesty k matematice I*[4] a *II*[5] pořádané na stejném místě v letech 2010, 2012, 2014 a 2016.

Konference je určena pracovníkům fakult připravujících učitele matematiky, středoškolským učitelům matematiky, doktorandům a studentům vyšších ročníků, kteří se připravují na učitelskou profesi s aprobací matematika pro třetí stupeň, pracovníkům různých výzkumných institucí a dalším zájemcům o problematiku vzdělávání.

Konference je zaměřena na následující okruhy:

- rozvíjení geometrické představivosti žáků ve výuce matematiky,
- výstavba pojmů školské geometrie,
- objevování a ověřování hypotéz ve školské geometrii,
- obrázky a schémata ve výuce matematiky,
- využití historie geometrie ve výuce matematiky.

Tento sborník obsahuje texty některých konferenčních příspěvků. Seznam účastníků a některé další materiály jsou k dispozici na webové stránce konference `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2018/`.

Děkujeme programovému a organizačnímu výboru za přípravu konference, řečníkům za přednesení příspěvků a dodání jejich písemné verze a recenzentům za pečlivou kontrolu všech textů a řadu podnětných připomínek.

---

[1] Programový výbor: Jarmila Robová (předsedkyně), Jindřich Bečvář, Leo Boček, Jana Hromadová, Vlasta Moravcová, Oldřich Odvárko, Antonín Slavík (členové KDM MFF UK). Organizační výbor: Zdeněk Halas (předseda), Alena Blažková, Martin Rmoutil, Jakub Staněk, Petra Surynková, Martina Štěpánová, Jiří Vančura, Tomáš Zadražil (členové a doktorandi KDM MFF UK).

[2] Texty příspěvků z této konference byly publikovány ve sborníku J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (ed.): *Jak připravit učitele matematiky*. Matfyzpress, Praha, 2010. Jsou též k dispozici v elektronické verzi na webové stránce `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konf-cd2/`.

[3] Viz elektronický sborník A. Slavík (ed.): *Matematika a reálný svět*. Matfyzpress, Praha, 2012, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2012/sbornik.pdf`.

[4] Viz elektronický sborník A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice*. Matfyzpress, Praha, 2014, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2014/sbornik.pdf`.

[5] Viz elektronický sborník J. Hromadová, A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice II*. MatfyzPress, Praha, 2016, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2016/sbornik.pdf`.

OBSAH

Úvodní slovo 3

Obsah 4

Program konference 5

J. Robová: *K čemu je školská geometrie* 7

V. Moravcová: *Zapomenutá aplikace kuželoseček* 15

Z. Halas: *Cesta ke skalárnímu součinu* 23

P. Leischner: *O některých nedostatcích ve výuce středoškolské geometrie* 32

K. Pazourek: *Procházky po krychli v souvislostech* 43

E. Davidová: *Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti – planimetricky i metodou souřadnic* 49

T. Zadražil: *Metoda peer instruction ve výuce geometrie* 59

J. Vančura: *Aktivity, hlavolamy a hry pro výuku zobrazení* 69

P. Surynková: *Kinematická geometrie v rovině: konstrukce rovinných křivek a jejich výuka na střední škole* 80

A. Slavík: *Fermatův bod a geometrický medián* 89

M. Štěpánová: *Věta o motýlech* 103

J. Hromadová: *Papírové modely ve výuce geometrie* 125

A. Šarounová: *Stereometrie – síla motivací* 136

Program konference

CESTY K MATEMATICE

(Profesní dům, MFF UK, Malostranské náměstí 25, Praha 1)

Pondělí 24. 9. 2018 (refektář Profesního domu)

9,00 – 10,00	Registrace účastníků
10,00 – 10,30	Zahájení konference
10,30 – 11,20	I. Netuka: *Konvexní geometrie*
11,20 – 12,10	J. Robová: *K čemu je školská geometrie?*
12,10 – 13,30	Přestávka na oběd
13,30 – 14,00	A. Jančařík: *Náročnější konstrukční úlohy řešené pomocí dynamických modelů*
14,00 – 14,30	V. Moravcová: *Zapomenutá aplikace kuželoseček*
14,30 – 15,00	Z. Halas: *Cesta ke skalárnímu součinu*
15,00 – 15,30	P. Leischner: *O některých nedostatcích ve výuce středoškolské geometrie*
15,30 – 16,00	Přestávka na kávu
16,00 – 16,30	E. Pomykalová: *Odvozování a zdůvodňování geometrických vztahů*
16,30 – 17,00	K. Pazourek: *Procházky (nejen) po krychli*
17,00 – 17,30	E. Davidová: *Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti – planimetricky i metodou souřadnic*
17,30 – 18,00	L. Vízek: *Geometrie v hlavě. Inspirace Martinem Kuchynkou (1843–1900) a jeho sbírkou Úkoly a návod ku počítání z paměti*
18,00 – 19,00	Přestávka na večeři
19,00 – 21,00	Kulturní program v refektáři Profesního domu

Úterý 25. 9. 2018 (posluchárna S9 v 1. patře)

9,00 – 9,30	V. Moravcová, Š. Kaňková: *Propojení práce v soustavě souřadnic s dalšími oblastmi matematiky*
9,30 – 10,00	T. Zadražil: *Metoda peer-instruction ve výuce geometrie*
10,00 – 10,30	J. Vančura: *Aktivity, hlavolamy a hry pro výuku zobrazení*
10,30 – 11,00	Přestávka na kávu
11,00 – 11,30	J. Švrček: *Střední příčky trojúhelníku v planimetrických důkazech*
11,30 – 12,00	P. Surynková: *Kinematická geometrie v rovině: konstrukce rovinných křivek a jejich výuka na střední škole*

12,00 – 13,30	Přestávka na oběd
13,30 – 14,00	A. Slavík: *Fermatův bod a geometrický medián*
14,00 – 14,30	M. Rmoutil: *Originální důkazy jednoduchých planimetrických vět*
14,30 – 15,00	M. Štěpánová: *Věta o motýlech*
15,00 – 15,30	Přestávka na kávu
15,30 – 16,00	J. Hromadová: *Papírové modely ve výuce geometrie*
16,00 – 16,30	A. Šarounová: *Poznámky ke stereometrii*
16,30 – 17,20	Závěr konference

K ČEMU JE ŠKOLSKÁ GEOMETRIE

Jarmila Robová

Příspěvek je zaměřen na význam a pojetí geometrie ve výuce matematiky na základní a na střední škole. Zabývá se rovněž vztahem žáků ke geometrii i konkrétními problémy v porozumění žáků základním pojmům eukleidovské geometrie. Poukazuje na souvislosti mezi školskou geometrií a přípravou budoucích učitelů matematiky v této oblasti. Součástí přednášky jsou ukázky žákovských, resp. studentských, řešení úloh ze syntetické geometrie.

1 Úvod

Počátky matematiky jako vědního oboru sahají do starověkého Řecka přibližně do 6. století př. n. l. V tomto období byla rozvíjena především aritmetika a geometrie. Již antičtí filosofové si byli vědomi významu matematiky a geometrie, konkrétně jejich postupů i deduktivně budované teorie. Dokladem toho je například zařazení matematiky do výuky v Platónově filosofické škole *Akademie*, která byla založena kolem roku 387 př. n. l. v Aténách. Uvádí se, že nad jejím vstupem byl uveden nápis „Nevstupuj, kdo neznáš geometrii".

K Platónovým žákům patřil pravděpodobně také Eukleidés, který později sepsal dílo *Základy* shrnující tehdejší poznatky z aritmetiky a geometrie. Eukleidés ve svých *Základech* shromáždil a přehledně vyložil matematické poznatky ve formě systematické teorie, která byla důsledně budována deduktivní metodou. Více než dva tisíce let bylo toto dílo základní učebnicí matematiky, přesněji geometrie, a stalo se vzorem pro deduktivní budování matematické teorie [1].

Podívejme se tedy v následujícím textu na to, jak se dnes žáci seznamují s geometrií zejména na základní škole, jaký je jejich vztah ke geometrii i jaké jsou současné problémy výuky geometrie.

2 Geometrické kurikulum na základní a střední škole

Geometrické vzdělávání na základních a středních školách je dlouhodobě předmětem diskuzí matematiků a odborníků na vzdělávání u nás i ve světě. V centru pozornosti těchto diskuzí bývají otázky týkající se zejména rozsahu a obsahu výuky školské geometrie.

V šedesátých a sedmdesátých letech 20. století probíhala pod vlivem bourbakistů tzv. modernizace školské matematiky. Důraz byl kladen na strukturální pojetí matematiky, na její axiomatizaci včetně zavedení pojmu množina a struktura již na prvním stupni základní školy. Cílem bylo odstranit ve výuce matematiky dril a podpořit rozvíjení spekulativního myšlení [16]. V souvislosti s modernizací někteří odborníci vnímali syntetickou geometrii ve školské matematice jako přežitek a doporučovali její odstranění z výuky. To se podařilo prosadit v některých zemích, například ve Velké Británii, kde je syntetická geometrie i dnes okrajovou záležitostí.

V osmdesátých letech pokračovaly u nás další diskuze nad koncepcí školské geometrie. Někteří odborníci upozorňovali, že ve výuce na základní a střední škole se „dostatečně nerozvíjí zájem žáků o tuto disciplínu, málo se pěstuje geometrická představivost a schopnost aplikovat geometrické poznatky“ [8, s. 295] a že klasická elementární geometrie má nezastupitelnou roli při rozvíjení žákova myšlení [6]. V devadesátých letech se výuka matematiky na základních školách jednoznačně odklonila od množinového přístupu, neboť zkušenosti z výuky prokázaly, že tato koncepce často u žáků přispívá k formálnímu osvojení poznatků. Geometrie na prvním stupni byla postupně v duchu konstruktivistického přístupu směrována k názorné výuce, která se opírá o zkušenosti žáků s reálnými objekty a modely.

Současné kurikulum geometrie vychází z rámcových vzdělávacích programů pro příslušnou úroveň vzdělávání. Podle *Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* (dále jen RVP ZV) žáci v tematickém okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* určují a zobrazují geometrické útvary, zabývají se jejich vzájemnými vztahy, modelují reálné situace, pracují s metrikou geometrických útvarů a zdokonalují svůj grafický projev [12]. Z uvedeného vyplývá, že na základní škole se žáci věnují především syntetické geometrii. Učivo, které je uvedeno v RVP ZV, je chápáno jako prostředek k dosažení očekávaných výstupů, stává se závazným až na úrovni školních vzdělávacích programů.

Střední škola rozvíjí znalosti a dovednosti žáků ze syntetické geometrie probírané na základní škole. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* (dále jen RVP G) explicitně uvádí, že k cílům vzdělávání v matematice patří také rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti. V tematickém okruhu *Geometrie* se nově objevují výstupy související s analytickou geometrií, jako jsou analytická vyjádření přímek či kuželoseček. Oproti základní škole jsou pro tvorbu školních vzdělávacích programů závazné nejen očekávané výstupy, ale i zde uvedené učivo [11].

V roce 2017 byla u nás zahájena revize kurikula matematiky od předškolního vzdělávání až po střední školu. V rámci revize se formulují výsledky učení pro jednotlivé uzlové body, ke kterým patří konec předškolního vzdělávání, konec třetího, pátého, sedmého a devátého ročníku základní školy a konec středního vzdělávání. Skupina pro revizi kurikula kromě metodiků *Národního ústavu pro vzdělávání* zahrnuje také odborníky na jednotlivé úrovně vzdělávání, a to od předškolního až po přípravu učitelů matematiky. Také v rámci této revizi se vychází z významu syntetické geometrie pro rozvíjení myšlenkových procesů žáka.

3 Význam školské geometrie

Již řadu let se hovoří o tom, že geometrie bývá na základních, resp. středních, školách nedoceněnou součástí výuky matematiky, neboť v případě nedostatku výukového času se ve školské matematice často oklešťují geometrická témata [3], [9], a to zejména z oblasti syntetické geometrie.

Uvědomíme-li si, že rozvoj syntetické geometrie sehrál ve starověku zásadní roli při přeměně matematiky z prakticky zaměřeného oboru na vědeckou disciplínu, patří syntetická geometrie nepochybně k evropskému kulturnímu dědictví a k základům vzdělání. Z oboru, který řešil otázky typu JAK (vypočítat, změřit, ...), se syntetická geometrie a také elementární aritmetika staly oblastmi, ve kterých na základě logického uvažování a deduktivních postupů řešily otázky typu PROČ (postup funguje, tvrzení platí, ...). To je také jeden z důvodů zařazení syntetické geometrie do vzdělávání již od prvního stupně základní školy. Zatímco otázky typu JAK, resp. odpovědi na ně, většinou vedou v učebním procesu k memorování a formálnímu osvojení poznatků, úspěšné řešení problémů typu PROČ vyžaduje hlubší porozumění danému tématu a současně přispívá k rozvíjení kritického myšlení. Naučí-li se například žák postup sestrojení pravidelného šestiúhelníku pomocí kružítka a pravítka bez porozumění, proč ho tak sestrojuje, je pravděpodobné, že konstrukci po nějakém čase, kdy ji nepoužívá, zapomene.

Je třeba si uvědomit, že význam školské geometrie nespočívá jen v jejím obsahu, tj. v zaváděných pojmech či vzorcích, ale že žák si na základě geometrických vlastností reálného světa postupně vytváří jeho eukleidovský model. Tvorba modelů reálných situací je nepochybně důležitou složkou poznávacího procesu, rovněž přispívá k využívání matematiky v aplikačních úlohách z praxe. Současně geometrie, především na základní škole, poskytuje řadu vhodných úloh, od jednodušších po složitější, jejichž prostřednictvím se žáci učí matematickému myšlení včetně argumentace a ověřování. Na rozvíjení matematického myšlení se samozřejmě podílejí i další tradiční oblasti školské matematiky aritmetika a algebra, avšak aritmetika poskytuje o něco méně bohatý svět úloh a algebra je pro žáky více abstraktní, a tedy i náročnější, oblastí než geometrie.

Výuka syntetické geometrie přispívá také k rozvoji syntetického myšlení, které spočívá ve spojování dílčích částí do většího celku, přičemž takto vzniklý celek může být novým poznatkem. Syntetické myšlení se často opírá o intuici, avšak ve školní výuce je obvykle kladen důraz na analytické myšlení. Kolář [6] upozorňuje, že matematické obory, jako je teorie množin či elementární algebra, procvičují převážně analytické myšlení, které však často mívá v intelektuální činnosti spíše pomocný charakter. Elementární planimetrie je podle něj základním polem pro procvičování syntetické složky myšlení. Rovněž naše zkušenosti z výuky budoucích učitelů matematiky ukazují, že syntetické řešení planimetrických úloh je pro studenty obtížnější než do jisté míry algoritmické postupy, které se využívají v analytické geometrii a goniometrii. Řešení planimetrických úloh právě vyžaduje využívání syntetické složky myšlení, jehož součástí je určitý nadhled nad vlastnostmi geometrických objektů včetně schopnosti tyto vztahy aktivně využívat a kombinovat.

Nesmíme zapomenout na to, že výuka geometrie významnou měrou přispívá k rozvoji prostorové i geometrické představivosti[1]. Zatímco další složky lid-

[1] Podle Šarounové [17] je prostorová představivost soubor dílčích schopností souvisejících s představami o prostoru, tvarech a vzájemných vztazích mezi předměty a námi. Prostorová

ského myšlení, jako je například logické či kritické myšlení, jsou rozvíjeny také v jiných vyučovacích předmětech, prostorová představivost je především záležitostí výuky geometrie. Rozvíjení geometrické představivosti žáků je rovněž důležité pro jejich další uplatnění v životě, neboť tuto představivost využíváme v celé řadě oborů lidské činnosti (technika, medicína, umění, ...).

S geometrickou představivostí úzce souvisí vizualizace matematických pojmů a vztahů. I v současné době, kdy je ve školské geometrii často využíván program GeoGebra, je třeba u žáků rozvíjet jejich vlastní grafický projev. Kreslení geometrických náčrtků napomáhá hlubšímu pochopení vztahů mezi matematickými objekty, které mají abstraktní charakter. Vytváření obrazů matematických situací a čtení obrazové informace je v matematice rovněž podstatnou složkou procesu učení.

V souvislosti s integrací počítačových technologií se diskutuje také otázka, do jaké míry je třeba se ve školní výuce věnovat rýsování. Pokud za jeden z cílů geometrického vzdělávání považujeme to, aby žáci získali manuální zručnost a přesnost v rýsování různých geometrických objektů[2], je vhodné využívat počítačové programy pro rýsování až ve chvíli, kdy si žáci již osvojili základní manuální dovednost při práci s pravítkem a kružítkem. Význam rýsování nesouvisí jen s očekávanými učebními výstupy dle RVP ZV [12]. Na základní škole rýsování rovněž přispívá k rozvíjení jemné motoriky žáků, čímž se podporuje také vývoj mozku. Rýsování však má i další úlohu z hlediska myšlenkových procesů žáků. Kolář [6, s. 45] uvádí, že žák se „pomocí rýsování seznamuje se zpětnou projekcí výsledku abstraktního myšlení do objektivní reality, což je rovněž zásadní složka aktivního poznávacího procesu“. Podle Kupčákové [7] je však vhodné začínat s rýsováním v souladu s psychologickými poznatky až ve věku 11–12 let.

Geometrie je tedy důležitou součástí výuky matematiky od prvního stupně až po maturitu, na čemž se shoduje řada odborníků i učitelů [13]. Podle Čižmára [2] je role syntetické geometrie ve výuce na základní škole zřejmá bez jakýchkoliv pochybností, neboť s přijatelnou mírou abstrakce žákům zpřístupňuje prostor, ve kterém žijí, a to se děje pomocí jazyka, jehož odborná úroveň se téměř neliší od běžného jazyka. Jirotková [5, s. 83] zdůrazňuje, že „geometrie je vedle teorie čísel tradičním prostředím pro rozvoj argumentačního myšlení a více než kterákoliv jiná oblast matematiky vzájemně propojuje životní zkušenost žáka, teoretické poznání a verbální přemostění obou těchto oblastí“.

4 Vztah žáků a učitelů ke geometrii

Řadu let se v oblasti vzdělávání matematice setkáváme s tvrzením, že geometrie je z pohledu žáků, a někdy i učitelů, obtížnou, resp. neoblíbenou, součástí výuky matematiky, a to zejména její syntetická část [8], [18], [13]. Podívejme se tedy na výzkumná šetření, která se zabývala touto problematikou.

představivost s geometrickým obsahem se nazývá geometrickou představivostí.

[2] Dle RVP ZV [12] k očekávaným výstupům na konci 9. ročníku patří, že „žák umí zacházet s rýsovacími pomůckami“.

Rendl, Vondrová et al. [13] zkoumali, jaké učivo školské matematiky považují učitelé a žáci základní školy za kritické, resp. obtížné pro žáky. Je totiž pravděpodobné, že učivo, které je pro žáka náročné na pochopení, obvykle nemívá žák v oblibě. Ve zmíněném výzkumu se kromě témat z aritmetiky či algebry k problematickým oblastem zařadila rovněž geometrie. Učitelé prvního stupně často uváděli, že jde o geometrické konstrukce, rýsování, obvody a obsahy rovinných útvarů, současně také zmiňovali problémy s porozuměním pojmům obvod a obsah. Řada dotazovaných učitelů vnímala geometrii jako rýsování a kladla ve své výuce důraz na přesnost a úhlednost rýsování, neboť to považovali za ukazatel geometrické úrovně žáka. Další učitelé zdůrazňovali nezbytnost správného vyznačení bodů při črtání a rýsování[3]. Učitelé prvního stupně vidí příčiny problémů s rýsováním především v nedostatečném vývoji jemné motoriky u žáků. Učitelé druhého stupně v uvedeném šetření označili za kritická místa ve výuce geometrie v podstatě stejná témata jako jejich kolegové z prvního stupně, a to konstrukční úlohy a výpočty obvodů, obsahů, povrchů a objemů. V případě konstrukčních úloh učitelé spatřují příčiny problémů v nedostatečných dovednostech žáků, které jsou potřebné pro vytvoření obrázku dané situace, v případě výpočtů pak v neznalosti či špatném zapamatování si potřebných vzorců.

Je zajímavé, že učitelé se ve svých výpovědích o problémech žáků v geometrii málokdy zmiňují o další možné příčině, kterou je neporozumění probíraným geometrickým pojmům. Pokud si žák nevytvoří adekvátní představu konkrétního geometrického pojmu, jen obtížně může úspěšně řešit úlohy, ve kterých řešení vychází z porozumění látce. To, že žáci na úrovni přechodu mezi prvním a druhým stupněm základní školy mají problémy s porozuměním pojmům úsečka, přímka, polopřímka, trojúhelník atd. dokládají výzkumná šetření probíhající v posledních letech [4], [7], [14].

Z hlediska obliby matematiky u žáků pozorují učitelé prvního stupně její pokles ve 4. a 5. ročníku a domnívají se, že vztah žáků ke geometrii zřejmě ovlivňuje již zmíněná nedostatečně rozvinutá jemná motorika žáků, přesto však existují žáci, které geometrie baví a mají rádi rýsování. Učitelé druhého stupně uvádějí, že obliba matematiky je u žáků spíše nižší a dávají to do souvislostí s obtížností předmětu [13]. Nelze však jednoduše zobecnit, že geometrie, resp. rýsování, je u žáků na základní škole neoblíbenou součástí výuky, neboť naše šetření v 6. ročnících základní školy a primách osmiletých gymnázií[4] ukázalo, že ve zkoumané skupině 505 žáků jsou jak ti, kteří mají geometrii rádi včetně rýsování, tak i ti, kteří geometrii „nemusí“. Necelá polovina žáků v tomto šetření uvedla, že geometrii mají rádi někdy, resp. v některých tématech. V odpovědích žáků byl také patrný vliv nedávno probírané látky; některým žákům se líbilo

[3] To, že učitelé často trvají na určité formě vyznačení geometrických objektů v rovině (bodů, úseček, přímek, polopřímek), potvrdila také další šetření [7], [10].

[4] Toto výzkumné šetření realizovali Z. Halas, J. Hromadová, V. Moravcová, J. Robová z KDM MFF UK v září až říjnu v 6. ročnících základních škol a v primách víceletých gymnázií. Šetření bylo zaměřené na zkoumání žákovských konceptů souvisejících se základními geometrickými pojmy na konci prvního stupně základní školy, viz [14]. Součástí šetření byla dotazníková sonda zaměřená na vztah žáků ke geometrii.

rýsování, jiným zase vadil v geometrii požadavek na přesnost rýsování či úlohy početního typu (obvody, obsahy).

Naše zkušenosti z výuky budoucích učitelů matematiky ukazují, že negativní vztah ke geometrii si může žák přenést i do vysokoškolského studia, kde už často nebývá prostor nejen pro rozvíjení geometrické představivosti, ale i pro budování kladného vztahu ke geometrii. Úspěšné řešení geometrických úloh vyžaduje nejen znalost vlastností geometrických objektů, ale také porozumění těmto pojmům i dobrou geometrickou, resp. prostorovou představivost. Zabývali jsme se proto přístupy budoucích učitelů k rozvíjení geometrické představivosti žáků v kurzu z didaktiky matematiky [15]. Zadali jsme budoucím učitelům za úkol vytvořit pracovní listy s úlohami, které u žáků střední školy podpoří rozvíjení této dovednosti. Vycházeli jsme z předpokladu, že již v bakalářském studiu jsme se tomuto tématu se studenty věnovali v několika předmětech, probírali v nich nejen vhodné učivo, ale i formy a metody výuky. Rozbor odevzdaných prací ukázal, že při přípravě na vlastní výuku vycházejí budoucí učitelé především ze svých zkušeností a převážně volí úlohy, se kterými se sami setkali ve výuce na základní a střední škole či v učebnicích. Z pohledu rozvíjení geometrické představivosti žáků je tedy třeba v přípravě budoucích učitelů zdůraznit nejen význam geometrické představivosti, ale uvádět i vhodné typy úloh, ve kterých se objevují také nestandardní pohledy na tělesa, a případně s nimi řešit úlohy, v nichž má viditelnost vliv na počet řešení.

Kuřina [8] uvádí, že učitelé, kteří nemají geometrii rádi, jí ve výuce přirozeně věnují menší pozornost, takže jejich žáci nemají dobré geometrické vzdělání, a tím se vytváří začarovaný kruh. Napravit zmíněnou situaci není lehké, neboť uvedené problémy se táhnou řadu desetiletí. Cesta ke zlepšení situace je známa: je třeba zkvalitnit výuku geometrie od prvního ročníku základní školy přes další stupně vzdělávání až po přípravu učitelů matematiky. Ukazuje se totiž, že problémy s pochopením geometrie se objevují i u budoucích učitelů matematiky pro první i druhý stupeň základního vzdělávání. Nesprávné představy základních geometrických pojmů se tak vyskytují nejen u žáků, ale i u jejich budoucích učitelů [4], [7].

5 Závěr

Geometrie je nepochybně důležitou součástí výuky matematiky od základní až po vysokou školu. Hlavní význam výuky geometrie spočívá v rozvíjení myšlenkových procesů žáků v prostředí, které je pro žáky snadněji uchopitelné, než je tomu v aritmetice či v algebře. Nejde tedy ani tak o samotné učivo geometrie jako především o její metody a formy práce včetně zdůvodňování vztahů mezi geometrickými objekty. V prostředí rovinné či prostorové geometrie lze na základě vizualizace problému poměrně snadno odvodit řadu matematických vztahů a ukázat tak žákům nejen krásu matematiky, ale také význam a sílu logických myšlenkových postupů.

Literatura

[1] M. Bečvářová, *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, Edice Dějiny matematiky, sv. 20, Prometheus, Praha, 2002.

[2] J. Čižmár, *Geometria na prahu 21. storočia z pohl'adu jej päťtisícročného vývoja*. In E. Fuchs (ed.), Matematika v proměnách věků IV, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007, 123–161.

[3] H. Daňková, *Geometrie naučila lidi myslet*, 2010. `http://www.jablko.cz`

[4] M. Chodorová, L. Juklová, *Geometrické pojmy na základní škole*, Matematika-fyzika-informatika 26 (2017), 261–271.

[5] D. Jirotková, *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*, PedF UK, Praha, 2010.

[6] I. Kolář, *Geometrie v současné matematice a její úloha ve vyučování*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 34 (1989), 41–54.

[7] M. Kupčáková, *Geometrické kurikulum na 1. stupni*. In K. Sebínová, L. Gerová, P. Voštinár (eds.), Zborník príspevkov z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou Primárne matematické vzdelávanie – teória, výskum a prax, UMB, Banská Bystrica, 2017, 76–80.

[8] F. Kuřina, *Začarovaný kruh školské geometrie*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 32 (1987), 290–295.

[9] F. Kuřina, *Geometrie a geometrické vzdělávání*. In S. Olivík (ed.), Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice, 2005, 15–22.

[10] V. Moravcová, J. Hromadová, Z. Halas, J. Robová, *Jak žáci znázorňují úsečku a polopřímku?*. In B. Bastl, M. Lávička (eds.), Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Vydavatelský servis, Plzeň, 2018 (v tisku).

[11] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*, Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2007.

[12] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, Národní ústav pro vzdělávání, Praha, 2017.

[13] M. Rendl, N. Vondrová, L. Hříbková, D. Jirotková, J. Kloboučková, L. Kvasz, A. Páchová, I. Pavelková, I. Smetáčková, E. Tauchmanová, J. Žalská, *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, PedF UK, Praha, 2013.

[14] J. Robová, V. Moravcová, Z. Halas, J. Hromadová, *Žákovské koncepty trojúhelníku na začátku druhého stupně vzdělávání*, Scientia in educatione, 2018 (v recenzním řízení).

[15] J. Robová, J. Hromadová, *Geometrická představivost budoucích učitelů matematiky*. In B. Bastl, M. Lávička (eds.), Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2016, Vydavatelský servis, Plzeň, 2016, 101–106.

[16] N. Stehlíková, M. Tichá, *Didaktika matematiky a její proměny*, Pedagogická orientace 21 (2011), 156–170.

[17] A. Šarounová, *Geometrická představivost* (disertační práce), UK, Praha, 1982.

[18] R. Táborská, *Sedm hříchů přírodovědného vzdělávání aneb proč nenávidíme matematiku*, Kritické listy 26 (2007).
`http://www.kritickemysleni.cz/klisty.php?co=26/!sedmhrichu`

doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`robova@karlin.mff.cuni.cz`

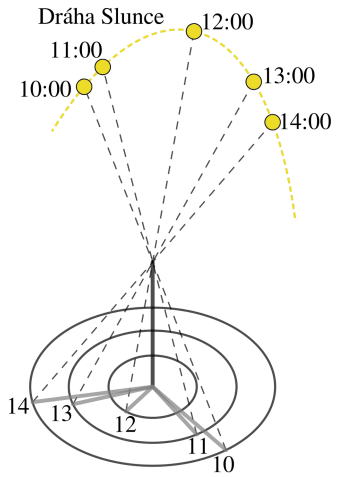
ZAPOMENUTÁ APLIKACE KUŽELOSEČEK

Vlasta Moravcová

Cílem příspěvku je ukázat jednu ze zajímavých aplikací kuželoseček související s konstrukcí slunečních hodin, a sice v takovém rozsahu, v jakém toto téma bývalo součástí výuky na reálných školách. Za tímto účelem jsou ve zjednodušené podobě připomenuty některé pojmy z astronomie, přičemž uvedené údaje jsou vztaženy k severní zemské polokouli.

1 Trocha historie

Sluneční hodiny patří k vynálezům, které jsou pro svou závislost na poloze umístění obtížně přenositelné. Prvním typem slunečních hodin byl gnómon (svislá tyč, obelisk aj.) s ciferníkem v podobě soustředných kružnic na zemi (obr. 1). Čas byl přibližně určován jen podle délky stínu (při rozlišení směrů pro dopoledne a odpoledne). Gnómon byl využíván například již ve starověkém Egyptě [1]. Tato metoda však není přesná, neboť délka stínu závisí také na ročním období. Nálezy dalších typů slunečních hodin (vertikální sluneční hodiny či polokulové hodiny zvané *skafé*) pochází ze starověkého Řecka, ale i dalších oblastí. Několik typů slunečních hodin popsal římský stavitel Vitruvius ve svém díle *De architectura libri decem* [5]. Antičtí Řekové si již byli vědomi nepřesnosti měření času pomocí jednoduchého gnómonu, avšak první písemné zmínky o umístění stínového ukazatele rovnoběžně se zemskou osou (což je podstatné pro přesnost měření – viz dále) v Evropě pocházejí až ze 14. století.[1]



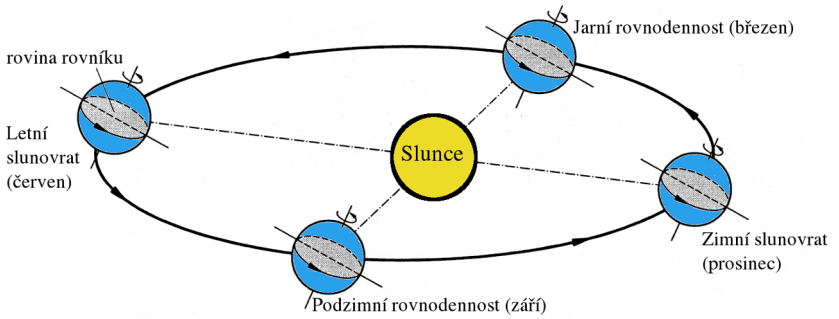
Obr. 1: Náčrt principu gnómonu

[1] O historii slunečních hodin více viz [2] nebo [3], stručná a přehledná chronologie vývoje slunečních hodin je vypracována v [1].

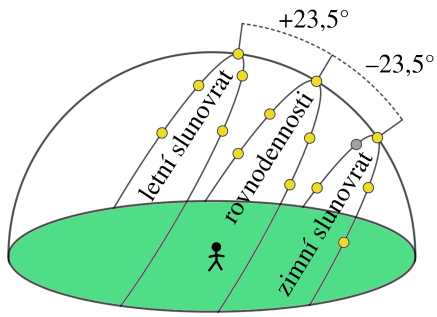
2 Důsledky pohybů Země

Princip slunečních hodin spočívá na zdánlivém pohybu Slunce. Pozorovatel stojící na Zemi[2] vidí Slunce pohybující se od východu k západu po kružnici na nebeské sféře, přičemž poloha kružnice se v průběhu roku mění. Tento jev je důsledkem dvou pohybů Země: rotace kolem zemské osy a oběhu kolem Slunce.

Země rotuje okolo své osy, jejíž odchylka od roviny ekliptiky je přibližně 23,5°. Dále vykonává pohyb po eliptické trajektorii,[3] přičemž v jednom z ohnisek této elipsy leží Slunce. V okamžiku, kdy Země prochází hlavními vrcholy elipsy, nastává zimní nebo letní slunovrat. Pokud je Země v takové poloze, že sluneční paprsky dopadají kolmo na rovník, nastává jarní nebo podzimní rovnodennost (obr. 2).



Obr. 2: Schéma oběhu Země kolem Slunce



Obr. 3: Schéma zdánlivého pohybu Slunce z pohledu pozorovatele stojícího na severní polokouli

Z našeho pohledu se Slunce pohybuje po obloze po kružnici ležící vždy v rovině kolmé k zemské ose. V den letního slunovratu vystoupá na obloze nejvýše, zatímco v den zimního slunovratu bude jeho dráha nejblíže k obzoru (obr. 3).

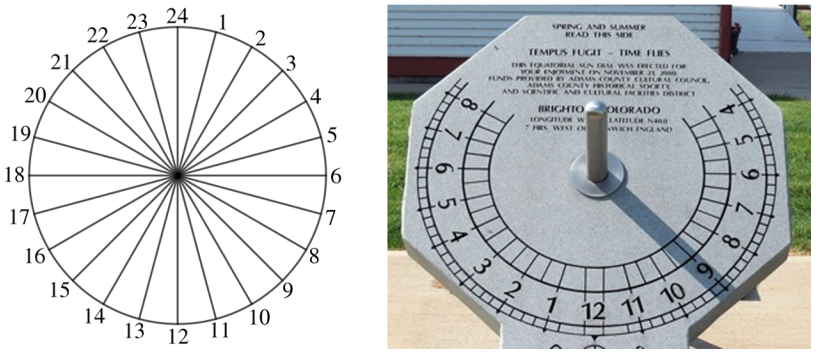
[2] Poloměr Země lze vzhledem k jeho poměru vůči vzdálenosti Slunce–Země zanedbat a polohu pozorovatele ztotožnit s bodem na zemské ose.

[3] Jeden z Keplerových zákonů, viz [8].

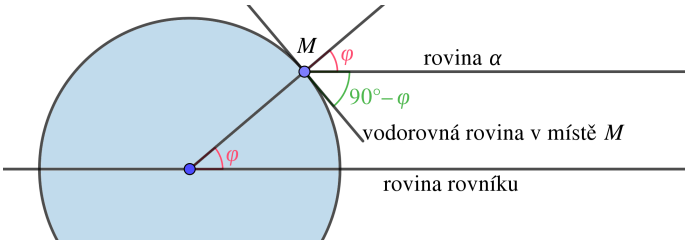
Umístíme-li tedy tyč rovnoběžně se zemskou osou, bude se její stín vržený do roviny rovnoběžné s rovinou rovníku rovnoměrně otáčet o 15° (360° : 24) za hodinu.

3 Rovníkové sluneční hodiny

Na výše popsaném principu fungují sluneční hodiny nazývané *rovníkové*. Jejich ciferník tvoří kruh rozdělený na 24 shodných výsečí (obr. 4). Tyčka vrhající stín (nazývaná též *polos*) vychází ze středu ciferníku a musí být nastavena do polohy rovnoběžné se zemskou osou. V praxi je tedy třeba určit nejprve sever a směr kolmý k vodorovné rovině (čímž je dána poledníková rovina σ) a poté nalézt takovou rovinu α, která je kolmá k rovině σ a s vodorovnou rovinou svírá úhel o velikosti $90° - \varphi$, kde φ je zeměpisná šířka[4] daného místa (obr. 5). Ciferník hodin poté orientujeme vyznačeným polednem k severu.[5]



Obr. 4: Rovníkové sluneční hodiny[6]



Obr. 5: Umístění ciferníku rovníkových hodin v místě M, kolmý pohled do roviny σ

[4] Pro jednoduchost uvažujeme kulový tvar Země a zeměpisnou šířku ztotožňujeme se šířkou geocentrickou.

[5] Je třeba si uvědomit, že sluneční hodiny měří sluneční čas odpovídající zeměpisné délce místa, kde jsou umístěny. Ten se od běžně užívaného pásmového času může lišit, například mezi nejzápadnějším a nejvýchodnějším místem České republiky je rozdíl slunečních časů téměř 30 minut, zatímco pásmový čas je v rámci státu pochopitelně všude stejný.

[6] Fotografie převzata z: `www.waymarking.com/gallery`

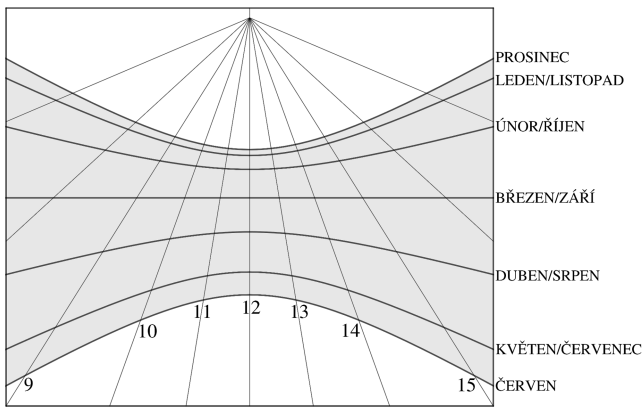
4 Vertikální a horizontální sluneční hodiny

Ve svém okolí můžeme nejčastěji vidět sluneční hodiny na stěnách budov (tzv. *vertikální*), popřípadě na zemi (tzv. *horizontální*). Ciferník takových hodin získáme rovnoběžným promítnutím ciferníku rovníkových hodin do příslušné roviny ve směru zemské osy. Polos je pak třeba opět nastavit rovnoběžně se zemskou osou. Pokud vertikální hodiny umístíme na svislou stěnu orientovanou přesně od východu k západu, bude jejich ciferník osově souměrný podle svislé osy procházející středem (viz dále část 6, obr. 7).

5 Datové čáry a jejich průměty

Na cifernících slunečních hodin bývají často vyznačeny zajímavé křivky, zpravidla se jedná o *analemu* či *datové čáry*. Analema je empirická křivka připomínající „osmičku“. Na této křivce leží stíny koncového bodu stínové tyče (popřípadě jiného vyznačeného místa na této tyčce, tzv. *nodu*), které bychom zaznamenali v průběhu celého roku každý den vždy ve stejný čas.[7]

Datovou čárou nazýváme křivku, kterou opisuje stín konce polosu během jednoho konkrétního dne. Sluneční paprsky v průběhu jednoho dne vychází z bodů na kružnici, po níž se Slunce z pohledu pozorovatele pohybuje. Ty, které prochází koncem polosu, tvoří vlastně rotační kuželovou plochu (přesněji její část). Stín konce polosu leží v rovině ciferníku, datová čára je tedy řezem rotační kuželové plochy rovinou – kuželosečkou. V dny, kdy nastává rovnodennost, jsou datovými čárami přímky, v ostatní dny se v našich zeměpisných šířkách vzhledem ke sklonu zemské osy jedná o hyperboly.[8]



Obr. 6: Datové čáry na vertikálních slunečních hodinách

Obvykle na cifernících slunečních hodin nalezneme datové čáry odpovídající rovnodennostem (pro jarní i podzimní rovnodennost vychází stejná přímka) a slunovratům (části hyperbol ohraničující množinu všech možných dopadů stínu polosu na ciferník). Často bývají vyznačeny i datové čáry dalších měsíců

[7] Více o této křivce viz např. [9].

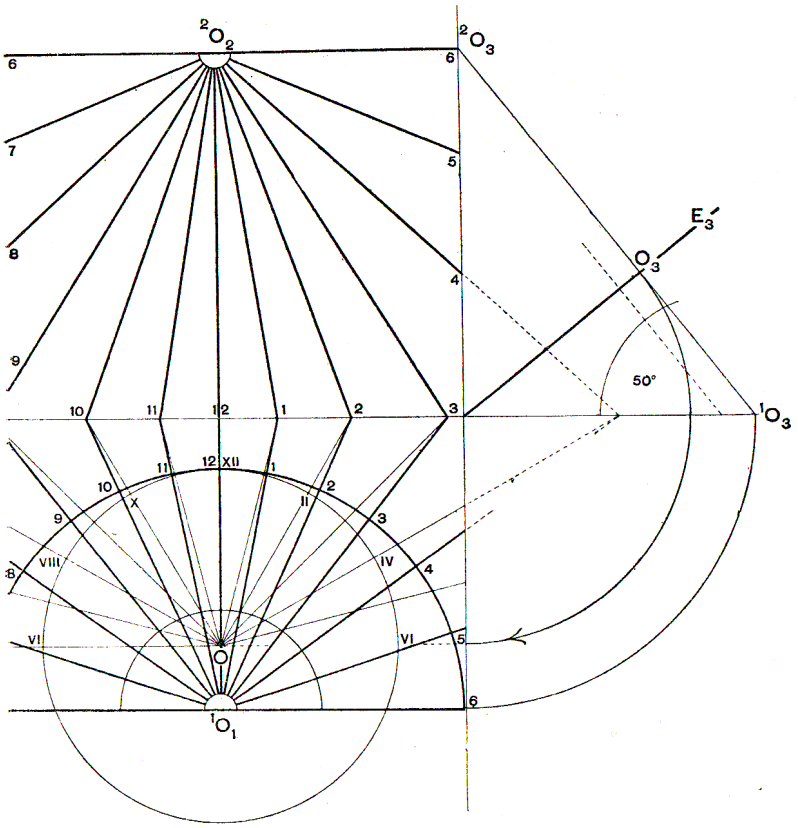
[8] Za severním polárním kruhem by datovými čárami byly elipsy.

(obr. 6). Díky tomu lze ze slunečních hodin odečíst nejen aktuální čas, ale i přibližné datum.

6 Ukázky konkrétních úloh

Na počátku 20. století byly výše uvedené základy konstrukce slunečních hodin standardní součástí výuky na reálných školách. Téma bylo vyučováno v rámci povinného předmětu deskriptivní geometrie. Řešené i neřešené úlohy nalezneme v tehdejších učebnicích, úlohy s touto tematikou byly součástí maturit i zkoušek učitelské způsobilosti.[9] Na jednu z nich se nyní podrobněji podíváme (dle [6], str. 124–126).[10]

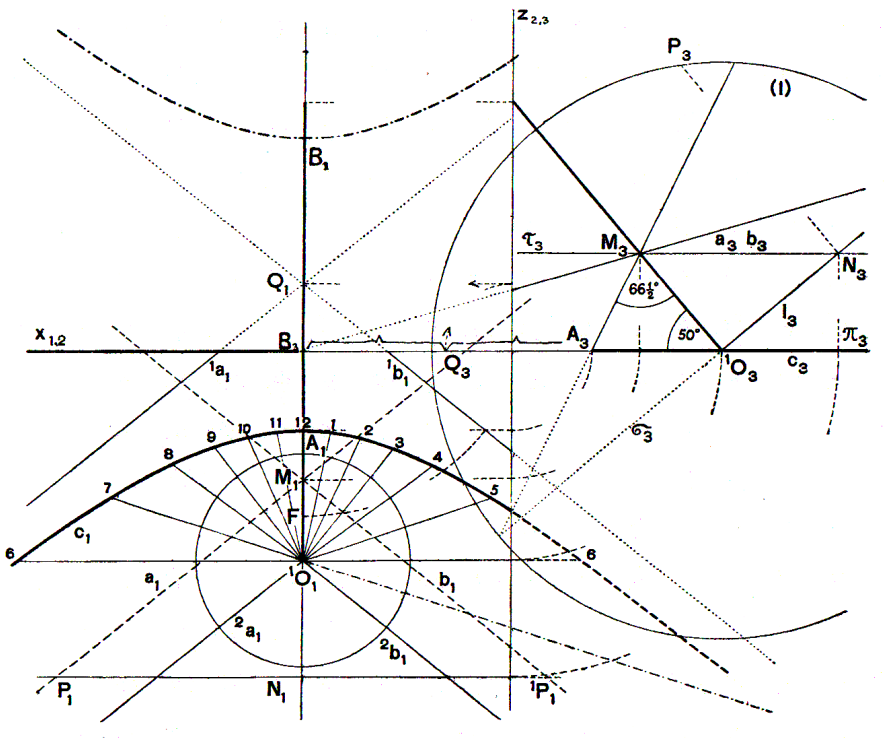
Zadání: *V Mongeově promítání sestrojte křivku, kterou opisuje vržený stín konce stínící tyče na horizontálních hodinách dne 21. června v zeměpisné šířce* $\varphi = 50°$.



Obr. 7: Konstrukce ciferníku horizontálních a vertikálních slunečních hodin (zdroj: [5], str. 125)

[9] O zkouškách učitelské způsobilosti z deskriptivní geometrie viz [4].
[10] Zadání i řešení je upraveno a přizpůsobeno současnému jazyku.

Řešení: Nejprve sestrojíme ciferník rovníkových slunečních hodin v otočené poloze (okolo základnice) do půdorysny a pomocí třetí průmětny získáme jeho průmět do půdorysny ve směru rovnoběžném se zemskou osou (v obr. 7 je sestrojen ciferník horizontálních i vertikálních hodin; středem ciferníku rovníkových hodin je bod O, středem horizontálního ciferníku bod ${}^1O_1$, středem vertikálního ciferníku bod ${}^2O_2$, bokorysem ciferníku rovníkových hodin je úsečka E_3 a bokorysem směru zemské osy je přímka ${}^1O_3{}^2O_3$). Sluneční paprsky dopadající dne 21. června (letní slunovrat) na konec M stínící tyče vychází z kružnice ležící ve výšce 23,5° nad rovníkem. Tvoří tedy rotační kuželovou plochu s osou kolmou k rovině rovníku, hlavním vrcholem M a odchylkou povrchových přímek od osy kužele 66,5°. Třetí průmět této kuželové plochy je sestrojen v obr. 8, bokorysem řezu horizontální rovinou (půdorysnou) je dvojice polopřímek, přičemž stíny konce tyče opisují pouze tu větev hyperboly, jíž odpovídá polopřímka s krajním bodem A_3. První průmět hyperboly (čili hledaná datová čára) je sestrojen pomocí středu hyperboly Q, vrcholů A, B a asymptot, které jsou získány jako rovnoběžky s řezem (dvojicí přímek) kuželové plochy vrcholovou rovinou τ rovnoběžnou s rovinou řezu.[11]



Obr. 8: Konstrukce datové čáry (zdroj: [5], str. 126)

[11] Hyperbolický řez kuželové plochy rovinou viz např. [7].

Pro zajímavost dále uvádíme (již bez řešení) zadání jedné z maturitních úloh z roku 1903:[12]

> *Sestrojte na* 60° *vertikální sluneční hodiny, jež leží na svislé stěně směřující od svv na jzz* [10].

Cílem je sestrojit rovnoběžný průmět ciferníku rovníkových hodin do roviny, v níž leží ciferník požadovaných vertikálních hodin, tj. do svislé roviny orientované od severovýchodovýchodu k jihozápadozápadu. Podobné úlohy byly cca v letech 1900 až 1920 maturantům běžně zadávány.

7 Závěr

V příspěvku jsme připomněli základní princip konstrukce slunečních hodin a datových čar, který před cca 100 lety znal každý absolvent reálky. Na téma lze pohlížet jako na zajímavou aplikaci kuželoseček, v níž se propojují poznatky z více vědních oborů – fyzika, zeměpis, deskriptivní geometrie, matematika.

Obr. 9: Přenosné sluneční hodiny ze série „turistické známky“[13]

Konstrukce slunečních hodin je v současnosti velmi dobře zdokumentována, avšak tyto poznatky nejsou rozšířeny, což je – dle názoru autorky – škoda, zejména v době, kdy sluneční hodiny získávají opět značnou popularitu. Mnoho původních slunečních hodin umístěných na historických budovách bylo v posledních letech zrekonstruováno, na internetu lze nalézt programy pro tvorbu slunečních hodin, v obchodech se suvenýry můžeme zakoupit přenosné kapesní sluneční hodiny (obr. 9), existují lokální databáze slunečních hodin atd. Jistě by tedy bylo zajímavé a motivační seznámit i současné středoškoláky alespoň se základy této problematiky.

[12] Více o maturitních zkouškách z deskriptivní geometrie na reálkách viz [4].

[13] `www.turisticke-znamky.cz`

Poděkování. Tento článek vznikl za podpory programu Univerzitní výzkumná centra UK, č. UNCE/HUM/024, a projektu PROGRES Q17 *Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.*

Literatura

[1] M. Brož, M. Nosek, J. Trebichavský, D. Pecinová, *Sluneční hodiny na pevných stanovištích*, Academia, 2004.

[2] R. N. Mayall, M. W. Mayall, *Sundials. Their constructions and Use*, Dover Publications, 1994.

[3] S. Michal, *Hodiny (od gnómonu k atomovým hodinám)*, SNTL, 1987.

[4] V. Moravcová, *Výuka deskriptivní geometrie v našich zemích*, disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, 2015. `http://karlin.mff.cuni.cz/~morava/Vyuka-DG-v-nasich-zemich.pdf`

[5] M. P. Vitruvius, *Deset knih o architektuře*, Arista a Baset, 2001 (z latinského originálu *De architectura libri decem*, F. Krohn, 1912, přeložil do češtiny A. Otoupalík).

[6] J. Pithardt, L. Seifert, *Základy deskriptivní geometrie. Díl III. a IV. Pro VI. a VII. třídu reálek*, JČM, 1911.

[7] E. Pomykalová, *Deskriptivní geometrie pro střední školy*, Prometheus, 2010.

[8] V. Vanýsek, *Základy astronomie a astrofyziky*, Academia, 1980.

[9] T. S. Yeow, *The Analemma for Latitudinally-Challenged People*, bakalářská práce, National University of Singapore, 2002. `www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/tsy.pdf`

[10] *Výroční zpráva vyšší reálky v Jičíně*, 1902/1903.

RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`morava@karlin.mff.cuni.cz`

CESTA KE SKALÁRNÍMU SOUČINU

Zdeněk Halas

V tomto příspěvku se pokusíme zdůraznit význam motivace při zavádění pojmů, kterou nechápeme jen jako prvek zatraktivňující výuku, ale jako integrální součást matematického vzdělávání. Tyto úvahy budeme demonstrovat na příkladě zavedení skalárního součinu.

1 Zavádění pojmů a jejich motivace

Ve školské matematice se někdy zavádějí pojmy bez náležité motivace. V případě skalárního součinu se to týká některých učebnic středoškolských i vysokoškolských. Nahlédneme-li např. do středoškolské učebnice [3], nalezneme tam na straně 40 „motivaci“ v rozsahu jediné věty: *Skalární součin, který teď zavedeme, je velmi důležitý.*

Ve středoškolské učebnici [4] se sice nejprve odvodí vzorec pro úhel dvou vektorů, nicméně skalární součin je pak motivován pouze na základě vztahů známých z fyziky: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ a $W = |\vec{F}||\vec{s}| \cos \varphi$, takže se odkazuje na skalární součin používaný ve fyzice.

Ve vysokoškolských učebnicích je pak kladen důraz na abstraktní definici (skalární součin jako bilineární forma, která je symetrická a pozitivně definitní). K základní motivaci skalárního součinu se už autoři většinou nevracejí, tuto znalost tiše předpokládají. Je tomu tak nejen v učebnicích lineární algebry (např. [1], kde je tento přístup pochopitelný, neboť téma skalární součin elegantně navazuje na téma bilineární formy; navíc je třeba získat obecnější pohled na skalární součin v souvislosti s matematickou analýzou), ale i v učebnicích geometrie, viz např. [5] od strany 104, kde je pouze připomenuta definice skalárního součinu z lineární algebry, bohužel bez názorné geometrické interpretace a jejích důsledků. Přestože je zde vybudována míra úhlu, je následně vztah

$$\cos x = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \tag{1}$$

použit k definici funkce kosinus (str. 134), resp. k definici odchylky nenulových vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (str. 136).

Ve zmíněných vysokoškolských učebnicích se tedy předpokládá, že čtenář je obeznámen s důvodem, proč je odchylka dvou nenulových vektorů definována vztahem (1) a jak byl tento vztah odvozen. Z vlastního šetření, kdy jsem se dotazoval více než 140 studentů učitelství matematiky, však vyplynulo, že tento předpoklad není v naprosté většině případů splněn. Pouze pět studentů z nich mělo aspoň nějaké povědomí o tom, jak vztah (1) vznikl a čím je motivováno zavedení skalárního součinu, ostatní o tom neměli představu vůbec žádnou.

Jsem přesvědčen o tom, že abstraktní zavedení skalárního součinu je prospěšné, je však třeba jej provádět se studenty, kteří jsou na to připraveni. Jinými slovy: abstrakce k matematice neodmyslitelně patří; myslím však, že je třeba k ní přistupovat až tehdy, když je zřejmé, na základě čeho ji provádíme.

Při zavádění pojmů je často prospěšné využít poznatků historie matematiky. Vývoj skalárního součinu byl však poměrně komplikovaný, zasahuje i do jiných oblastí matematiky, než je geometrie a lineární algebra (hyperkomplexní čísla, viz např. pěkná netradiční učebnice [2]), a tak se skalární součin řadí mezi ty pojmy, jejichž zavedení většinou nedoprovází zajímavý historický exkurz, ale vychází se pouze z vhodně zvolených matematických úvah, které pak implikují didaktické zpracování.

V následující kapitole stručně shrnu motivační úvahy, které by podle mých představ měly předcházet definici skalárního součinu. Závěrečná část pak bude věnována jedné aplikaci geometrické interpretace skalárního součinu. Budeme tedy postupovat podle jednoduchého schématu, které se mi ve výuce při zavádění základních pojmů osvědčilo:

1. motivace (nastínění „o co jde“, formulace základního problému),
2. řešení problému a samotná definice, zdůvodnění zvoleného názvu,
3. příklady a protipříklady, ekvivalentní charakterizace, aplikace.

Uvedené schéma nám připomíná, že ve školské matematice by definice základního pojmu zpravidla neměla být „autonomní“, „samostatná“, ale měla by bezprostředně navazovat na předchozí úvahy.

2 Zavedení skalárního součinu

Máme-li na střední škole zavedeny souřadnice vektoru a sčítání vektorů, můžeme přikročit k zavedení skalárního součinu.

Předně je třeba si uvědomit, že s vektory nyní pracujeme v rámci analytické geometrie, přestože je jejich abstraktní zavedení jako prvků jisté algebraické struktury – vektorového prostoru – na geometrii nezávislé. Analytická geometrie však není nějaká „nová“ geometrie, ale žákům již známá geometrie, jejíž výsledky však zapisujeme pomocí souřadnic, a vektory si v této fázi představujeme jako klasické „šipky“.

Jednou z podstatných složek geometrie je její metrická část formalizující to, co z běžného života dobře známe: délky, vzdálenosti, velikosti úhlů. V rámci analytické geometrie je tedy třeba vyřešit *dva základní problémy*: jak zapsat pomocí souřadnic:

a) vzdálenost dvou bodů (tj. délku vektoru),
b) odchylku dvou vektorů.

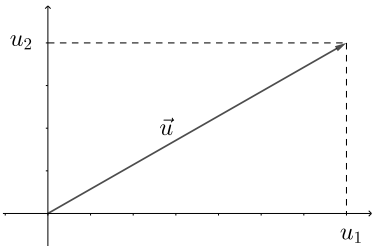
Pokud tyto dvě základní úlohy úspěšně vyřešíme, získáme základ k dalším geometrickým úvahám, například budeme moci hledat vzdálenosti bodu od

podprostoru (či od nadroviny), obecně vzdálenost dvou podprostorů, odchylku dvou přímek, přímky od podprostoru (či od nadroviny) nebo odchylku dvou nadrovin. Všimněme si, že zatím o skalárním součinu nemusíme vůbec hovořit.

a) Norma vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Pro nenulový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ budeme vycházet z obrázku 1. Vzhledem k tomu, že pracujeme v kartézské soustavě souřadnic, můžeme na vzniklý pravoúhlý trojúhelník s délkami odvěsen $|u_1|$, $|u_2|$ aplikovat Pýthagorovu větu. Pro délku přepony, což je hledaná norma $\|\vec{u}\|$ nenulového vektoru $\vec{u}$, pak platí

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 \,.$$



Obr. 1: Norma vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Samotnou normu vektoru tedy definujeme takto:

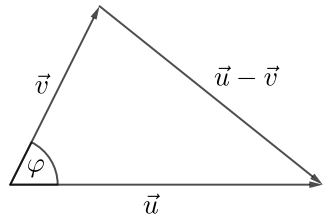
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \,.$$

Platnost tohoto definičního vztahu rozšíříme i na nulový vektor $\vec{o}$, jeho norma je tedy nulová. Tím je první základní problém vyřešen.

b) Odchylka dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *a* $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Odchylku dvou nenulových vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ určíme opět na základě školské planimetrie. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lze doplnit na trojúhelník vektorem $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$, v němž hledáme jeden vnitřní úhel φ. Ten však snadno vypočteme pomocí kosinové věty:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi \,.$$



Obr. 2: Odchylka dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Druhé mocniny norem rozepíšeme dle vztahu odvozeného výše:

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad + v_1^2 + v_2^2 \quad - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi\,.$$

Druhé mocniny se odečtou:

$$(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2) + (u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2) = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \quad - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi\,,$$

a po vydělení zbylé rovnosti číslem -2

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi$$

vznikne elegantní rovnost[1]

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi\,.} \tag{2}$$

Vidíme, že na levé straně vznikl výraz $u_1v_1 + u_2v_2$, pomocí něhož lze nalézt odchylku dvou nenulových vektorů. Pokud bychom jej provizorně označili $(\vec{u}, \vec{v})$, tak bychom s jeho pomocí mohli zapsat i řešení předchozího problému – normu vektoru:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}\,.$$

Odchylka dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je tedy takové $\varphi \in [0, \pi]$, pro které platí:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}\sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}}\,.$$

Tuto rovnost pak můžeme při abstraktním budování analytické geometrie použít při definici odchylky dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Z předchozích úvah plyne zásadní poznatek: pomocí výrazu $(\vec{u}, \vec{v})$ lze zapsat *řešení obou základních problémů*: nalezení normy vektoru i odchylky dvou nenulových vektorů. Tento výraz tedy hraje klíčovou roli v celé analytické geometrii v dvourozměrném eukleidovském prostoru. Zcela analogické úvahy bychom mohli provést v n-rozměrném prostoru. Skalární součin by pak měl známý tvar

$$(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n\,.$$

Čtenář obeznámený se základy diferenciální geometrie ploch zde může rozpoznat propedeutiku první základní formy plochy, což je vlastně skalární součin, který je obecně nekonstantní. Zjednodušeně můžeme říci, že první základní forma dané plochy určuje její vnitřní geometrii.

[1] Rovnost (2) lze také snadno ověřit pomocí součtového vzorce pro funkci kosinus. Pokud s osou x svírá vektor $\vec{u}$ úhel α a vektor $\vec{v}$ úhel β, platí pro jejich souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2) = (\|\vec{u}\| \cos\alpha, \|\vec{u}\| \sin\alpha)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2) = (\|\vec{v}\| \cos\beta, \|\vec{v}\| \sin\beta)$. Kosinus odchylky $\varphi = \beta - \alpha$ těchto dvou vektorů je tedy roven: $\cos\varphi = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}\frac{v_1}{\|\vec{v}\|} + \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}\frac{v_2}{\|\vec{v}\|}$, tj. $\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

3 Samotný termín „skalární součin“

V předcházející kapitole jsme ukázali, že klíčovou roli v analytické geometrii hraje výraz

$$(\vec{u},\vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2\,.$$

Prozkoumejme tedy nyní jeho vlastnosti. Rozepsáním do souřadnic pozorujeme, že je symetrický:

$$(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u})\,.$$

Když zavádíme skalární součin, tak již máme k dispozici operaci součet vektorů. Přirozenou otázkou tedy je, jak se zkoumaný výraz chová, dosadíme-li součet dvou vektorů do jedné z jeho složek:

$$(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \Big((u_1,u_2),(v_1+w_1,v_2+w_2)\Big) = u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)$$

$$= u_1v_1+u_2v_2 \;\;+\;\; u_1w_1+u_2w_2 = (\vec{u},\vec{v})+(\vec{u},\vec{w})\,.$$

Zkoumaný výraz $(\vec{u},\vec{v})$ je tedy vzhledem k součtu vektorů distributivní. Chová se tedy jako součin. Vhodné značení, které bude usnadňovat výpočty, je tedy takové, které bude evokovat součin:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2\,.$$

Nejedná se však o operaci, výsledkem totiž není vektor, ale číslo, skalár[2]. Proto se $\vec{u}\cdot\vec{v}$ nazývá *skalární součin.*

Například ve středoškolské učebnici [3] je sice na straně 40 odvozena distributivita skalárního součinu, avšak pouze jako pravidlo pro počítání, není dána do souvislosti s volbou samotného termínu „skalární součin“.

Ve vysokoškolské matematice lze motivovat volbu termínu „skalární součin“ také tím, že je možné jej zapsat jako součin matic:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\,.$$

Zavedením pojmu však práce nekončí. V případě skalárního součinu je třeba názorně ukázat geometrickou interpretaci a její mocné aplikace, případně některé významné speciální příklady. Těmto problémům se budeme stručně věnovat v následujících kapitolách.

4 Kolmost

1. Kolmost dvou vektorů $\vec{u} = (u_1,u_2)$ a $\vec{v} = (v_1,v_2)$ lze pomocí skalárního součinu charakterizovat snadno; stačí ve vztahu (2) zvolit $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Potom $\cos\varphi = 0$, takže[3]

$$\vec{u}\perp\vec{v} \quad\Longleftrightarrow\quad u_1v_1+u_2v_2 = 0\,.$$

[2] Z latinského *scālae, -ārum, f.* — žebřík, schody.

[3] Vzhledem k tomu, že odchylka vektorů $\varphi\in[0,\pi]$, dostáváme ekvivalenci.

Tento postup je sice krátký a přímočarý, lze však zvolit „geometričtější“ přístup, který je naznačen v bodě 2.

2. Charakterizaci kolmosti dvou vektorů znázorníme přímo pomocí podobnosti pravoúhlých trojúhelníků, viz obrázek 3 (první z nich má odvěsny obarveny červeně, druhý modře):

$$\frac{|u_2|}{|u_1|} = \frac{|v_1|}{|v_2|}\,,$$

tj.

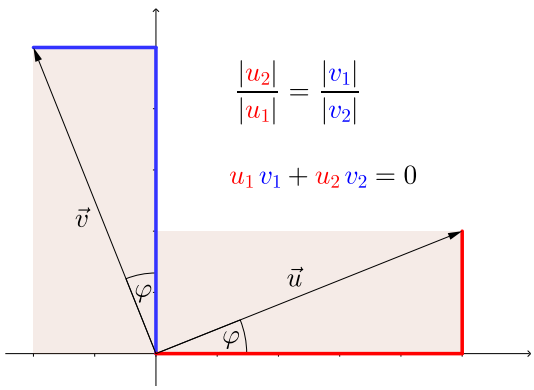
$$|u_1||v_1| = |u_2||v_2|\,.$$

Vzhledem k tomu, že druhý (modrý) trojúhelník je v následujícím kvadrantu, dojde ke změně znaménka u právě jedné ze souřadnic, proto

$$u_1 v_1 = -u_2 v_2\,,$$

neboli

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0\,.$$



Obr. 3: Znázornění kolmosti dvou vektorů na základě podobnosti trojúhelníků

3. Jiné znázornění charakterizace kolmosti dvou vektorů je založeno na poznatku, že obě úhlopříčky v obdélníku mají stejnou délku. Je-li $\vec{u} \perp \vec{v}$, tak doplněním na rovnoběžník dostáváme obdélník; délky obou jeho úhlopříček se tedy rovnají:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\,\| = \|\vec{u} - \vec{v}\,\|\,.$$

Umocněním na druhou a užitím rovnosti $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$ dostáváme

$$\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2\,,$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}\,,$$

tj. nutně

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0\,.$$

4. Při odvození vztahu pro odchylku dvou vektorů jsme vycházeli z kosinové věty. Pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ tato věta přechází ve větu Pýthagorovu:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\,.$$

Rozepsáním pravé strany

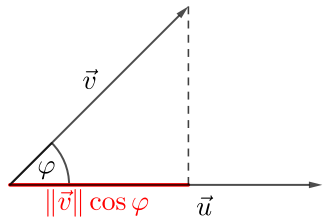
$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

dostáváme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0\,.$$

5 Geometrická interpretace skalárního součinu

Ze vztahu (2), tj. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi$ ihned plyne geometrická interpretace skalárního součinu. Stačí si uvědomit, že $\|\vec{v}\| \cos\varphi$ je (orientovaná) velikost projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$, viz obrázek 4.



Obr. 4: Projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$

Skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tedy udává orientovanou délku projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$, jež je vynásobena délkou vektoru $\vec{u}$. Toto vynásobení si můžeme představit takto: (orientovanou) projekci zaznačíme na vektor $\vec{u}$ (jako na obr. 4), následně si představíme, že je tento vektor jednotkový a vyrobený z dokonale pružné gumy. Natáhneme-li jej na původní velikost, bude (orientovaná) délka červeného nataženého úseku rovna skalárnímu součinu $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Situace se podstatně zjednoduší, je-li vektor $\vec{u}$, do jehož směru promítáme, jednotkový. Potom lze říci, že skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ udává přímo orientovanou délku projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$.

Na základě této geometrické interpretace lze snadno nahlédnout některé důležité výsledky analytické geometrie i lineární algebry. Například charakterizace kolmosti je ihned zřejmá: velikost projekce je nulová, tj. $\vec{u} \perp \vec{v} = 0$ právě tehdy, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

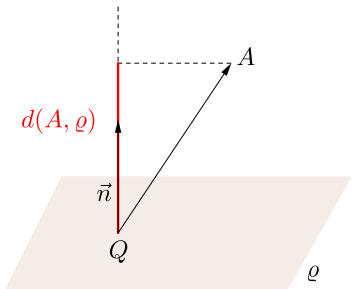
6 Vzdálenost bodu od nadroviny

V této kapitole naznačíme velmi jednoduché odvození vzorce pro vzdálenost bodu od nadroviny. Vyjdeme z geometrické interpretace skalárního součinu. Budeme tak ilustrovat fakt, že důkladně provedené zavedení nového pojmu je dobrým základem pro další látku.

Mějme nadrovinu ϱ (např. přímka v rovině, rovina v trojrozměrném prostoru). Zvolme jeden bod této nadroviny a označme jej Q, normálový vektor této nadroviny označme $\vec{n}$. Potom obecnou rovnici této nadroviny lze psát ve tvaru $\varrho : \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$, kde X je libovolný bod nadroviny ϱ.

Určeme nyní vzdálenost $d(A, \varrho)$ bodu A (který neleží v ϱ) od nadroviny ϱ. Z obrázku 5 je zřejmé, že je rovna absolutní hodnotě délky projekce vektoru $A - Q$ do směru normálového vektoru $\vec{n}$. Vezmeme-li místo vektoru $\vec{n}$ příslušný vektor jednotkový, tj. $\dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, můžeme tuto délku projekce zapsat pomocí skalárního součinu:

$$d(A, \varrho) = \left| (A - Q) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| .$$



Obr. 5: Vzdálenost bodu A od nadroviny $\varrho : \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$

Drobnou úpravou dostáváme

$$d(A, \varrho) = \frac{|\vec{n} \cdot (A - Q)|}{\|\vec{n}\|} . \tag{3}$$

Porovnáme-li výraz v čitateli zlomku na pravé straně v (3) s obecnou rovnicí nadroviny $\varrho : \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$, vidíme, že je to její levá strana, do níž je dosazen bod A.

Rozepíšeme-li rovnost (3) v souřadnicích, dostaneme:

- v rovině: $A = [a_1, a_2]$, přímka $p : (a, b) \cdot (x - q_1, y - q_2) = 0$, tj. $\vec{n} = (a, b)$, $Q = [q_1, q_2]$, $X = [x, y]$ a $p : ax + by + c = 0$, kde $c = -aq_1 - bq_2$,

$$d(A, p) = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} ;$$

- v prostoru: $A = [a_1, a_2, a_3]$, rovina $\varrho : (a, b, c) \cdot (x - q_1, y - q_2, z - q_3) = 0$, tj. $\vec{n} = (a, b, c)$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$, $X = [x, y, z]$ a $\varrho : ax + by + cz + d = 0$, kde $d = -aq_1 - bq_2 - cq_3$,

$$d(A, \varrho) = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

7 Závěr

Na pojmu „skalární součin“ jsem se pokusil ukázat, že důkladně provedené motivační úvahy:

- jsou integrální součástí matematického vzdělávání, nejsou tedy pouhou zajímavostí, kterou lze z časových důvodů vynechat,
- nezdržují, naopak, velmi usnadňují další postup v matematice:

  geometrický význam skalárního součinu → kolmost → obecná rovnice nadroviny → vzdálenost bodu od nadroviny,
- usnadňují porozumění celkové stavbě a provázanosti matematiky:

  norma a odchylka → skalární součin jako symetrická a pozitivně definitní bilineární forma → první základní forma plochy.

Upozornil jsem také na to, že některé základní pojmy nemusejí být dostatečně srozumitelné ani těm absolventům středních škol, kteří si vybrali za jeden ze svých oborů studia učitelství matematiky. Abstrakce, s níž se pak setkávají při svém vysokoškolském studiu, pak nemá dostatečnou oporu v názorných a konkrétních úvahách, které by měly každé abstrakci předcházet.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*, 3. vyd., Matfyzpress, Praha, 2010.

[2] J. Bečvář, V. Dlab, *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, SERIFA, Praha, 2016.

[3] M. Kočandrle, L. Boček, *Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie*, 2. vyd., Prometheus, Praha, 2005.

[4] J. Kolouchová, J. Řepová, V. Šobr, *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 5. část*, SPN, Praha, 1986.

[5] M. Sekanina, L. Boček, M. Kočandrle, J. Šedivý, *Geometrie I*, SPN, Praha, 1986.

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
halas@karlin.mff.cuni.cz

O NĚKTERÝCH NEDOSTATCÍCH VE VÝUCE STŘEDOŠKOLSKÉ GEOMETRIE

Pavel Leischner

Příspěvek je zaměřen na metodiku řešení konstrukčních úloh. Pomocí konkrétních příkladů upozorňuje na některé nedostatky výuky učebního celku a s nimi související jevy. Současně navrhuje cesty k nápravě.

1 Úvod

Ke zúžení původně zamýšleného obsahu příspěvku na problematiku řešení konstrukčních úloh mne motivoval následující dopis:

Vážený pane doktore,

při hledání rady k nějakému problému mi Google nabídl Vaši práci METODY ŘEŠENÍ PLANIMETRICKÝCH ÚLOH (2012).

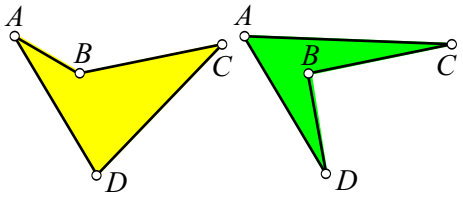
Během letmé prohlídky jsem se musel pozastavit nad Vašimi závěry ze strany 10. Podobné úvahy jsme v naší „socialistické" škole rozebírali již v sedmé třídě a tolik si pamatuji, že si máme dávat pozor a že nalezená řešení máme pečlivě porovnat se zadáním. To jste Vy, k mé lítosti, neučinil, takže jste čtenáři vnutil své řešení, cituji „BCA_1". Ve skutečnosti jste učinil několik chyb najednou: Vámi nalezené řešení je ve skutečnosti trojúhelník A_1CB, takže nekoheruje se zadáním, které požaduje sestrojení trojúhelníku ABC. Další dva trojúhelníky A_2CB a A_3CB jste čtenáři neukázal, ačkoliv poslední zmíněný zadání vyhovuje. Promiňte mi, že se Vám troufale pletu do vědy s pouhými ZDŠkovými znalostmi, také jsem v tomto oboru již několik desítek let nesledoval moderní vývoj. Ale pokud tento vývoj skutečně Vaše počínání ospravedlňuje, pak je asi nejvyšší čas začít studovat Korán a Šaríá, protože budoucnost bude patřit jiné vývojové větvi lidstva. Pokud s vědeckou pokorou přijmete mé výtky, kolegiálně přejdete mé ironické pošťuchování a tento Váš postup vyústí v „Druhé, opravené vydání", hlavně na Internetu. Pak se, nejméně do příštích Televizních novin, poněkud uklidním a budu se i nadále věnovat počítačové fysice.

RNDr. Jan Weber

P.S. S výhradou dalších nesouhlasných postojů k jiným kapitolám.

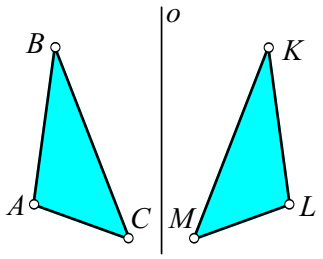
2 Poznámka k označování mnohoúhelníků

Mé dřívější rozhovory s některými učiteli ZŠ i dopis uvedený v úvodu vedou k domněnce, že na některých školách existují zvláštní pravidla pro označování n-úhelníků. Proto přidávám poučení o všeobecně známých zásadách značení s omluvou většině čtenářů.



Obr. 1: Nekonvexní čtyřúhelníky $ABCD$ a $ACBD$

Při zápisu n-úhelníku pomocí jeho vrcholů je důležité pořadí, v jakém napíšeme vrcholy, ale nezáleží na tom, od kterého z nich začínáme, ani kterým směrem postupujeme, neboť na středních a základních školách pracujeme s neorientovanými n-úhelníky. Například tentýž čtyřúhelník (na obr. 1 vlevo) lze označit osmi různými zápisy: $ABCD, ADCB, BCDA, BADC$, $CDAB, CBAD, DABC$ a $DCBA$. Čtyřúhelník $ADBC$ je ovšem při nezměněné vzájemné poloze bodů A, B, C a D jiný (obr. 1 vpravo).



Obr. 2: K zápisu shodnosti trojúhelníků

Pro zápis vztahu mezi dvěma geometricky příbuznými útvary (vztahu podobnosti, souměrnosti apod.) však platí pravidlo uvádět vrcholy v odpovídajícím sledu.

Například na obr. 2 jsou zobrazeny dva trojúhelníky ABC a KLM, souměrně sdružené podle osy o. Správné zápisy jejich shodnosti jsou $\triangle ABC \simeq$ $\simeq \triangle LKM$, $\triangle ACB \simeq \triangle LMK$ apod. Aniž bychom museli prohlížet obrázek, usoudíme přímo ze zápisu, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$, $|MK| = |CB|$ apod.

Chybné zápisy jsou například $\triangle ABC \simeq \triangle MLK$, $\triangle ACB \simeq \triangle KLM$.

3 K metodice řešení konstrukčních úloh

Řešení konstrukčních úloh, zejména těch složitějších, rozvíjí kreativitu a geometrické myšlení. Žákům však činí potíže. Jan Vyšín ([9], str. 147) k tomu uvádí:

Je všeobecně známo, že tyto úlohy působí na školách větší potíže než úlohy jiného druhu. Obtížnost řešení konstrukčních úloh pro žáky středních škol má asi více příčin. Jednou z nich je ta okolnost, že konstrukční úlohy nejsou systematicky tříděny a nejsou propracovány metody řešení jednotlivých typů[1]*. Další*

[1] Od roku 1962 se v tomto směru mnohé zlepšilo (poznámka autora).

příčinou potíží je, že každá konstrukční úloha je vlastně slovní úloha, která se řeší úsudkem, neboť konstrukční geometrie nemá k dispozici takový kalkul jako má např. algebra.

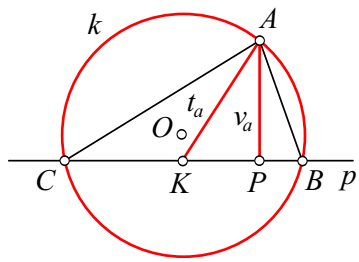
Dodejme, že při řešení konstrukčních úloh si nejprve musíme situaci představit a hledat takové vztahy mezi danými prvky a ostatními částmi útvaru, které by konstrukci umožnily. Tradiční postup řešení rozlišuje čtyři etapy. Jsou to: *Rozbor*, popis a provedení *konstrukce*, *zkouška správnosti* (důkaz) a nakonec *diskuse řešitelnosti a počtu řešení*. Při praktické výuce se často asi provádí jen konstrukce. Navíc se často řeší jen snadné úlohy, jejichž zdůvodnění je zřejmé.

Středoškoláci, se kterými se setkávám, většinou neumí provést rozbor a diskusi. Pokud úlohu vyřeší, často uvádí zbytečně podrobný symbolický zápis (například do několika kroků rozvádí konstrukci osy úsečky). K tomu narýsují nebo od ruky nakreslí obrázek, aniž by zdůvodnili postup. Většinou jen lepší řešitelé matematických soutěží jej vysvětlují.

Výuka bude efektivnější, když od studentů nebudeme požadovat rozepisování základních konstrukcí do detailů. Symbolické zápisy konstrukce se mohou doplňovat o zdůvodnění formulované slovy. Množinu základních konstrukcí rozšiřujeme podle dosažené úrovně dovedností. Může do ní patřit například sestrojení osy úsečky, trojúhelníku ze tří daných stran, pravoúhlého trojúhelníku s danou přeponou a odvěsnou apod. Ušetřený čas pak lze využít k důslednějšímu provedení rozboru a diskuse.

Konkrétní metodiku si ukážeme na komentovaném řešení úlohy 1.

Úloha 1. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno v_a, t_a a poloměr r opsané kružnice.

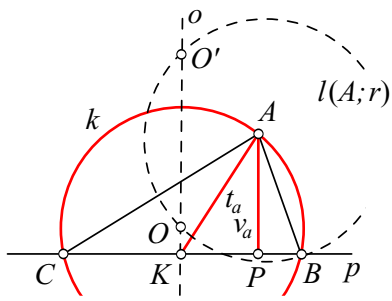


Obr. 3: První část rozboru úlohy 1

Řešení s komentářem. Při *rozboru* načrtneme požadovaný útvar, vyznačíme dané prvky (obr. 3) a analýzou nakresleného obrázku hledáme postup možného řešení. Žáci by měli sami objevit, že znázornění prvku r lze nahradit nakreslením opsané kružnice k. Zřejmě je i napadne vhodná cesta k vyřešení, jež začíná sestrojením trojúhelníku AKP, kde K je střed strany BC a P pata výšky z vrcholu A.

Po jeho sestrojení zbývá jen najít vrcholy B a C. Lze je sestrojit jako průnik opsané kružnice k s přímkou $p = \leftrightarrow KP$. Přímka je dána a k sestrojení kružnice

zbývá najít její střed S. To je asi nejnáročnější krok rozboru. Nakonec dojdou k závěru, že osa o strany BC je kolmice na přímku p v bodě K a střed O kružnice k je průsečíkem této osy s kružnicí $l(A;r)$, obr. 4.



Obr. 4: Druhá část rozboru úlohy 1

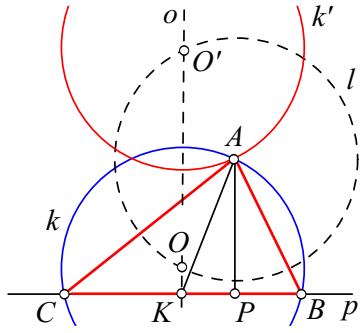
Žák by měl umět popsat rozbor slovy. V písemném zápisu může uvést jen obrázek, pokud zdůvodnění přidá do zápisu konstrukce například takto:

1. $\triangle AKP$ ($|AK| = t_a$, $|AP| = v_a$, $|\sphericalangle KPA| = 90°$).
2. $p = \leftrightarrow KP$.
3. Osa o úsečky BC. Je to kolmice na p v bodě K.
4. Střed opsané kružnice: $O \in o \cap l(A;r)$.
5. $B, C \in p \cap k(O;r)$.
6. $\triangle ABC$.

Konstrukce je (s ohledem na následující diskusi) provedena na obr. 5, 7 a 8.

Diskuse řešitelnosti a počtu řešení si klade za úkol stanovit počet řešení úlohy v závislosti na možných hodnotách zadaných prvků. Analýzou jednotlivých kroků konstrukce se zjišťuje, jaké situace mohou nastat, a syntézou dílčích výsledků se provede závěr.

Nejsem si jist, zda jsou již kritéria pro určování počtu řešení nepolohové konstrukční úlohy jednotná. Přístup se totiž liší v různých publikacích, i když mnohé z nich slouží jako schválené učebnice.



Obr. 5: Konstrukce pro $v_a < t_a$, jedno řešení

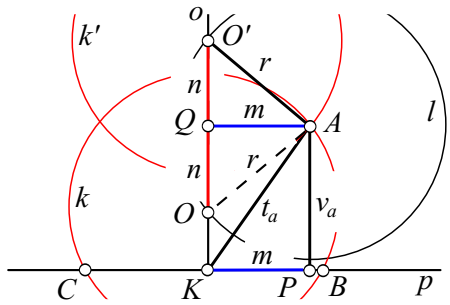
Někde, například v [1], [3], [7] a [8], se za různá řešení nepolohové úlohy považují útvary, které se liší aspoň v jednom stejně označeném prvku[2]. Taková dohoda má jistou nevýhodu. Výsledkem je větší počet různých řešení a někdy může jediný sestrojený útvar představovat aspoň dvě různá řešení.

V jiných učebnicích, například [6] a [4], jsou pokládány za různá řešení jen ty útvary, které nejsou shodné. To znamená, že je nelze přemístit na sebe tak, aby se kryly. Taková dohoda řeší problém několika kryjících se útvarů a navíc zjednodušuje řešení úlohy. Počet různých řešení je nižší. Budeme ji zde užívat.

V úlohách s náročnější diskusí, mezi něž patří i ta, kterou se zabýváme, může být tento proces pro žáky velmi obtížný. Vyhnout se mu můžeme zadáním konkrétních hodnot daných prvků.

Měli bychom si však uvědomit, že provádění diskuse obecně zadané úlohy je cenné pro rozvoj matematických dovedností, zejména v oblasti geometrických představ a kombinatorického myšlení. Proto bych doporučoval zařazovat i úlohy s náročnější diskusí, ale úměrné dosažené úrovni ve třídě. Žáci by si měli učinit představu o tom, jaké situace mohou nastat a měli by alespoň „geometricky“ popsat podmínky jejich vzniku. Hledání odpovídajících vztahů mezi zadanými veličinami a jejich zjednodušování lze u náročnějších úloh vynechat, nebo přesunout do pozdější doby, kdy budou žáci matematicky vyspělejší.

Vraťme se k naší úloze. Po průzkumu řešitelnosti jednotlivých kroků konstrukce zjistíme, že potíže mohou nastat v krocích 1, 4 a 5. Každý z nich je nutno v daném pořadí prozkoumat.



Obr. 6: K diskusi úlohy 1

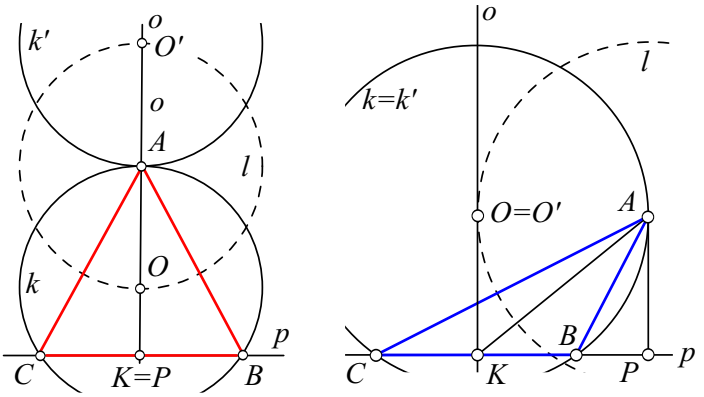
Za účelem zjednodušení zápisů označíme Q patu kolmice z vrcholu A na přímku o a položíme

$$m = \sqrt{t_a^2 - v_a^2} \quad \text{a} \quad n = \sqrt{r^2 - m^2} = \sqrt{v_a^2 + r^2 - t_a^2}. \tag{1}$$

[2] Nepřihlížíme k indexům nebo jiným rozlišovacím symbolům. J. Polák ([3], str. 401) s odkazem na [9] uvádí: Jsou-li $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ dva trojúhelníky, které jsou řešením dané nepolohové úlohy, pak tato řešení pokládáme za totožná právě tehdy, když je lze přemístit v rovině tak, že zároveň splyne bod A_1 s bodem A_2, bod B_1 s bodem B_2 a bod C_1 s bodem C_2, tj. platí-li, že $\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2$.

Z pravoúhlých trojúhelníků AKP a $AO'Q$ znázorněných na obr. 6 plyne, že $m = |KP| = |QA|$ a $n = |O'Q| = |OQ|$. Úloha je řešitelná, právě když

$$t_a \geq v_a, \quad r \geq m \quad \text{a} \quad |v_a - n| < r. \tag{2}$$



Obr. 7: a) $2r > v_a = t_a$, b) $r = \sqrt{t_a^2 - v_a^2} > v_a$

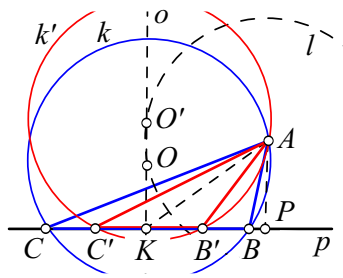
Vzhledem ke třetí z podmínek (2) nemůže platit rovnost v prvních dvou vztazích současně. Dále bude užitečné zabývat se nejprve situacemi, kdy v jednom z nich nastane rovnost, a pak vyšetřit zbytek:

a) Pokud platí $t_a = v_a$ je $m = 0$. Místo trojúhelníku AKP sestrojíme úsečku $AP \perp p$ délky v_a. Vztahy (2) se zjednoduší na tvar $2r > v_a = t_a$, což je zřejmé i z konstrukce znázorněné na obr. 7 vlevo. Úloha pak má jediné řešení, rovnoramenný trojúhelník ABC.

b) Za předpokladu $m = r$ se podmínky řešitelnosti, tedy vztahy (2), zredukují na tvar $t_a^2 = v_a^2 + r^2$ a $r > v_a$. Platí $k = k'$. Úloha má jediné řešení znázorněné na obr. 7 vpravo.

c) Jestliže ve vztazích (2) platí ostré nerovnosti a navíc $r \leq v_a + n$, má úloha rovněž jediné řešení, protože kružnice k' neprotne přímku p ve dvou různých bodech (obr. 5).

d) Platí-li ve vztazích (2) jen ostré nerovnosti a navíc $r > v_a + n$, má úloha dvě řešení, která jsou znázorněna na obr. 8.



Obr. 8: Konstrukce pro $v_a < t_a$, dvě řešení

Domnívám se, že pro školní výuku takto pojatá diskuse bohatě postačuje. Osobně bych se spokojil i s její propedeutikou, kdy žák místo uvádění všech vztahů načrtne obrázky k situacím a) až d).

Uvedenou diskusi lze shrnout a zapsat podobně, jak uvádí [7] na str. 223 nebo [8] na str. 131. Podmínky pak lze ještě upravit na přehlednější soustavy vztahů v nichž se nevyskytují odmocniny. Je to spíše algebraické cvičení vhodné pro řešitele matematických olympiád. Pro úplnost postup uvedu.

Situace a) a b) již nezjednodušíme, proto v dalších úvahách před shrnutím diskuse budeme pracovat už jen s ostrými nerovnostmi ve vztazích (2). Poslední z nich lze umocnit a dalšími ekvivalentními úpravami převést na tvar

$$v_a - \frac{t_a^2}{2v_a} < \sqrt{v_a^2 + r^2 - t_a^2}. \tag{3}$$

Další umocnění již není ekvivalentní úpravou, proto rozlišíme dvě situace.

1. Za předpokladu $v_a - t_a^2/2v_a < 0$ vztah (3) platí a podmínky řešitelnosti lze zjednodušit na tvar

$$r^2 + v_a^2 > t_a^2 > 2v_a^2. \tag{4}$$

   Přitom dvě řešení nastanou, platí-li navíc $v_a + \sqrt{v_a^2 + r^2 - t_a^2} < r$, neboli $t_a^2 > 2rv_a$.
2. Nechť $v_a - t_a^2/2v_a \geq 0$, pak $2v_a^2 \geq t_a^2$. Po umocnění nerovnosti (3) zjistíme, že $t_a^2 < 2rv_a$.

   Za těchto dvou podmínek má úloha jediné řešení. (Prostřední ze vztahů (2) lze ekvivalentně upravit na $t_a^2 \leq v_a^2 + r^2$. Netřeba se jím zabývat, neboť je již splněn vzhledem k obecně platné nerovnosti $2rv_a \leq \leq v_a^2 + r^2$.)

Na závěr můžeme shrnout diskusi takto:

I. Úloha má jediné řešení, právě když platí některá z následujících podmínek:
   a) $2r > v_a = t_a$,
   b) $t_a^2 = v_a^2 + r^2$ a $r > v_a$,
   c) $r^2 + v_a^2 > t_a^2 > 2v_a^2$ a $t_a^2 \leq 2rv_a$,
   d) $2v_a^2 \geq t_a^2$ a $t_a^2 < 2rv_a$.

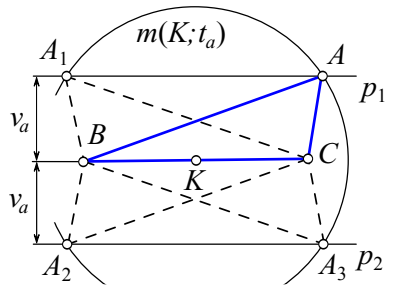
II. Úloha má dvě řešení, právě když $r^2 + v_a^2 > t_a^2 > 2v_a^2$ a $t_a^2 > 2rv_a$.

III. Pro ostatní situace úloha nemá řešení.

4 Přežívající „zásada“

Při konstrukcích trojúhelníků se používá na první pohled rozumně vypadající zásada:

Vyskytuje-li se v zadání délka strany trojúhelníku, pak stačí úlohu řešit jen v jedné polorovině, do jejíž hraniční přímky danou stranu umístíme.



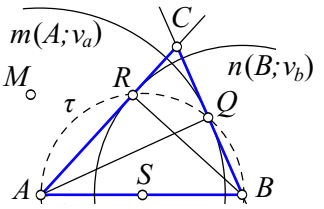
Obr. 9: Konstrukce trojúhelníku ABC, je-li dáno a, v_a, t_a

Zdůvodňuje se tvrzením, že trojúhelníky sestrojené v opačné polorovině nepředstavují další řešení, protože jsou osově souměrné s těmi již nalezenými. Jako příklad se uvádí úlohy typu sestrojit trojúhelník ABC, je-li dáno a, v_a, t_a. Na obr. 9 vidíme řešení, které vychází z umístění úsečky BC.

Pravidlo však u některých konstrukcí nefunguje, protože pomocný prvek určující další řešení ve zvolené polorovině se může vyskytovat v opačné polorovině a tedy jej při takovém omezení nesestrojíme. Proto se uvedená zásada musí užívat opatrně, jak ukážeme v řešení úlohy 2.

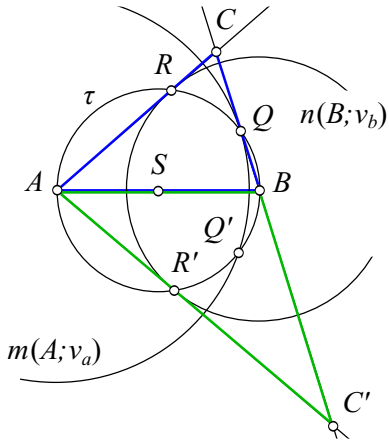
Úloha 2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno c, v_a, v_b a navíc platí $v_a < c$ a $v_b < c$.

Komentář. Zkusme úlohu řešit umístěním strany AB a volbou poloroviny ABM, kde M je zvolený bod, $M \notin \leftrightarrow AB$, a označme po řadě Q, R paty výšek z vrcholů A, B (obr. 10).



Obr. 10: Řešení úlohy 2 v polorovině ABM

Zbývající vrchol C je průsečíkem přímek AR a BQ. Potřebujeme sestrojit body Q a R. Oba leží na Thaletově půlkružnici τ s průměrem AB a navíc $Q \in m(A; v_a)$ a $R \in n(B; v_b)$. Body R a Q jsou tedy průsečíky půlkružnice τ s kružnicemi m a n. Úloha má jediné řešení.



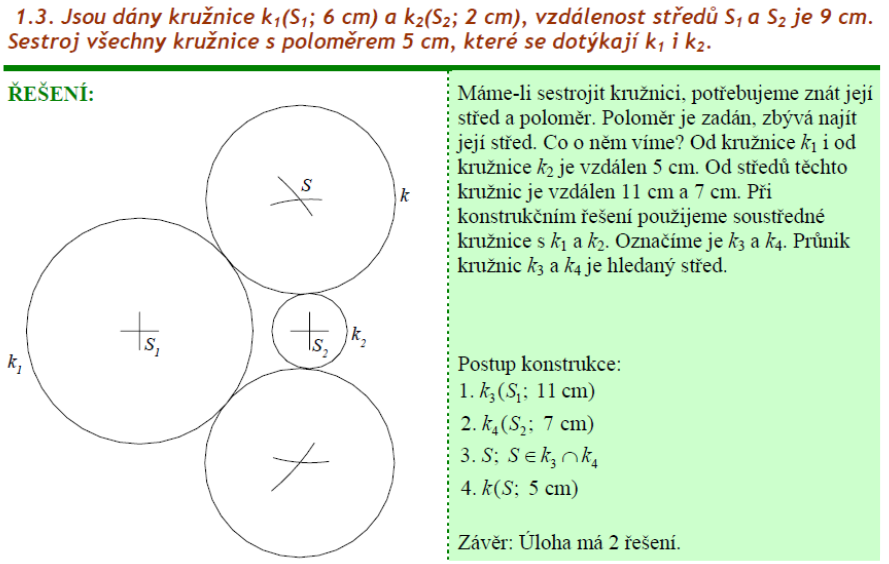
Obr. 11: Řešení úlohy 2 bez omezení na polorovinu

Opravdu má jen jedno řešení? Pokud rozšíříme uvedenou konstrukci na celou rovinu, nalezneme pro výšku z vrcholu A paty Q a Q', a pro výšku z vrcholu B paty R a R'. Ty určují dvě dvojice shodných trojúhelníků ABC. Na obr. 11 jsme jako výsledek vyznačili po jednom z každé dvojice tak, aby se nepřekrývaly.

Úloha má tedy dvě řešení. Pokud je do učebnice zařazena, téměř vždy bývá jako řešení uveden jen jeden výsledný trojúhelník.

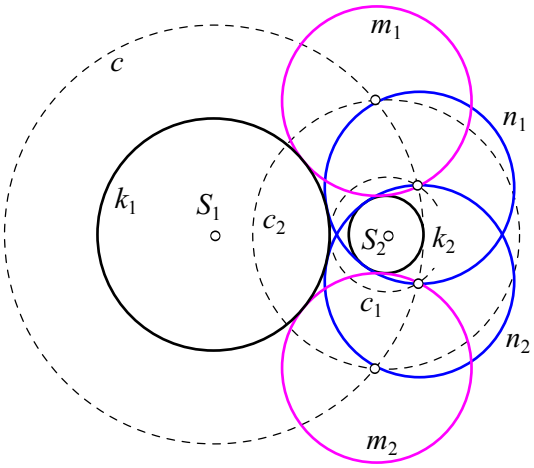
5 Neúplná řešení

Na webu jsem před časem v jednom celkem kvalitním souboru řešených úloh pro přípravu k maturitě nalezl řešenou úlohu, jejíž kopie je na obr. 12.



Obr. 12: Kopie úlohy z webu

Autoři buď učinili chybu v zadání, nebo uvedli neúplné řešení. Sestrojili totiž jen kružnice, které mají s těmi danými vnější dotyk. Existují však ještě další dvě řešení, sice kružnice n_1 a n_2, které mají vnější dotyk s kružnicí k_1 a vnitřní dotyk s kružnicí k_2. Jejich středy leží v průniku kružnic $c\,(S_1; 11\text{ cm})$ a $c_1(S_2; 3\text{ cm})$ (obr. 13).

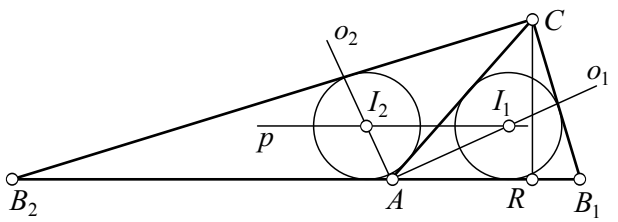


Obr. 13: Úplné řešení úlohy z webu

Při řešení takových úloh by bylo vhodné zavést pojem *ekvidistanta kružnice* (viz např. [5], str. 96) a prozkoumat s žáky její vlastnosti. Ekvidistanta kružnice je zajímavější množinou než ekvidistanta přímky. Je to objekt vhodný k práci s nástroji dynamické geometrie. Snadno se pro ni sestrojí makrokonstrukce a její užívání usnadní žákům osvojit si představy množin dotýkajících se kružnic.

Podobné chyby nalezneme i při konstrukcích trojúhelníku, dokonce i v osvědčených učebnicích. Například v publikaci Planimetrie pro gymnázia [5] je na str. 106 sestrojován trojúhelník ABC, pro který platí $v_c = 3$ cm, $b = 4$ cm, poloměr kružnice vepsané $\rho = 1$ cm.

V řešení této nepolohové jsou zmiňovány tři různé přístupy ke konstrukci, ale sestrojen je jen jeden trojúhelník. Není uvedeno, že střed vepsané kružnice může ležet i na ose přilehlého úhlu, a proto má daná nepolohová úloha dvě různá řečení. Kromě trojúhelníku AB_1C s ostrým úhlem při vrcholu A vyhovuje zadání i trojúhelník AB_2C s tupým úhlem B_2AC (obr. 14).



Obr. 14: Sestrojení trojúhelníku ABC z daných prvků v_c, b, ρ

6 Závěr

Cílem příspěvku bylo upozornit na některé typické chyby v řešení konstrukčních úloh a poskytnout několik námětů k metodice výuky tohoto celku. Úspěšné řešení takových úloh předpokládá důslednou a pozornou práci. Pomohlo by též sjednocení přístupu autorů ke zpracování tématu při tvorbě učebnic.

Čtenáři jistě neušlo, že jsme se omezili na konstrukce s využitím množin bodů daných vlastností. Zájemcům, kteří by se chtěli podrobněji seznámit s metodami řešení konstrukčních úloh a jejich využitím, lze doporučit (v úvodu kritizovanou) práci [2] volně dostupnou na internetu.

Literatura

[1] J. Herman, V. Chrápavá, E. Jančovičová, J. Šimša, *Matematika – Tercie: Geometrické konstrukce*, Prometheus, 1998.

[2] P. Leischner, *Metody řešení planimetrických úloh.* `https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/mrg.html`

[3] J. Polák, *Přehled středoškolské matematiky*, SPN, 1972.

[4] J. Polák, *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, 1991.

[5] E. Pomykalová, *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*, Prometheus, 2004.

[6] A. Šarounová, I. Bušek, J. Růžičková, V. Väterová, *Matematika 8, II. díl*, Prometheus, 1999.

[7] J. Švrček, J. Vanžura, *Geometrie trojúhelníka*, SNTL, 1988.

[8] J. Švrček, *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*, Karolinum, 1998.

[9] J. Vyšín, *Metodika řešení matematických úloh*, SPN, 1962.

RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.
Katedra matematiky Pedagogické fakulty JČU
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
`leischne@pf.jcu.cz`

PROCHÁZKY PO KRYCHLI V SOUVISLOSTECH

Karel Pazourek

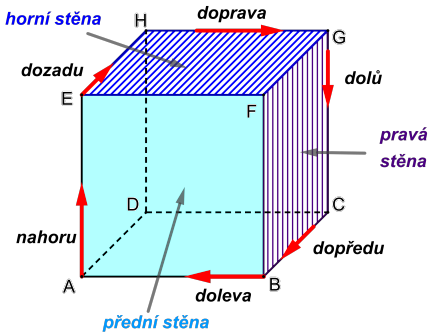
Příspěvek shrnuje aktivity pro rozvíjení prostorové představivosti pomocí tzv. procházek po krychli, které byly zařazeny do výuky na Gymnáziu Třeboň. Dále pak ukazuje návazné úlohy, které zapojují práci se sítí krychle a obsahem ploch.

1 Procházky po krychli a prostorová představivost

Prostorová představivost, tedy úvahy o prostorových útvarech a vztazích mezi nimi, je jednou z významných výzev didaktiky matematiky. V rámci projektu OP VVV SC2/5 *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností* byly proto připraveny materiály[1] pro rozvíjení prostorové představivosti, mimo jiné pomocí tzv. procházek po krychli.

Tento typ úloh představují Molnár, Perný a Stopenová v pracích [1] a [2]. Nicméně společně s J. Robovou a V. Moravcovou jsme vyvinuli vlastní sbírku úloh. Ta je uspořádaná podle jednotlivých typů úloh se stupňující se obtížností.

Pracujeme s modelem krychle jako na obrázku 1.



Obr. 1: Popis stěn a směrů

Vrcholy krychle značíme tak, jak je obvyklé, stěny pak jako levá/pravá, přední/zadní, horní/spodní. Pokud se pohybujeme ve směru hran krychle, užíváme opět značení jako na obrázku. Při pohybu po úhlopříčkách pak používáme spojení „napříč přední stěnou“, „napříč krychlí“ apod.

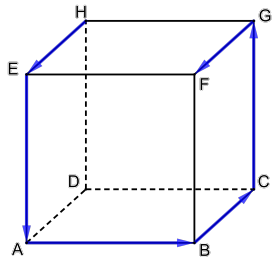
Série úloh několika typů (označovaných písmeny A–G), se kterou jsme pracovali, byla myšlena jako krátká aktivita na 5 až 10 minut, jež zahajovala hodinu.

[1] Materiály z uvedeného projektu budou zveřejněny na jeho webových stránkách `http://pages.pedf.cuni.cz/sc25/`.

Žákům byly zadávány postupně procházky, u jednoduchých úloh ústně, u obtížnějších i zápisem na tabuli. Po chvíli byl výsledek společně zkontrolován. Základní úloha (označená jako typu A) byla jako následující:

Příklad 1. *Uvažme následující procházku po krychli: Vyjdeme z bodu H – dopředu – dolů – doprava – dozadu – nahoru – dopředu. V kterém bodě skončíme?*

Řešením je bod F (viz obrázek 2).



Obr. 2: Model krychle s vyznačenou procházkou

V dalších úlohách typu A pak docházelo i k pohybu po úhlopříčkách krychle. Naproti tomu zadání úloh typu B sděluje posloupnost pohybů, úkolem je určit nejen konečný bod, ale i počáteční. Obtížnější typy úloh zapojují úvahy o vzdálenostech: Krychle má hranu 2, 4 nebo 10 jednotek a pohybujeme se tak nejen po hranách, ale i přímkách s nimi rovnoběžných. Jednotlivé pohyby měří 1 jednotku.

Na třeboňském gymnáziu byly procházky použity v říjnu 2017 jako zahajovací aktivita tří hodin při výuce stereometrie ve 3. ročníku. Cílem bylo studenty motivovat a „rozcvičit“ v prostorových úvahách. Úvodní jednoduché úlohy nečinily větší problémy, zvláště pokud procházka vedla po viditelných stěnách krychle. Obtížnější úlohy s krychlemi o hraně větší než 1 jednotka pak vyžadovaly větší soustředění žáků i delší čas na rozmyšlení.

Úspěšnost se lišila i v závislosti na použitých pomůckách. Jestliže byl na tabuli načrtnut obrázek krychle v pravém nadhledu nebo si jej črtali sami žáci, řešili úlohy rychleji a s menší chybovostí. Avšak pokud si měli situaci jen představovat, staly se úlohy velmi obtížné.

Pilotování těchto úloh i na Gymnáziu Na Pražačce a na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v programu učitelství je shrnuto v článku [3].

2 Procházky v souvislostech

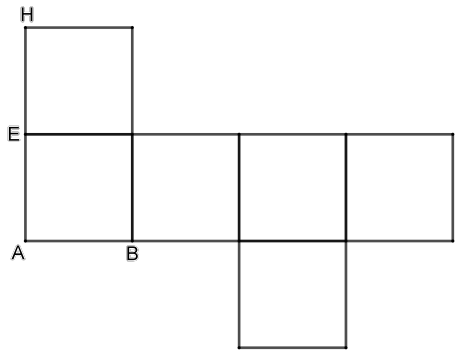
Procházky po krychli můžeme využít i dalšími způsoby, nejen jako rozcvičku na úvod hodiny. Jednou možností je prodlužování procházek tak, že si studenti budou muset poznamenávat trasu – budou muset vymyslet efektivní zápis takových procházek. Rovněž je možné pokládat doplňující otázky, které mohou zabíhat i do kombinatoriky.

Nyní se však zaměříme na dva typy úloh o síti krychle a obsazích ploch.

2.1 Procházky a sítě krychle

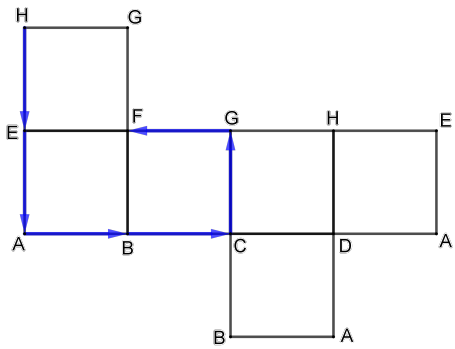
Tato úloha vyžaduje od žáka pracovat nejen s procházkou po povrchu krychle, ale i přecházet mezi představou krychle a její sítí.

Příklad 2. *Zakreslete procházku z příkladu 1 do následující sítě krychle (na obrázku 3).*



Obr. 3: Síť krychle pro zakreslení procházky

Řešení je zobrazeno na obrázku 4. Zakreslení procházky do sítě není jednoznačné, je třeba počítat s různými žákovskými řešeními.[2]



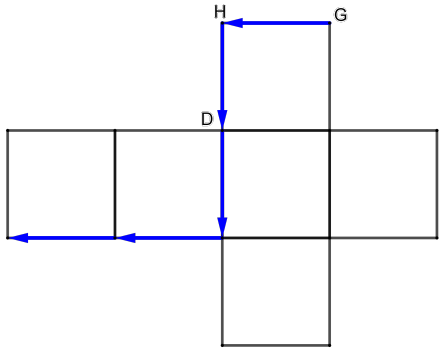
Obr. 4: Síť s vyznačenou procházkou

Pokud popíšeme v síti v zadání všechny vrcholy, úloha se stane jednodušší. Obtížnost úlohy také můžeme měnit podobou zadané sítě a umístěním obrazů daných vrcholů krychle v síti.[3]

Rovněž zajímavá je inverzní úloha.

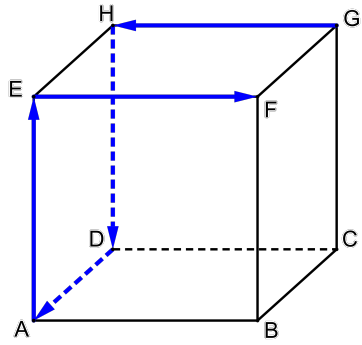
[2] Nadané žáky můžeme i vyzvat, aby spočítali počet takových zakreslení.
[3] Připomeňme, že krychle má 11 různých sítí, pokud nepopisujeme vrcholy.

Příklad 3. *Sestavte zadání procházky, která je zobrazena na obrázku 5.*



Obr. 5: Síť s vyznačenou procházkou

Pro řešení je třeba pojmenovat vrcholy krychle v síti, představit si samotnou krychli (alespoň částečně; viz obrázek 6) a poté popsat směry pohybu: Vyjdeme z bodu G – doleva – dolů – dopředu – nahoru – doprava – skončíme v bodě F.

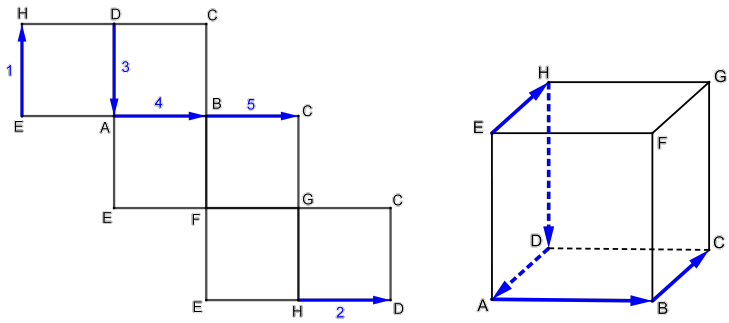


Obr. 6: Model krychle s procházkou

Obtížnost úlohy zvýšíme, pokud budeme pracovat s jiným tvarem sítě krychle nebo se procházka nezobrazí jako jedna souvislá lomená čára, viz obrázek 7.

2.2 Procházky a obsahy ploch

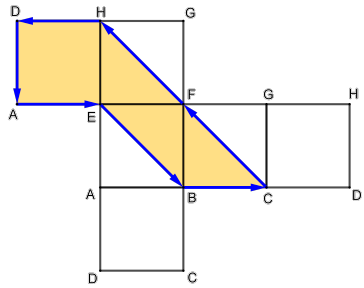
Prostorová představivost může být pomocí procházek rozvíjena i následujícím směrem: Pokud procházka je tvořená uzavřenou křivkou na povrchu krychle, rozděluje povrch na dvě souvislé části. Můžeme se tak ptát na poměr jejich obsahů.



Obr. 7: Síť a model krychle s obtížnější procházkou

Příklad 4. *Vyznačte následující procházku na krychli: Začínáme v bodě B – dozadu – napříč pravou stěnou – napříč horní stěnou – dolů – dopředu – nahoru – napříč přední stěnou. Zkontrolujte, že procházka představuje uzavřenou lomenou čáru, která se neprotíná. Vzniklá lomená čára dělí povrch krychle na dvě části. Určete poměr jejich obsahů.*

Síť krychle spolu s uvedenou procházkou je zachycena na obrázku 8. Snadno z ní odvodíme, že poměr obsahů příslušných ploch je 5 : 7.



Obr. 8: Plochy ohraničené procházkou

3 Závěr

Ve výuce se osvědčily procházky po krychli jako ideální rozcvička při výuce stereometrie. Jednoduché úlohy zvládnou prakticky všichni žáci ve třídě, navíc postupné zvyšování obtížnosti motivuje žáky k lepším výkonům.

Procházky po krychli však lze využít i jinak. Pokud připojíme práci se sítí krychle, dostáváme náročný úkol, kterému je třeba věnovat více času, například v průběhu domácí přípravy. Rovněž spojení procházek s určováním obsahu ploch dává tomuto tématu nový didaktický rozměr, ukazuje propojenost rovinné a prostorové geometrie. Ostatně procházky po krychli se snadno dají spojit i s dalšími oblastmi matematiky, jak je popsáno v článku [3]. Poskytují tak mnoho inspirace jak pro žáky, tak pro učitele.

Literatura

[1] J. Molnár, *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2009.

[2] J. Molnár, J. Perný, A. Stopenová, *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji* [online].
`http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=100`

[3] V. Moravcová, J. Robová, K. Pazourek, *Procházky (nejen) po krychli*, Matematika-fyzika-informatika, v přípravě.

Mgr. Karel Pazourek, Ph.D.
Gymnázium Třeboň
Na Sadech 308
379 26 Třeboň
`kpazourek@gymtrebon.cz`

VYŠETŘOVÁNÍ MNOŽIN BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ – PLANIMETRICKY I METODOU SOUŘADNIC (ZKUŠENOSTI Z VÝUKY)

Eva Davidová

Množiny bodů dané vlastnosti jsou učivem, se kterým se žáci nejčastěji setkávají při výuce planimetrie na základní i střední škole a v analytické geometrii kvadratických útvarů při konstrukci regulárních kuželoseček z jejich fokálních vlastností. Kromě toho je vyšetřování množin bodů dané vlastnosti ve výuce matematiky skrytě rozprostřeno v mnoha dalších probíraných tématech. A protože „objevování“ množiny bodů daných vlastností je významným didaktickým nástrojem, pokusím se shrnout, kde všude je můžeme uplatnit.

1 Osa úsečky, osa úhlu, osa úhlu různoběžek, osa pásu

Žáci základní školy by měli být nejprve seznámeni s definicí uvedených pojmů a pak, třeba i s mírným časovým odstupem, přemýšlet nad otázkami, co je množinou bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různých bodů, od ramen konvexního úhlu, resp. od dvojice různoběžek nebo rovnoběžek. Je na učiteli, aby následnou diskusi moderoval a dohlédl na zapsání přesného závěru, které z nalezených bodů jsou součástí hledané množiny a které nikoli.

2 Střed kružnice opsané a kružnice vepsané trojúhelníku

Osvědčilo se mi vést žáky k uvědomění si faktu, že střed kružnice opsané trojúhelníku je bod, který má od všech vrcholů trojúhelníku stejnou vzdálenost. A to je důvodem, proč musí ležet v průsečíku os stran. Obdobně střed kružnice vepsané trojúhelníku je bodem, který má stejnou vzdálenost od stran trojúhelníku. Proto musí ležet v průsečíku os vnitřních úhlů. Když se k látce po čase náhodným dotazem vrátím, spousta studentů odpovídá bez důkladnějšího zamyšlení a podle toho jejich odpovědi vypadají. Pátrají v paměti a vzpomínají jen na příslušný pojem, ne jeho vlastnost. Tak musím celý proces rozjet aspoň ve zkratce znovu. Proto v posledních letech i na vyšším stupni rozdávám při probírání látky studentům nastříhané trojúhelníky a chci po nich, aby středy obou kružnic překládáním papíru vymodelovali. Věřím, že to není ztráta času. S šikovnějšími žáky lze ověřit překládáním papíru např. i vztahy na Eulerově přímce.

Obdobnými úvahami odvozuji se studenty gymnázia polohu a vlastnosti středů kružnic trojúhelníku připsaných. Tato úloha většinou bývá první, kterou studenti sestrojují samostatně v GeoGebře, pokračujeme konstrukcí Eulerovy přímky, případně Feuerbachovy kružnice.

3 Thaletova kružnice a množina bodů, z nichž vidíme úsečku pod daným úhlem

Množinu vrcholů pravých úhlů sestrojených tak, že jedno rameno úhlu prochází daným bodem A, druhé daným bodem B modelují žáci v tercii pomocí pravoúhlého trojúhelníku s ryskou, jehož ramena nechávají prokluzovat danými body A, B a zaznamenávají polohu vrcholu. I na nižším stupni gymnázia lze žákům přitom položit otázku, zda obdobná množina vznikne např. pro úhel 45°. Trojúhelník, který mají právě v ruce, k tomu přímo vybízí. V motivačním úvodu k tématu bodových množin tenhle postup používám i v 1. ročníku SŠ. Stejný princip lze použít případně i v konstrukcích těchto množin pomocí GeoGebry. Teprve pak přichází na řadu konstrukce s užitím úsekového úhlu.

4 Množiny středů kružnic – rozšíření zadání standardních úloh

Úloh o hledání středů kružnic dotýkajících se daných objektů nebo procházejících daným bodem je ve výukové literatuře spousta. Krásně co do obtížnosti gradují např. v učebnici *Planimetrie* dr. Evy Pomykalové [1]. Studenty podle jejich uvážení nechávám rýsovat ručně nebo mohou použít GeoGebru jako pracovní nástroj. Mezi standardní úlohy patří například tato:

- Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; 5\text{ cm})$, $k_2(S_2; 4\text{ cm})$. Vzdálenost středů kružnic je 7 cm. Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají obou daných kružnic.

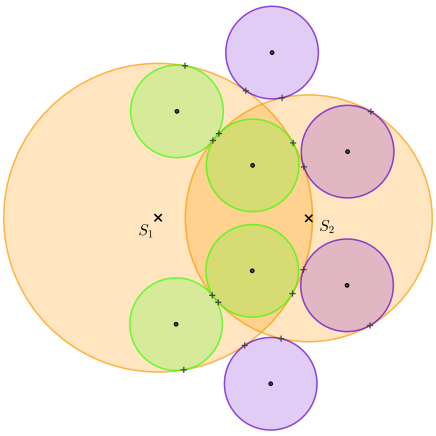
Tuto základní úlohu lze ovšem prostředky GeoGebry rozšířit tak, že *vzdálenost středů ponecháme jako parametr*. Vznikne tak následující úloha s jedním parametrem:

- Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; 5\text{ cm})$, $k_2(S_2; 4\text{ cm})$. Pro vzdálenost středů těchto kružnic platí: $|S_1S_2| = p$ cm, kde $p \in \mathbb{R}_0^+$. Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají obou daných kružnic.

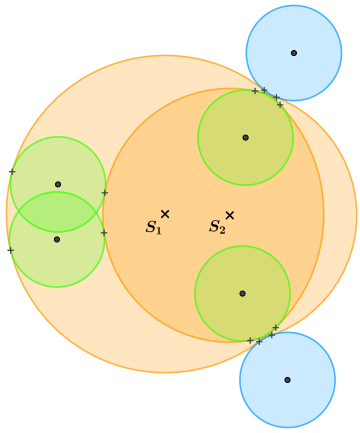
Při ručním rozkreslování jednotlivých možností by studenti hledali pro všechny typově odlišné vzájemné polohy daných kružnic průsečíky jejich ekvidistant. Uplatnění GeoGebry je ale daleko efektivnější a umožní postupnou konstrukci všech typů řešení v několika krocích. Princip užití ekvidistant zadaných kružnic ovšem zůstává stále stejný.

Postupuji tak, že studentům ukážu několik hotových řešení sestrojených v GeoGebře pro náhodně zvolenou velikost parametru p (viz obr. 1a, 1b). Zdůrazním, že sestrojujeme sice kružnice, ale v rysu jsou vybarvené celé kruhy, aby si lépe uvědomili, kdy hledají kružnice s vnitřním a kdy s vnějším dotykem. Studenti zahlédnou jen konečný výsledek, ekvidistanty nejsou záměrně jeho součástí. Sestrojují pak sami v nákresně GeoGebry všechna typově odlišná řešení, která musejí být funkční pro libovolnou vzdálenost středů kružnic. Ve výsledku je pak velice efektní pohybem středu jedné z kružnic měnit jejich vzájemnou polohu a zobrazovat tak všechny typy řešení a plynulý přechod mezi nimi. Pohybem jednoho středu pak studenti mohou sami odhalit, zda na některou z možností nezapomněli.

Uvádím zde příklady dvou snímků řešení téže úlohy, které studentům předkládám jako motivaci:



Obr. 1a

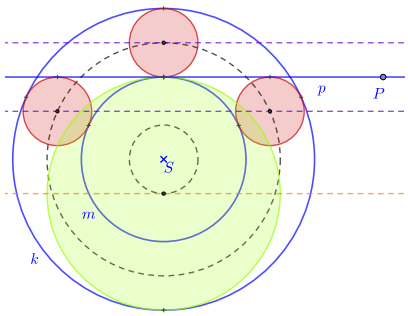


Obr. 1b

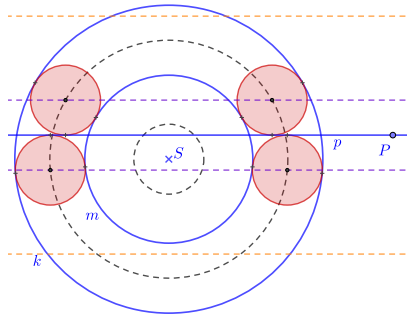
Další vhodnou úlohou s parametrem může být například tato:

- Jsou dány soustředné kružnice $k(S; 5,5 \text{ cm})$, $m(S; 3 \text{ cm})$ a přímka p, přičemž $|Sp| = v$ cm, kde $v \in \mathbb{R}_0^+$. Sestrojte všechny kružnice, které se současně dotýkají obou kružnic a dané přímky.

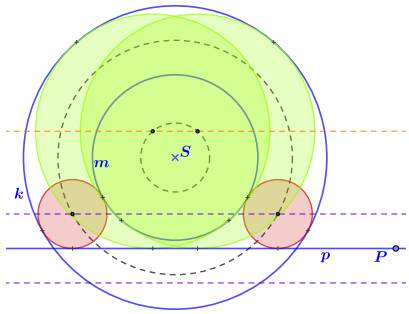
Tuto úlohu opět můžeme v GeoGebře řešit tak, že postupně měníme polohu přímky p vůči S. Stačí, pokud povolíme pohyb přímky pouze jedním směrem uchopením za bod P, které umožní například pouze vertikální pohyb. Pokud to student potřebuje, nalezne krokované řešení v jiném dostupném souboru. Vždy je však samozřejmě lepší, pokud je nalezne sám. V obrázcích 2a, 2b a 2c uvádím ukázky některých typově odlišných řešení této úlohy, tentokrát i s náznakem řešení. Vybarvení kruhů slouží studentům k lepší orientaci při konstrukci. Vždy však zdůrazníme, že řešením jsou pouze příslušné kružnice.



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

Analogicky lze převést i další standardní úlohy s pevným zadáním na úlohu s jedním parametrem, např. úlohu, kdy hledáme kružnici, která se dotýká daných dvou soustředných kružnic a prochází daným bodem A. Konstrukce úlohy je provedena pro všechna řešení v jediném souboru, kde kružnice mají pevnou polohu a bodem A lze pohybovat.

Stejný postup pak používám se studenty i u některých úloh týkajících se užití shodných a podobných zobrazení ke konstrukcím.

5 Množiny bodů dané vlastnosti v rovině i v prostoru – otázky k tréninku představivosti

Čas od času zařazuji do výuky, většinou na úvod hodiny, otázky, které mají za cíl povzbudit studenty v práci s virtuální realitou. Pracují bez pomůcek, jen se svými představami – trénujeme vlastně jednu složku dovedností „umění vidět v matematice“. Uvedu zde pro inspiraci některé z nich:

- Co je množinou všech bodů *roviny*, které mají od dvou daných různých bodů stejnou vzdálenost?
- Co je množinou všech bodů *prostoru*, které mají od dvou daných různých bodů stejnou vzdálenost?
- Co je množinou všech bodů *roviny*, které jsou stejně vzdáleny od tří daných různých bodů neležících v přímce?
- Co je množinou všech bodů *prostoru*, které jsou stejně vzdáleny od tří daných různých bodů neležících v přímce?
- Co je množinou všech bodů *roviny*, které mají od dané přímky vzdálenost 2 cm?
- Co je množinou všech bodů *prostoru*, které mají od dané přímky vzdálenost 2 cm?
- Co je množinou všech bodů *roviny*, ze kterých vidíme danou úsečku pod pravým úhlem?

- Co je množinou všech bodů *prostoru*, ze kterých vidíme danou úsečku pod pravým úhlem?
- atd.

6 Množiny bodů dané vlastnosti jako obory pravdivosti výrokových forem jedné nebo dvou proměnných

Studenti mají často představu, že když přijde čas na řešení rovnic a nerovnic, geometrie se odsune do pozadí. Tím, že do početních úloh zavádíme možnost grafického řešení, jim tento nežádoucí stereotyp narušíme. Poukázala bych tady na jeden okamžik, který je dobré nepropásnout. V prvním ročníku SŠ ukážeme studentům, že základní rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou a jednou reálnou neznámou typu $|x-3| = 2$, $|x-3| \leq 2$ apod. lze výhodně – téměř zpaměti – řešit pomocí geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu dvou reálných čísel. Zadání „řešit rovnici“ přeformulujeme na zadání, kdy hledáme bodovou množinu popsanou charakteristickou vlastností:

- Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla x, pro která platí $|x-3| \leq 2$.

V posledních ročnících SŠ řešíme analogickou úlohu v oboru komplexních čísel. Je dobré studentům připomenout dříve probíraný, ale většinou již pozapomenutý postup, než přistoupíme k řešení následující úlohy:

- V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla z, pro která platí $|z-3| \leq 2$.

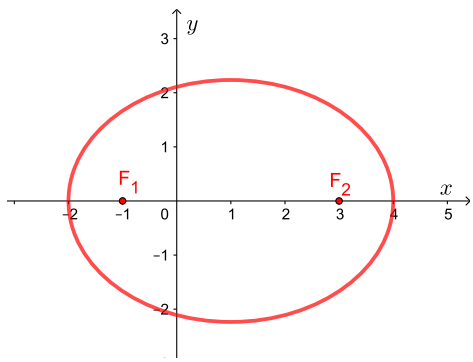
V předmaturitním semináři, kdy se snažíme uvádět do souvislosti poznatky z různých oblastí středoškolské matematiky, můžeme zařadit např. následující úlohu:

- Znázorněte:

  a) na číselné ose všechna reálná čísla x splňující $|x+1| + |x-3| = 6$,

  b) v Gaussově rovině všechna komplexní čísla z splňující $|z+1| + |z-3| = 6$.

Řešení je zřejmé z obrázku 3.

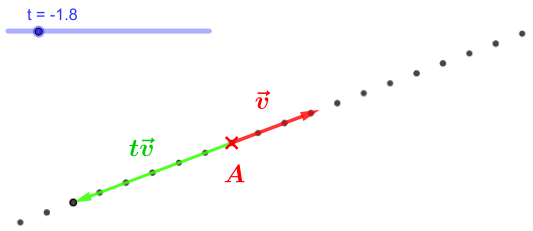


Obr. 3

7 Analytická geometrie lineárních útvarů – přímka jako množina bodů zadaná bodem A a nenulovým vektorem $\vec{v}$:

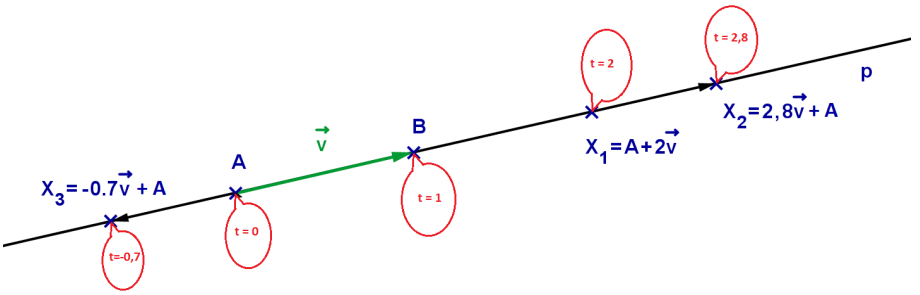
$$X \in p \iff X = A + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

K vymodelování množiny bodů splňujících danou vektorovou rovnici je velice účelné použít GeoGebru, zavést posuvník pro změnu hodnoty parametru a nechat vykreslovat stopu bodu X (viz obr. 4). Výsledek je po spuštění animace docela přesvědčivý.



Obr. 4

Důkladné porozumění podstatě parametrického vyjádření přímky je velice důležité pro pochopení dalšího učiva týkajícího se analytické geometrie lineárních útvarů. Většinou proto pro vysvětlení studentům připojím ještě následující obrázek:

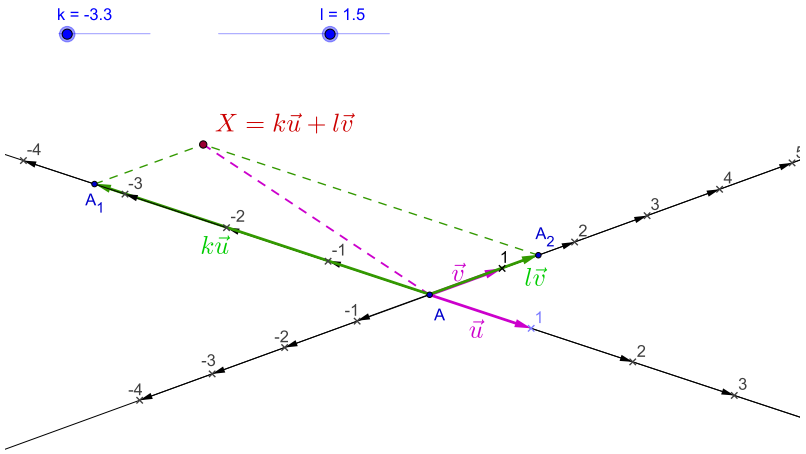


Obr. 5

8 Analytická geometrie lineárních útvarů – rovina jako množina bodů zadaná bodem a dvojicí lineárně nezávislých vektorů:

$$X \in \rho \iff X = A + k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in \mathbb{R}$$

Model můžeme sestavit v GeoGebře tak, aby koeficienty lineární kombinace vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ byly zadány posuvníky (viz obr. 6). Tak si studenti lépe ujasní, že body roviny jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny uspořádaným dvojicím koeficientů $[k, l]$.



Obr. 6

9) Analytická geometrie kvadratických útvarů – kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností

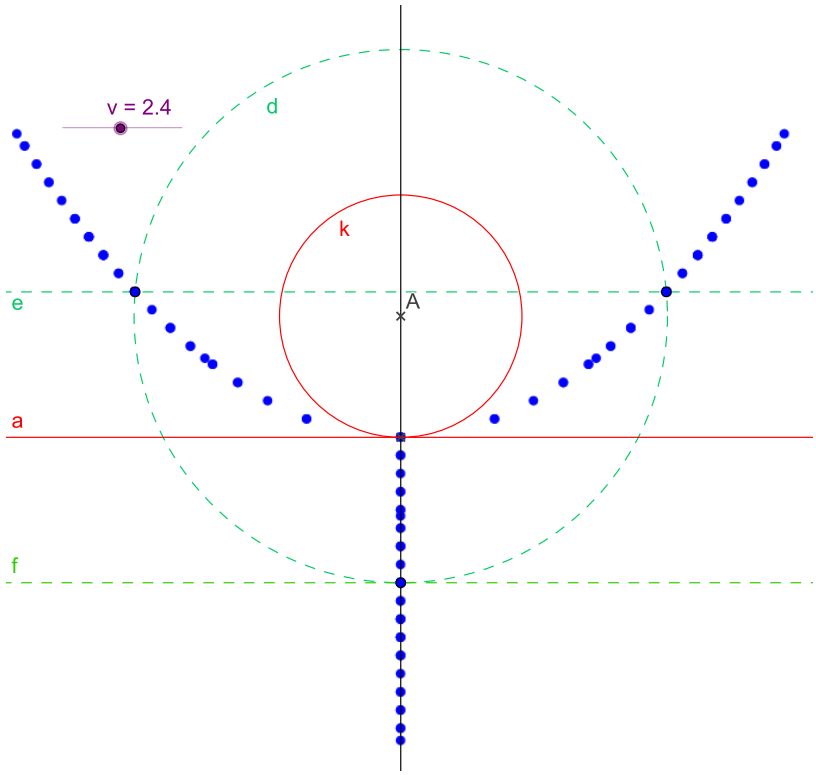
Konstrukce elipsy, hyperboly a paraboly podle ohniskových definic jsou dostatečně známy, tak se zde zaměřím na další množiny bodů dané vlastnosti, které z těchto definic prvoplánově nevyplývají. Uvedu zde zadání a částečná řešení alespoň dvou takovýchto úloh:

- Je dána kružnice k a její tečna a. Určete množinu středů všech kružnic, které mají vnější dotyk s kružnicí k a dotýkají se tečny a.
- Vyšetřete množinu bodů roviny, které mají od daného bodu A třikrát větší vzdálenost než od dané přímky m, která daným bodem neprochází.

Obdobné úlohy řeší u nás studenti jako seminární práci, kdy nejprve vyšetří bodovou množinu planimetricky a vysloví hypotézu o křivkách, které jsou součástí řešení. Pak úlohu vloží do souřadného systému, sestaví rovnici hledaného útvaru a upraví ji do tvaru, který jejich hypotézu potvrdí nebo vyvrátí. Nakonec se snaží nalézt souvislosti mezi zadanými a výslednými objekty – často se jedná o nalezení ohniska výsledné kuželosečky apod.

Tak například u první z úloh student z planimetrického řešení zjistí, že hledaná množina se skládá z křivky a polopřímky. Vysloví hypotézu o tvaru a vlastnostech křivky. Následně vloží zadávající prvky do souřadného systému (u první úlohy např. $a = x$; $A = [0; 1]$) a sestaví rovnici, kterou musí splňovat každý bod hledaného útvaru. V první úloze je to rovnice $|XA| = |Xx| + 1$ pro hledaný střed kružnice X. Následně student rovnici upraví do tvaru, ze kterého je zřejmé, z jakých částí se hledaná množina bodů skládá (v první úloze parabola a polopřímka), a svou hypotézu potvrdí nebo vyvrátí. V závěru student hledá

souvislosti mezi zadanými prvky a výslednou množinou, bez ohledu na volbu souřadného systému. Zde například zjistí, že bod A je ohniskem výsledné paraboly, daná přímka a je její vrcholovou tečnou a že polopřímka, která je součástí řešení, je kolmá k dané přímce, přičemž její počáteční bod je bodem dotyku dané kružnice a přímky; viz obr. 7.



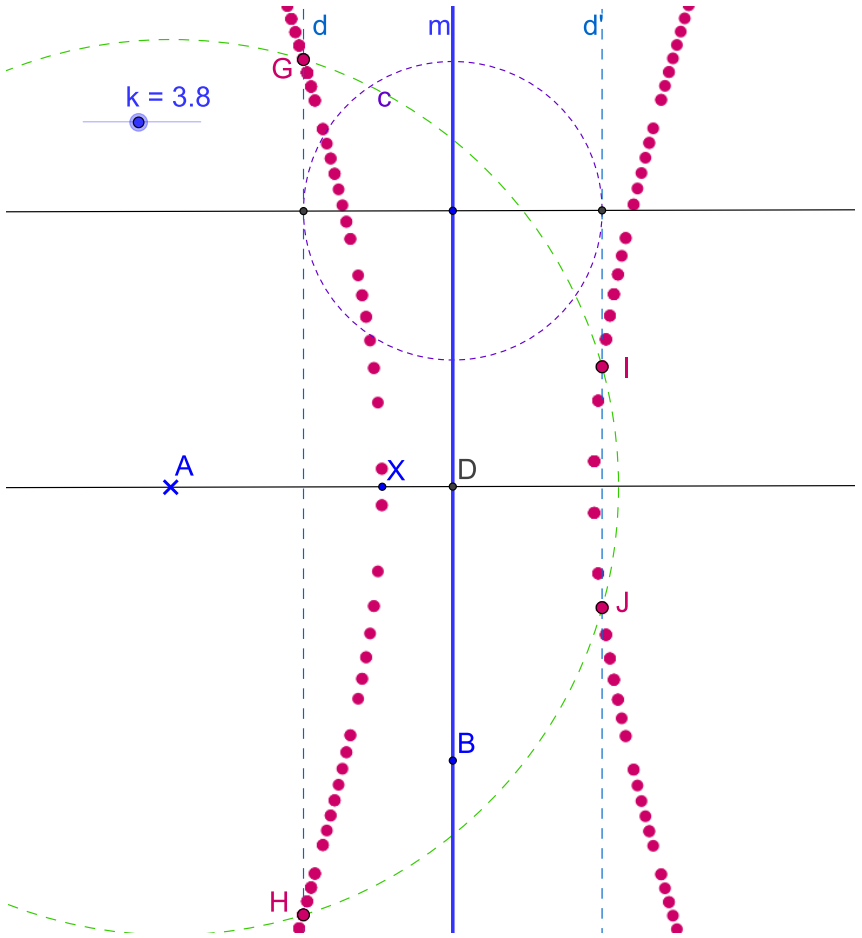
Obr. 7

Při planimetrickém řešení druhé úlohy může být opět velkým pomocníkem GeoGebra; viz obr. 8.

V konstrukci jsou sestrojeny body I, J, G, H, pro které platí, že jejich vzdálenost od daného bodu A je třikrát větší než vzdálenost od dané přímky m. Konstrukce, kterou vznikly, se uvede do pohybu pomocí posuvníku zavedeného pro poloměr znázorněné kružnice c. Další body již vznikají jako stopy prvně sestrojených bodů. Následuje opět vyslovení hypotézy a její ověření výpočtem ve zvoleném souřadném systému. Zde je řešením hyperbola s jedním ohniskem v daném bodě A.

Považuji ještě za nutné podotknout, že tyto práce studenti vypracovávají, aniž by dopředu byli nějak cíleně seznamováni se způsobem zadávání kuže-

loseček pomocí ohniska a řídící přímky, proto je pro ně jejich práce vskutku objevná.



Obr. 8

10 Závěr

Ve svém příspěvku jsem se snažila postihnout v obsáhlém učivu matematiky na střední škole některé důležité momenty, které dávají studentům možnost prožít radost z objevování nových vztahů a hledání a pochopení souvislostí. Ne každá partie matematiky to umožňuje tak, jako právě vyšetřování množin bodů dané vlastnosti. Je to příležitost, kdy můžeme žákům a studentům něco z probírané látky zatajit a nechat je, ať na to přijdou sami. A když se jim nedaří, napovědět jen tak, abychom neřekli všechno. A GeoGebra je nástroj, který může být v tomto směru velice užitečným pomocníkem.

Literatura

[1] E. Pomykalová, *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*, Prometheus, Praha, 2003.

[2] *GeoGebra – Dynamic Mathematics for Everyone*, GeoGebra Inc., 2001–2009, `http://www.geogebra.org`.

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p.o.
Čs. exilu 669
708 00 Ostrava – Poruba
`davidova@wigym.cz`

METODA PEER INSTRUCTION VE VÝUCE GEOMETRIE

Tomáš Zadražil

Matematické koncepty představují základní pojmy, principy a myšlenky matematiky. Rozumět matematickému konceptu představuje zejména schopnost odpovědět na otázku: „Proč?“ Tj. například: „Proč daná rovnice vede k řešení problému?“ nebo „Proč hledaný bod nalezneme právě touto konstrukcí?“ Na rozdíl od vědomostí založených ryze na memorování informací, konceptuální porozumění zpřístupňuje i vyšší stupně Bloomovy taxonomie.

V tomto příspěvku si nejprve na příkladech z praxe ukážeme projevy neporozumění pojmu úhel. Dále si představíme metodu *Peer Instruction* a ukážeme si, jak v duchu tohoto přístupu naplánovat lekci zacílenou na budování správné představy úhlu jakožto matematického konceptu.

1 Projevy neporozumění pojmu úhel

Je rozdíl mít v paměti definici: „úhlem rozumíme část roviny ohraničenou dvěma různými polopřímkami se společným počátkem“, a rozumět, co přesně tato věta říká. Na dvou příkladech z praxe nyní ukážeme, jak dalece až v tomto ohledu může sahat konceptuální neporozumění.

1.1 Úloha o zápisu konstrukce trojúhelníku

Od pana učitele dostali žáci za úkol sestrojit rovnostranný trojúhelník ABC o délce strany 4 cm, a svou konstrukci následně opatřit zápisem. Kamarádi Adolf, Boris a Ctibor odevzdali následující zápisy:

Adolfův zápis:	**Borisův zápis:**	**Ctiradův zápis:**
1. AB; $\|AB\| = 4\,\mathrm{cm}$	1. AB; $\|AB\| = 4\,\mathrm{cm}$	1. AB; $\|AB\| = 4\,\mathrm{cm}$
2. m; $m(A;\, 4\,\mathrm{cm})$	2. m; $m(A;\, 4\,\mathrm{cm})$	2. m; $m(A;\, 4\,\mathrm{cm})$
3. n; $n(B;\, 4\,\mathrm{cm})$	3. $\mapsto AX$; $\|\sphericalangle BAX\| = 60^\circ$	3. $\sphericalangle BAX$; $\|\sphericalangle BAX\| = 60^\circ$
4. C; $C \in m \cap n$	4. C; $C \in m \cap \mapsto AX$	4. C; $C \in m \cap \sphericalangle BAX$
5. $\triangle ABC$	5. $\triangle ABC$	5. $\triangle ABC$

Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé, a svou odpověď poté řádně zdůvodněte.

(A) Správný zápis *nemá* pouze Adolf.
(B) Správný zápis *nemá* pouze Boris.
(C) Správný zápis *nemá* pouze Ctibor.
(D) Správný zápis *nemá* více z chlapců.
(E) Správný zápis *mají* všichni tři chlapci.

odpověď	A	B	C	D	E
četnost	2	4	9	7	1

Tab. 1: Rozložení odpovědí žáků na otázku o zápisu konstrukce trojúhelníku

Rozložení odpovědí 23 přítomných žáků tercie šestiletého gymnázia ukazuje tabulka 1. Nutno však poznamenat, že ačkoli správnou možnost (C) volilo 9 žáků, pouze 4 z nich byli schopni svou volbu i řádně zdůvodnit. Zbývajících 5 žáků se bez výjimky odvolávalo na skutečnost, že si inkriminovaný způsob zápisu nepamatuje ze základní školy. Dostatečné konceptuální porozumění tak v tomto ohledu prokázalo pouhých 17 % přítomných žáků.

Správně argumentující žáci Ctiborův zápis znázornili obrázkem, na kterém byl vyznačen $\sphericalangle BAX$ a jeho průnik s kružnicí m. Celá ilustrace pak byla opatřena komentářem typu: „Průnik kružnice a úhlu je nekonečně mnoho bodů, ne jen bod C.“ Lehkou slovní neobratnost i částečnou neúplnost zvolené citace berme prosím s rezervou.

Vzato z druhého konce, 83 % přítomných žáků buď neznalo význam užitého symbolického zápisu nebo nerozumělo, co přesně říká definice pojmu úhel. Přiložené žákovské odpovědi spíše poukazovaly na druhý ze zmíněných problémů, a sice nedostatečné konceptuální porozumění. Nemalá část žáků úhel nechápala jako část roviny, ale pouze jako dvojici různých polopřímek se společným počátečním bodem. Kam až může vyústit tato miskoncepce si ukážeme na následující úloze.

1.2 Úloha o průniku trojúhelníku s kružnicí

Rozhodněte, kolik společných bodů má rovnostranný trojúhelník ABC o délce strany 4 cm s kružnicí $k(A, 2\ cm)$. Svou odpověď následně zdůvodněte.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) > 3

Tabulka 2 ukazuje rozložení odpovědí 58 žáků na úrovni gymnaziální sekundy (osmileté gymnázium) až tercie (šestileté gymnázium). Slovní zdůvodnění všech 8 žáků volících správnou odpověď (D) bez výjimky poukazovala na správné konceptuální porozumění trojúhelníku jakožto rovinného útvaru vniklého průnikem několika úhlů. Slovy relativní četnosti, přibližně 86 % dotazovaných žáků pravděpodobně vnímalo trojúhelník pouze jako uzavřenou lomenou čáru tvořenou třemi úsečkami. Ti z nás, kdo ve svých hodinách využívají GeoGebru, si již patrně všimli, že konstruujeme-li v tomto softwaru trojúhelník pomocí nástroje mnohoúhelník, pak získáme obrazec, jehož celá plocha je názorně barevně vyznačena – snad právě z edukačních důvodů.

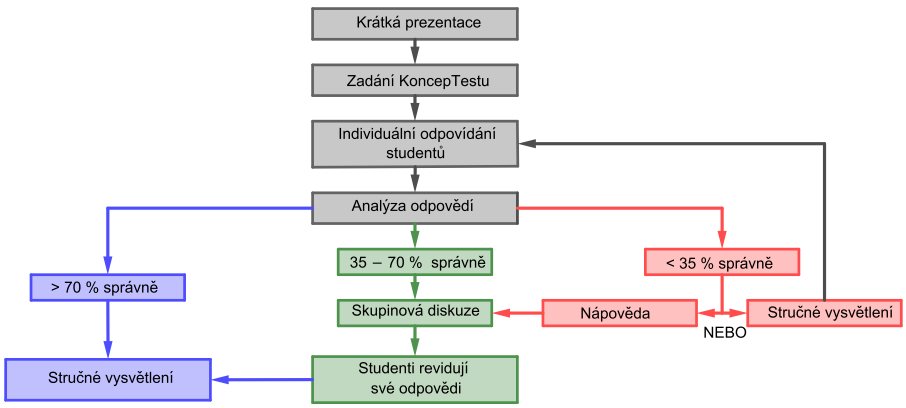
odpověď	A	B	C	D	žádná odpověď
četnost	1	37	8	8	4

Tab. 2: Rozložení odpovědí žáků na otázku o průniku trojúhelníku s kružnicí

2 Metoda Peer Instruction

Roku 1984 začal Eric Mazur na Harvardu vyučovat úvodní kurzy fyziky pro mediky. Jeho přednášky byly hodnoceny velmi kladně a stejně tak jeho studenti dosahovali, z hlediska testů a zkoušek, velmi slušných studijních výsledků. Na základě těchto indicií pokládal Mazur sám sebe za velmi dobrého přednášejícího. Po přibližně sedmi letech „úspěšné výuky“ se však k jeho očím dostal článek referující skutečnost, že úvodní kurzy fyziky na vstupních prekoncepcích a miskoncepcích studentů ve fyzice prakticky nic nezmění. Prvotní Mazurovou reakcí na sdělení článku bylo pouhé konstatování: „Ne moji studenti – ne studenti Harvardu!“ Jako vědec však dobře věděl, že své tvrzení potřebuje ukotvit v datech. Studentům proto zadal, podle měřítek akademiků „jednoduchý“, test zacílený na konceptuální porozumění třem Newtonovým zákonům. Výsledky, které obdržel, jej zcela šokovaly. *Někteří studenti dopadli stěží lépe, než gorila náhodně stlačující klávesy na klávesnici* [1].

Toto své zjištění mohl Eric Mazur zcela ignorovat a pokračovat ve výuce dosavadním klasickým způsobem. Rozhodl se však svůj přístup zcela změnit a vyvinul metodu *Peer Instrucion*.



Obr. 1: *Peer Instruction* – schéma jednoho bloku

Peer Instruction (dále jen PI), jak ji ve své knize [1] popsal Eric Mazur, je metoda aktivního učení stojící zejména na skupinové diskuzi vyvolané složitější konceptuální otázkou, takzvaným *KoncepTestem*. Hodina vyučovaná podle PI je obvykle členěna do několika bloků. Schematickou strukturu jednoho takového bloku si můžeme prohlédnout na obrázku 1. Každý blok je zahájen krátkou prezentací zvoleného konceptu. Při svém výkladu se instruktor snaží vyvarovat poskytnutí vzorce nebo jiné, na paměti založené, berličky. Po prezentaci následuje zadání *KoncepTestu* cíleného na prohloubení porozumění představovanému konceptu. Studentům je poskytnut krátký čas na individuální promyšlení odpovědi. Následně jsou vyzváni k hlasování prostřednictvím hlasovacích karet, *clickerů* nebo chytrých zařízení. Na základě rozložení relativních četností studentských odpovědí buď instruktor stručně vysvětlí správnou odpověď, přejde

ke skupinovým diskuzím, nebo se pokusí prezentovaný problém ještě jednou vysvětlit. Ve fázi skupinových diskuzí se studenti snaží přesvědčit své kolegy o správnosti své volby, přičemž jsou instruktorem vybízeni ke zdůvodňování – nikoli pouze k pouhému konstatování. Výzkumy ukazují, že je student mnohdy schopen danému konceptu snáze porozumět na základě výkladu svého spolužáka, nežli na základě výkladu samotného instruktora [2]. Studenti, kteří čerstvě diskutovanému konceptu porozuměli, si totiž živě pamatují, jaké to bylo pojmu nerozumět a jaké kroky museli učinit, aby se porozumění dobrali. Naproti tomu instruktor sám často trpí takzvanou „kletbou vědomosti“ [1], neboť danému konceptu dobře rozumí a dávno si již neuvědomuje nesnáze na cestě k porozumění. Skupinové diskuze jsou ukončeny revidujícím hlasováním studentů a stručným vysvětlením správné odpovědi. Prakticky vždy dojde k znatelnému navýšení hlasů ve prospěch správné odpovědi [1], [2].

Popsaný blok zabere přibližně 10–15 minut. Za jednu vyučovací hodinu jsme tímto způsobem tedy schopni probrat 3 až 4 koncepty. Je proto zřejmé, že abychom dosáhli stejného objemu učiva jako u klasické výuky, musíme část práce naložit na bedra studentům. Toho můžeme docílit například tak, že před lekcí studentům zadáme přípravné materiály k samostudiu, po jejichž nastudování budou disponovat potřebnými znalostmi pro zvládnutí lekce. Ve své knize [1] Eric Mazur pro tyto účely doporučuje po bok PI zařadit i strategii *Just-in-time Teaching*.[1]

3 Příprava a realizace lekce podle Peer Instrucion za účelem konceptuálního porozumění pojmu úhel

Cílem této části je názorně demonstrovat, jak připravit část PI lekce věnovanou porozumění pojmu úhel a jak připravit příslušné materiály pro samostudium před lekcí.

3.1 Přípravné materiály

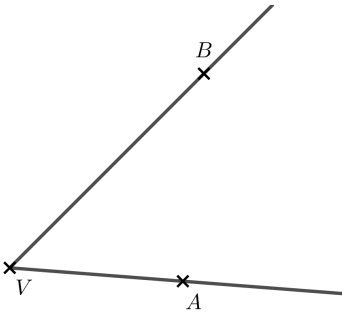
Prvním krokem je pochopitelně volba konceptů, jimž mají žáci po absolvování lekce rozumět. My jsme již pro účely této demonstrace zvolili pojem úhel. Druhým krokem je uvážení, s jakými znalostmi musejí studenti přijít na lekci, aby mohli snáze zvolenému konceptu porozumět, aby zvládli vybrané *Koncep-Testy* a aby byli schopni řádně argumentovat svým spolužákům. Pomineme-li dříve osvojené klíčové pojmy: bod, přímka, polopřímka, průnik geometrických objektů, úsečka, rovina a polorovina, je vhodné studentům představit definici úhlu a základní názvosloví s tímto pojmem spojené (tj. vrchol a rameno úhlu; co to je konvexní a co nekonvexní úhel). Zvolený materiál k samostudiu zakončíme sérií jednoduchých otázek mapujících, zda a na kolik žáci svěřenému textu

[1] Just-in-time Teaching je strategie výuky založená na zpětnovazební smyčce mezi přípravným online prostředím a následným děním ve třídě. Stručně řečeno, instruktor zadá studentům skrze internet přípravné materiály provázené úkoly a otázkami, které studenti musejí vypracovat a odevzdat ještě před začátkem následující lekce. Na základě zpětné vazby poskytnuté odpověďmi studentů poté instruktor vhodně upraví obsah následující lekce. Stejně tak obsah přípravných materiálů je do značné míry uzpůsoben průběhu předešlé lekce [3].

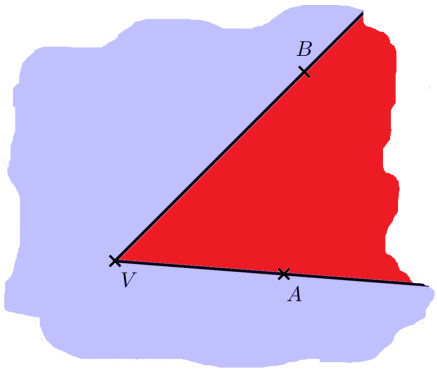
porozuměli a zda jeho nastudováním získali potřebné znalosti. Přípravnou fázi je vhodné, v duchu *Just-in-time Teaching*, realizovat online ještě před lekcí. Na základě zpětné vazby poskytnuté žákovskými odpověďmi můžeme totiž vhodně uzpůsobit připravovanou lekci. Při přípravě materiálu k samostudiu je žádoucí držet se na úrovni znalostí. Pouze u snazších pojmů je přípustné přestoupit i na úroveň porozumění. Nyní si na základě zkušeností z reálné výuky ukažme, jak by v našem případě mohl vypadat materiál k samostudiu a návazná série zpětnovazebních otázek.

3.2 Úhly

Polopřímky VA, VB (obr. 2a) dělí rovinu na dva úhly – červeně zvýrazněný konvexní úhel AVB a modře zvýrazněný nekonvexní úhel AVB (obr. 2b).



Obr. 2a: Polopřímky VA a VB



Obr. 2b: Konvexní a nekonvexní úhel AVB

O bodu V hovoříme jako o vrcholu úhlu AVB. Polopřímky VA, VB nazýváme ramena úhlu AVB. Konvexní úhel AVB můžeme zjednodušeně zapsat $\sphericalangle AVB$, nekonvexní úhel AVB pak $\reflectbox{\sphericalangle} AVB$.[2] V literatuře se také poměrně hojně setkáme s označováním úhlů pomocí řeckých písmen α, β, γ, atd.

3.3 Otázky a úkoly

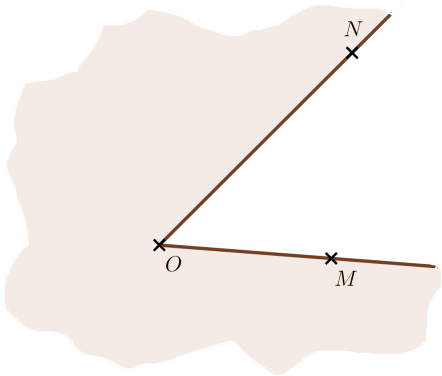
(1) Na základě studijního textu si do výkladového sešitu vypracujte poznámky.

(2) Doplňte všechna vynechaná místa tak, aby vzniklý text správně popisoval situaci na obrázku 3a.

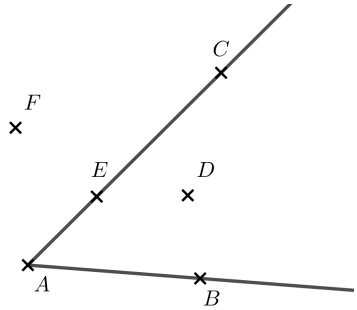
Na obrázku je hnědě zvýrazněn ..... úhel ..... , jehož vrcholem je bod ..... a jehož ..... tvoří ..... OM a ON.

(3) Prohlédněte si přiložený obrázek 3b, a poté rozhodněte, kolik z bodů A, B, C, D, E, F patří $\sphericalangle BAC$. (Připomeňme, že symbol $\sphericalangle$ značí konvexní úhel.)
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (F) 5 (G) 6

[2] Užitý symbol pro nekonvexní úhel není ideální. Lépe se mi jej bohužel nepodařilo v rámci LaTeXu napodobit.



Obr. 3a: Obrázek k úloze (2)



Obr. 3b: Obrázek k úloze (3)

Práci s opravou a vyhodnocením žákovských odpovědí si můžeme velmi zjednodušit, zadáme-li tento materiál k samostudiu skrze Moodle, Edmodo či jinou e-learningovou platformu. Po vyhodnocení žákovských odpovědí nás již čeká příprava samotné PI lekce.

3.4 Lekce podle PI

Abychom žákům ještě více vštípili terminologii týkající se úhlů, promítneme na začátku hodiny obrázky podobné 2a, 2b a necháme žáky celou terminologii zopakovat. Rovněž můžeme vyzvat jednoho z žáků, aby na tabuli nakreslil dvě polopřímky se společným počátkem. Jiný žák poté může zopakovat definici pojmu úhel. Dalšího můžeme nechat vyznačit příslušný konvexní i nekonvexní úhel a v tomto duchu pokračovat přes celou terminologii.

Ve vlastní výuce používám pro potřeby hlasování chytré telefony a systém *Socrative*, případně hlasovací karty. Osobně se mi osvědčilo nejprve zařadit jednoduchou rozehřívací otázku, aby všichni žáci měli čas zapnout na svých telefonech Socrative, přihlásit se do virtuální místnosti pod svými přezdívkami, nebo si v případě technické nouze dojít pro hlasovací karty. Při této příležitosti rovněž v rychlosti zopakuji pravidla práce při elektronickém hlasování – tj. první hlasování samostatné, pouze jedna odpověď správná. Obzvláště mladším žákům je třeba neustále stanovená pravidla opakovat, jinak je velmi pravděpodobný vznik nežádoucího chaosu. Rovněž se mi osvědčilo nejprve promítnout otázku, dát žákům čas na promyšlení odpovědi a teprve po stanoveném čase zahájit hlasování. V případě první otázky většinou není potřeba zařazovat skupinové diskuze.

Jako rozehřívací otázku můžeme například využít otázku (3) provázející materiál k samostudiu.

Jak již bylo řečeno v úvodu příspěvku, proces učení v PI probíhá zejména skrze skupinovou diskuzi, jíž vyvolá složitější konceptuální otázka, takzvaný *KoncepTest*. V tomto okamžiku je proto naším úkolem zadat alespoň jeden, lépe však dva *KoncepTesty* týkající se porozumění pojmu úhel. Nejprve si ale

řekněme, co přesně *KoncepTest* je [1]:

(1) otázka, která je založena na porozumění jedinému konceptu,
(2) otázka, na niž lze odpovědět na základě porozumění – nikoli pouze paměti,
(3) otázka s nabídkou přiměřeného množství odpovědí,
(4) otázka, která je formulována jednoznačně,
(5) otázka s přiměřenou obtížností.

KoncepTest musí vyhovovat všem bodům (1)–(5) z dobrého opodstatnění (dohledatelné v [1]). Nicméně PI společně s *KoncepTesty* původně vznikla na míru výuce fyziky, kde je mnohem snazší vznesené podmínky dodržet nežli v matematice. Pro potřeby matematických *KoncepTestů* se ukazuje náročným vyhovět obzvláště podmínce (1), neboť v matematice spolu koncepty poměrně úzce souvisejí, prolínají se a mnohdy mezi nimi není jasně vymezitelná hranice.

Pro potřeby bodu (1) může být schůdnou cestou přiblížení matematického konceptu Davida Talla [4]. Na jedné straně pak stojí definice matematického konceptu a na straně druhé jeho obraz. Obě tyto složky se vzájemně ovlivňují. V konkrétní situaci dojde vždy k evokování konkrétní části obrazu konceptu, tzv. evokovaného obrazu. Obraz konceptu však může být zatížen miskoncepcemi, trhlinami či chatrnými základy. Například, máme-li určit výšku schodiště při známé délce zábradlí, počtu schodů a známé délce jednoho schodu, obvykle se nám vybaví pravoúhlý trojúhelník – tj. evokovaný obraz: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta, přepona > odvěsna, atd. Budeme-li bez hlubšího porozumění Pythagorovu větu chápat pouze jako formuli $c^2 = a^2 + b^2$ a termíny odvěsna, přepona pouze jako slova, snadno se nám stane, že svým výpočtem získáme naprosto nesmyslný výsledek.

Při přípravě *KoncepTestů* tak lze pracovat ve dvou rovinách. Můžeme se zaměřit na porozumění konkrétní definici matematického konceptu, nebo na zdokonalení či nápravu příslušného obrazu konceptu. Ve druhém ze zmíněných případů cíleně volíme úlohy, které by mohly u žáků vyvolat nesprávný evokovaný obraz daného konceptu a docílit tak kognitivního konfliktu.

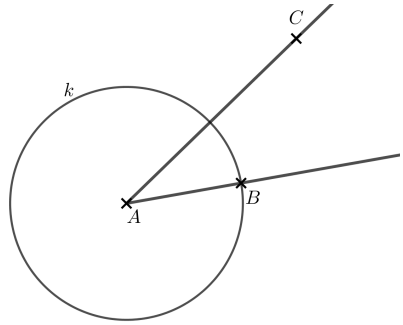
Již tedy víme, co si představit pod termínem *KoncepTest*. Zbývá „pouze“ jeden až dva vymyslet. Nyní si ukažme konkrétní návrhy.

3.5 Průnik úhlu a kružnice

Rozhodněte, kolik společných bodů má kružnice k s úhlem BAC na obrázku 4.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) > 3

Je poměrně pravděpodobné, že po shlédnutí výsledků individuálního hlasování bude třeba žáky vyzvat ke skupinovým diskuzím. Můžeme je vybídnout, ať hledají spolužáky s odlišným názorem, než mají oni sami a pokouší se je přesvědčit o správnosti své odpovědi. Rovněž lze žáky nechat utvořit diskuzní skupiny, které sami preferují a na které jsou zvyklí.



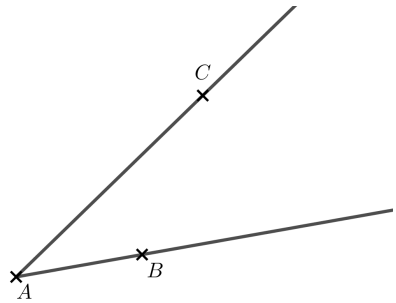
Obr. 4: Průnik úhlu a kružnice

Skupinové diskuze jsou poměrně rušné. Učitel přestává být středobodem veškerého dění v hodině. Můžeme se tak chopit nabízené příležitosti, svobodně korzovat mezi diskutujícími a „naslouchat jejich myšlenkám“. Cvičené ucho ihned registruje projevy typických miskoncepcí a obtíží na cestě k porozumění diskutovanému konceptu. Jinými slovy, zjišťujeme, jak žáci rozumějí našemu výkladu, případně, co jim činí potíže – tj. sami se od žáků učíme být lepšími učiteli.

Na konci skupinových diskuzí vyzveme žáky k opětovnému hlasování. V případě, že nedojde k znatelnému zlepšení, bude třeba výkladu konceptu věnovat další pozornost. V opačném případě, kdy dojde ke kýženému navýšení počtu správných odpovědí, přejdeme k stručnému vysvětlení řešení a zadání dalšího *KoncepTestu*.

3.6 Průnik úhlu a přímky

Nejprve si prohlédněte obrázek 5. Poté rozhodněte, které z následujících tvrzení (A)–(D) je nepravdivé, případně zvolte možnost (E).



Obr. 5: Průnik úhlu a přímky

(A) Lze sestrojit přímku, která nemá s $\sphericalangle CAB$ žádný společný bod.
(B) Lze sestrojit přímku, která má s $\sphericalangle CAB$ pouze jeden společný bod.
(C) Lze sestrojit přímku, která má s $\sphericalangle CAB$ pouze dva společné body.
(D) Lze sestrojit přímku, která má s $\sphericalangle CAB$ více než dva společné body.
(E) Všechna tvrzení (A)–(D) jsou pravdivá.

Pohledem zkušeného matematika by se mohlo zdát, že tento *KoncepTest* nepřináší oproti prvnímu nic nového. Stejně jako předchozí úloha i tato si klade za cíl narušit mylnou představu o úhlu jakožto o dvojici polopřímek se společným počátkem. Oproti první otázce je však o něco složitější a více nutí žáky zapojit představivost. Nasazením tohoto *KoncepTestu* se dále dozvíme, zdali lze skutečně nárůst správných odpovědí u předchozí otázky připsat na vrub konceptuálnímu porozumění úhlu, nebo pouze servilnímu přitakávání matematicky obratnějším spolužákům.

Stejně jako tomu bylo u předchozí úlohy, i nyní o dalším dění v duchu schématu 1 rozhodne rozložení žákovských odpovědí. Po ukončení tohoto bloku bychom přešli k dalšímu bloku věnovanému dalšímu konceptu, nebo pokračovali ve výuce jinou aktivitou.

4 Závěr

Nedostatečné budování porozumění matematickým konceptům odpovídá „spřádání chatrné pavučiny“, v níž tu a tam schází nosné vlákno. „Pro matematickou pavučinu“ je navíc příznačné opodstatnění takřka každého vlákna. Je-li špatně utkána, pak neobstojí před sebemenším poryvem větru. Žáci s nedostatečně rozvinutým konceptuálním porozuměním se jen velmi obtížně učí složitějším pojmům a při řešení úloh jsou mnohdy odkázáni toliko na paměť. Mají-li pak zapamatovanou strategii přenést do nezvyklého kontextu, jsou toho schopni jen výjimečně.

V textu představený příklad upevňování mylné představy úhlu jakožto dvojice různých polopřímek se společným počátečním bodem může vést ke špatnému uchopení mnohoúhelníků. Má zkušenost je taková, že toliko neuspokojivá menšina žáků nevnímá mnohoúhelník pouze jako uzavřenou lomenou čáru, která je jeho hranicí. Jakou představu pak mohou mít mylně uvažující žáci o obsahu rovinného útvaru? Znamená pro ně tento pojem něco víc než zpaměti naučenou informaci obdobnou zápisu konstrukce úhlu? Klasická výuka nám při hledání odpovědí na tyto otázky nabízí jen málo možností. V příspěvku proto byla představena metoda PI profesora Erica Mazura a v kontextu pojmu úhel pak bylo demonstrováno, jak je tento přístup možno implementovat ve výuce matematiky.

Literatura

[1] E. Mazur, *Peer instruction: a user's manual*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[2] T. Vickrey et al., *Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review*. CBE – Life Sciences Education 14 (2015), es3.

[3] M. Gregor Novak, *Just-in-time teaching: blending active learning with web technology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.

[4] D. Tall, S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and contunuity.* Educational Studies in Mathematics 12 (1981), 151–169.

Mgr. Tomáš Zadražil
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
tomas.zadrazil@gmail.com

AKTIVITY, HLAVOLAMY A HRY PRO VÝUKU ZOBRAZENÍ

Jiří Vančura

Tento článek se nejprve zabývá důležitostí geometrických zobrazení nejen pro vysokoškolskou matematiku, ale i pro praktické uplatnění v různých oborech. Ve druhé části pak článek prezentuje příklady úloh, které mohou pomoci studentům experimentovat s geometrickými zobrazeními a lépe do tématu proniknout.

1 Proč studovat zobrazení

V příspěvku se budeme věnovat výhradně geometrickým zobrazením v rovině. Geometrická zobrazení jsou nedílnou součástí středoškolské geometrie. Navíc dobré porozumění zobrazením studentům velmi usnadní pochopení klíčových principů lineární algebry, která čeká velkou část maturnatů. Lineární algebra, jejíž ústřední téma tvoří homomorfismy (jistý typ geometrických zobrazení), je součástí vysokoškolského studia nejen na přírodovědných a technických oborech, ale skrývá se například i ve studijním plánu ekonomických škol, kde je součástí obecných kurzů matematiky [1]. Dokonce i studenti humanitních oborů se při psaní závěrečných prací mohou setkat s aplikací lineární algebry v podobě statistických metod (například regrese). Student, který má dobře vybudovaný pojem geometrického zobrazení a který pracoval se širokou paletou různých zobrazení, si bude mnohem snáze abstrahovat pojem homomorfismu. Mimo lineární algebru najdou geometrická zobrazení uplatnění v mnoha dalších praktických oblastech. Pro ilustraci uvedeme několik příkladů: automatizované linky využívají mnoho robotických paží, které pomocí otáčení svých ramen pohybují s výrobky po přesně zvolené trajektorii; autonomní drony, které jednak mapují své okolí a jednak řídí svůj pohyb pomocí matematických modelů, využívají celou řadu geometrických zobrazení [2]; podobné algoritmy najdeme ve vozech, které samy parkují nebo dokonce samy řídí; operatér, který ovládá chirurgického robota, má k dispozici několik základních pohybů (reprezentovatelných pomocí geometrických zobrazení), pomocí nichž musí s milimetrovou přesností navádět skalpely, pinzety, trysky nebo optické přístroje. A konečně filmový a herní průmysl závislý na digitálních tricích by se bez geometrických zobrazení vrátil o desítky let do minulosti, moderní akční film nebo počítačová hra se bez rotací, posunů a explozí realizovaných stejnolehlostí neobejdou.

Přes svůj velký význam jsou zobrazení často zařazena až na samý konec tématu planimetrie na střední škole. Kvůli tomu jsou nezřídka obětí školních akcí a obecného nedostatku času, který v závěru školního roku graduje. Z vlastních zkušeností také víme, že zobrazení mají mezi středoškolskými učiteli pověst náročného tématu, do kterého studenti jen těžko pronikají. To může být do jisté míry způsobeno i typem úloh, které často v učebnicích a sbírkách úloh najdeme v kapitole zobrazení. Podívejme se na příklad 2 z kapitoly *3.3. Středová souměrnost* z učebnice *Matematika pro gymnázia – Planimetrie* [3].

Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, $r_1 > r_2$, a bod S ležící na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

Nejen z mé zkušenosti vyučujícího na pražském gymnáziu, ale rovněž z dlouhodobého působení mých kolegů vyplývá, že i nadprůměrní studenti mívají s příklady, které kombinují konstrukční úlohy a zobrazení, problém. Studenti mnohdy ani nevědí, kde začít a jak příklad uchopit, často tak pouze čekají na předvedení správného řešení, které někteří pochopí s tím, že sami by na to nikdy nepřišli a někteří si jej pouze překreslí do sešitu. Samozřejmě to neplatí plošně a pokud jsou tyto příklady pro studenty přiměřené, rozhodně bychom je neopomíjeli.

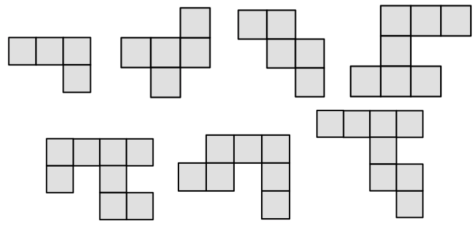
V následující kapitole prezentujeme několik typů úloh, hlavolamů a her, které mohou i slabším studentům střední školy pomoci lépe proniknout do tématu zobrazení. Výhodou těchto úloh jsou především srozumitelná a zdánlivě jednoduchá zadání, které studenty většinou neodradí a umožní jim s úlohami experimentovat. To potvrzují i naše zkušenosti se zařazením těchto úloh do výuky na gymnáziu. Příklady jsou rozděleny do dvou podkapitol. Příklady v podkapitole *Symetrie* pracují s osovou a středovou souměrností jako vlastností rovinného útvaru býti souměrný, nejedná se tedy v pravém slova smyslu o zobrazení. Mohlo by se zdát, že úlohy tohoto typu patří spíše na základní školu, ale pokud budeme řešit například úlohu 2 b) přesně, zjistíme, že výpočet rozhodně není na úrovni základní školy. Příklady v podkapitole *Zobrazení* již pracují s posunutím, osovou a středovou souměrností, otočením a stejnolehlostí jako se zobrazeními. Šikovnou pomůckou pro příklad 4 může být průhledná popisovací fólie, pomocí které mohou studenti simulovat jednotlivá zobrazení a lépe si tak představit jejich efekt. Poslední příklad 5 pak představuje hru, která rozvijí schopnost přesného vyjadřování a může studentům ilustrovat důležitost přesné terminologie.

2 Příklady

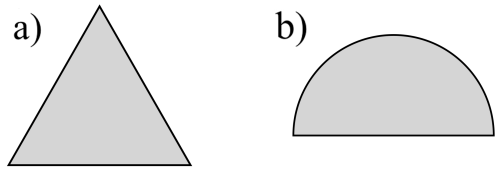
Symetrie

Následující úlohy a hlavolamy slouží pro rozvoj pochopení konceptu osové a středové souměrnosti jako vlastnosti rovinného útvaru. Úlohy umožňují studentům experimentovat a některé mají více řešení, což otevírá prostor pro diskuzi.

1. Doplňte každý z daných útvarů přidáním co nejnižšího počtu čtverečků tak, aby výsledný obrazec byl
   a) osově souměrný,
   b) středově souměrný.



2. Doplňte daný útvar tak, aby výsledný obrazec byl středově souměrný a měl co nejmenší obsah.

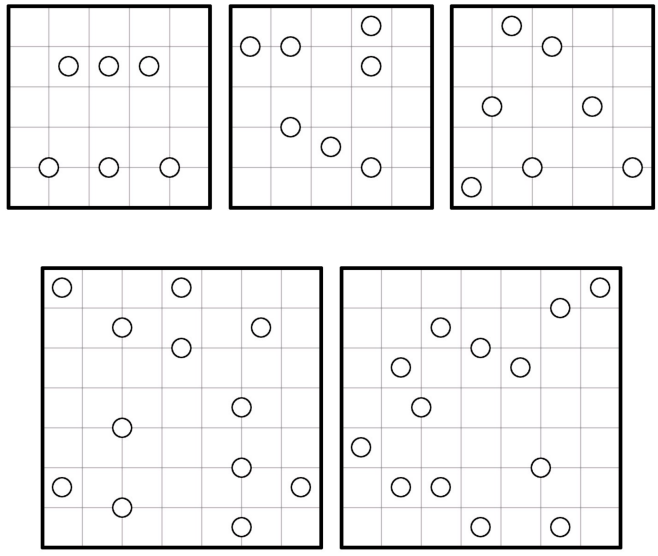


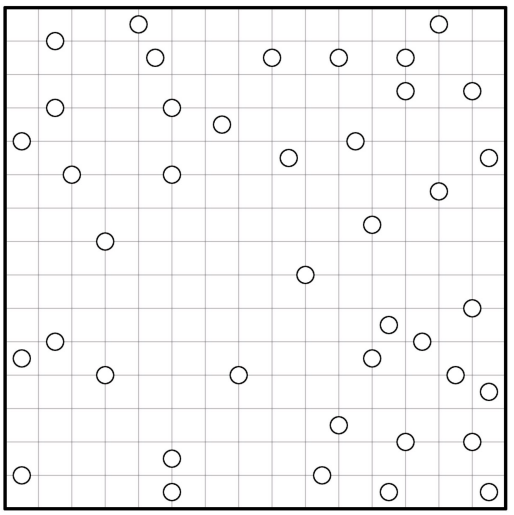
3. Rozdělte danou čtvercovou síť na regiony čtverečků v souladu s následujícími pravidly.

(i) Každý čtvereček patří právě do jednoho regionu.

(ii) Každý region je spojitý.

(iii) Každý region obsahuje právě jeden kruh, jehož střed je zároveň středem souměrnosti regionu.





Generátor těchto těchto úloh je dostupný online [4].

3*. Vymyslete tři neřešitelná zadání v síti 5×5.

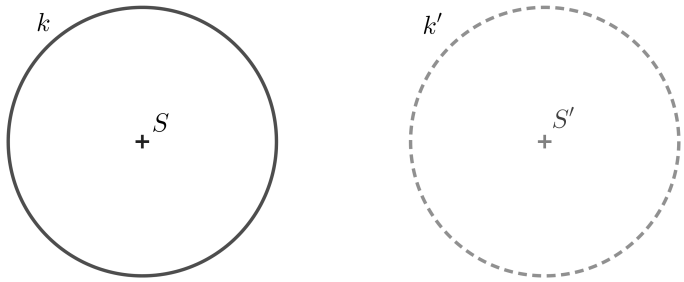
Vymyslete tři zadání v síti 5×5 s více řešeními.

Zobrazení

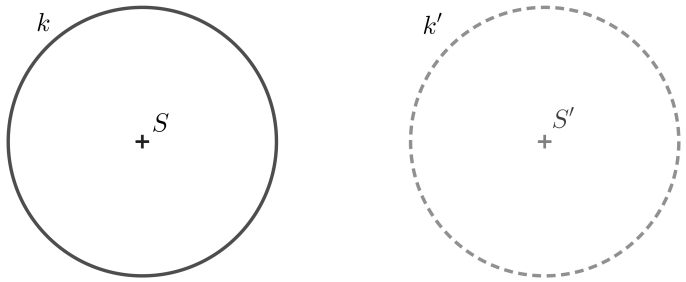
Následující problémy a aktivity slouží k rozvoji konceptu zobrazení v rovině. Opět se jedná o široce otevřené úlohy, které umožňují experimentování a otevírají prostor pro diskuzi. Některé úlohy mají více řešení, některé naopak nemají žádné řešení.

4. Na každém obrázku je zakreslen vzor (plně) a obraz (čárkovaně). Vaším úkolem je zajistit přesun vzoru na obraz pomocí daných zobrazení. Například v úloze a) musíme použít jedenkrát posunutí, abychom kružnici k zobrazili na kružnici k'. Tyto příklady jsou inspirované online cvičením na Khan Academy [5].

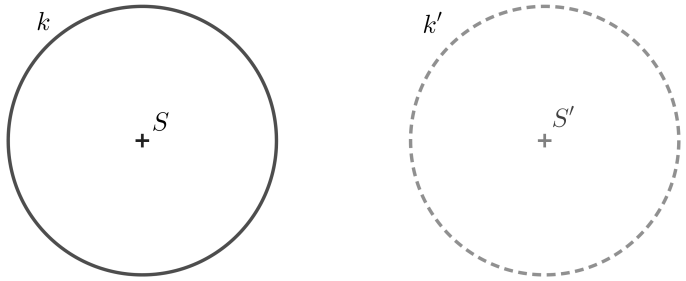
   a) jedno posunutí



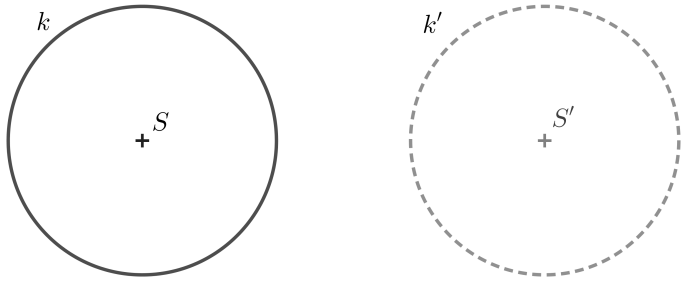
b) jedna středová souměrnost



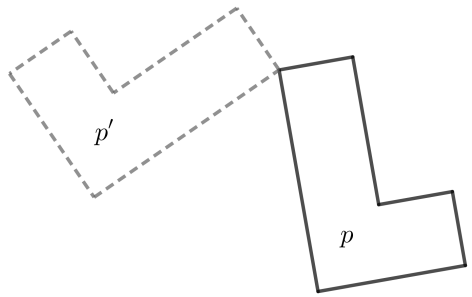
c) jedna osová souměrnost



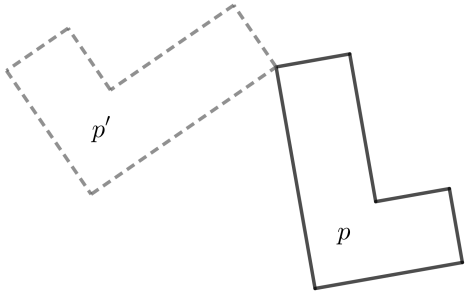
d) jedno otočení o 90°



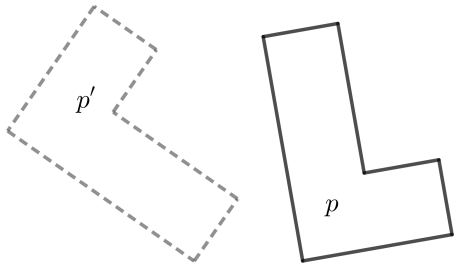
e) jedna osová souměrnost



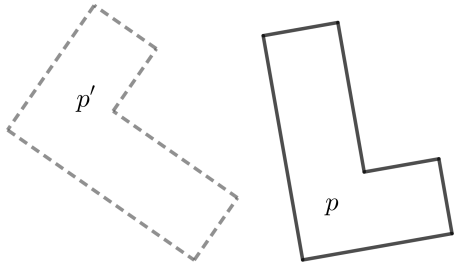
f) jedno otočení



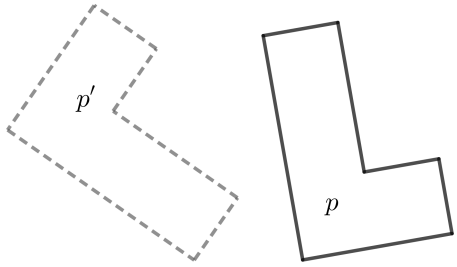
g) jedno posunutí a jedna osová souměrnost v libovolném pořadí



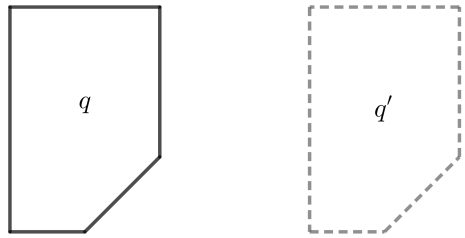
h) jedno otočení a jedna osová souměrnost v libovolném pořadí



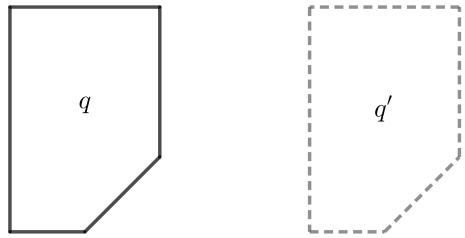
i) tři osové souměrnosti



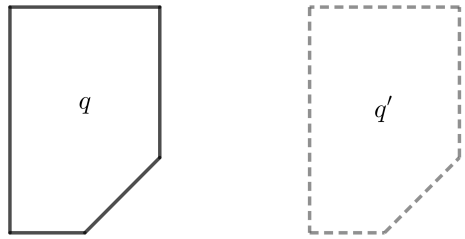
j) jedna stejnolehlost



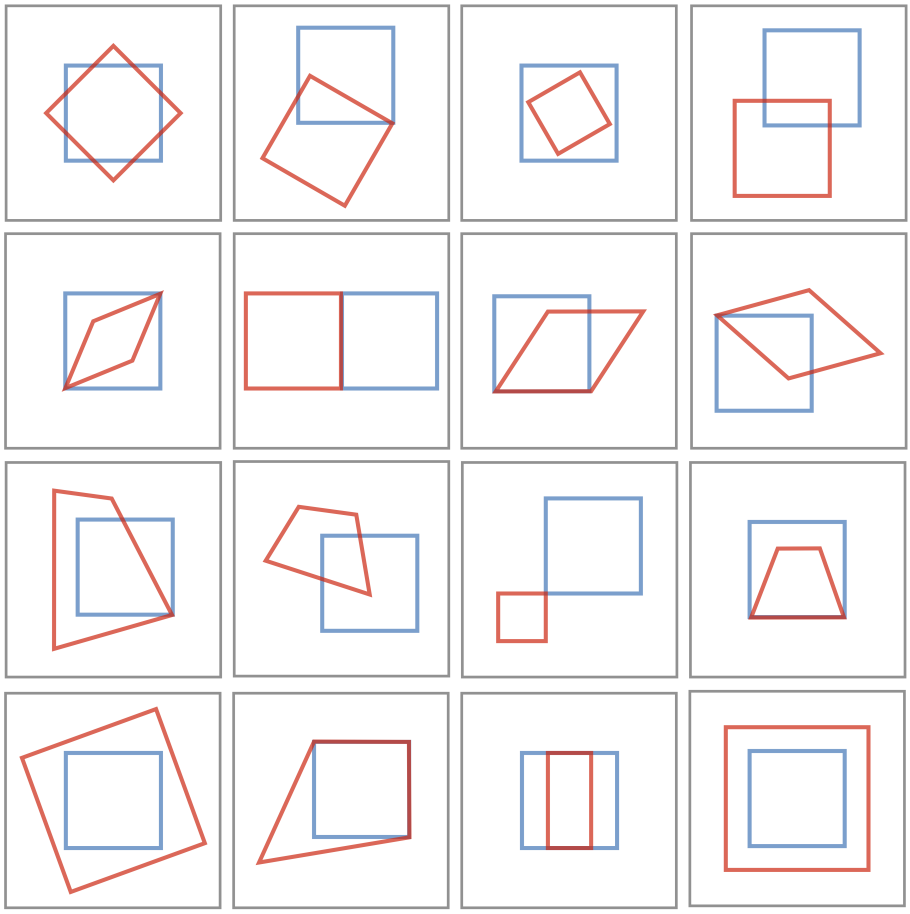
k) dvě stejnolehlosti se záporným koeficientem



l) dvě stejnolehlosti s kladným koeficientem



5. Tato hra slouží k rozvoji logického myšlení, vyjadřovacích schopností a osvojení správné terminologie. Jedná se o obdobu hry SOVA využívané v Hejného metodě a při přípravě učitelů 1. stupně ZŠ [6]. Hra je určena pro dva hráče A, B. Hráči dostanou sadu 16 obrázků, které zachycují čtverec a jeho a obraz (červeně) v blíže nespecifikovaném zobrazení, viz následující obrázek. Hráč A si mlčky zvolí jeden ze 16 nabízených obrázků. Úkolem hráče B je uhodnout, který obrázek si hráč A zvolil. Za tímto účelem klade hráč B otázky, na které lze odpovědět ano či ne a které se vztahují ke geometrickým vlastnostem zobrazení. Hráč B se například nesmí ptát na polohu myšleného zobrazení v zadané sadě (např. „Je myšlený obrázek v horní polovině sady?“). Hráč A odpovídá ano či ne, pokud nelze takto odpovědět, nebo pokud se hráč B neptá na geometrické vlastnosti zobrazení, odpoví hráč A „Nelze odpovědět.“ Hráč B se snaží uhodnout myšlený obrázek pomocí co nejmenšího počtu otázek. Poté si hráči prohodí role a dostanou novou sadu obrázků.



Pro lepší představu uvádíme možný průběh hry:

- Hráč A si zvolil obrázek ve druhém řádku a třetím sloupci.
- Hráč B: „Jedná se o shodné zobrazení?“
- Hráč A: „Ne.“
- Hráč B: „Jedná se o podobné zobrazení?“
- Hráč A: „Ne.“
- Hráč B: „Má zobrazení nějaké samodružné body?“

Toto je náročná otázka, je sice pravda, že obraz a vzor mají společné body, ale to neznamená, že se jedná o samodružné body. Například zobrazení ve druhém sloupci a druhém řádku může být posunutím bez samodružných bodů. Naopak absence společných bodů obrazu a vzoru nevylučuje existenci samodružných bodů, zobrazení vpravo dole může být stejnolehlostí se samodružným středem. Zadané obrázky nám o samodružných bodech zobrazení nic neříkají, proto na tuto otázku nelze odpovědět.

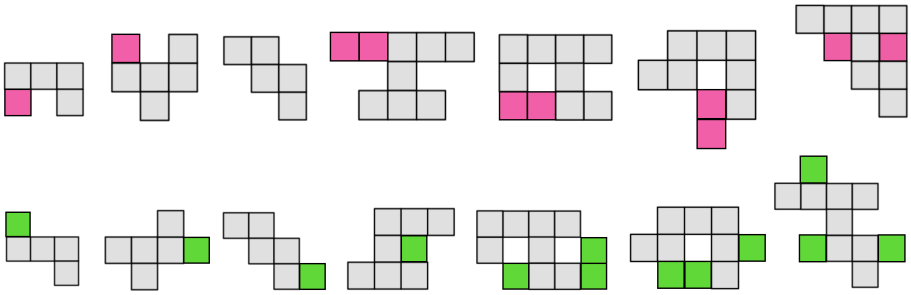
- Hráč A: „Nelze odpovědět.“
- Hráč B: „Mají obraz a vzor více než dva společné body?“
- Hráč A: „Ano.“
- Hráč B: „Jsou nějaké body obrazu vně čtverce?“
- Hráč A: „Ano.“
- Hráč B: „Je ve zobrazení zachována rovnoběžnost protilehlých stran čtverce?“
- Hráč A: „Ano.“
- Hráč B: „Už vím, myslíš na obrázek ve druhém řádku a třetím sloupci.“

Ve výuce samozřejmě nemůžeme očekávat takto hladký průběh, studenti se budou vyjadřovat svými slovy a je na nás, učitelích, abychom jim připomínali správnou terminologii a pomáhali jim zpřesňovat jejich vyjadřování. Hra může sloužit také k motivaci studentů věnovat se terminologii. Pokud studentům na této hře ukážeme, že jejich dosavadní znalosti a terminologická zásoba nestačí ani na dorozumění se se sousedem, budou lépe chápat důležitost přesné terminologie. V této podobě je hra dostupná také online na portálu [7].

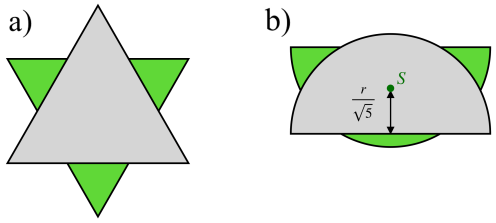
Uvedený herní mechanismus nemusí sloužit jen k rozvoji terminologie v oblasti geometrických zobrazení. Stejnou hru můžeme hrát s grafy funkcí, grafy posloupností nebo s rovnicemi.

Řešení úloh

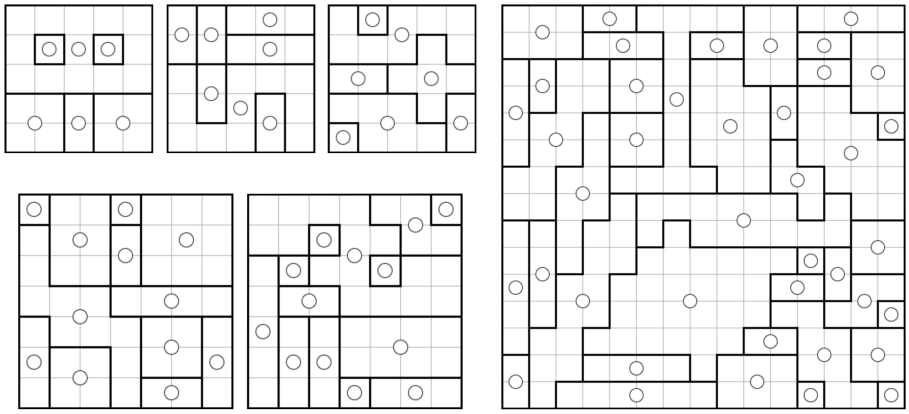
1. úloha



2. úloha



3. úloha



4. úloha

a) Posunutí je určené vektorem SS'. b) Střed souměrnosti je středem úsečky SS'. c) Osou souměrnosti je osa úsečky SS'. d) Středem otáčení je průsečík osy úsečky SS' s Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem SS'. Řešení jsou dvě podle směru otáčení. e) Osa souměrnosti prochází společným bodem obrazu a vzoru a dále půlí úhel odpovídajících si úseček. f) Nemá řešení. g) Existuje více řešení. Vzor posuneme tak, aby vznikla osově souměrná situace, můžeme jej například posunout tak, že obraz a vzor budou mít společný, odpovídající si vrchol, podobně jako v případech e), f). Pak již přemístění snadno dokončíme pomocí osové souměrnosti. h) Existuje více řešení. Podobně jako v minulém případě můžeme pomocí otočení zajistit, aby obraz a vzor měly jeden společný, odpovídající si vrchol. i) Dvě osové souměrnosti nahradí otočení z minulé úlohy. j) Nemá řešení. k) Existuje více řešení. Například můžeme zvolit první stejnolehlost s koeficientem -1 a libovolným středem, tím získáme středově souměrnou situaci, kterou snadno vyřešíme pomocí druhé stejnolehlosti opět s koeficientem -1. Střed druhé stejnolehlosti najdeme jako průsečík spojnic odpovídajících si vrcholů. l) Existuje více řešení. Musíme zvolit stejnolehlosti s navzájem inverzními koeficienty, například 2 a $1/2$. Střed první stejnolehlosti opět můžeme umístit libovolně, druhý střed pak snadno určíme pomocí spojnic odpovídajících si vrcholů.

3 Závěr

Viděli jsme několik příkladů, které mohou studentům pomoci experimentovat se zobrazeními a které otevírají prostor pro podnětnou diskuzi o zobrazeních. V kurzech lineární algebry a dalších vysokoškolských kurzech jsou zobrazení většinou zkoumána analyticky, nikoliv synteticky. Proto bych se přimlouval nejen za větší prostor geometrických zobrazení v tématu planimetrie, ale také v tématu analytické geometrie na střední škole.

Jsem si samozřejmě vědom, že není možné stále navyšovat objem probíraného učiva, proto si na závěr dovolím nabídnout oblasti, kde lze naopak učiva

ubrat. Osobně bych si uměl představit omezení tématu konstrukčních úloh jak v planimetrii, tak ve stereometrii, například řezů. Konstrukční úlohy jsou tradiční součásti středoškolské matematiky, na kterou ale na většině vysokých škol není žádná návaznost. S konstrukčními úlohami se nesetkají ani studenti ekonomie, informatiky, elektrotechniky, ale ani studenti matematiky. Geometrickým konstrukcím se ve větší míře věnují pouze studenti učitelství matematiky a studenti stavebních nebo strojních oborů.

Literatura

[1] *Matematika pro ekonomy II* [online]. Dostupné z: `insis.vse.cz/katalog/syllabus.pl?predmet=109345`

[2] R. D'Andrea, *The astounding athletic power of quadcopters*, TEDGlobal 2013 [online]. Dostupné z: `www.ted.com/talks/raffaello_d_andrea_the_astounding_athletic_power_of_quadcopters`

[3] E. Pomykalová, *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*, Prometheus 1993.

[4] T. Simon, *Galaxies* [online]. Dostupné z: `www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/puzzles/js/galaxies.html`

[5] *Mapping shapes*, Khan Academy 2018 [online]. Dostupné z: `www.khanacademy.org/math/geometry?t=practice`

[6] M. Hejný, J. Novotná, N. Stehlíková, *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, 1. díl, kapitola 14. Pedagogická fakulta UK, 2004.

[7] *Polygraph: Transformations*, Desmos 2018 [online]. Dostupné z: `teacher.desmos.com/polygraph/custom/560c53f5441172070b26220a`

Mgr. Jiří Vančura
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`jivancura@gmail.com`

KINEMATICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ: KONSTRUKCE ROVINNÝCH KŘIVEK A JEJICH VÝUKA NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Petra Surynková

Příspěvek se věnuje studiu vybraných rovinných křivek z pohledu kinematické geometrie. Kinematická geometrie patří mezi pokročilé partie vysokoškolské matematiky, ale její základy lze ukázat i studentům na střední škole. Cílem příspěvku je prezentovat, jak můžeme zavádět některé křivky kinematicky a jak je možné tímto způsobem zkoumat i křivky známé studentům na střední škole například v hodinách matematického semináře nebo ve výuce deskriptivní geometrie. Ruční rýsování některých křivek může být komplikované, navíc většinu křivek dokážeme rýsovat pouze bodově, k jejich vykreslování proto využíváme široce rozšířený software GeoGebra. GeoGebra nám také pomůže při experimentech, kdy se snažíme odhadnout typy vznikajících křivek. Experimenty vyhodnocujeme rovněž výpočtem či synteticky. Význam kinematické geometrie doložíme na různých aplikacích z praxe.

1 Úvod

Studium oboru učitelství matematiky a deskriptivní geometrie pro SŠ na MFF UK vyžaduje kromě zvládnutí disciplín jako je algebraická, diferenciální, deskriptivní či projektivní geometrie, také úspěšné absolvování kurzu kinematické geometrie. Se vznikem softwaru GeoGebra se výuka kinematické geometrie podstatně usnadnila. Už se nemusíme spoléhat pouze na fyzické modely pohybů a ruční rýsování, i když tyto metody v žádném případě neopouštíme. Software GeoGebra se stal výborným nástrojem podporující výuku geometrie, se kterým umí pracovat i studenti a to i na střední škole.

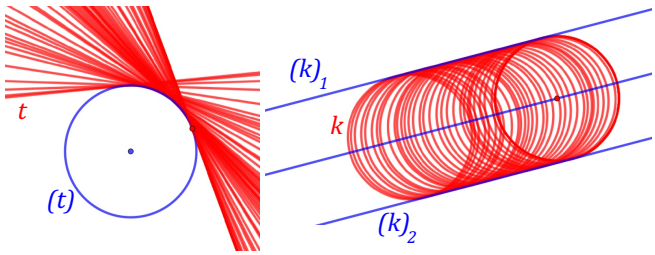
Studium kinematické geometrie vyžaduje znalosti elementární geometrie, protože je na nich postaveno dokazování platností geometrických tvrzení a jsou využity při určování druhů křivek, které kinematicky vznikají. Některým studentům na MFF UK bohužel chybí pevné základy v elementární geometrii a už při příchodu na fakultu mají problémy se zvládnutím studia geometrie. Už na základní a na střední škole by se proto výuce geometrie měl věnovat dostatečný prostor.

2 Jak lze zadávat pohyb v rovině

Kinematická geometrie se zabývá studiem pohybu jak v rovině, tak v trojrozměrném prostoru. Uvažujeme-li pokročilejší studium, lze se věnovat pohybu také obecně v libovolném n-dimenzionálním prostoru. V našem příspěvku se ovšem zaměříme pouze na rovinný případ. Rovinnou křivku budeme chápat velmi intuitivně. Pokud bychom vyžadovali matematicky korektní definování

křivek, můžeme nahlédnout do řady skript, například [1]. Zůstaňme u intuitivní představy a zaveďme několik základních pojmů z kinematické geometrie, bez kterých se neobejdeme.

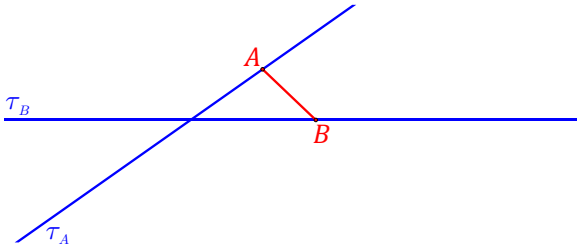
Dráha, nebo také *trajektorie*, bodu je křivka, kterou bod při pohybu opisuje. Vylučujeme případ, kdy by trajektorií bodu byl bod. *Obálka* křivky je křivka (může mít více větví nebo se dokonce redukovat na bod), kterou vytváří pohybující se křivka. Existuje-li křivka, která se dotýká všech poloh pohybující se křivky, nazýváme tuto křivku obálkou. Platí tedy, že v každé poloze se pohybující křivka dotýká své obálky, tj. křivka v dané poloze a její obálka mají v bodě dotyku společnou tečnu. Pojem obálky může být složitější pro pochopení, uveďme si proto některé příklady. Uvažujeme-li kružnici a všechny její tečny, je kružnice obálkou této soustavy tečen. Speciálním příkladem tzv. *bodové obálky* může být střed svazku přímek. *Ekvidistanta* přímky je dvojice přímek rovnoběžných se zadanou přímkou, ležících v opačných polorovinách určených zadanou přímkou v dané pevné vzdálenosti v. Ekvidistantu přímky ale můžeme chápat také jako obálku všech kružnic se středy na zadané přímce s poloměry rovným vzdálenosti v. Toto je právě případ, kdy má obálka více větví. Podívejme se na obrázek 1.



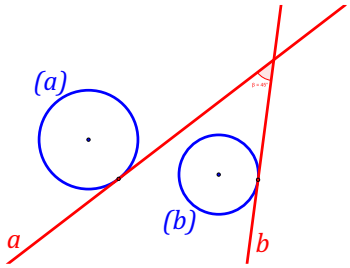
Obr. 1: Kružnice jako obálka soustavy tečen a ekvidistanta přímky jako obálka kružnice, jejíž střed se pohybuje po přímce

Přijměme úmluvu, že trajektorii bodu A značíme τ_A a obálku křivky a značíme (a).

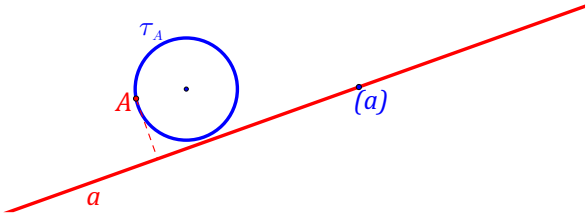
Rovinu, ve které leží trajektorie bodů a obálky křivek, označme Π. Rovina se nepohybuje, zůstává na místě, tedy i vše, co v ní leží, je neměnné. Jejím modelem může být list v sešitě, tabule či rovina stolu. Pohybující se body, či křivky, leží v rovině, kterou označíme Σ. Rovina Σ se jako celek pohybuje po rovině Π. Opět si ji můžeme vymodelovat, například jako list papíru či průhlednou fólii (abychom mohli pozorovat zároveň objekty v rovině Π). Do pohybující se roviny zakreslíme body a křivky, které se pohybují. Body a křivky roviny Σ opisují v rovině Π trajektorie a obálky. Říkáme, že objekty v rovině Σ tvoří tzv. *neproměnnou rovinnou soustavu*, která se jako celek pohybuje po *neproměnné rovinné soustavě* Π, viz například [5]. Důležitý poznatek, který je třeba si uvědomit je, že všechny objekty, které leží v pohybující se rovině Σ, se pohybují jako celek, nemění tedy polohu vůči sobě. V obrázcích 2 až 5 jsou objekty roviny Π zobrazeny modře, objekty roviny Σ červeně, tj. červené objekty se pohybují, modré zůstávají na místě.



Obr. 2: Zadání pohybu pomocí dvou trajektorií



Obr. 3: Zadání pohybu pomocí dvou obálek



Obr. 4: Zadání pohybu pomocí trajektorie a obálky

Existuje několik způsobů, jak zadat pohyb roviny Σ. Pohyb roviny Σ je jednoznačně určený, známe-li

- trajektorie dvou různých bodů roviny Σ (viz obrázek 2),
- obálky dvou různých křivek roviny Σ (viz obrázek 3),
- trajektorii bodu roviny Σ a obálku křivky roviny Σ (viz obrázek 4).

Kromě trajektorií a obálek lze pohyb zadávat ještě pomocí *pevné* a *hybné polodie*. Jedná se o tzv. *odvalování*. V praxi se s takovým pohybem můžeme setkat například při odvalování kola automobilu po silnici či při pohybu ozubených koleček. Ke třem zmíněným možnostem tedy přidejme ještě následující zadání. Pohyb roviny Σ je jednoznačně určený, známe-li

- pevnou a hybnou polodii (viz obrázek 5).

Obr. 5: Zadání pohybu pomocí pevné a hybné polodie

Pevná polodie leží v rovině Π, hybná polodie v pohybující se rovině Σ. Pohyb je realizován tak, že obě křivky se v každém okamžiku dotýkají a hybná polodie se odvaluje po pevné polodii postupným ztotožňováním jejích bodů s body pevné polodie se současným zachováním délek oblouků.

Pokud vyloučíme speciální pohyby, rotaci, posunutí a křivočaré posunutí (trajektorie všech bodů jsou navzájem shodné křivky, jedna na druhou lze převézt posunutím), viz [5], lze tyto čtyři způsoby zadání pohybu mezi sebou libovolně převádět. Důkaz převedení zadání pohybu pomocí trajektorií a obálek na odvalování nebudeme uvádět, neboť je to již výrazně nad rámec zaměření konference. Pokud by se čtenář chtěl sám dozvědět něco více o této problematice, odkazujeme na literaturu, například [4], [5], [6].

3 Příklady kinematicky vytvořených křivek

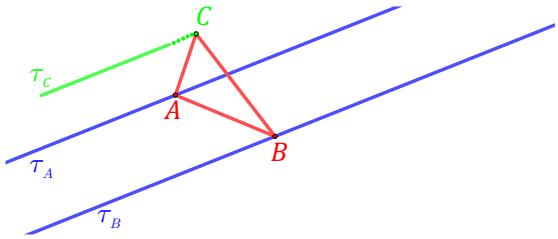
Uveďme několik příkladů pohybu v rovině a zkoumejme jaké křivky, trajektorie či obálky, při těchto pohybech vznikají. Volíme záměrně jednoduché příklady, které by se mohly ukázat i středoškolským studentům.

Příklad 1. Nechť je pohyb dán dvěma navzájem různými rovnoběžnými přímými trajektoriemi τ_A a τ_B dvou různých bodů A a B. Určete trajektorii libovolného bodu C různého od bodů A a B a neležícího na přímkách τ_A a τ_B.

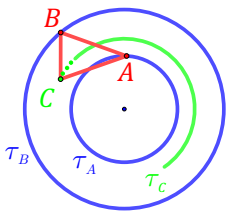
V GeoGebře lze pohyb jednoduše simulovat, viz obrázek 6. Zvolili jsme dané rovnoběžné různé trajektorie τ_A a τ_B a výchozí polohu úsečky AB. V našem případě jsme nejdříve zakreslili bod A na přímce τ_A (v GeoGebře tzv. částečně vázaný objekt) a v pevně dané vzdálenosti jsme určili na přímce τ_B bod B (v GeoGebře jsme pro sestrojení tohoto bodu užili nástroj kružnice s daným poloměrem). Úsečka AB může být i kolmá na přímky τ_A a τ_B, pokud kolmá není, vybereme jeden bod B ze dvou možných, které při konstrukci vzniknou. Dále jsme zvolili libovolný bod C, který je pevně spjatý s body A a B (v GeoGebře jsme pro sestrojení těchto bodů užili nástroje kružnice s daným poloměrem). V GeoGebře můžeme nyní hýbat bodem A a sledovat vykreslení trajektorie bodu C. Vzdálenosti bodů A, B, C jsou při pohybu konstantní, jejich vzájemná poloha se nemění, tj. všechny polohy trojúhelníku ABC jsou přímo shodné. Zapnout můžeme také vykreslování stopy bodu C. Jedná se o přímočaré posunutí, tedy každý další bod včetně bodu C roviny Σ opisuje v rovině Π přímou trajektorii rovnoběžnou s přímkami τ_A a τ_B.

Příklad 2. Nechť je pohyb dán dvěma trajektoriemi τ_A a τ_B dvou různých bodů A a B. Trajektorie τ_A a τ_B jsou dvě různé soustředné kružnice. Určete trajektorii libovolného bodu C různého od bodů A a B a neležícího na kružnicích τ_A a τ_B.

V GeoGebře je pohyb simulovaný obdobně jako u předchozího příkladu, pouze jsou místo rovnoběžných různých trajektorií uvažovány různé soustředné kružnice, viz obrázek 7. Jedná se o rotaci, tedy každý další bod včetně bodu C roviny Σ opisuje v rovině Π jako trajektorii kružnici soustřednou s kružnicemi τ_A a τ_B.



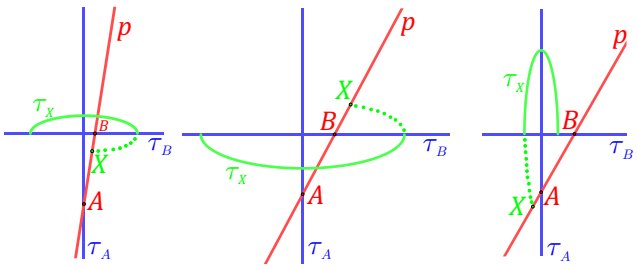
Obr. 6: Příklad 1



Obr. 7: Příklad 2

Kvůli možnosti převádění pohybů na odvalování se většinou posunutí, rotace a navíc křivočaré posunutí v kinematické geometrii vylučují. Uvádíme je jako elementární příklady, na kterých lze dobře pochopit principy zadání pohybu.

Příklad 3. Nechť je pohyb dán dvěma navzájem kolmými přímými trajektoriemi τ_A a τ_B dvou různých bodů A a B. Určete trajektorii libovolného bodu X přímky AB různého od bodů A a B.



Obr. 8: Příklad 3

Opět vymodelujeme situaci v GeoGebře, sledujme obrázek 8. Zakreslili jsme dané trajektorie τ_A a τ_B a výchozí polohu přímky AB. V našem případě jsme nejdříve zvolili bod A tak, že se může pohybovat pouze po trajektorii τ_A. Dále jsme určili pevně délku úsečky AB. Víme, že bod B se pohybuje po své trajektorii τ_B. Tím pádem pro danou polohu bodu A dostáváme polohu přímky AB. V tomto případě takto dostaneme dvě polohy bodu B (bude patrné také z výpočtu), tj. dvě polohy pohybující se soustavy Σ, do obrázku jsme zakreslili polohu jednu. Na přímku AB jsme dále zakreslili libovolný bod X tak, že jeho vzdálenosti od bodů A a B jsou pevné (v GeoGebře jsme pro sestrojení tohoto bodu užili nástroj kružnice s daným poloměrem). V GeoGebře můžeme nyní hýbat bodem A a sledovat, jakou trajektorii vykresluje bod X. Vzdálenosti bodů A, B, X jsou při pohybu konstantní. Zapnout můžeme také vykreslování stopy bodu X. Na obrázku 8 jsme naznačili postupné vykreslování trajektorie bodu X. Bod X můžeme na přímce AB volit různě a rozlišit tak případy, kdy leží na úsečce AB, na polopřímce AB za bodem B nebo na polopřímce BA za bodem A. Lze dokázat, že trajektorií bodu X jsou ve všech případech elipsy s hlavními a vedlejšími osami na přímkách τ_A a τ_B.

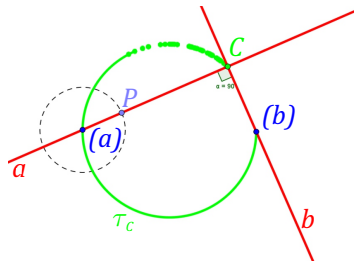
Dokažme, že trajektoriemi jsou elipsy analyticky. Nechť trajektorie τ_A a τ_B splývají v kartézské soustavě souřadnic s osami x, y. Libovolný bod $X = [x, y]$ přímky $p = AB$ opisuje při daném pohybu trajektorii τ_X. Vzdálenost bodů $A = [a, 0]$ a $B = [0, b]$ označme d a zvolme ji pevně, $d > 0$, platí tedy $a^2 + b^2 = d^2$. Souřadnice bodu B tedy lze zapsat v závislosti na této délce, tj. $B = [0, \pm\sqrt{d^2 - a^2}]$. Libovolný bod X přímky p můžeme vyjádřit jako $X = A + (B - A)t$, $t \in \mathbb{R}$. Označíme-li vzdálenost bodu X od bodu A jako v, platí $v = |td|$ a $|t| = v/d$. Vyjádříme-li a a b z rovnice přímky a dosadíme-li do $a^2 + b^2 = d^2$, po úpravě dostáváme rovnici elipsy $\frac{x^2}{d^2(1-t)^2} + \frac{y^2}{d^2t^2} = 1$. Pro $t > 0$ a $t \neq 1$, tj. leží-li bod X na úsečce AB (a je různý od bodů A, B), viz obrázek 8a), nebo na polopřímce AB za bodem B, viz obrázek 8b), dostáváme jako trajektorii bodu X elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic, poloosami o velikostech $d - v$ a v nebo $v - d$ a v na souřadnicových osách. Pro $t < 0$, tj. leží-li bod X na polopřímce BA za bodem A, viz obrázek 8c), dostáváme jako trajektorii bodu X elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic a poloosami o velikostech $d + v$ a v na souřadnicových osách.

Z našich úvah rovněž vyplývají známé konstrukce elipsy tzv. *rozdílová a součtová proužková konstrukce*. Pro danou hlavní nebo vedlejší osu elipsy (zde míněno jak poloha, tak délka) a libovolnou polohu bodu elipsy, tj. jednu polohu bodu X, podle předchozího určíme velikost chybějící osy.

Příklad 4. Nechť je pohyb dán dvěma různými bodovými obálkami (a) a (b) dvou různoběžných navzájem kolmých přímek a a b. Určete trajektorii průsečíku přímek a a b.

Pohyb zadejme v GeoGebře. Zvolme na nákresně dva různé body (a) a (b). Aby šlo se zadáním dobře manipulovat a simulovat pohyb v rovině, sestrojme kružnici se středem v bodě (a) s pevným libovolným poloměrem. Na tuto kružnici umístěme pomocný bod P a veďme body P a (a) přímku a. Nyní lze

pomocí pohybu bodu P po kružnici s přímkou a hýbat a získat tak všechny její polohy. Bodem (b) potom vedeme přímku b kolmou k přímce a. Přímky a a b s průsečíkem v bodě C nyní svírají pravý úhel a při pohybu bodem P zůstává tento úhel konstantní. Vrchol pravého úhlu bod C opisuje Thaletovu kružnici nad průměrem $(a)(b)$, viz obrázek 9.

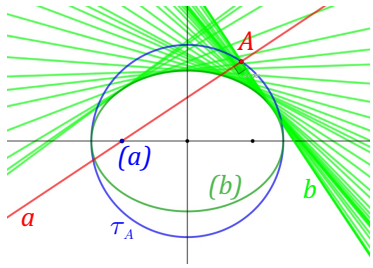


Obr. 9: Příklad 4

Příklady 3 a 4 lze zobecnit. V příkladě 3 lze volit různoběžné přímky τ_A a τ_B tak, že svírají úhel jiný než pravý. Obdobně v příkladě 4 nemusejí být různoběžné přímky a a b na sebe kolmé, ale svírat mohou obecný úhel. Necháváme na čtenáři, aby si rozmyslel, jaké v těchto případech dostáváme trajektorie. Doporučujeme si příklady namodelovat v GeoGebře.

Příklad 5. Nechť je pohyb dán trajektorií τ_A bodu A a bodovou obálkou (a) přímky a. Trajektorie τ_A je kružnice, bod (a) leží uvnitř kružnice τ_A a je různý od jejího středu, přímka a kromě své obálky (a) prochází také bodem A. Určete obálku (b) přímky b, která prochází bodem A a je kolmá na přímku a.

Sledujme obrázek 10, kde je pohyb zadaný v GeoGebře. Zakreslili jsme danou trajektorii τ_A a bodovou obálku (a) a výchozí polohu bodu A společně s přímkou a. Bod A jsme v GeoGebře zvolili tak, že se může pohybovat pouze po trajektorii τ_A. Dále jsme v bodě A vztyčili kolmici k přímce a a dostali jsme tak přímku b. V GeoGebře můžeme nyní hýbat bodem A a sledovat, jakou obálku vykresluje přímka b. Zapnout můžeme také vykreslování stopy přímky b. Na obrázku 10 jsme naznačili několik poloh přímky b.



Obr. 10: Příklad 5

Uvažme syntetickou konstrukci. Na trajektorii τ_A se můžeme dívat jako na množinu vrcholů pravých úhlů, které svírají přímky a a b. Hledáme obálku přímky b, to znamená, že přímka b je v každé poloze tečnou své obálky (b). Nyní už není těžké nahlédnout, že výsledná obálka (b) je elipsa se středem ve středu trajektorie τ_A. Trajektorie τ_A je vrcholová kružnice této elipsy, bod (a) je jedno z ohnisek. Jednoduše už nyní dourčíme velikost vedlejší poloosy elipsy, neboť $a^2 = b^2 + e^2$.

Poznamenejme ještě, že pohyb v příkladě 3 je tzv. *eliptický pohyb*, pohyb v příkladě 4 je tzv. *kardioidický pohyb* a konečně pohyb v příkladě 5 je tzv. *konchoidální pohyb*.

4 Praktické aplikace

Kde všude je možné setkat se s aplikacemi kinematické geometrie? Abstraktním bodům a křivkám musíme přiřadit nějaký fyzický model, aby mělo smysl o aplikacích hovořit. Bod i křivka tedy mají v praxi nějaký rozměr. Připomeňme ozubená kola v různých mechanických zařízeních (např. v hodinkách), která převádějí rotační pohyby na jiné rotační či posuvné pohyby. Jistě si vzpomeneme také na hever pro zvedání automobilu. Velmi známý je také klikový mechanismus. Hovořili jsme rovněž o odvalování kola po silnici. Pokud tuto představu velmi zjednodušíme a předpokládáme, že například jízdní kolo jede po rovném povrchu (navíc bez prokluzování kol), odrazka na kole (připusťme, že je to model bodu) opisuje při pohybu zkrácenou cykloidu, bod na okraji pneumatiky (v některých okamžicích se dotkne vozovky), opisuje prostou cykloidu.

Takto bychom mohli pokračovat dále a objevovat další modely pohybů v praxi. Pro další informace o praktických aplikacích odkazujeme čtenáře na literaturu, např. [6].

5 Shrnutí a závěr

V příspěvku jsme si na jednoduchých příkladech ukázali definování křivek z hlediska kinematické geometrie. Předložené příklady lze ukázat i studentům na střední škole, využívali jsme pouze elementární znalosti z geometrie. V prezentaci příspěvku plánujeme ukázat i složitější křivky. Všechny příklady z článku může čtenář vyzkoušet přímo v GeoGebře, příklady lze otevřít ve webovém prohlížeči, viz [2]. Doporučujeme také vyzkoušet příklady z GeoTestu, viz [3], které jsou dostupné online.

V budoucí práci se chceme zaměřit na studium dalších křivek a zpracovávat zadání pohybů v GeoGebře. Při výuce se nám velmi osvědčuje kombinovat různé metody – ruční rýsování, fyzické modelování pohybu a moderní rýsování v softwaru GeoGebra. Doufáme, že uvedené příklady a jejich zpracování budou inspirací pro učitele i studenty na SŠ i VŠ.

Poděkování. Tato publikace byla podpořena programem Univerzitní výzkumná centra UK č. UNCE/HUM/024 a projektem PROGRES Q17 *Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.*

Literatura

[1] L. Boček, V. Kubát, *Diferenciální geometrie křivek a ploch*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983.

[2] GeoGebra book: *Kinematická geometrie v rovině: konstrukce rovinných křivek.* `https://ggbm.at/wj59xuus`

[3] GeoTest: *Učební pomůcka pro zadávání a řešení geometrických úloh.* `http://geotest.geometry.cz/`

[4] P. Surynková, *Kinematic Geometry with GeoGebra.* In D. Martinovic, Z. Karadag, D. McDougall (eds.), Technology in Mathematics Education: Contemporary Issues, Informing Science Press, 2012, 117–145.

[5] A. Urban, *Deskriptivní geometrie II*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha a Vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1967.

[6] Š. Voráčová a kol., *Atlas geometrie*, Academia, Praha, 2012.

RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`surynkov@karlin.mff.cuni.cz`

FERMATŮV BOD A GEOMETRICKÝ MEDIÁN

Antonín Slavík

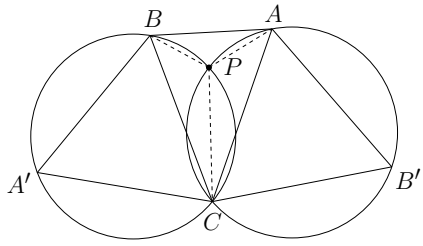
1 Fermatův bod

Začneme připomenutím známé úlohy, jejímž autorem je Pierre de Fermat: *Najděte bod, který minimalizuje součet vzdáleností od vrcholů daného trojúhelníku.* Hledaný bod vždy existuje, je určen jednoznačně a nazývá se obvykle *Fermatův bod* nebo *Torricelliho bod* na počest E. Torricelliho, který problém úspěšně vyřešil.[1] Výsledek je obsažen v následující větě.

Věta 1. *Pro každý trojúhelník ABC existuje právě jeden bod P, pro nějž je součet $|PA| + |PB| + |PC|$ minimální. Nastává právě jedna ze dvou možností:*

- *Pokud jsou velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC menší než $120°$, pak P je bod uvnitř trojúhelníku, z nějž jsou všechny tři strany vidět pod úhlem $120°$.*
- *Pokud je velikost vnitřního úhlu u některého z vrcholů A, B, C větší nebo rovna $120°$, pak bod P splývá s tímto vrcholem.*

Pokud jsou velikosti vnitřních úhlů menší než $120°$, pak bod P, z nějž jsou všechny strany vidět pod úhlem $120°$, vždy existuje a lze jej snadno sestrojit. Stačí nad libovolnými dvěma stranami, např. AC a BC, sestrojit (z vnější strany trojúhelníku ABC) rovnostranné trojúhelníky a opsat jim kružnice, viz obr. 1. Jeden z oblouků nad stranou AC (resp. BC) představuje množinu všech bodů, z nichž je tato strana trojúhelníku vidět pod úhlem $120°$ (neboť z doplňkového oblouku je vidět pod úhlem $60°$). Hledaný bod P je průsečíkem obou sestrojených kružnic. Také strana AB je z bodu P vidět pod úhlem $120°$, neboť součet úhlů u vrcholu P je $360°$.[2]



Obr. 1: Konstrukce Fermatova bodu trojúhelníku ABC

[1] Lze se setkat i s označením *Steinerův bod*. J. Steiner se zabýval obecnějším typem úloh, které vyžadují pospojování daných bodů v rovině sítí úseček (tj. vlastně rovinným grafem) tak, aby součet jejich délek byl co nejmenší; viz např. [8].

[2] Bod P lze zkonstruovat ještě jednodušším způsobem, který objevil T. Simpson. Označíme-li zbývající vrcholy rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami AC a BC písmeny B' a A', pak P je průsečíkem přímek AA' a BB'. Viz např. [7, str. 28].

Pokud naopak některý z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, např. úhel u vrcholu C, je větší nebo roven $120°$, pak neexistuje žádný bod uvnitř trojúhelníku, z nějž jsou všechny tři strany vidět pod úhlem $120°$. Pro každý bod P uvnitř trojúhelníku je totiž úhel APB větší než úhel ACB, tj. větší než $120°$.

Větu 1 lze dokázat mnoha způsoby. K nejznámějším patří Torricelliho řešení využívající Vivianiho větu a dále řešení objevené nezávisle J. E. Hofmannem a T. Galaiem založené na skutečnosti, že součet $|PA| + |PB| + |PC|$ lze interpretovat jako délku jisté lomené čáry, která je minimální, pokud čára přejde v úsečku. Tato klasická řešení jsou popsána např. v [7, 8, 12] nebo na webové stránce [2], která uvádí celkem sedm různých důkazů. Přístupy založené na syntetické geometrii jsou elementární, často však vyžadují netriviální nápad. V tomto příspěvku představíme dva méně známé důkazy. Začneme důkazem, který využívá analytickou geometrii a je převzat z [19]; doplněny jsou pouze pasáže týkající se jednoznačnosti Fermatova bodu.

Připomeňme ještě, že pro každé dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ platí tzv. Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

která přechází v rovnost právě tehdy, když u, v jsou lineárně závislé (obě tvrzení plynou např. ze vztahu $u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$, kde α je odchylka vektorů u, v).

Důkaz 1. Pro libovolný bod Q v rovině definujeme

$$f(Q) = |QA| + |QB| + |QC|.$$

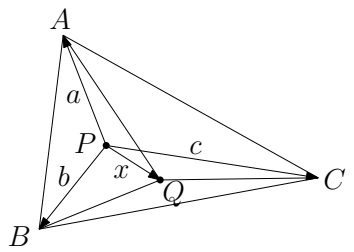
Chceme najít bod P, ve kterém funkce f nabývá minima. Zvolíme libovolné dva body P, Q v rovině a porovnáme hodnoty $f(P)$, $f(Q)$. Zavedeme-li vektory $a = \overrightarrow{PA}$, $b = \overrightarrow{PB}$, $c = \overrightarrow{PC}$, $x = \overrightarrow{PQ}$ (viz obr. 2), pak platí

$$\begin{aligned} f(P) &= \|a\| + \|b\| + \|c\|, \\ f(Q) &= \|a - x\| + \|b - x\| + \|c - x\|. \end{aligned}$$

Pro každý nenulový vektor v plyne z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti odhad

$$\|v\| = v \cdot \frac{v}{\|v\|} = (v - x) \cdot \frac{v}{\|v\|} + x \cdot \frac{v}{\|v\|} \leq \|v - x\| + x \cdot \frac{v}{\|v\|},$$

přičemž rovnost nastává, právě když v, x jsou lineárně závislé.



Obr. 2: Vektory a, b, c, x

Pokud je bod P různý od A, B, C, pak a, b, c jsou nenulové vektory a platí

$$\|a\| + \|b\| + \|c\| \leq \|a - x\| + \|b - x\| + \|c - x\| + x \cdot \left(\frac{a}{\|a\|} + \frac{b}{\|b\|} + \frac{c}{\|c\|} \right).$$

Jsou-li velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC menší než $120°$, pak lze dosáhnout toho, aby součet v závorce na pravé straně byl nulový vektor – stačí za P volit bod, z nějž jsou všechny tři strany vidět pod úhlem $120°$ (v závorce je pak vektorový součet tří jednotkových vektorů, které lze chápat jako strany rovnostranného trojúhelníku). Tím je dokázáno, že $f(P) \leq f(Q)$ pro každý bod Q. Rovnost v této nerovnosti nastává jen tehdy, když vektor x je lineárně závislý s a, b i c, což platí pouze pro $Q = P$.

Zbývá vyšetřit případ, kdy u některého vrcholu je úhel aspoň $120°$; nechť to nastane např. pro vrchol C. Nechť $P = C$, Q je libovolný bod v rovině a vektory a, b, x jsou jako výše. Pak

$$\begin{aligned} f(P) &= \|a\| + \|b\|, \\ f(Q) &= \|a - x\| + \|b - x\| + \|x\|. \end{aligned}$$

Podobně jako dříve máme

$$\|a\| + \|b\| \leq \|a - x\| + \|b - x\| + x \cdot \left(\frac{a}{\|a\|} + \frac{b}{\|b\|} \right).$$

Pro úhel γ mezi vektory a a b platí $120° \leq \gamma < 180°$, a tedy

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} + \frac{b}{\|b\|} \right\|^2 = \frac{a \cdot a}{\|a\|^2} + \frac{2a \cdot b}{\|a\| \, \|b\|} + \frac{b \cdot b}{\|b\|} = 1 + 2\cos\gamma + 1 = 2(1 + \cos\gamma) \leq 1.$$

Z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pak plyne

$$x \cdot \left(\frac{a}{\|a\|} + \frac{b}{\|b\|} \right) \leq \|x\|.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\|a\| + \|b\| \leq \|a - x\| + \|b - x\| + \|x\|,$$

neboli $f(P) \leq f(Q)$ pro každý bod Q. Rovnost v této nerovnosti nastává jen tehdy, když vektor x je lineárně závislý s a i b, což platí pouze pro $Q = P$. □

Uvedeme ještě druhý důkaz, který sice využívá diferenciálního počtu a není tedy elementární, je však zcela přímočarý a jak uvidíme později, lze jej snadno zobecnit. Jedná se o mírně upravenou verzi důkazu z [17].

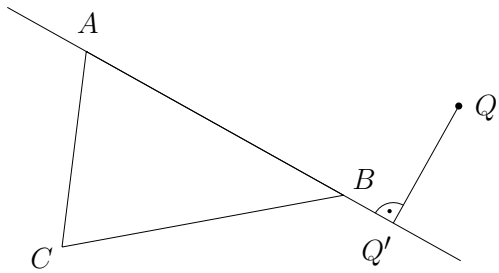
Důkaz 2. Nechť vrcholy trojúhelníku mají souřadnice $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. Pro libovolný bod $Q = (x, y)$ v rovině definujeme

$$f(Q) = |QA| + |QB| + |QC|,$$

neboli v souřadnicích

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}.$$

Nejprve dokážeme, že f nabývá globálního minima v některém bodě trojúhelníku ABC. Zvolíme libovolný bod P tohoto trojúhelníku. Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Uvažujme kružnici ℓ se stejným středem, jejíž poloměr přesahuje poloměr k o více než $f(P)/3$. Vzdálenost libovolného bodu Q ležícího vně ℓ od libovolného bodu na kružnici k je tedy větší než $f(P)/3$, a proto $f(Q) = |QA| + |QB| + |QC| > f(P)$. Oblast ohraničená kružnicí ℓ je uzavřená a omezená, proto zde f nabývá minima. Jedná se o globální minimum f na $\mathbb{R}^2$, neboť jeho hodnota je menší nebo rovna $f(P)$. Tvrdíme, že toto minimum nemůže ležet vně trojúhelníku ABC. Skutečně, volíme-li např. libovolný bod Q v části roviny ohraničené přímkou AB, která neobsahuje trojúhelník ABC, pak pro kolmý průmět Q' bodu Q na AB platí $|Q'A| < |QA|$, $|Q'B| < |QB|$, $|Q'C| < |QC|$ (viz obr. 3). Proto $f(Q') < f(Q)$, tj. v bodě Q není minimum f. Globální minimum f tedy musí ležet v trojúhelníku ABC.



Obr. 3: Kolmý průmět Q' bodu Q je blíže k bodům A, B, C

S výjimkou vrcholů A, B, C je funkce f diferencovatelná. Může tedy nabývat globálního minima pouze ve vrcholech nebo v bodech, kde je vektor parciálních derivací $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ nulový. Protože

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{y-y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}},$$

dostáváme

$$\nabla f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \begin{pmatrix} x-x_i \\ y-y_i \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{|AQ|} + \frac{\overrightarrow{BQ}}{|BQ|} + \frac{\overrightarrow{CQ}}{|CQ|}.$$

Vidíme, že f nabývá minima buď v některém z vrcholů, nebo v bodě P, pro který platí

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|PA|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|PB|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|PC|} = 0,$$

pokud ovšem takový bod existuje. Předchozí rovnost znamená, že jednotkové vektory směřující z bodu P k vrcholům A, B, C mají nulový součet, tj. tvoří strany rovnostranného trojúhelníku. Odtud plyne, že odchylka libovolných dvou vektorů je 120°. Z bodu P jsou tedy všechny strany trojúhelníku ABC vidět pod úhlem 120°. Rozebereme nyní dva případy:

- Nechť velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC jsou menší než 120°. Víme, že pak uvnitř trojúhelníku existuje právě jeden bod P, z nějž jsou všechny strany vidět pod úhlem 120°. Z kosinové věty použité na trojúhelník ABP plyne

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AP|^2 + |BP|^2 - 2|AP|\,|BP|\cos 120^\circ = \\ &= |AP|^2 + |BP|^2 + |AP|\,|BP| > \left(\frac{|AP|}{2} + |BP|\right)^2. \end{aligned}$$

  Analogicky lze dospět k odhadu

$$|AC|^2 > \left(\frac{|AP|}{2} + |CP|\right)^2.$$

  Platí tedy

$$\begin{aligned} f(A) = |AB| + |AC| &> \frac{|AP|}{2} + |BP| + \frac{|AP|}{2} + |CP| = \\ &= |AP| + |BP| + |CP| = f(P). \end{aligned}$$

  Podobně se dokáže, že $f(B) > f(P)$ a $f(C) > f(P)$. Funkce f tedy nabývá minima v bodě P.
- Nechť velikost úhlu u některého z vrcholů trojúhelníku ABC je větší nebo rovna 120°; označme jej P. V tomto případě uvnitř trojúhelníku neleží žádný bod, z nějž jsou všechny strany vidět pod úhlem 120°. Funkce f tedy nabývá minima v některém z vrcholů a její minimální hodnota je součtem délek stran vycházejících z daného vrcholu. Protože nejdelší strana se nachází proti největšímu úhlu, tedy proti vrcholu P, je zřejmé, že f nabývá minima v bodě P.

□

2 Zobecnění – geometrický medián

Přirozeným zobecnění Fermatovy úlohy je následující problém: V rovině je dáno n bodů $A_1, \ldots, A_n$, které neleží na jedné přímce. Hledáme bod P, pro nějž je součet vzdáleností $|PA_1| + \cdots + |PA_n|$ co nejmenší. Ukážeme, že takový bod vždy existuje a je určen jednoznačně; nazývá se *geometrický medián bodů*

$A_1, \ldots, A_n$.[3] Budeme potřebovat následující pomocné tvrzení o konvexních funkcích více proměnných (důkaz vychází z [9]).

Lemma 2. *Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexní, diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a platí $\nabla f(x_0) = 0$, pak má v x_0 globální minimum.*

Důkaz. Pokud $x \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $t \in (0, 1)$, pak z definice konvexity plyne

$$\begin{aligned} f(x_0 + tx) - f(x_0) = f(t(x_0 + x) + (1 - t)x_0) - f(x_0) \leq \\ \leq tf(x_0 + x) + (1 - t)f(x_0) - f(x_0) = t(f(x_0 + x) - f(x)), \end{aligned}$$

neboli $f(x_0 + x) - f(x) \geq \frac{1}{t}(f(x_0 + tx) - f(x_0))$. Přechodem k limitě obdržíme

$$f(x_0 + x) - f(x_0) \geq \lim_{t \to 0+} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} = 0,$$

neboť limita odpovídá derivaci f ve směru x a ta je díky nulovosti parciálních derivací f rovna nule. Platí tedy $f(x_0 + x) - f(x_0) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ a f nabývá v x_0 globálního minima. □

Nyní můžeme přistoupit k důkazu existence a jednoznačnosti geometrického mediánu. Důkaz je inspirován článkem [11] (kde je vyšetřován obecnější případ k bodů v n-rozměrném prostoru) a zobecňuje úvahy z druhého důkazu věty 1.

Věta 3. *Jsou-li v rovině dány body $A_1, \ldots, A_n$ neležící na jedné přímce, pak existuje právě jeden bod v rovině, pro nějž je součet $f(P) = |PA_1| + \cdots + |PA_n|$ minimální. Tento bod se nachází v konvexním obalu bodů $A_1, \ldots, A_n$ a nastává právě jedna ze dvou možností:*

- *Existuje bod P takový, že*

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{|PA_1|} + \cdots + \frac{\overrightarrow{PA_n}}{|PA_n|} = 0. \tag{1}$$

  Pak f nabývá minima v P.
- *f nabývá minima v některém z bodů $A_1, \ldots, A_n$.*

Důkaz. Nechť zadané body mají souřadnice $A_1 = (x_1, y_1), \ldots, A_n = (x_n, y_n)$. Hledáme bod $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, který minimalizuje hodnotu funkce

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Nejprve dokážeme, že f nabývá globálního minima v konvexním obalu bodů $A_1, \ldots, A_n$, což je konvexní mnohoúhelník, který označíme písmenem K. Zvolíme libovolný bod $P \in K$ a kružnici ℓ obsahující K s tak velkým poloměrem,

[3] Podobnost s pojmem *medián* dobře známým ze statistiky není náhodná. Je-li A konečná množina reálných čísel, pak její medián minimalizuje hodnotu funkce $s(x) = \sum_{a \in A} |a - x|$. Viz např. [11, str. 223] nebo `https://bit.ly/2tnJmjm`.

aby vzdálenost libovolného bodu ℓ od bodů $A_1, \dots, A_n$ byla větší než $f(P)/n$. Pak každý bod Q ležící vně ℓ splňuje $f(Q) = |QA_1| + \cdots + |QA_n| > f(P)$. Oblast ohraničená kružnicí ℓ je uzavřená a omezená, proto zde f nabývá minima. Jedná se o globální minimum f na $\mathbb{R}^2$, neboť jeho hodnota je menší nebo rovna $f(P)$. Tvrdíme, že toto minimum nemůže ležet vně K. Takový bod Q by musel ležet v polorovině určené některou ze stran mnohoúhelníku K, která neobsahuje K. Pro kolmý průmět Q' bodu Q na tuto stranu ale platí $f(Q') < f(Q)$, tj. v bodě Q není minimum f. Dokázali jsme, že globální minimum f leží v K.

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro $P, Q \in \mathbb{R}^2$ a $t \in (0,1)$ platí

$$f(tP + (1-t)Q) = \sum_{i=1}^{n} \|tP + (1-t)Q - A_i\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|t(P - A_i) + (1-t)(Q - A_i)\| <$$

$$< t \sum_{i=1}^{n} \|P - A_i\| + (1-t) \sum_{i=1}^{n} \|Q - A_i\| = tf(P) + (1-t)f(Q).$$

Skutečnost, že nerovnost je ostrá, je důsledkem toho, že $A_1, \dots, A_n$ neleží na přímce. Některý bod A_i proto neleží na přímce PQ, vektory $P - A_i$ a $Q - A_i$ jsou lineárně nezávislé a platí ostrá nerovnost

$$\|t(P - A_i) + (1-t)(Q - A_i)\| < t\|P - A_i\| + (1-t)\|Q - A_i\|.$$

Ukázali jsme, že f je ryze konvexní funkce. Z toho plyne, že f má nejvýše jedno minimum (pokud by měla minima ve dvou různých bodech P a Q, pak nerovnost $f(tP + (1-t)Q) < tf(P) + (1-t)f(Q)$ pro $t \in (0,1)$ vede ke sporu).

V každém bodě $P = (x, y)$ s výjimkou $A_1, \dots, A_n$ je f diferencovatelná, přičemž vektor jejích parciálních derivací je

$$\nabla f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{A_1P}}{|A_1P|} + \cdots + \frac{\overrightarrow{A_nP}}{|A_nP|}.$$

Pokud existuje bod $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ takový, že $\nabla f(x, y)$ nulový vektor, pak z lemmatu 2 plyne, že P je globálním minimem f. V opačném případě f nabývá minima v některém z bodů $A_1, \dots, A_n$. □

3 Hledání mediánu a jeho aplikace

Ukázali jsme, že geometrický medián n-tice bodů vždy existuje, zatím však nevíme, jak jej nalézt. Začneme případem $n = 4$; zde je sestrojení mediánu dokonce ještě jednodušší než nalezení Fermatova bodu trojúhelníku. Důkaz následujícího tvrzení je převzat z [11] a opírá se o větu 3; jiný (elementární) důkaz lze nalézt v [15].

Věta 4. *Jsou-li v rovině dány čtyři body A, B, C, D neležící na přímce, pak nastává právě jedna ze dvou možností:*

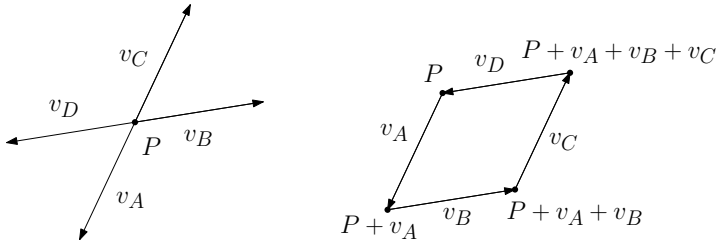
- *Žádný z bodů A, B, C, D neleží v konvexním obalu zbývajících tří bodů. Pak konvexním obalem bodů A, B, C, D je čtyřúhelník a průsečík jeho úhlopříček je geometrickým mediánem čtveřice A, B, C, D.*
- *Některý z bodů A, B, C, D leží v konvexním obalu zbývajících tří bodů. Tento bod je geometrickým mediánem čtveřice A, B, C, D.*

Důkaz. Uvažujme první případ, kdy konvexním obalem bodů A, B, C, D je čtyřúhelník. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že jeho vrcholy A, B, C, D jsou označeny ve „správném“ pořadí, tj. že jde o čtyřúhelník $ABCD$ (jinak body přeznačíme). Nechť P je průsečík jeho úhlopříček. Pak zřejmě platí $\overrightarrow{PA}/|PA| = -\overrightarrow{PC}/|PC|$ a $\overrightarrow{PB}/|PB| = -\overrightarrow{PD}/|PD|$, odkud plyne

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|PA|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|PB|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|PC|} + \frac{\overrightarrow{PD}}{|PD|} = 0. \tag{2}$$

Podle věty 3 je bod P geometrickým mediánem bodů A, B, C, D.

Pokud některý z bodů A, B, C, D leží v konvexním obalu zbývajících tří bodů, tvrdíme, že neexistuje žádný bod P splňující (2). Pokud by takový bod existoval, mohli bychom bez újmy na obecnosti předpokládat, že jednotkové vektory $v_A = \overrightarrow{PA}/|PA|$, $v_B = \overrightarrow{PB}/|PB|$, $v_C = \overrightarrow{PC}/|PC|$, $v_D = \overrightarrow{PD}/|PD|$ umístěné do společného počátečního bodu P jsou uspořádány proti směru pohybu hodinových ručiček (jinak přeznačíme body A, B, C, D). Z rovnosti $v_A+v_B+v_C+v_D = 0$ by plynulo, že body P, $P+v_A$, $P+v_A+v_B$, $P+v_A+v_B+v_C$ tvoří vrcholy kosočtverce (viz obr. 4). Jeho protilehlé strany jsou rovnoběžné, a tedy $v_A = -v_C$ a $v_B = -v_D$. To má za následek, že úsečky AC a BD procházejí bodem P a $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, což je spor.



Obr. 4: Posunutím vektorů v_A, v_B, v_C, v_D vycházejících z bodu P (vlevo) lze získat kosočtverec (vpravo)

Vidíme, že ve druhém případě se geometrický medián musí shodovat s některým z vrcholů A, B, C, D. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že D leží v konvexním obalu A, B, C, tedy v trojúhelníku ABC. Snadno si rozmyslíme, že pak platí $|AB| + |AC| > |DB| + |DC|$, tedy $|AB| + |AC| + |AD| > |DB| + |DC| + |DA|$ a bod A není geometrický medián. Podobně se zdůvodní, že ani B, C nejsou geometrické mediány. □

Pro $n \geq 5$ bohužel není znám žádný explicitní vzorec či algoritmus, který by umožňoval přesně vypočítat nebo sestrojit geometrický medián n-tice bodů $A_1, \ldots, A_n$.[4] Intuitivní zdůvodnění je následující: Označíme-li $v_i = \overrightarrow{PA_i}/|PA_i|$, pak rovnost (1) přejde do tvaru $v_1 + \cdots + v_n = 0$. Pro $n = 3$ tato podmínka znamená, že vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří strany rovnostranného trojúhelníku a pro $n = 4$ jde o strany kosočtverce, zatímco pro $n \geq 5$ již podobnou geometrickou charakterizaci nemáme k dispozici (pětiúhelník s jednotkovými stranami může být zcela nesymetrický).

Hledání Fermatova bodu či geometrického mediánu bývá zmiňováno jako příklad úlohy, kterou lze řešit pomocí vhodné fyzikální interpretace (viz např. [7, 11]): Do rovinné desky ve vodorovné poloze vyvrtáme otvory odpovídající bodům $A_1, \ldots, A_n$. Každým otvorem protáhneme jeden provázek, volné konce provázků nad deskou svážeme dohromady a polohu tohoto uzlu označíme P. Na opačné konce provázků pod deskou zavěsíme identická závaží. Umístíme-li desku do dostatečné výšky tak, aby se provázky a závaží mohly volně pohybovat, soustava se bude snažit zaujmout polohu, která minimalizuje potenciální energii (neboli polohu, při které se těžiště soustavy závaží nachází co nejníže). Ta je úměrná součtu výšek jednotlivých závaží nad zemí a bude minimální, právě když součet délek částí provázků pod deskou bude maximální. To nastane právě tehdy, když součet délek provázků nad deskou, tj. $|PA_1| + \cdots + |PA_n|$, bude minimální – v tom případě poloha bodu P odpovídá geometrickému mediánu.[5]

Fyzikální řešení není příliš přesné ani praktické, přesto je poučné: Velikosti napěťových sil, kterými jednotlivé provázky působí na bod P, mají shodné velikosti. Pokud se bod P nenachází přímo nad některým otvorem, pak vektorový součet těchto sil je násobkem vektoru

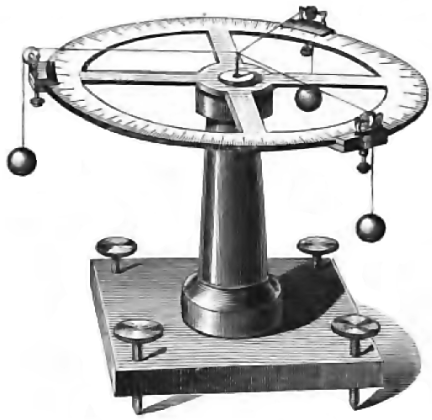
$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{|PA_1|} + \cdots + \frac{\overrightarrow{PA_n}}{|PA_n|}.$$

Je-li soustava v rovnováze, musí být tento součet roven nulovému vektoru; dostáváme tedy jiné zdůvodnění dříve dokázaného vztahu (1), který charakterizuje polohu geometrického mediánu.

Někdy se místo vyvrtávání otvorů do desky umísťují do bodů $A_1, \ldots, A_n$ kladky (viz např. [12]). Na obr. 5 je často reprodukovaná ilustrace z knihy E. Macha *Die Mechanik in ihrer Entwickelung* zobrazující kruhovou desku, po jejímž okraji lze posouvat kladkami a umístit je do vrcholů trojúhelníku, jehož Fermatův bod hledáme (resp. podobného trojúhelníku). V jiných publikacích se uvažuje odlišný mechanismus, kdy se provázky se závažími nacházejí v jedné vertikální rovině a kladky jsou připevněny ke zdi (viz např. [16, 13]).

[4] Je dokonce dokázáno, že pro $n \geq 5$ nelze geometrický medián obecně sestrojit pravítkem a kružítkem. Důkaz založený na Galoisově teorii lze najít v [10], viz též [1].

[5] Interaktivní model se třemi závažími je k dispozici na `demonstrations.wolfram.com/PolyasMechanicalModelForTheFermatPoint/` (ke spuštění je potřeba *Wolfram Mathematica* nebo *CDF Player*).



Obr. 5: Mechanický model s kladkami podle E. Macha

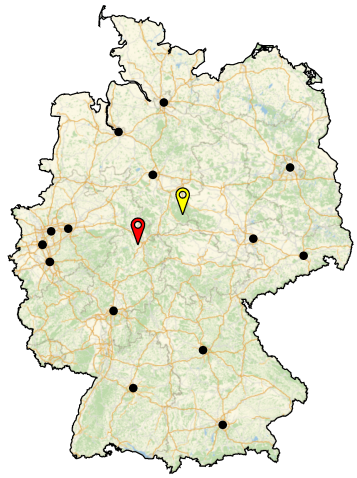
K přibližnému výpočtu geometrického mediánu lze použít standardní algoritmy numerické matematiky pro hledání extrémů funkce dvou proměnných, případně algoritmy specializované právě na hledání mediánu, jako je např. Weiszfeldův algoritmus (viz např. [20]).

Na hledání Fermatova bodu či geometrického mediánu vede řada praktických problémů. Autoři knihy [5] zmiňují úlohu, kdy je potřeba propojit tři obce silniční sítí tak, aby celková délka silnic byla minimální. Optimální řešení samozřejmě vypadá tak, že každá obec je spojena silnicí s Fermatovým bodem. Následující problém je inspirován článkem [11]: Představme si leteckého dopravce, který přepravuje zásilky mezi městy $A_1, \ldots, A_n$ následujícím způsobem: Každý den nejprve dopraví zásilky ze všech měst do distribučního centra C, kde jsou následně roztříděny a poté přepraveny do cíle. V první fázi je tedy vypraveno jedno letadlo z každého města do distribučního centra, ve druhé fázi pak letí z centra do každého města opět jedno letadlo. Tento způsob dopravy je výhodný: dopravci stačí méně letadel, než kdyby přepravoval zásilky mezi každou dvojicí měst přímo.[6] Jaká je nejvýhodnější poloha centra tak, aby letadla v součtu nalétala co nejkratší vzdálenost? Pokud si města $A_1, \ldots, A_n$ a centrum C představíme jako body v rovině, pak letadla každý den nalétají vzdálenost $2\sum_{i=1}^{n} |CA_i|$, a optimální poloha centra C tedy odpovídá geometrickému mediánu bodů $A_1, \ldots, A_n$.

Situaci ilustruje obr. 6. Znázorňuje mapu Německa se 14 vyznačenými městy, která mají aspoň 500 000 obyvatel (největší z nich je Berlín se zhruba 3,44 miliony obyvatel, nejmenší Norimberk s přibližně 506 tisíci obyvatel). V programu *Wolfram Mathematica* byla nalezena přibližná poloha jejich geometrického mediánu, který je vyznačen červeně.[7]

[6] V článku [11] je uvedeno, že podobný systém používají např. americké dopravní společnosti FedEx a UPS s tím rozdílem, že distribučních center je více.

[7] Zdrojový kód je na `www.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/mathematica/median-germany.nb`.



Obr. 6: Velká německá města (černě), jejich geometrický medián (červeně) a vážený geometrický medián vzhledem k počtům obyvatel (žlutě)

Zobecněním geometrického mediánu je tzv. vážený geometrický medián. Jsou-li dána kladná reálná čísla $w_1, \ldots, w_n$, pak vážený geometrický medián bodů $A_1, \ldots, A_n$ je bod P, který minimalizuje součet $\sum_{i=1}^{n} w_i |PA_i|$. Hledání takového bodu je v literatuře známo pod názvem Weberův problém na počest A. Webera, který se úloze věnoval ve své knize [18] z roku 1909.[8] Pokud jsou váhy $w_1, \ldots, w_n$ racionální čísla, lze je vynásobit jejich nejmenším společným jmenovatelem a získat tak ekvivalentní Weberův problém, kde váhy jsou přirozená čísla. Existence váženého geometrického mediánu pak plyne z věty 3 (ve znění věty se nepředpokládá, že zadané body jsou navzájem různé).

Představme si např. následující úlohu: Města $A_1, \ldots, A_n$ chtějí vybudovat společné letiště. Kde má být umístěno, pokud požadujeme, aby průměrná vzdálenost pro všechny obyvatele měst byla co nejmenší? Jestliže w_i je počet obyvatel města A_i, pak průměrná vzdálenost bodu P od všech obyvatel je

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i |PA_i|}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

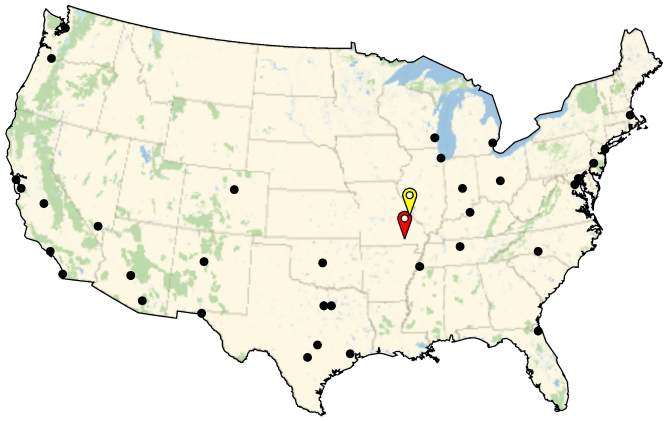
Tato hodnota je minimální, právě když P je vážený geometrický medián bodů $A_1, \ldots, A_n$.[9]

[8] Speciální případ Weberova problému se třemi body řešil již T. Simpson v roce 1750. Historie Fermatova bodu a Weberova problému je stručně popsána např. v [3].

[9] Jiná úloha vedoucí na Weberův problém je následující: K výrobě jistého produktu jsou zapotřebí suroviny, které se budou dovážet z míst $A_1, \ldots, A_n$ a následně zpracovávat v továrně. Jaké je optimální umístění továrny, jestliže cena za dopravu jednotkového množství i-té suroviny na jednotkovou vzdálenost je w_i a chceme minimalizovat celkovou cenu za převoz surovin?

Dříve zmíněný fyzikální postup pro hledání geometrického mediánu lze snadno upravit pro řešení Weberova problému: Stačí vzít závaží, jejichž hmotnosti jsou úměrné vahám $w_1, \ldots, w_n$ (viz [12] nebo „matematický dodatek“ k Weberově knize [18], jehož autorem je profesor pražské Německé univerzity G. Pick). Weberův problém lze samozřejmě řešit i numericky, např. na obr. 6 je žlutě znázorněna přibližná poloha váženého geometrického mediánu velkých německých měst (váhy odpovídají počtům jejich obyvatel).

Měření vzdáleností mezi městy pomocí eukleidovské metriky tak, jako by se jednalo o body v rovině, dává přijatelné výsledky jen tehdy, když jsou města dostatečně blízko sebe. Správnější je uvažovat body na povrchu sféry nebo elipsoidu a měřit vzdálenosti podél geodetik, tj. nejkratších spojnic na ploše. Řešení Weberova problému pak spočívá v nalezení bodu P minimalizujícího součet $\sum_{i=1}^{n} w_i d(P, A_i)$, kde $d(X, Y)$ značí vzdálenost dvou bodů na ploše. Tuto úlohu lze opět řešit numericky pomocí vhodného softwaru.[10] Rozdíl mezi použitím eukleidovské metriky a měřením vzdáleností podél geodetik na elipsoidu ilustruje obr. 7 znázorňující mapu USA s 34 městy nad 500 000 obyvatel a jejich vážený geometrický medián vypočtený pomocí obou metrik v programu *Wolfram Mathematica*.[11] Vzdálenost obou míst činí přibližně 165 km.



Obr. 7: Velká města USA, jejich vážený geometrický medián vypočtený pomocí eukleidovské metriky (červeně) a pomocí metriky na elipsoidu (žlutě)

4 Závěr

Kromě Weberova problému existují i jiné varianty původní Fermatovy úlohy. Místo bodů ve dvourozměrném prostoru je možné řešit podobné problémy

[10] Geometrický medián tří bodů na sféře lze charakterizovat podobným způsobem jako Fermatův bod trojúhelníku v rovině, viz [4]. Případ čtyř bodů na sféře je vyšetřen v [15], kde lze nalézt i výsledky pro obecné metrické prostory. Geometrický medián n bodů na sféře vždy existuje, nemusí však být určen jednoznačně; viz [11, str. 231].

[11] Zdrojový kód je na `www.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/mathematica/median-usa.nb`.

v trojrozměrném či n-rozměrném prostoru. Např. v článku [6] se hledá analogie Fermatova bodu pro čtyřstěn $ABCD$ v prostoru a je dokázáno, že z tohoto bodu jsou všechny stěny čtyřstěnu vidět pod stejnými prostorovými úhly.

V tomto článku jsme se zaměřili převážně na analytický přístup k Fermatově úloze, který lze s drobnými modifikacemi použít i k řešení obecnějších úloh (geometrický medián, Weberův problém). Jak již bylo zmíněno v kapitole 1, Fermatovu úlohu a některé její varianty lze řešit i elementárními metodami středoškolské matematiky. Zájemcům o zpestření středoškolské výuky lze kromě zdrojů citovaných v kapitole 1 doporučit např. články [13, 14], kde jsou uvedeny odkazy na applety vytvořené v GeoGebře a popsány pokusy s mýdlovými bublinami umožňující experimentální řešení Fermatovy úlohy a jejích variant.

Literatura

[1] C. Bajaj, *The algebraic degree of geometric optimization problems*, Discrete & Computational Geometry 3 (1988), 177–191.

[2] A. Bogomolny, *The Fermat Point and Generalizations*, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. Dostupné z: `www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml`.

[3] G. Bruno, A. Genovese, G. Improta, *A historical perspective on location problems*, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics 29 (2014), 83–97.

[4] E. J. Cockayne, *On Fermat's Problem on the Surface of a Sphere*, Mathematics Magazine 45 (1972), 216–219.

[5] R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1996.

[6] F. Eriksson, *The Fermat-Torricelli problem once more*, The Mathematical Gazette 81 (1997), 37–44.

[7] R. Honsberger, *Mathematical Gems I.* Mathematical Association of America, 1973.

[8] P. Leischner, *Metody řešení planimetrických úloh*, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2012. Dostupné z: `www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/mrg.html`

[9] G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex Analysis: Theory and Applications.* American Mathematical Society, 2003.

[10] Z. A. Melzak, *Companion to concrete mathematics. Mathematical techniques and various applications*, John Wiley & Sons, 1973.

[11] K. E. Morrison, *The FedEx Problem*, The College Mathematics Journal 41 (2010), 222–232.

[12] I. Niven, *Maxima and minima without calculus*, The Mathematical Association of America, 2006.

[13] J. Park, A. Flores, *Fermat's point from five perspectives*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 46 (2015), 425–441.

[14] J. Park, A. Flores, *Soap films and GeoGebra in the study of Fermat and Steiner points*, Journal of Mathematical Education in Science and Technology 49 (2018), 554–570.

[15] F. Plastria, *Four-point Fermat location problems revisited. New proofs and extensions of old results*, IMA Journal of Management Mathematics 17 (2006), 387–396.

[16] G. Pólya, *Mathematics and plausible reasoning, vol. I: Induction and analogy in mathematics*, Princeton University Press, 1954.

[17] P. G. Spain, *The Fermat Point of a Triangle*, Mathematics Magazine 69 (1996), 131–133.

[18] A. Weber, *Über den Standort der Industrien*, J. C. B. Mohr, 1909.

[19] Wikipedia contributors, *Fermat point*, Wikipedia, The Free Encyclopedia [online]. Dostupné z: `en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point`.

[20] Wikipedia contributors, *Geometric median*, Wikipedia, The Free Encyclopedia [online]. Dostupné z: `en.wikipedia.org/wiki/Geometric_median`.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`

VĚTA O MOTÝLECH

Martina Štěpánová

Obsahem příspěvku je problematika týkající se především tětiv kružnic. Studované tětivy jsou v rovině umístěny takovým způsobem, že vizuálně připomínají křídla motýlů. Všechna odůvodnění příslušných, níže prezentovaných vět jsou založena na znalostech planimetrie na úrovni středoškolské látky vyučované na gymnáziu.[1] Věříme, že odstavce na následujících stranách proto naleznou své čtenáře především mezi středoškolskými učiteli matematiky a jejich zvídavými studenty.

Celý text se týká geometrie v rovině, což nebudeme dále kvůli zjednodušení vyjadřování výslovně zdůrazňovat. Pokud tedy bude například dána kružnice a přímka, budeme vždy předpokládat, že oba geometrické útvary leží v jedné rovině. Jestliže se bude v rámci téhož tvrzení vyskytovat tětiv více, vždy budeme uvažovat jen tětivy navzájem různé, a jestliže budeme pojednávat o úhlech, omezíme se mlčky pouze na úhly konvexní.

1 O více než dvě stě let nazpátek

Byla neděle 7. dubna roku 1805, když William Herschel (1738–1822), objevitel planety Uran (1781), jeho měsíců Titanie a Oberona (1787), Saturnových měsíců Encelada a Mimase (1789) či infračerveného záření (1800), dopsal svůj dopis adresovaný Williamu Wallaceovi (1768–1843), pozdějšímu vynálezci eidografu (1821).[2] V korespondenci stálo:

I have kept a little problem for you which a friend of mine has sent me who says he cannot find a solution of it. I mentioned to him that I had a friend who would probably help him to one. The problem is this. Given AB the diameter of a circle. CD a chord cutting it at right angles in K. EF, and HG two other chords drawn any how through the point K; and HF, EG chords joining the extremes of EF, HG. Required to prove that MK is equal to LK.

(viz [1], str. 18)

Při své volbě adresáta v osobě skotského matematika a astronoma Wallacea si Herschel zřejmě nemohl vybrat lépe. Z relativně nedávno nalezeného Walla-

[1] Jedinou výjimkou je možná poznatek pojednávající o protínajících se tětivách kružnice. Tvrzení je však v textu zformulováno a k jeho odvození již středoškolské znalosti zcela postačují.

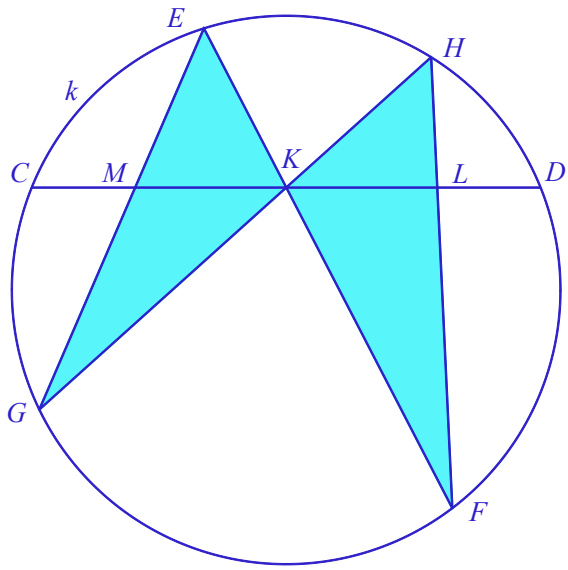
[2] Pro zajímavost uveďme, že kořeny Williama Herschela, německého fyzika, hudebního skladatele a především jednoho z nejvýznamnějších astronomů všech dob, sahají na české území, a to konkrétně do Heršpic, obce situované přibližně 20 km východně od Brna. Jeho předci se zřejmě jmenovali Jelínkovi, avšak jeho praděd, sládek Jan Jelínek, si své příjmení poněmčil na Hirschel.

ceova archivu (viz [1]) totiž plyne, že to byl právě on, kdo nejenže roku 1805 podal rozřešení předloženého problému, ale dokonce již roku 1803 předložil (avšak bez důkazu) obecnější tvrzení věty pro regulární kuželosečky (viz níže).[3]

2 Znění Věty o motýlovi

V dnešní řeči bychom výše uvedené tvrzení, které budeme nazývat *Větou o motýlovi*, zformulovali spíše následujícím způsobem (ponecháváme přitom označení bodů ze zmíněného dopisu):

Nechť je dána kružnice k a její tětiva CD. Nechť E, F, G, H jsou navzájem různé body kružnice k takové, že tětivy EF, GH procházejí středem K tětivy CD (body E, H přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou CD). Jsou-li M, L průsečíky tětivy CD s tětivami EG, FH, potom je K také středem úsečky ML (Obr. 1).



Obr. 1: Věta o motýlovi

Pojmenování věty je zřejmé z obr. 1. Na bod K můžeme pohlížet jako na „tělo“ motýla a na trojúhelníky EGK, KFH jako na jeho křídla.[4]

[3] Přepis příslušné části Wallaceova dopisu je uveden v [1] a s drobnou chybou (chybějící řádek s odvozeným vztahem) rovněž v [2].

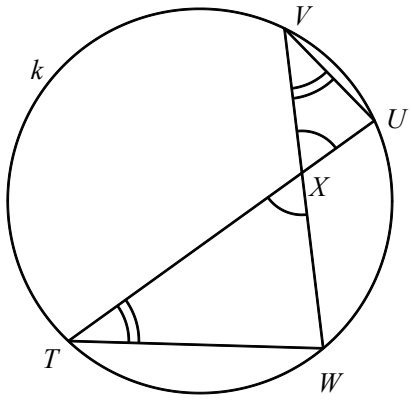
[4] V anglicky psané odborné literatuře se tvrzení nazývá *the Butterfly Theorem*.

Pro zajímavost dále uveďme, že osoby s příjmením *Wallace* problematika motýlů zřejmě přitahuje. Tím, kdo roku 1855 popsal motýla *Trogonoptera brookiana*, byl totiž významný britský biolog, geograf a antropolog Alfred Russel Wallace (1823–1913). Motýl s neobvyklým rozpětím křídel (cca 15 cm) z rodu ptakokřídleců a čeledi otakárkovitých se vyskytuje především na Borneu a Malajském poloostrově.

Následující sekce je věnována různým důkazům právě uvedené věty. V nich je opakovaně využíván poznatek, kterému budeme říkat *Věta o protínajících se tětivách.*[5] Jelikož se jedná o tvrzení, jež není běžně na středních školách probíráno, představíme jak jeho znění, tak důkaz, jehož pochopení naopak vyšší než obvyklé středoškolské znalosti nevyžaduje.

Nechť T, U, V, W jsou navzájem různé body kružnice k. Jestliže se tětivy TU a VW kružnice k protínají v bodě X, potom

$$|TX| \cdot |UX| = |VX| \cdot |WX| .$$



Obr. 2: Věta o protínajících se tětivách

Důkaz: Zřejmě (Obr. 2) platí $|\angle TXW| = |\angle UXV|$. S využitím věty o obvodových úhlech je $|\angle WTU| = |\angle WVU|$, a trojúhelníky TWX a VUX jsou tedy podobné. Odtud vyplývá

$$\frac{|TX|}{|WX|} = \frac{|VX|}{|UX|}$$

a po úpravě

$$|TX| \cdot |UX| = |VX| \cdot |WX| . \qquad \square$$

[5] V anglicky psané odborné literatuře se tvrzení nazývá *the Intersecting Chords Theorem.*

Jedná se o poznatek zformulovaný již v Eukleidových *Základech*, a to jako 35. věta III. knihy v následující podobě (v překladu F. Servíta): *Když se v kruhu dvě přímky navzájem protínají, pravoúhelník sevřený úsečkami jedné rovná se pravoúhelníku sevřenému úsečkami druhé.* Servítův překlad *Základů* do češtiny viz [3], komentované *Základy* viz [4].

Věta má úzkou souvislost s tzv. *mocností bodu ke kružnici*, která je nejčastěji definována takto: *Nechť je v rovině dána kružnice k o středu S a poloměru r a dále libovolný bod X. Mocností m bodu X ke kružnici k rozumíme reálné číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v = |XS|$.* Pro m tedy platí: $m > 0$ pro bod X ležící ve vnější oblasti kružnice k, $m = 0$ pro bod X kružnice k a $m < 0$ pro bod X ležící ve vnitřní oblasti kružnice k. Označíme-li přitom T, U průsečíky libovolné sečny (v mezním případě bod dotyku $T = U$ tečny) kružnice k vedené bodem X, potom $|m| = |TX| \cdot |UX|$.

3 Důkazy Věty o motýlovi

Nyní nám již nic nebrání věnovat se důkazům *Věty o motýlovi*. V literatuře jich lze k dnešnímu datu nalézt desítky.[6] Níže z nich vybíráme původní Wallaceův postup a dále ty (alespoň podle našeho názoru) nejelegantnější a nejelementárnější (pochopitelné pro středoškoláky).[7]

Některé dále odvozené vztahy jsou opakovaně využívány v různých důkazech. Odvodíme je pouze v místě prvního výskytu a v později uvedených důkazech se na ně budeme již jen odkazovat.

Původní, tj. Wallaceův důkaz Věty o motýlovi

Prvním prezentovaným důkazem je historicky nejstarší známé ověření hypotézy, které ve výše zmíněné korespondenci předložil William Wallace.

Bodem L veďme přímku rovnoběžnou s přímkou EG a její průsečíky s přímkami GH, resp. EF označme Q, resp. P (Obr. 3). Z rovnoběžnosti přímek EG a QP plyne $|\angle EGH| = |\angle HQP|$ a z věty o obvodových úhlech vyplývá

$$|\angle EGH| = |\angle EFH|\,. \tag{1}$$

Tedy $|\angle PFH| = |\angle PQH|$, a proto body Q, H, P, F leží na jedné kružnici, kterou budeme značit l.

Protože jsou trojúhelníky KEG, KPQ podobné, dělí body M a L jejich strany EG, PQ ve stejném poměru (trojúhelníky KEM a KPL a také trojúhelníky KMG a KLQ jsou tudíž podobné). Odtud plyne

$$\frac{|KM|}{|EM|} = \frac{|KL|}{|PL|}, \qquad \frac{|KM|}{|GM|} = \frac{|KL|}{|QL|},$$

a tedy

$$\frac{|KM|^2}{|EM| \cdot |GM|} = \frac{|KL|^2}{|PL| \cdot |QL|}. \tag{2}$$

Podle Věty o protínajících se tětivách (pro kružnice k a l) je

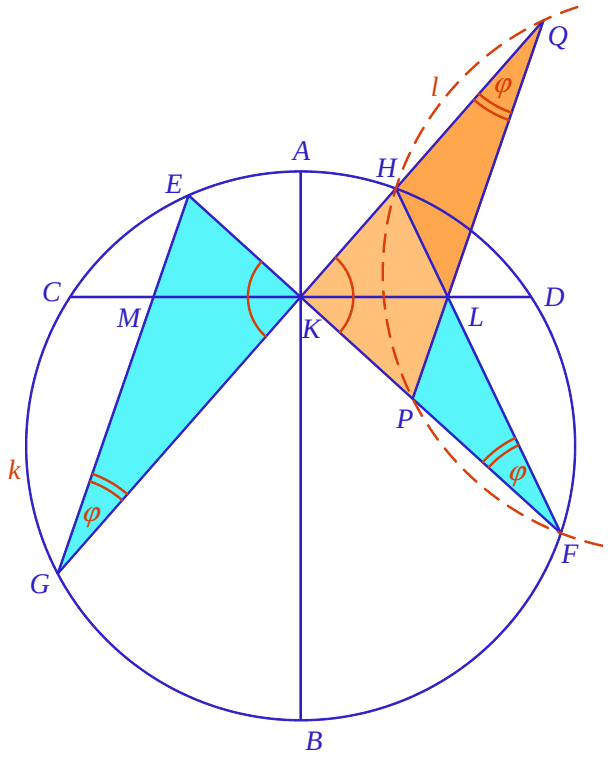
$$|EM| \cdot |GM| = |CM| \cdot |DM|$$

a

$$|PL| \cdot |QL| = |FL| \cdot |HL| = |CL| \cdot |DL|\,.$$

[6] Studnicí důkazů věty je webová stránka [5].

[7] Čtenáři, který je obeznámen s projektivní geometrií, doporučujeme půvabné důkazy 19 a 20 na webové stránce [5].



Obr. 3: Původní, tj. Wallaceův důkaz Věty o motýlovi[8]

Ze vztahu (2) proto dostaneme rovnost

$$\frac{|KM|^2}{|CM|\cdot|DM|} = \frac{|KL|^2}{|CL|\cdot|DL|},$$

kterou dále postupně upravíme:

$$|KM|^2\cdot|CL|\cdot|DL| = |KL|^2\cdot|CM|\cdot|DM|\,,$$

$$|KM|^2\cdot|KL|^2 + |KM|^2\cdot|CL|\cdot|DL| = |KM|^2\cdot|KL|^2 + |KL|^2\cdot|CM|\cdot|DM|\,,$$

$$|KM|^2\cdot\Big(|KL|^2 + |CL|\cdot|DL|\Big) = |KL|^2\cdot\Big(|KM|^2 + |CM|\cdot|DM|\Big)\,,$$

[8] Grafické ztvárnění na obr. 3 je inspirováno obrázkem z Wallaceova dopisu. Co se týče geometrických útvarů, jsou na Wallaceově ilustraci zachyceny ty objekty (a jejich popisy), které jsou na obr. 3 zaneseny tmavě modrou barvou. Ostatní geometrické útvary Wallace nezakreslil, použil rovněž odlišný font písma. Původní Wallaceův (a rovněž Herschelův) obrázek je přetištěn v [1].

$$\frac{|KM|^2}{|KM|^2 + |CM| \cdot |DM|} = \frac{|KL|^2}{|KL|^2 + |CL| \cdot |DL|}. \tag{3}$$

Dále je zřejmě

$$|CM| + |MK| = |CK| = |KD|\,.$$

Proto platí rovněž vztahy

$$|CM|^2 + |CM| \cdot |MK| = |CM| \cdot |KD|\,,$$

$$|CM|^2 + 2 \cdot |CM| \cdot |MK| = |CM| \cdot |MK| + |CM| \cdot |KD|\,,$$

$$|CM|^2 + 2 \cdot |CM| \cdot |MK| = |CM| \cdot (|MK| + |KD|)\,,$$

$$|CM|^2 + 2 \cdot |CM| \cdot |MK| = |CM| \cdot |MD|\,. \tag{4}$$

Protože

$$|CK|^2 = (|CM| + |KM|)^2 = |CM|^2 + 2 \cdot |CM| \cdot |KM| + |KM|^2\,,$$

dostáváme s využitím vztahu (4)

$$|CK|^2 = |KM|^2 + |CM| \cdot |DM|\,. \tag{5}$$

Zcela analogicky bychom odvodili rovnost

$$|DK|^2 = |KL|^2 + |CL| \cdot |DL|\,. \tag{6}$$

Po dosazení vztahů (5) a (6) do rovnosti (3) dostáváme

$$\frac{|KM|^2}{|CK|^2} = \frac{|KL|^2}{|DK|^2}$$

a jelikož jsou délky úseček nezáporná čísla, je

$$\frac{|KM|}{|CK|} = \frac{|KL|}{|DK|}, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{|KM|}{|KL|} = \frac{|CK|}{|DK|}.$$

Protože $|CK| = |DK|$, je rovněž $|KM| = |KL|$. □

Druhý důkaz Věty o motýlovi

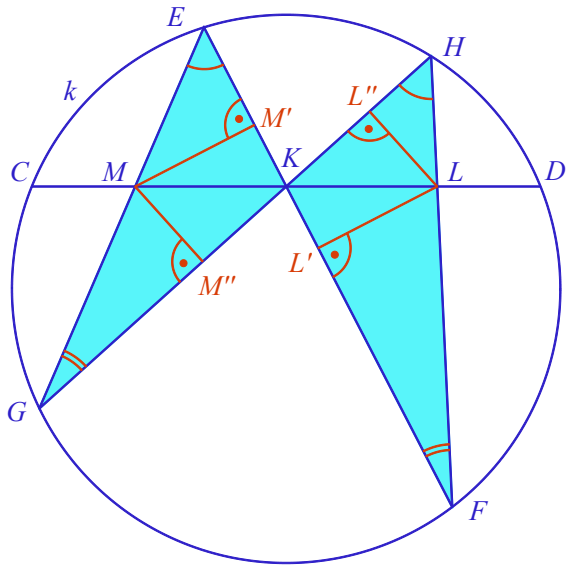
V literatuře zřejmě nejčastěji uváděný důkaz je následující. V mírně modifikované podobě ho lze nalézt např. v [6].

Označíme-li M', L', resp. M'', L'' pravoúhlé projekce bodů M, L na tětivu EF, resp. GH (Obr. 4), potom jsou zřejmě trojúhelníky $KM'M$ a $KL'L$ podobné (podle věty uu), a proto

$$\frac{|MK|}{|LK|} = \frac{|MM'|}{|LL'|}. \tag{7}$$

Obdobně vzhledem k podobnosti trojúhelníků KMM'' a KLL'' platí

$$\frac{|MK|}{|LK|} = \frac{|MM''|}{|LL''|}. \tag{8}$$



Obr. 4: Druhý důkaz Věty o motýlovi

Podle věty o obvodových úhlech platí nejen vztah (1), ale také rovnost

$$|\angle GEF| = |\angle GHF|\,. \tag{9}$$

Podle věty uu jsou tedy podobné i trojúhelníky $EM'M$, $HL''L$ a rovněž trojúhelníky $MM''G$, $LL'F$. Proto

$$\frac{|MM'|}{|LL''|} = \frac{|ME|}{|LH|}, \tag{10}$$

$$\frac{|MM''|}{|LL'|} = \frac{|MG|}{|LF|}. \tag{11}$$

S využitím vztahů (7), (8), (10), (11) a Věty o protínajících se tětivách postupně dostáváme

$$\frac{|MK|^2}{|LK|^2} = \frac{|MM'|}{|LL'|} \cdot \frac{|MM''|}{|LL''|} = \frac{|ME|}{|LH|} \cdot \frac{|MG|}{|LF|} =$$

$$= \frac{|MC|}{|LC|} \cdot \frac{|MD|}{|LD|} = \frac{(|CK| - |MK|) \cdot (|KD| + |MK|)}{(|CK| + |LK|) \cdot (|KD| - |LK|)}.$$

Protože je $|CK| = |KD|$, platí

$$\frac{|MK|^2}{|LK|^2} = \frac{|CK|^2 - |MK|^2}{|CK|^2 - |LK|^2}.$$

Tedy

$$|MK|^2 \cdot |CK|^2 - |MK|^2 \cdot |LK|^2 = |LK|^2 \cdot |CK|^2 - |LK|^2 \cdot |MK|^2,$$

z čehož plyne

$$|MK|^2 = |LK|^2.$$

Jelikož jsou délky úseček kladná čísla, je $|MK| = |LK|$, tj. bod K je středem úsečky ML. □

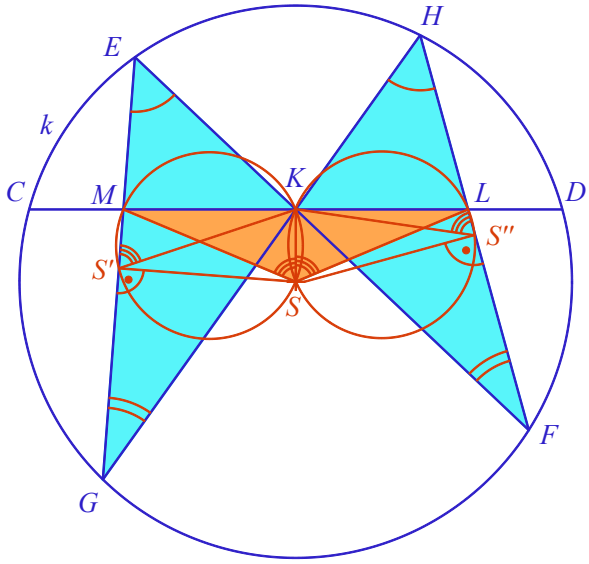
Třetí důkaz Věty o motýlovi

Principem dalšího důkazu, který byl publikován v [7], je prokázání shodnosti dvou jistých trojúhelníků.

Označíme-li S střed kružnice k, potom je přímka SK kolmá k přímce ML (Obr. 5). K důkazu skutečnosti $|MK| = |KL|$ proto stačí ověřit, že

$$|\angle MSK| = |\angle LSK|, \tag{12}$$

neboť z platnosti uvedené rovnosti vyplyne shodnost trojúhelníků MSK a LSK (podle věty *usu*).



Obr. 5: Třetí důkaz Věty o motýlovi

Jsou-li S', S'' pravoúhlé průměty bodu S na tětivy EG, FH, potom jsou body S', S'' středy uvedených tětiv. Vzhledem ke vztahům (1), (9) jsou trojúhelníky EGK a HFK podobné. Z toho vyplývá, že jsou podobné i trojúhelníky $ES'K$ a $HS''K$, a proto

$$|\angle ES'K| = |\angle HS''K|\,. \tag{13}$$

Protože

$$|\angle MS'S| + |\angle SKM| = 180^\circ = |\angle SKL| + |\angle LS''S|\,,$$

jsou čtyřúhelníky $S'SKM$ a $SS''LK$ tětivové, a každému z nich lze tedy opsat kružnici. Podle věty o obvodovýh úhlech je

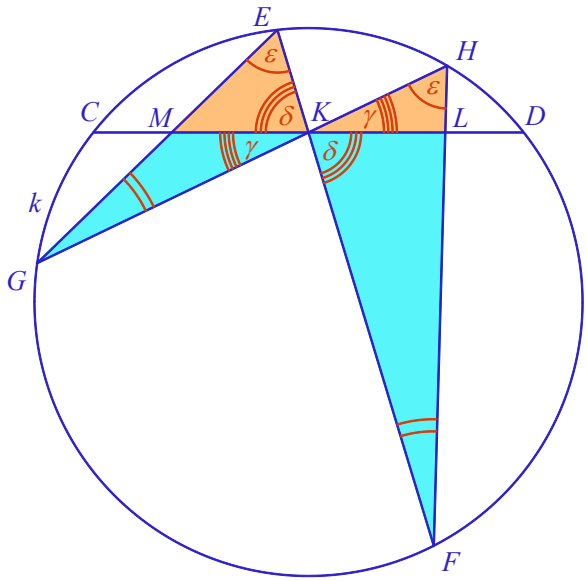
$$|\angle ES'K| = |\angle MS'K| = |\angle MSK|\,,$$

$$|\angle HS''K| = |\angle LS''K| = |\angle LSK|\,.$$

Vzhledem k (13) je $|\angle MSK| = |\angle LSK|$, a tudíž $|MK| = |KL|$. □

Čtvrtý důkaz Věty o motýlovi

V dalším důkazu, který lze nalézt opět v [7], budeme pracovat s vnitřními úhly trojúhelníků, které tvoří „křídla“ motýla. Velikosti těchto úhlů označme tak, jak je tomu na obr. 6.



Obr. 6: Čtvrtý důkaz Věty o motýlovi

Podle známé sinové věty víme, že pro délky stran, resp. velikosti úhlů trojúhelníků MKE a GKM platí:

$$\frac{|EM|}{|MK|} = \frac{\sin\,\delta}{\sin\,\epsilon}\,,$$

$$\frac{|GM|}{|MK|} = \frac{\sin\,\gamma}{\sin\,(180^\circ - (\gamma+\delta+\epsilon))} = \frac{\sin\,\gamma}{\sin\,(\gamma+\delta+\epsilon)},$$

a proto

$$|EM|\cdot|GM| = |MK|^2\cdot\frac{\sin\,\delta}{\sin\,\epsilon}\cdot\frac{\sin\,\gamma}{\sin\,(\gamma+\delta+\epsilon)}\,.$$

Součin $|EM|\cdot|GM|$ však lze vyjádřit (s pomocí Věty o protínajících se tětivách) také jiným způsobem:

$$|EM|\cdot|GM| = |CM|\cdot|DM| = (|CK|-|MK|)\cdot(|DK|+|MK|) =$$

$$= (|CK|-|MK|)\cdot(|CK|+|MK|) = |CK|^2 - |MK|^2\,. \qquad (14)$$

Platí tedy rovnost

$$|CK|^2 - |MK|^2 = |MK|^2\cdot\frac{\sin\,\delta}{\sin\,\epsilon}\cdot\frac{\sin\,\gamma}{\sin\,(\gamma+\delta+\epsilon)}\,,$$

z níž snadno vyjádříme druhou mocninu délky úsečky MK:

$$|MK|^2 = \frac{|CK|^2 \cdot \sin\epsilon \cdot \sin(\gamma+\delta+\epsilon)}{\sin\delta \cdot \sin\gamma + \sin\epsilon \cdot \sin(\gamma+\delta+\epsilon)} \tag{15}$$

Všimněme si, že pravá strana vztahu (15) je „souměrná vzhledem k γ a δ“, tj. pokud bychom ve vyjádření zaměnili γ za δ a naopak, dostali bychom zcela totožný výraz. Pokud bychom tedy nyní s pomocí trojúhelníku HKF vyjádřili $|LK|^2$, dostali bychom, jak je zřejmé z obr. 6, opět výraz na pravé straně vztahu (15). Proto $|MK|^2 = |LK|^2$, z čehož plyne $|MK| = |LK|$. □

Pátý důkaz Věty o motýlovi

Připomeňme, že obsah trojúhelníku se dá vypočítat jako polovina součinu délek dvou jeho stran a sinu velikosti úhlu, který svírají. Hlavní „fígl“ dalšího důkazu, jehož autorem je Steve Conrad (viz [5]), spočívá v uvědomění, že poměr obsahů dvou trojúhelníků, které mají nějaký vnitřní úhel shodný, se tedy rovná poměru součinů délek příslušných stran. Konkrétně trojúhelníky MEK a KHL mají shodný vnitřní úhel o velikosti ϵ (Obr. 7), a proto pro poměr jejich obsahů S_{MEK} a S_{KHL} platí:

$$\frac{S_{MEK}}{S_{KHL}} = \frac{|EM| \cdot |EK|}{|HK| \cdot |HL|}. \tag{16}$$

Zcela analogicky pro obsahy trojúhelníků HKL a GKM se shodným vnitřním úhlem o velikosti γ, resp. trojúhelníků KGM a KFL se shodným vnitřním úhlem o velikosti φ, resp. trojúhelníků FKL a MKE se shodným vnitřním úhlem o velikosti δ platí

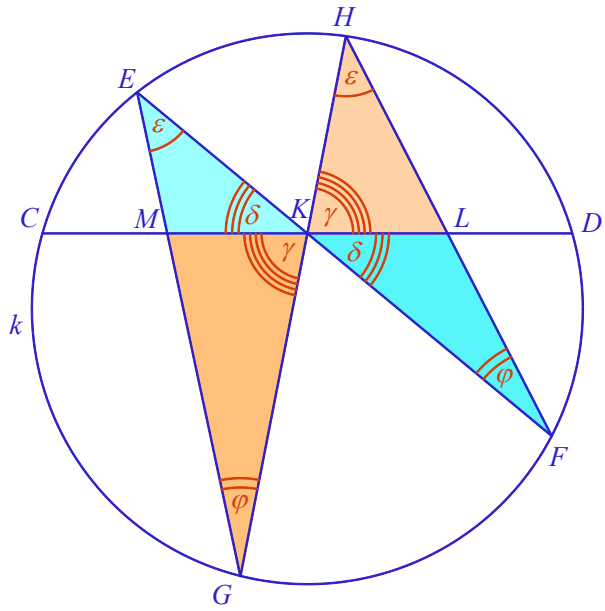
$$\frac{S_{HKL}}{S_{GKM}} = \frac{|KH| \cdot |KL|}{|KG| \cdot |KM|}, \tag{17}$$

resp.

$$\frac{S_{KGM}}{S_{KFL}} = \frac{|GK| \cdot |GM|}{|FK| \cdot |FL|}, \tag{18}$$

resp.

$$\frac{S_{FKL}}{S_{MKE}} = \frac{|KF| \cdot |KL|}{|KM| \cdot |KE|}. \tag{19}$$



Obr. 7: Pátý důkaz Věty o motýlovi

Jelikož

$$\frac{S_{MEK}}{S_{KHL}} \cdot \frac{S_{HKL}}{S_{GKM}} \cdot \frac{S_{KGM}}{S_{KFL}} \cdot \frac{S_{FKL}}{S_{MKE}} = 1,$$

tj. součin levých stran rovností (16), (17), (18), (19) je roven 1, musí být rovněž součin stran pravých roven 1. Platí tedy

$$\frac{|EM| \cdot |EK|}{|HK| \cdot |HL|} \cdot \frac{|KH| \cdot |KL|}{|KG| \cdot |KM|} \cdot \frac{|GK| \cdot |GM|}{|FK| \cdot |FL|} \cdot \frac{|KF| \cdot |KL|}{|KM| \cdot |KE|} =$$

$$= \frac{|EM| \cdot |GM| \cdot |KL|^2}{|HL| \cdot |FL| \cdot |KM|^2} = 1,$$

neboli

$$\frac{|EM| \cdot |GM|}{|KM|^2} = \frac{|HL| \cdot |FL|}{|KL|^2}. \tag{20}$$

Podle (14) je

$$|EM| \cdot |GM| = |KC|^2 - |KM|^2 .$$

Obdobně

$$|HL| \cdot |FL| = |DL| \cdot |CL| = (|KD| - |KL|) \cdot (|KC| + |KL|) = |KC|^2 - |KL|^2 .$$

Po dosazení do rovnosti (20) dostaneme

$$\frac{|KC|^2 - |KM|^2}{|KM|^2} = \frac{|KC|^2 - |KL|^2}{|KL|^2}$$

a následnou úpravou dále získáme

$$\frac{|KC|^2}{|KM|^2} - 1 = \frac{|KC|^2}{|KL|^2} - 1.$$

Proto

$$|KM|^2 = |KL|^2,$$

z čehož opět plyne $|KM| = |KL|$. □

4 Zobecnění Věty o motýlovi

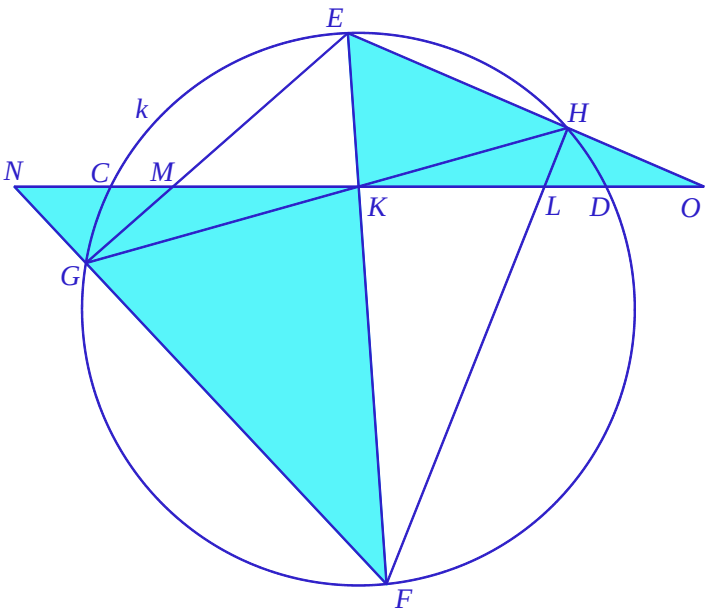
Cílem této části je představit čtenáři stručně (již bez důkazů) alespoň některá zobecnění Věty o motýlovi, a to poměrně značně rozmanitými směry. Různým modifikacím věty se věnuje řada publikací, za všechny jmenujme např. [8], [9], [10] či [11].

Věta o motýlech

První zobecnění je velmi jednoduché a někdy je v literatuře zahrnuto přímo do základní verze věty. Kromě bodů L, M se naleznou i další body tětivy CD, které mají stejnou vzdálenost od bodu K a leží na „hranici křídel“ dalšího motýla. Konkrétně platí následující tvrzení, které budeme nazývat *Větou o motýlech*:

Nechť je dána kružnice k a její tětiva CD. Nechť E, F, G, H jsou navzájem různé body kružnice k takové, že tětivy EF, GH procházejí středem K tětivy CD (body E, H přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou CD). Jsou-li M, L, N, O průsečíky přímky CD po řadě s přímkami EG, FH, FG, EH, potom je K také středem úseček ML a ON (Obr. 8).

Motýl, který se „nově vylíhl“ zobecněním věty, je barevně zvýrazněn na obr. 8. Vidíme, že ne všechny vrcholy trojúhelníků tvořících jeho „křídla“ leží na kružnici, a tedy vizuální ztvárnění tvrzení již není tak estetické. Můžeme se jen domnívat, zda právě toto je důvod, proč se odborná literatura často věnuje pouze jedinému motýlovi, přestože dvojice bodů M, L a O, N jsou z hlediska svého vzniku rovnocenné.



Obr. 8: Věta o motýlech

Klamkinovo zobecnění věty o motýlovi

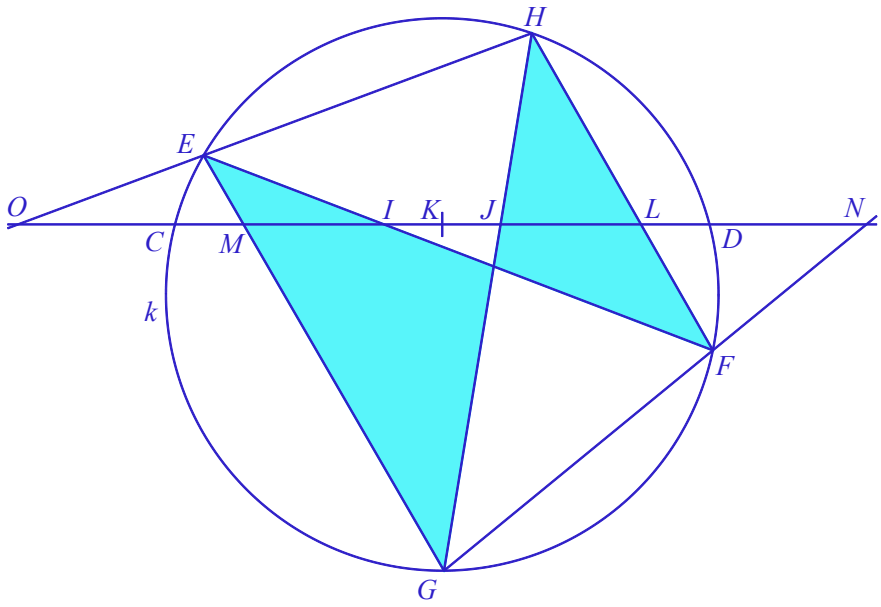
V další modifikaci věty je „zmírněn“ požadavek, aby tětivy EF, GH procházely bodem K. Jelikož poznatek publikoval americký matematik Murray Seymour Klamkin (1921–2004), a to v [12], budeme o tvrzení hovořit jako o *Klamkinově zobecnění věty o motýlovi.*

Nechť je dána kružnice k a její tětiva CD. Nechť K je střed tětivy CD a dále I, J jsou body tětivy CD, které jsou stejně vzdáleny od bodu K. Nechť E, F, G, H jsou navzájem různé body kružnice k takové, že tětiva EF prochází bodem I a tětiva GH prochází bodem J (body E, H přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou CD). Jsou-li M, L průsečíky úseček FH, EG s tětivou CD, potom je bod K středem úsečky LM (Obr. 9).

Je zřejmé, že pokud $I = J = K$ (úsečka IJ degeneruje na bod), přejde představené zobecněné tvrzení na „obyčejnou“ Větu o motýlech.

Důkaz zobecněné věty, který využívá opět pouze středoškolské planimetrické poznatky, je prezentován v [5].

Podotkněme, že opět můžeme vyhledat druhého motýla, tj. že K je rovněž střed úsečky ON, kde O, N jsou průsečíky přímek EH, FG s přímkou CD (Obr. 9). Platí tedy rovněž *Klamkinovo zobecnění věty o motýlech.*



Obr. 9: Klamkinovo zobecnění věty o motýlech

Věta o zdvojeném motýlovi

Následující modifikace, při níž vzniká jakýsi „zdvojený“ motýl,[9] pracuje s průsečíky úseček, jejichž krajní body leží na dvou soustředných kružnicích.

Nechť jsou dány dvě soustředné kružnice k, k' a tětiva CD kružnice k (Obr. 10). *Nechť E, F, G, H jsou navzájem různé body kružnice k takové, že tětivy EF, GH procházejí středem K tětivy CD (body E, H přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou CD), a E', F', resp. G', H' jsou průsečíky přímky EF, resp. GH s kružnicí k'. Jsou-li M_1, M_2, L_1, L_2 průsečíky tětivy CD po řadě s úsečkami EG', $E'G$, HF' a FH', potom platí*

$$\frac{1}{|KM_1|}+\frac{1}{|KM_2|}=\frac{1}{|KL_1|}+\frac{1}{|KL_2|}.$$

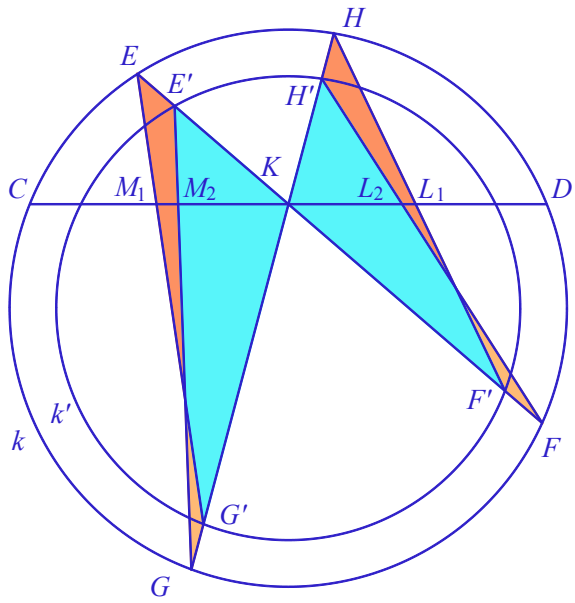
Pokud by kružnice k, k' splynuly, bylo by $E=E'$, $F=F'$, $G=G'$, $H=H'$, a tedy $M_1=M_2$, $L_1=L_2$,

$$2\cdot\frac{1}{|KM_1|}=2\cdot\frac{1}{|KL_1|}.$$

Odtud plyne $|KM_1|=|KL_1|$, tj. dostáváme Větu o motýlovi.

[9] Nebo bychom mohli na vzniklý obrazec pohlížet jako na dva motýly, jejichž „těla“ splývají.

Důkaz zobecněné věty, k jehož pochopení opět stačí středoškolská látka, je dostupný na webové stránce [13].[10]



Obr. 10: Věta o zdvojeném motýlovi

Věta o motýlech pro regulární kuželosečky

Další možností, jak Větu o motýlovi, resp. dokonce Větu o motýlech zobecnit, je zaměnit v jejich znění pojem „kružnice“ za nadřazený pojem „regulární kuželosečka“. Dříve něž tvrzení přeformulujeme (kvůli úspoře místa pouze pro Větu o motýlech), představíme dále využívanou terminologii.

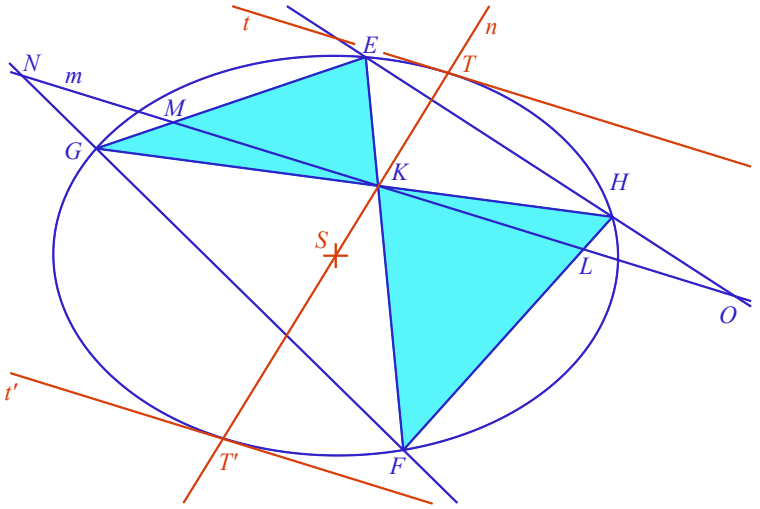
Průměrem elipsy, resp. *hyperboly* rozumíme libovolnou přímku procházející jejím středem. *Průměrem paraboly* nazýváme libovolnou přímku rovnoběžnou s její osou.

Jelikož *průměrem kružnice* se běžně rozumí tětiva kružnice (tj. úsečka) procházející jejím středem, nazývá se průměr elipsy, hyperboly či paraboly rovněž *průměrovou přímkou* příslušné kuželosečky.

Průměr n kružnice, resp. elipsy, resp. hyperboly nazveme *sdružený s danou přímkou* m, jestliže $n = TT'$, kde T, T' jsou body dotyku tečen kuželosečky rovnoběžných s přímkou m. Průměr n paraboly nazveme *sdružený s danou přímkou* m, jestliže průměr n prochází bodem dotyku T tečny paraboly rovnoběžné s přímkou m.

[10] Na uvedené stránce je tvrzení nazváno *A Better Butterfly Theorem.*

Nechť je dána regulární kuželosečka $\mathcal{K}$ a přímka m. Nechť n je průměr kuželosečky $\mathcal{K}$ sdružený s přímkou m, K je průsečík přímek m, n a E, F, G, H jsou navzájem různé body kuželosečky $\mathcal{K}$ takové, že úsečky EF, GH procházejí bodem K (body E, H přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou m). Jsou-li L, M, N, O průsečíky přímek FH, EG, FG, EH s přímkou m, potom je bod K středem úseček ML a ON.

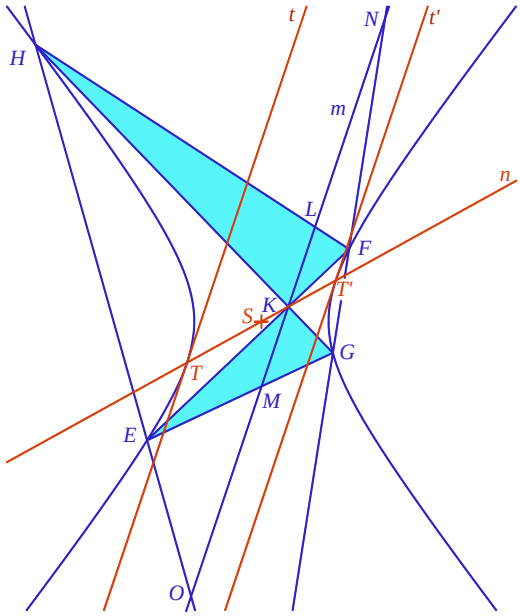


Obr. 11: Věta o motýlech pro elipsu

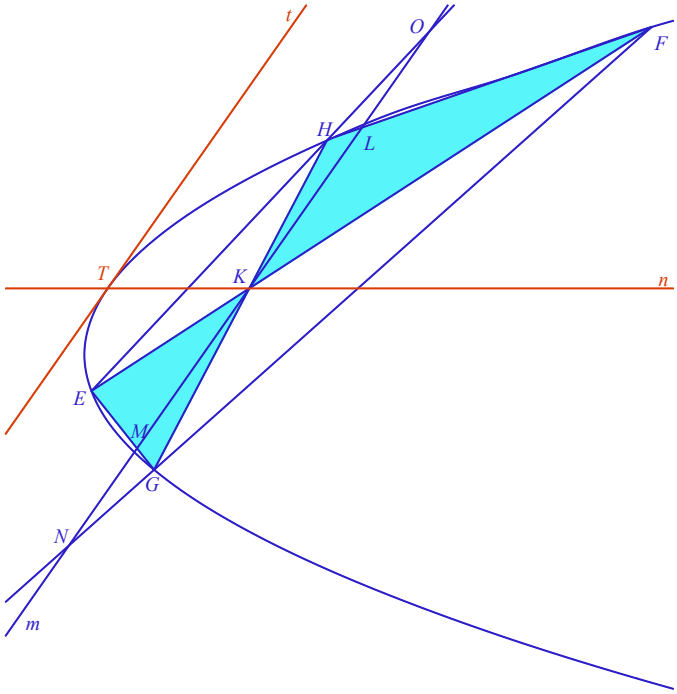
Na obr. 11, 12 a 13 je zobecněná věta znázorněna pro elipsu, hyperbolu a parabolu. Je zřejmé, že k přechodu od právě vyřčené věty k Větě o motýlech tentokrát stačí za kuželosečku $\mathcal{K}$ uvažovat kružnici k. Přímka m poté hraje roli výše uvažované přímky CD (a přímka n roli přímky, na níž leží průměr AB kružnice k, který zmiňuje již William Herschel). Zřejmě nejsnáze je tento přechod viditelný pro záměnu elipsy za kružnici, tj. doporučujeme srovnat především obr. 11 s obr. 1, resp. 3.

Poslední uvedenou větu lze i nadále zobecnit. V jejím formulaci totiž opět můžeme vypustit předpoklad, že úsečky EF, GH procházejí přímo bodem K, a nahradit ho slabším požadavkem, aby přímku m protínaly v bodech stejně vzdálených od bodu K. Platí tedy jakési „klamkinovské“ zobecnění tohoto zobecnění Věty o motýlech pro regulární kuželosečky:

Nechť je dána regulární kuželosečka $\mathcal{K}$ a přímka m. Nechť n je průměr kuželosečky $\mathcal{K}$ sdružený s přímkou m, K je průsečík přímek m, n. Dále nechť I, J jsou dva různé body přímky m, které jsou stejně vzdálené od bodu K a E, F, G, H jsou navzájem různé body kuželosečky $\mathcal{K}$ takové, že úsečka EF prochází bodem I a úsečka GH prochází bodem J (body E, H přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou m). Jsou-li L, M, N, O průsečíky přímek FH, EG, FG, EH s přímkou m, potom je bod K středem úseček ML a ON.

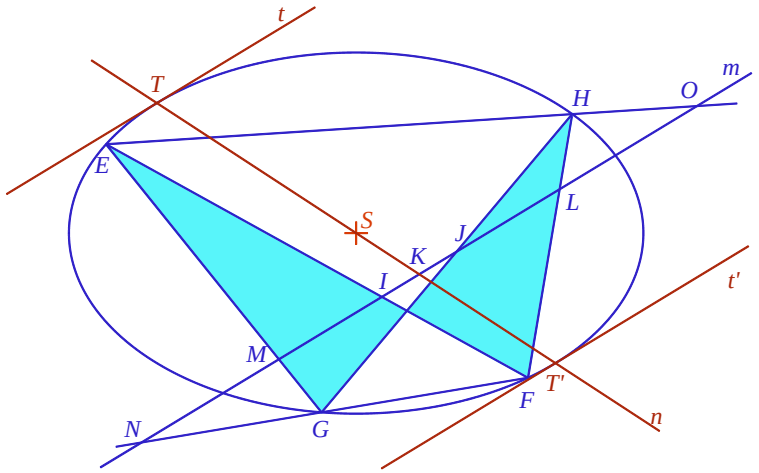


Obr. 12: Věta o motýlech pro hyperbolu

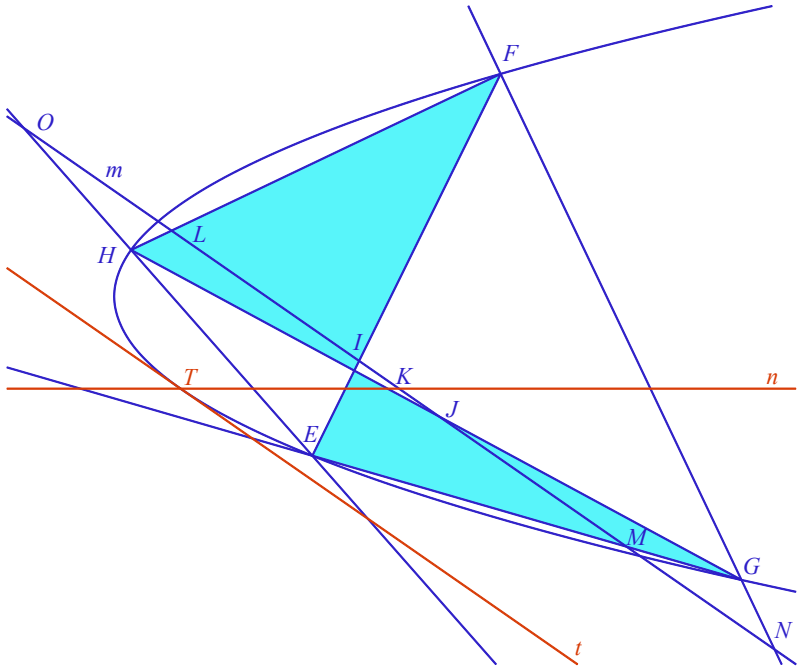


Obr. 13: Věta o motýlech pro parabolu

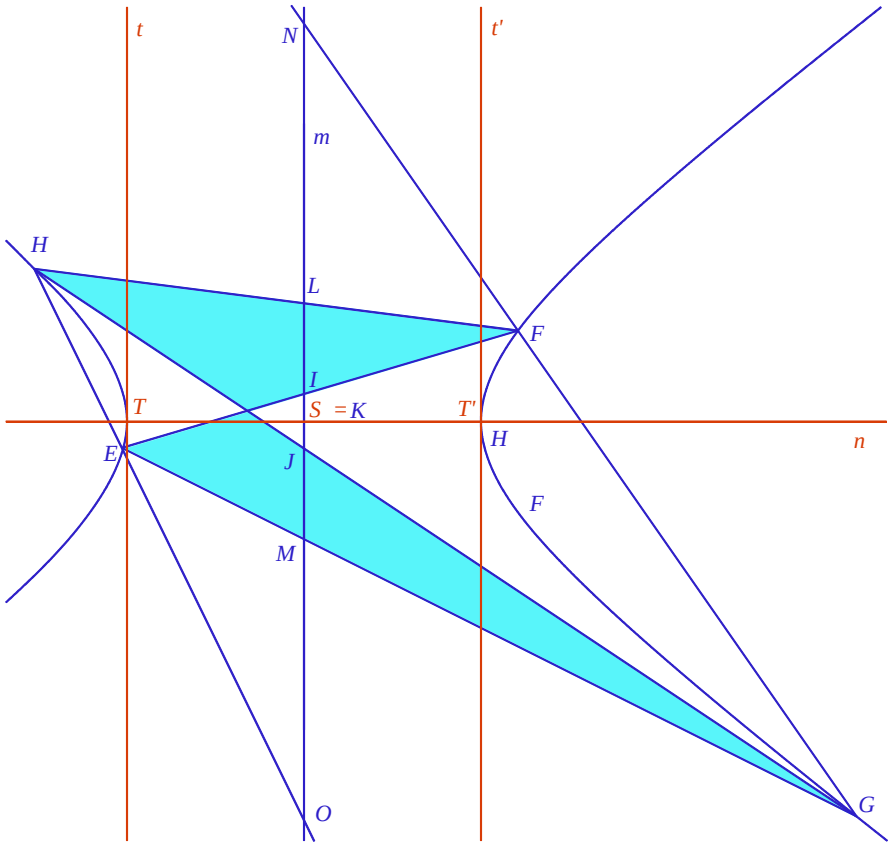
Na obr. 14 a 15 je znění věty znázorněno pro elipsu a parabolu. Na obr. 16 je věta ilustrována pro hyperbolu. Zvolena je přitom speciální poloha přímek m, resp. n, neboť jsou osami hyperboly.



Obr. 14: Věta o motýlech pro elipsu – „klamkinovské“ zobecnění



Obr. 15: Věta o motýlech pro parabolu – „klamkinovské“ zobecnění



Obr. 16: Věta o motýlech pro hyperbolu – „klamkinovské“ zobecnění

5 Závěr

Hlavním cílem článku bylo představit čtenáři podrobněji Větu o motýlovi. Kromě jejího znění byla uvedena příslušná základní historická fakta vázající se k jejímu zrodu na počátku 19. století a celkem pět důkazů, jejichž pochopení nepřesahuje středoškolskou úroveň. V závěru článku jsou bez důkazů prezentovány (a obrázky opatřeny) některá z možných zobecnění tvrzení.

Nejsme si vědomi, že by existoval česky psaný text věnovaný výše studované problematice a určený primárně pro středoškolské učitele či jejich studenty. Naopak v anglicky psané literatuře se příslušnými otázkami (často na vyšší úrovni) zabývá relativně mnoho časopiseckých publikací a jsou jim věnovány některé webové stránky.

Podstatnými prameny pro sepsání právě čteného textu byly zdroje [5] a [1], další využívané publikace jsou odkazovány u jednotlivých důkazů či zobecnění věty. Po stránce matematické jsou uvedené výsledky převzaty a jejich výběr byl silně ovlivněn snahou o přiblížení problematiky lidem mimo „vyšší“ odbornou matematickou komunitu. Vedle udržení zmíněné úrovně považujeme za přínosné jednotné zpracování jednotlivých částí textu (notace, obrázky) a rovněž detailnější vysvětlení Wallaceova původního, stroze psaného důkazu. Obdobná podrobnější verze historicky prvního důkazu zřejmě neexistuje ani v angličtině.

Autorka v současnosti pracuje na článku, který by měl být jakýmsi „duálním“ protějškem k tomuto příspěvku: zatímco základní verze věty by měla být představena krátce a bez důkazů, hlavním tématem by měla být její (nejen zde vyjmenovaná) zobecnění.

Literatura

[1] A. D. D. Craik, J. J. O'Connor, *Some unknown documents associated with William Wallace (1768–1843)*, BSHM Bulletin 26 (2011), 17–28.

[2] Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles: *William Wallace Proof of the Butterfly Theorem*. `www.cut-the-knot.org/pythagoras/WilliamWallaceButterfly.shtml`

[3] Eukleides, F. Servít (překlad), *Eukleidovy Základy*, Jednota českých mathematiků, Praha, 1907.

[4] Eukleides, P. Vopěnka (komentáře), *Základy. Knihy I–IV*, edice Prameny evropské vzdělanosti, OPS, Nymburk, 2008.

[5] Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles: *The Butterfly Theorem*. `www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml`

[6] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[7] O. Shklyarsky, N. N. Chentsov, I. M. Yaglom, *Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, Moscow, 1952.

[8] V. Volenec, *A generalization of the butterfly theorem*, Mathematical Communications 5 (2000), 157–160.

[9] Z. Čerin, *A generalization of the butterfly theorem from circles to conics*, Mathematical Communications 6 (2001), 161–164.

[10] V. Volenec, *The butterfly theorem for conics*, Mathematical Communications 7 (2002), 35–38.

[11] Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles: *Butterfly in Inscriptible Quadrilateral*. `www.cut-the-knot.org/pythagoras/ButterflyInInscriptibleQuadrilateral.shtml`

[12] M. S. Klamkin, *An extension of the butterfly problem*, Mathematics Magazine 38 (1965), 206–208.

[13] Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles: *A Better Butterfly Theorem*. www.cut-the-knot.org/pythagoras/BetterButterfly.shtml

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
stepanov@karlin.mff.cuni.cz

PAPÍROVÉ MODELY VE VÝUCE GEOMETRIE

Jana Hromadová

Skládání papíru dětem není nijak cizí. Již jako malé si z papíru vyrábí vlaštovky, lodičky, čepice nebo si pomocí překládání a vystřihování vyrábí jednoduché dekorační předměty. Ráda bych ve svém příspěvku představila několik jednoduchých ukázek využití papíru ve výuce matematiky, potažmo geometrie. Budu se věnovat většinou modelům vyrobeným z jednoho kusu papíru.

Rozsah příspěvku neumožňuje věnovat se této problematice příliš do hloubky. Pokusím se na několika příkladech poukázat na možnosti práce s papírem při výuce postupně na všech stupních vzdělávání.

1 Elementární geometrické útvary a pojmy

Na prvním stupni základní školy je velice důležité pracovat s hmotnými modely geometrických objektů. Hmotné modely trojúhelníků, čtyřúhelníků a dalších napomáhají správnému pochopení těchto pojmů a práce s nimi i na vyšších stupních vzdělávání může napomoci odstranění zažité mylné představy, že n-úhelník je tvořen pouze svou hranicí a nemá žádné vnitřní body (viz [1]). Výhodou papírových modelů oproti modelům z pevnějších materiálů je nejen to, že jsou levné a lze je kdykoliv vyrobit znovu, ale především to, že papír je ohebný a lze s ním dále pracovat.

V papírovém modelu čtverce (popř. obdélníku) lze snadno ohýbáním sestrojit úhlopříčky či střed útvaru a uvědomit si, že úhlopříčky se navzájem půlí. V rámci výzkumu porozumění geometrickým pojmům, který provádíme spolu s kolegy z katedry didaktiky matematiky, jsme se setkali s tím, že někteří žáci na úrovni šestých tříd základní školy mají problém nalézt osy souměrnosti útvarů. Za osy souměrnosti rovnoběžníku (různého od čtverce a obdélníku) často považují jeho úhlopříčky nebo spojnice středů protilehlých stran. Přeložením papírového modelu podle domnělé osy snadno svou hypotézu potvrdí či vyvrátí.

Překládáním papírového trojúhelníku tak, aby zvolená hrana po přeložení byla samodružná a ohyb procházel protilehlým vrcholem, je možné sestrojit výšky[1] trojúhelníku. Přehybem, který ztotožní dva vrcholy, sestrojíme střed strany a následně pak těžnici tímto středem procházející. Snadnou manipulací pak můžeme se žáky odvodit, které trojúhelníky jsou osově souměrné atp.

[1] Konstrukci výšky v tupoúhlém trojúhelníku procházející vrcholem tupého úhlu lze provést, pouze pokud pracujeme s celým papírem, na němž je trojúhelník vyznačen a ne jen s vystřiženým trojúhelníkem.

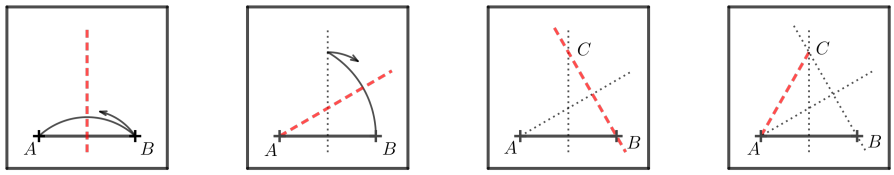
Pomocí překládání můžeme sestrojovat osy úseček i osy úhlů a sestrojit tak střed opsané[2] či vepsané kružnice pro daný trojúhelník. Výuku Thaletovy věty lze zpestřit konstrukcí několika bodů kružnice nad zadaným průměrem.

Všechny zmíněné konstrukce by žák mohl provádět pravítkem a kružítkem pouze v sešitě, ale pokud dostane dříve do ruky papír a umožníme mu takové konstrukce fyzicky vykonat, dáme mu pro pozdější rýsování v sešitě další nástroj, jak úlohy řešit a jak o nich přemýšlet.

2 Pravidelné mnohoúhelníky

Na internetu lze nalézt řadu návodů konstrukcí pravidelných n-úhelníků ohýbáním papíru. Některé se omezují pouze na sestrojení daného útvaru, jiné popisují konstrukci útvaru o maximálních rozměrech, který lze z daného například čtvercového papíru sestrojit.

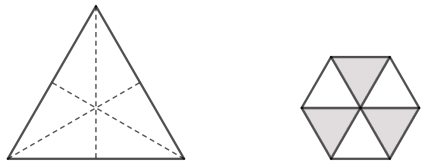
Studenti by mohli objevit sami minimálně konstrukci rovnostranného trojúhelníku a čtverce, ideálně z papíru, který nemá žádné rovné hrany. Předpokládejme, že máme dánu (případně si zvolíme) stranu AB rovnostranného trojúhelníku (obr. 1). Chybějící vrchol C trojúhelníku budeme hledat na ose úsečky AB. Sestrojením překladu, při němž bod A zůstane na místě a bod B padne na osu AB, vytvoříme osu strany BC. Stranu BC pak sestrojíme jako část přehybu procházejícího bodem B kolmo k ose strany BC. Stranu AC můžeme sestrojit obdobně, nebo využijeme již sestrojeného vrcholu C. Lomené šipky v obrázcích znamenají přeložení a opětovné rozložení papíru, právě sestrojený přehyb je vždy barevně zvýrazněn.



Obr. 1: Konstrukce rovnostranného trojúhelníku

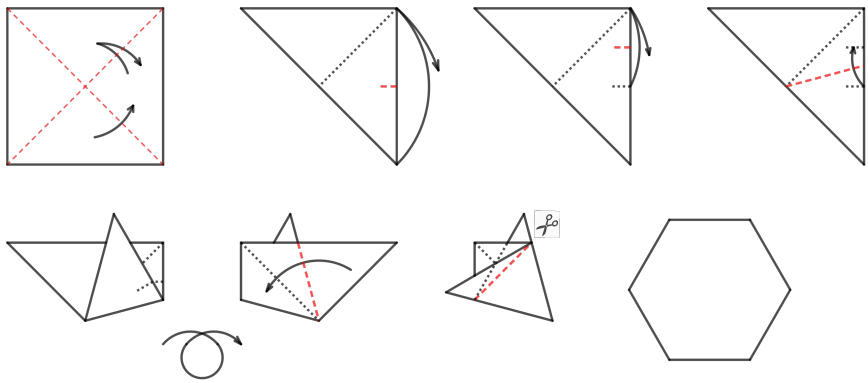
Některé origami konstrukce vycházejí z pravidelného šestiúhelníku. Ukažme si tedy ještě konstrukci tohoto útvaru. Jedné takové, kterou by opět studenti mohli objevit sami, předchází sestrojení rovnostranného trojúhelníku, z něhož pak pomocí tří překladů, při nichž vrcholy trojúhelníku splynou s těžištěm trojúhelníku, vytvoříme pravidelný šestiúhelník (obr. 2).

[2] Platí totéž co u výšek, je-li střed vnějším bodem trojúhelníku, museli bychom pracovat s papírem (ideálně trochu průhledným), na němž je trojúhelník vyznačen.



Obr. 2: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku z rovnostranného trojúhelníku

Jiná konstrukce, tentokrát z čtvercového papíru, je naznačena na následujících obrázcích. Opět je v dílčích obrázcích barevně zvýrazněn prováděný ohyb, šipka tvořící smyčku naznačuje otočení.



Obr. 3: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku ze čtvercového papíru

3 Trisekce úhlu, úhly v trojúhelníku

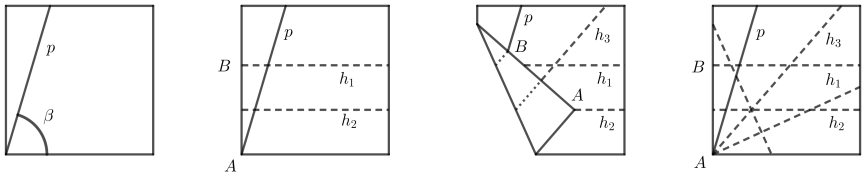
Je známo, že úsečku lze eukleidovskými konstrukcemi[3] rozdělit na libovolný počet stejných částí, avšak rozdělit úhel na něco tak jednoduchého, jako jsou jeho třetiny, eukleidovsky nelze. Algebraické řešení trisekce úhlu vede k hledání kořenů kubické rovnice, což na rozdíl od eukleidovských postupů konstrukce používané v origami umožňují[4]. Ukážeme si zde konstrukci, kterou pro trisekci ostrého úhlu objevil japonský matematik Hisashi Abe[5]. Budeme vycházet z čtvercového či obdélníkového papíru, na němž ohybem p vytvoříme model ostrého úhlu β tak, aby se jeho ramena potkávala v levém dolním rohu papíru (obr. 4). Dále vytvoříme libovolný horizontální překlad h_1 a poté k němu přiložíme dolní okraj papíru, čímž vytvoříme další překlad h_2 půlící vzdálenost dolního okraje od prvního horizontálního překladu. Označme A levý dolní roh papíru a B koncový bod h_1 na levé hraně papíru. Nyní přeložíme papír tak, aby bod A padl na h_2 a bod B na p. Ještě ve složené poloze znovu ohneme

[3] Eukleidovské konstrukce jsou konstrukce pomocí kružítka a pravítka, které nemá vyznačené měřítko a má jen jednu rovnou hranu.

[4] Souvisí to s možností sestrojit takový překlad papíru, aby dva zvolené body padly na dvě zvolené přímky, více viz např. [2].

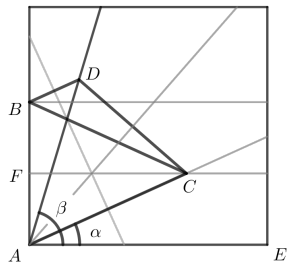
[5] Konstrukci publikoval v roce 1970.

papír podle hrany h_2, čímž získáme hranu h_3. Papír rozložíme a znovu přeložíme podél h_3, abychom hranu prodloužili přes celý papír. Sestrojená hrana prochází bodem A, přičemž velikost úhlu, který svírají hrany p a h_3 je třetinou velikosti původního úhlu β. Nyní již stačí přeložit papír tak, aby dolní hrana papíru splynula s nalezenou hranou h_3 a konstrukce je hotova.



Obr. 4: Trisekce ostrého úhlu

K důkazu (viz např. [3]) konstrukce si v obrázku 5 označme C, D pozice bodů A, B po přeložení papíru. Tyto body jsou obrazy bodů A, B v osové souměrnosti podle přehybu, z čehož vyplývá, že čtyřúhelník $ACDB$ je rovnoramenný lichoběžník. Chceme dokázat, že $\beta = 3\alpha$, kde $\alpha = \sphericalangle CAE$,$\beta = \sphericalangle DAE$. Z rovnoběžnosti AE a FC plyne $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle ACF|$ a protože CF je výška v rovnoramenném trojúhelníku ACB platí též $|\sphericalangle ACF| = |\sphericalangle FCB| = |\alpha|$. Z vlastností rovnoramenného lichoběžníku vyplývá, že velikost úhlu CAD je stejná jako velikost úhlu ACB a tedy 2α. Je tedy $\beta = 3\alpha$.

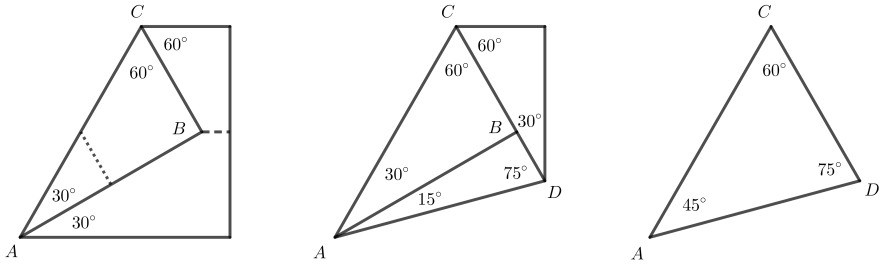


Obr. 5: Důkaz konstrukce

Aplikujme tuto konstrukci hned v další ukázce, při níž si s žáky vytvoříme papírový „úhloměr“ (viz např. [4]). Vyjdeme ze čtvercového papíru, na němž pomocí několika překladů vytvoříme úhly o velikostech 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105°, 120° a 150°.

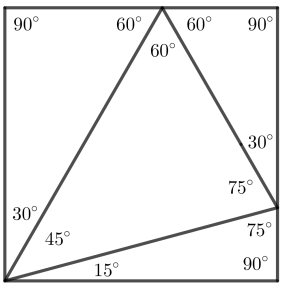
Čtvercový papír přehneme horizontálně na polovinu a rozložíme zpět. Papír dále přehneme tak, aby např. levý dolní roh zůstal na místě a levý horní roh padl na sestrojený horizontální přehyb (obr. 6). Lze nahlédnout, že jsme tímto ohybem vytvořili trojúhelník ABC, který má při vrcholu A úhel o velikosti 30° (třetina původně pravého úhlu při levém dolním okraji papíru). Jedná se o pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu B, tedy velikost úhlu při vrcholu C je 60°. Snadno nahlédneme, že i sousedící vzniklé úhly mají velikosti

30° a 60°. Přiložme nyní dolní hranu papíru k hraně AB. Ve vytvořeném pravoúhlém trojúhelníku ABD je velikost úhlu při vrcholu A 15°, vytvořili jsme jej půlením úhlu o velikosti 30°. Na úhel při vrcholu D tedy zbývá 75°. Přeložme nyní papír ještě podle úsečky CD. Vytvořený trojúhelník ACD má při svých vrcholech úhly o velikostech 45°, 75° a 60°.



Obr. 6: Úhly v trojúhelníku

Na obrázku 7 je znázorněn rozložený papír s vyznačenými sestrojenými úhly. Vhodným překládáním podle již sestrojených hran můžeme získat ještě úhly o velikostech 105°, 120° a 150°.



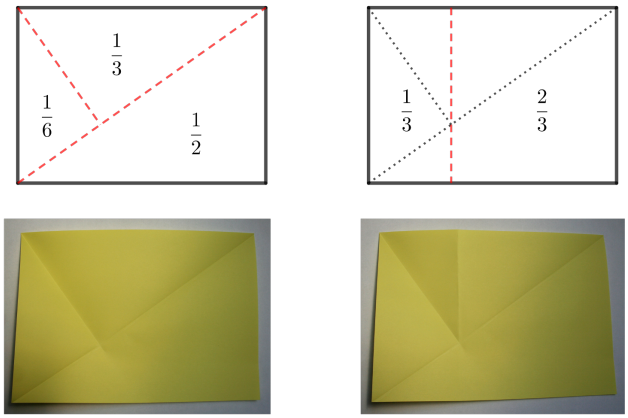
Obr. 7: Papírový úhloměr

4 Práce s kancelářským papírem

Všimněme si nyní formátů papíru např. řady A. Jsou sestrojeny tak, aby poměr kratší ku delší straně byl vždy $1 : \sqrt{2}$[6]. Výhodou této volby je fakt, že při rozdělení papíru napůl (rovnoběžně s kratší stranou) zůstává poměr stran zachován. Podle velikosti seřazené papíry formátu A tvoří geometrickou posloupnost, jejíž kvocient záleží na tom, zda se budeme bavit o obsahu obdélníku ($q = 1/2$) či o rozměrech papírů ($q = \sqrt{2}/2$). Díky danému poměru stran lze poměrně jednoduše rozdělit papír např. velikosti A4 na tři podobné trojúhelníky, jejichž obsahy tvoří 1/2, 1/3 a 1/6 celkového obsahu papíru. Konstrukce je zobrazena na obrázku 8 vlevo. Nejprve jsme přehnuli papír podle úhlopříčky obdélníku a poté jsme sestrojili překlad vedený kolmo k úhlopříčce

[6] Rozměry papírů jsou zaokrouhleny na celé milimetry.

jedním z vrcholů, které na úhlopříčce neleží. Vedeme-li vrcholem nejmenšího trojúhelníku při pravém úhlu ohyb rovnoběžně s kratší stranou papíru (obr. 8 vpravo), rozdělí tento ohyb celý papír na dvě části, jejichž obsahy jsou v poměru 1 : 2. Šikovnější student by mohl být schopen odvodit správnost této konstrukce nebo naopak z konstrukce odvodit poměr obsahů zadaných trojúhelníků či obdélníků.



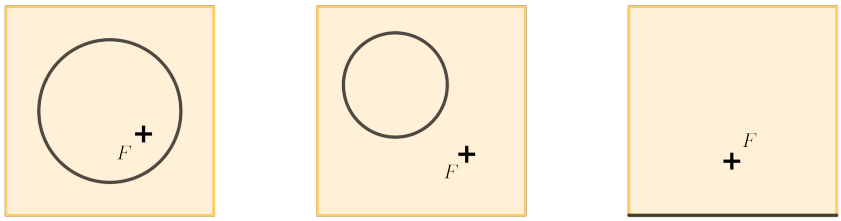
Obr. 8: Formát A4

Pro srovnání jsou v obrázku 8 zobrazeny fotografie i na počítači vytvořený model popisované situace. Z fotografie nelze vždy spolehlivě vyčíst všechny vlastnosti modelu, neboť se jedná o středový průmět. Při středovém promítání se nezachovává například rovnoběžnost či dělicí poměr.

5 Kuželosečky

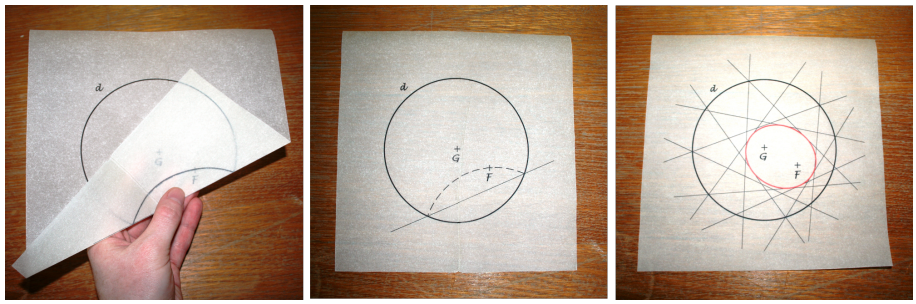
Na střední škole se studenti seznamují s kuželosečkami pouze v rámci analytické geometrie a to už ne na všech typech škol[7], nebo pak v deskriptivní geometrii. Ukažme si zde jednu více či méně známou konstrukci, pomocí níž můžeme sestrojit kuželosečky jakožto obálky svých tečen. Budeme potřebovat průsvitný papír (u paraboly postačí i neprůhledný). Na něj si v případě, že chceme získat elipsu, nakreslíme kružnici a zvolíme libovolný bod z vnitřní oblasti kružnice různý od středu kružnice. Pro hyperbolu použijeme rovněž kružnici a zvolíme libovolný bod z vnější oblasti. Pro parabolu potřebujeme papír s alespoň jednou rovnou hranou (tu můžeme zvýraznit, bude hrát stejnou roli jako kružnice u středových kuželoseček) a dále zvolíme libovolný bod mimo ni.

[7] Téma kuželosečky můžeme nalézt v rámci analytické geometrie v RVP pro gymnázia, ale již ne pro SOŠ.



Obr. 9: Konstrukce tečen kuželoseček ohýbáním papíru

Při konstrukci budeme ohýbat papír tak, aby po přeložení zadaná kružnice, resp. přímka vždy procházela vyznačeným bodem, jak je vidět na obrázku 10.



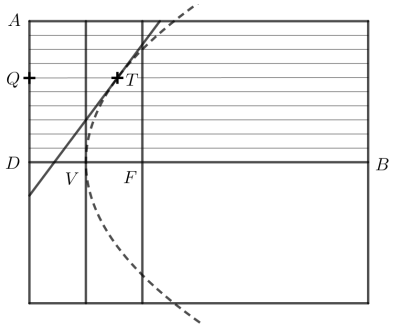
Obr. 10: Konstrukce tečen elipsy

Konstrukce vychází z ohniskových vlastností kuželoseček, konkrétně z toho, že řídicí kružnice, resp. přímka (u paraboly) je množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem kuželosečky podle jejích tečen. Tedy každý takto sestrojený ohyb představuje tečnu kuželosečky, pro niž je zadaný bod ohniskem a zadaná kružnice resp. přímka řídicí kružnicí, resp. přímkou. Sestrojíme-li takových ohybů dostatečný počet, brzy se nám před očima z papíru vyloupne konstruovaná kuželosečka. Tato úloha je též velmi vhodná pro modelování v softwaru Geogebra.

S oblibou jsem tuto úlohu bez specifikace, co vlastně hledáme, zadávala studentům prvního ročníku M-DG, ještě před tím, než jsme začali probírat kuželosečky, abych si tak ověřila, zda již něco o kuželosečkách znají ze střední školy. Podrobnější popis konstrukcí naleznete např. v [5], nebo v [6].

Ukažme si ještě, např. u paraboly, jak dohledat body dotyku takových tečen. Situace je znázorněna na obrázku 11, vytvořeného dle [7], str. 116. Vycházíme z obdélníkového papíru, ale opět by nám postačil i papír s jedinou rovnou hranou. Hrana papíru AD reprezentuje řídicí přímku paraboly, k ní kolmý přehyb DB nechť je osou paraboly. Sestrojme ještě ohyb rovnoběžný s řídicí přímkou procházející bodem F, který volíme libovolně na ose. Přiložíme-li nyní hranu AD na sestrojený ohyb, získáme vrcholovou tečnu paraboly a spolu s ní i vrchol V paraboly na ose. Nyní sestrojíme několik překladů papíru rovnoběžně s osou paraboly. Libovolně zvolený překlad protne řídicí přímku paraboly v bodě Q.

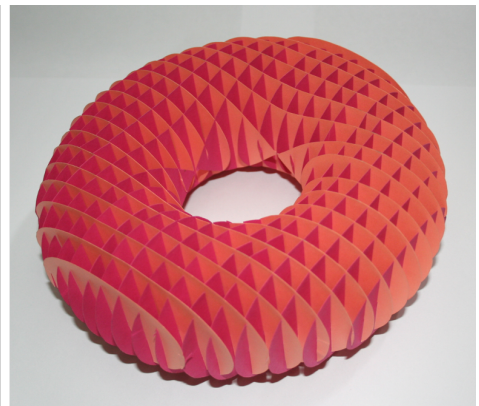
Překlad papíru sestrojený tak, aby bod Q splynul s bodem F, vytvoří tečnu paraboly, její bod dotyku T s křivkou nalezneme na průvodiči (ohybu) procházejícím bodem Q rovnoběžně s osou paraboly.



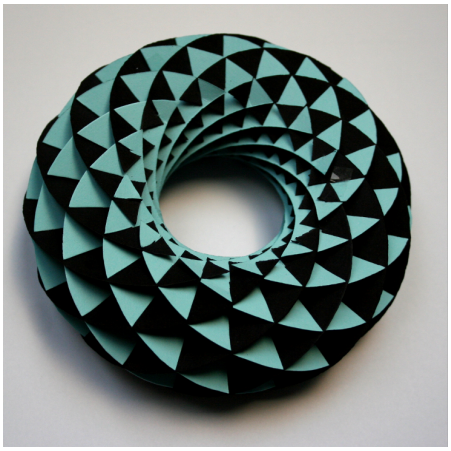
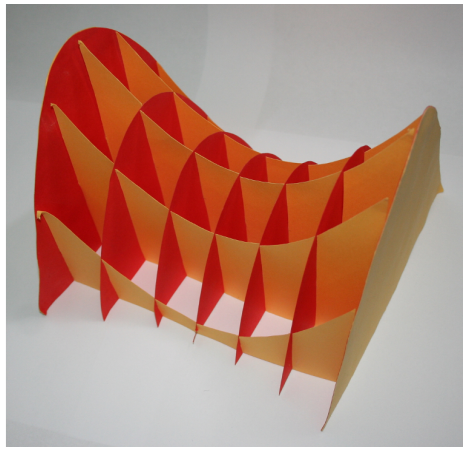
Obr. 11: Konstrukce bodů dotyku tečen s parabolou

6 Hyperbolický paraboloid

Zastavme se na chvíli u modelů, které využíváme v hodinách deskriptivní geometrie na MFF UK. Některé z nich by bylo možné využít i na středních školách v hodinách stereometrie. Poměrně jednoduché na výrobu (i když časově náročné) jsou modely sestavené z rovinných řezů těles, zobrazené na následujících obrázcích. Lze pomocí nich velice názorně modelovat například řezy na kuželových plochách, ale i řezy hranatých těles či jiných složitějších těles či ploch. Na obrázcích 12 až 14 jsou zobrazeny tři modely anuloidu. V prvním jsou znázorněny rovnoběžkové a meridiánové kružnice anuloidu, na druhém Perseovy křivky, které vznikají jako řezy anuloidu rovinami rovnoběžnými s osou anuloidu. Na třetím obrázku vidíme Villarceauovy kružnice, v nichž protíná anuloid tzv. dvojnásob tečná rovina (je tečnou rovinou pro dva různé body meridiánu).



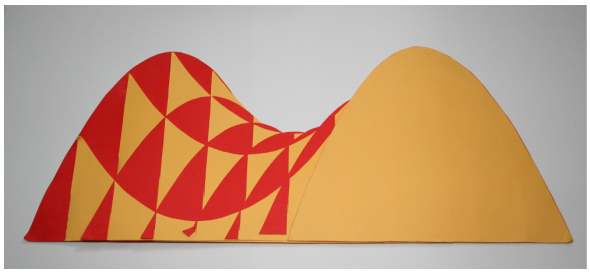
Obr. 12 (vlevo): Rovnoběžkové a meridiánové kružnice
Obr. 13 (vpravo): Perseovy křivky

Obr. 14 (vlevo): Villarceauovy kružnice
Obr. 15 (vpravo): Parabolické řezy na hyperbolickém paraboloidu

Pěkně se takto modelují i křivky na hyperbolickém paraboloidu, ať už se jedná o přímky, nebo o parabolické či hyperbolické řezy plochy (obr. 15).

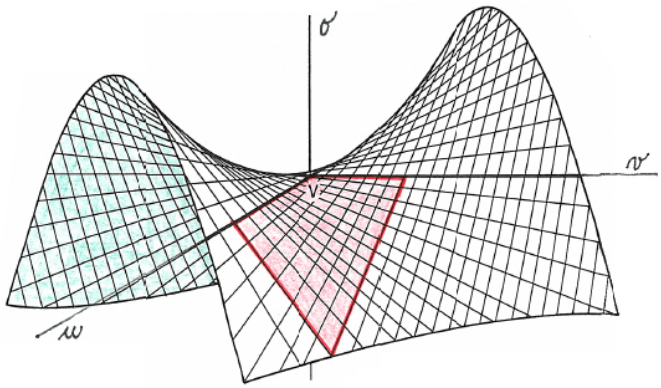
Skládají-li se modely ze dvou systémů navzájem rovnoběžných řezů, mají další nezanedbatelnou výhodu. Na obrázku 16 vidíme do roviny sklopený model hyperbolického paraboloidu (jaká to úspora místa v kabinetu deskriptivní geometrie). Většina zde zobrazených modelů vznikla jako zápočtové práce našich studentů.



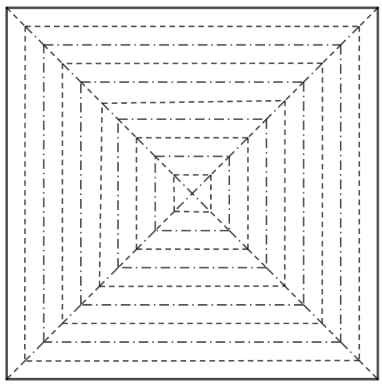
Obr. 16: Model hyperbolického paraboloidu složený do roviny

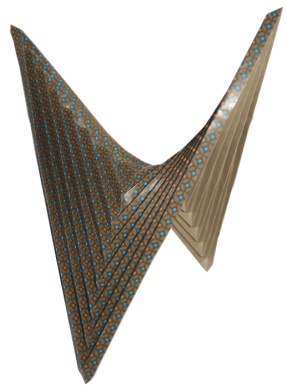
Na závěr se vraťme k modelům, které lze vytvořit z jednoho kusu papíru. Ukažme si zajímavý model hyperbolického paraboloidu. Abychom si dovedli lépe představit, jak bude výsledný model vypadat, podívejme se nejprve na obrázek 17. Hyperbolický paraboloid je přímková plocha obsahující dva systémy přímek. Přímky jednoho systému jsou navzájem mimoběžné, ale všechny jsou rovnoběžné s danou řídicí rovinou (pro každý systém jinou). Každá přímka jednoho systému je různoběžná se všemi přímkami druhého systému. Libovolné dvě různé přímky jednoho systému a dvě různé přímky druhého systému určují zborcený čtyřúhelník (na obrázku 17 je jeden takový vyznačen červenou barvou). Libovolným zborceným čtyřúhelníkem je hyperbolický paraboloid jednoznačně zadán. Náš model bude reprezentovat právě jeden takový zborcený

čtyřúhelník. Jeho výroba je překvapivě snadná; zvolíme-li snazší verzi modelu, zabere tvorba maximálně půl hodiny. Ke skládání potřebujeme čtvercový papír[8], na němž vytvoříme přehyby naznačené v obrázku 18. Čárkované čáry znamenají ohyb, při němž hrana směřuje vzhůru, zjednodušeně řečeno vytváří "horu", čerchované ohyb, při němž hrana směřuje dolů neboli vytváří „údolí". Podrobný obrázkový návod na tvorbu toho to modelu lze nalézt například v [8], pro finální část skládání modelu je ale dobré se podívat na video návod, viz např. [9].



Obr. 17: Hyperbolický paraboloid jako přímková plocha[9]





Obr. 18 (vlevo): Čtvercový papír s naznačenými ohyby
Obr. 19 (vpravo): Výsledný model

[8] Obdobný model by šel vytvořit i z papíru ve tvaru libovolného konvexního čtyřúhelníku. Jeho hrany, stejně jako u čtvercového papíru, budou hranami zborceného čtyřúhelníku.

[9] Obrázek je převzat z výukových materiálů Aleny Šarounové.

7 Závěr

Práce s papírem i rýsování vyžaduje jistou trpělivost a pečlivost a přispívá k rozvoji jemné motoriky žáků. Je prokázáno (viz např. [10], str. 152–153), že při vnímání nových poznatků nejen vizuální a verbální formou, ale i hmatem (hapticky), dochází v našem mozku k propojení více center a tím i k hlubšímu zapamatování poznatků. Občasné zařazení práce s papírem do výuky matematiky může tedy výuku nejen zatraktivnit, ale i dopomoci k lepšímu pochopení probírané látky i k jejímu propojení s jinými oblastmi matematiky.

Poděkování. Tento článek vznikl za podpory programu Univerzitní výzkumná centra UK, č. UNCE/HUM/024, a projektu PROGRES Q17 *Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.*

Literatura

[1] J. Robová, V. Moravcová, Z. Halas, J. Hromadová, *Žákovské koncepty trojúhelníku na začátku druhého stupně vzdělávání*, Scientia in educatione, 2018 (v recenzním řízení).

[2] R. Lang, Origami and geometric constructions, 2003. Dostupné z: `bit.ly/2x8inKt`

[3] D. Richeson, *Angle trisection using origami*, 2012. Dostupné z: `divisbyzero.com/2012/06/01/angle-trisection-using-origami/`

[4] *Paper protractor*. Dostupné z: `www.arvindguptatoys.com/toys/protractor.html`

[5] Š. Voráčová a kol., *Atlas geometrie*, Academia, Praha, 2012.

[6] V. Effenberger, *Kuželosečky*, diplomová práce, MFF UK, 2011. Dostupné z: `kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/`

[7] T. Sundara, *Row's geometric exercises in paper folding*, The Open Court Pub. Co., Chicago, 1917. Dostupné z: `archive.org/details/tsundararowsgeo00rowrich`

[8] E. Demaine, *Hyperbolic paraboloid*. Dostupné z: `erikdemaine.org/hypar/hypar_folding.pdf`

[9] E. Gjerde, *Origami Hyperbolic Parabola Instructions*, 2013. Dostupné z: `www.youtube.com/watch?v=4g1OcLHp6yI`

[10] M. Spitzer, *Digitální demence*, Host, Brno, 2016.

RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`jole@karlin.mff.cuni.cz`

STEREOMETRIE – SÍLA MOTIVACÍ

Alena Šarounová

Několik pohledů do minulosti, ke kořenům geometrie, které by mohly při vhodném využití povzbudit zájem studentů o stereometrii.

1 Zamyšlení nad geometrií

Geometrie – tak krásná součást matematiky!!! Jak je to možné, že po celý můj profesní život na ni slyším stížnosti z řad žáků i učitelů? Leonardo da Vinci kdysi napsal, že opravdu milovat můžeme jen to, co dobře známe... Ovšem – abychom něco dobře poznali (a tedy to mohli milovat), musíme se tomu učit. A právě na začátcích toho učení velice záleží. Současný styl života, množství elektroniky, nedostatek vlastních rukodělných zkušeností, nedocenění důležitosti matematiky „obecným lidem“, únava učitelů, to jsou jen některé příčiny tohoto nedobrého stavu. (Naštěstí i tak nacházíme ještě „ostrovy blažené geometrie“ a výborných učitelů. Kéž by se rozšiřovaly „po vlastech českých“ – jak by řekli národní buditelé 19. století.) Proč se tolik mluví o problémech (i zbytečnosti) školské geometrie, když její aplikace všichni bez rozdílu denně užíváme? Co s tím mohou učitelé udělat? Systém sami nezměníme, ale něco udělat lze. Už zařazení stereometrie do posledních týdnů školních roků (zejména na mnohých SŠ), neprovázání s planimetrií, nedostatek ukázek z praxe aj. jí výrazně škodí. I náš postoj k ní. Snažíme se žáky dobře připravit ke zkouškám na VŠ, víme, že stereometrické úlohy se v testech objevují jen zřídka (také se špatně opravují!) a možná to není právě naše oblíbená partie?

Neusilujeme při výuce o důkladné poznání stereometrie, protože je příliš obtížná – nebo je pro žáky příliš obtížná, protože se jí dostatečně nevěnujeme? Můžeme získat zájem žáků o látku, ve které nemáme sami zalíbení? Tuší žáci, co vše bylo v historii vybudováno pouze pomocí takových geometrických poznatků, s jakými se seznamují na základní škole? Zájem o stereometrii je možno povzbudit i jistým „návratem k minulosti“ – řešením problémů starověkých stavitelů jejich (rovněž starověkými) postupy. Pravý počátek geometrické představivosti vychází z práce s materiálem. Velkou roli také hrají okolnosti, za kterých se s geometrickými úlohami setkáváme. Uvádím několik motivačních úloh, které snad mohou zaujmout nejen učitele matematiky, ale i naše žáky různého věku. Hodně tu však záleží na způsobu, jímž je žákům nabídneme.

2 Geometrická představivost?

Velmi často hovoříme o prostorové představivosti. Spojujeme ji často s výukou stereometrie a stěžujeme si, že žákům mnohdy chybí. Geometrická představivost je spolu s představami o poloze našeho těla, pohybu objektů navzájem i kolem nás, schopnosti odhadnout např. rychlost protijedoucího auta atd. jednou součástí představivosti prostorové. (Sám tento pojem nemá „vyhraněné

hranice“, názory vědců se zde značně liší.) Umí-li žák v reálných objektech odhalit jejich geometrickou strukturu a „pracovat s ní“ (v realitě, v myšlenkách či pomocí nákresů na papíru), geometrickou představivost mu přiznáme. K jejímu rozvíjení jsou od útlého dětství velmi důležité vhodně volené hračky. „Vhodná hračka“ by měla mít jednoduché výrazné tvary (např. bývalé dřevěné stavebnice z krychlí, kvádrů, hranolů, válců a jehlanů), vhodný materiál i velikost. Čím je hračka jednodušší, tím více podporuje tvořivost dítěte. (Hračky příliš specializované také brzy omrzí.) I přílišné množství hraček nabízených dítěti škodí, protože odvádí velmi rychle jeho zájem z jedné činnosti ke druhé. Pak si stěžujeme, že děti nejsou schopné „udržet pozornost“ při výuce ve škole.

I v geometrické představivosti vidím dvě různé složky. Jde o představivost stereometrickou a planimetrickou. Nerada bych je ale oddělila do dvou nepřekrývajících se celků. Jde spíše o „siamská dvojčata“, z nichž žádné z podstaty věci nemůže existovat samostatně. Myslím, že i ve škole by bylo vhodné mnohem více propojovat obě „sestry“ navzájem. Prospělo by to hlubším vazbám mezi různými poznatky i vyhledávání zajímavých motivačních úloh pro úvod do nových partií matematiky či k samostatným pracím studentů nejen na SŠ.

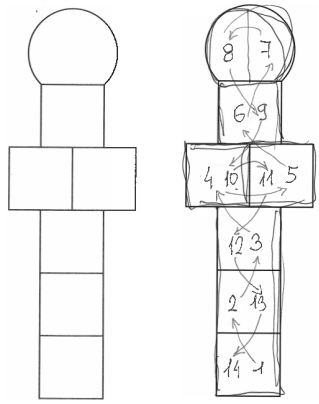
Geometrie sama má své skryté kořeny jednak v našich genech (rovinová souměrnost našich těl, představa „krásna“ – obliba jistých tvarů, není vlastní jen lidem), v náboženských obřadech a rituálech a pravděpodobně i v tvorbě látek (speciálně tkaní – cesta ke shodnostem atp.). Příroda sama je studnicí nepřeberných tvarů a geometrických proměn. Jen některé z nich zaujaly z různých důvodů starověké myslitele. Největší péči věnovali těm tvarům, které se osvědčily při práci či vynikaly krásou, a které bylo možno snadno realizovat. Tedy takové, k jejichž vytvoření stačily jednoduché nástroje.

3 Provazec a kružítko

Ve škole se žáci seznamují v geometrii nejdříve se čtvercovou sítí na papíru, s pravítkem (či s trojúhelníkem s ryskou). Bylo by vhodné projít se dříve po čtvercové dlažbě, vyznačit na hřišti pomocí provázku nejkratší cestu mezi dvěma kolíky A, B, vytyčit postupně další část přímky AB a do písku vyrýt „hranici kruhového záhonu“. Můžeme „objevit“ i tyč jako vhodný doplněk našeho nářadí. Přidáme-li k těmto pomůckám časem ještě větší kartonový čtverec s vyznačenými úhlopříčkami a otvorem v jeho středu, rozšíří se naše možnosti o vytyčení pravého úhlu. Pak už lze přesně křídou vyznačit na hladkém povrchu běžného „panáka na skákání“ podle „plánu“ – náčrtku panáka ve čtvercové síti (viz obr. 1). A pochopíme, že školní „nástroje“ nám usnadňují přípravu reálných prací v terénu.

Myslím, že by to bylo celkem příjemné seznamování s geometrií. Většina nových témat (nejen v geometrii) by měla být připravena vhodnou motivací. Ty nejúčinnější motivace při výuce geometrie nejen pro mladší žáky nenacházíme dumáním nad papírem. Nabízí nám je historie, okolí školy, příroda atd. Je na nás, učitelích, jaké praktické činnosti z těchto oblastí žákům umožníme. (Nezapomínejme, že čím více zaměstnáme jejich ruce a „nápaditost“ na cestách

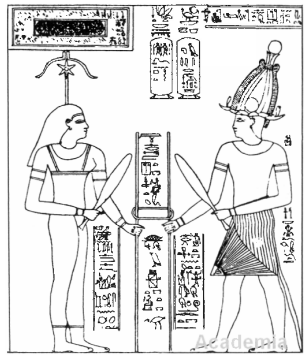
k hledanému cíli, tím větší zájem o následující výuku budou mít. Je ovšem nutné pečlivě zvážit míru časové i odborné náročnosti na řešitele úloh. Tu pravou radost z práce přináší až zdárné vyřešení úkolu.) Záleží také na tom, v jakých souvislostech jsou úlohy podány. Často neuškodí trochu tajemných historických souvislostí, i když jde z hlediska matematiky o zcela jednoduchý problém. Jindy stačí „neúplně zadaná úloha“ nebo „chybějící“ rýsovací (či vytyčovací) prostředky.



Obr. 1: Panák ve čtvercové síti

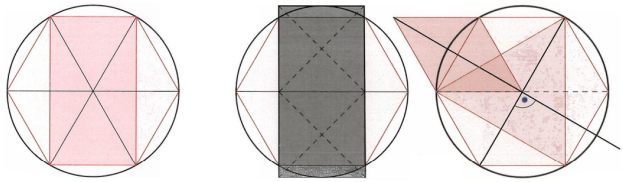
Vraťme se například ke starověké geometrii. Trvanlivým záznamem znalostí tehdejších stavitelů je architektura. Mnohé praxí ověřené postupy vedly k objevům geometrických zákonitostí, o nichž se učí žáci (nejen) základních škol. Na rozdíl od našich žáčků, kteří často nechápou význam geometrie pro praxi, stavitelé starověku nacházeli mnohá rafinovaná využití této na první pohled „jednoduché geometrie“ tak dokonale, že nad jejich výkony dodnes žasneme. Stejnými nástroji – provazcem, kolíky a měřící tyčí (doplněnými vhodnějším vytyčením pravého úhlu) vyměřovali egyptští stavitelé půdorysy pyramid a celých stavebních areálů.

Už od starověku bývala věnována velká pozornost výstavbě posvátných budov. Protože tyto stavby byly určeny „pro božstva“, měly být co nejdokonalejší, tedy přesně postavené předepsanými postupy. Pečlivě byly voleny i materiály k jejich stavbě. Sám akt založení stavby býval velkou rituální slavností. Na obr. 2 (zdroj [1]) je výřez ze zobrazení tzv. „vytyčování středu“ budoucího chrámu. Bohyně Safet a farao drží v rukou pruty a šňůru k vyměřování a zlatá kladívka k zatloukání kolíků. (Kresba podle reliéfu v Dendeře.) I dnes se slaví zahájení významných staveb určitým rituálem. (Jen ta kladívka už nejsou zlatá a nežádáme o pomoc bohyni.)



Obr. 2: Obřad vyměření chrámu faraonem

Základem vytyčování byl většinou kruh a pravidelné dělení kružnice pro sestrojení např. pravidelného šestiúhelníku. (Přesnost jeho zobrazení lze ověřit opsanou kružnicí i rovnostrannými trojúhelníky z provazce.) Ze základního obrazce je možné odvodit různé půdorysy budov, přesné kolmice i další rozměry článků stavby. Na obr. 3 je několik používaných obrazců, které vycházejí z pravidelného šestiúhelníku. Lze popsat jejich konstrukci, přerýsovat ji a vyhledat, co vše z ní můžeme vyčíst a jak ji dále použít. (Podobné postupy užívali i stavitelé katedrál. Od základního rozměru – zpravidla šíře hlavní lodi – odvozovali nejen půdorys stavby, ale i výškové rozměry a další prvky chrámu.) Do kružnice lze vpisovat i geometrická schémata, vycházející např. ze čtverce, z pravidelného pětiúhelníku, stromu života atd. (Více najdete v [1] a [2].)

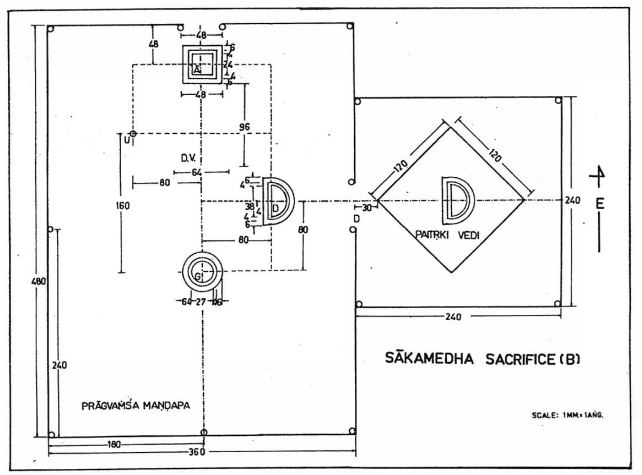


Obr. 3: Obrazce vytýčené pomocí kružnice

4 Geometrické oltáře

Do našich dob se dochovaly různé předpisy pro budování posvátných míst – okrsků, chrámů, oltářů. Je zajímavé, že většinou šlo kromě typu materiálu, z něhož měly být chrámy zbudovány, i o jejich přesné rozměry. Připomíná nám to známá řecká úloha o zdvojení krychle, tedy sestrojení oltáře tvaru krychle, který má dvojnásobný objem než oltář původní. (Jde asi o legendu,

ale vystihuje to důležitost tvaru oltáře.) Mnohem náročnější požadavky na obřadní plošinu se třemi oltáři popisuje ve své disertační práci Petr Bogan [3]. Jde o obětní rituál starých indických Véd z prvního tisíciletí, při němž je nutné velmi složitým rituálním způsobem vybudovat tři oltáře pro tři různá božstva – kruhový, půlkruhový a čtvercový - stejného obsahu. (Rituál obsahuje kromě zpěvu, modliteb, tvorby speciálních nástrojů k práci atd. také přesný postup vyměřování oltářů pomocí provazců. Je úzce svázán s indickou matematikou.) Rozlehlou plošinu se zmíněnými oltáři vidíme v levé části obrázku 4.



Obr. 4: Rituální plošina se třemi oltáři

Také v Bibli ve druhé knize Mojžíšově jsou pozoruhodné popisy posvátných objektů. Stručně je popsána Archa úmluvy a trochu podrobněji Síň příbytku (přenosný honosný stan na její ukládání – jakýsi přenosný chrám). V obou případech je v Bibli velmi přesně vypsáno i kolik je třeba háčků na sepnutí pruhů látky, jaké barvy mají být jednotlivé části skvostného vybavení atd. (Část popisu uvádím pro představu, jak důkladně texty zachycovaly detaily stavby, geometrické uspořádání i výběr drahých materiálů.) Nás může zajímat tvar a velikost popisovaného objektu, případně i přesnost toho popisu.

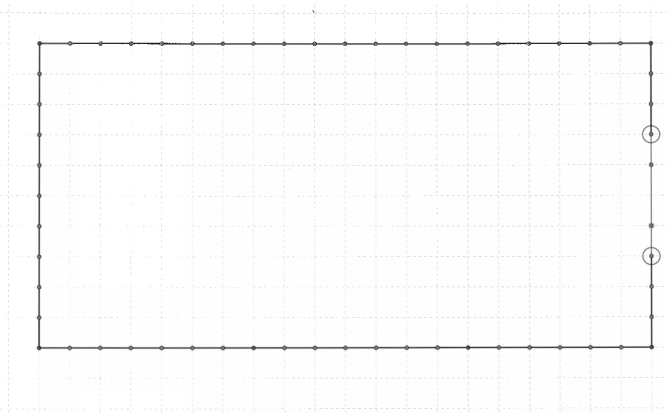
Archa úmluvy: Uvádím zde dva úryvky (kap. 25, verše 10, 17) z prvorepublikového vydání Bible Kralické z roku 1923. Bylo by zajímavé nechat studenty trochu pátrat po zdroji, všimnout si „kralické češtiny“ (i když už také upravené) a kromě tvaru archy (kvádr) zjistit i její rozměry, tj. vyhledat délku tehdejšího „lokte“. Je zde i zajímavý předmět slitovnice… Cituji:

„…udělají také truhlu z dříví SETIM. Půl třetího lokte bude dlouhost její, půl druhého lokte širokost její, půl druhého lokte vysokost její. … Uděláš i slitovnici z zlata čistého. Půl třetího lokte bude dlouhost její, půl druhého pak lokte širokost její…“

Síň příbytku: Přenosná truhla – Archa úmluvy – vyžadovala při kočovném životě tehdejších Izraelitů důstojný přenosný stánek. Popis půdorysu stanu (kap. 27, od verše 9) je značně rozvleklý. Přesto není zadání jednoznačné. Přihlédneme-li k tehdejším zvyklostem (hojné využívání čtvercové sítě nejen pro vytyčování půdorysů budov), najdeme realistické řešení, které je poněkud v rozporu s předpisem.

Síň příbytku je obdélník orientovaný Z-V směrem. *„…Síň příbytku k straně polední má 100 loket zdélí…“*, taktéž i strana severní. Východní i západní strana má pak 50 loket délky. Podle popisu dvě delší strany obdélníku mají po dvaceti sloupech, západní strana deset sloupů a na východní straně je vstup do stanu. Zde je situace složitější. Dále cituji – od 13. do 18. verše:

A širokost síně v straně přední na východ bude padesáti loktů. Patnácti loktů budou koltry očkovaté k straně jedné, sloupové k nim tři, a podstavkové jejich tři. A k straně druhé patnácti loktů zdýlí budou koltry očkovaté, sloupové jejich tři a podstavkové jejich tři. K bráně pak té síně uděláno bude zastřešení dvacíti loktů z podstavce modrého a šarlatu, a z červce dvakrát barveného, a bílého hedvábí soukaného, dílem krumpéřským, sloupové k němu čtyři, a podstavkové jejich čtyři. Dlouhost síně bude sto loket, a širokost padesáte, všudy jednostejná, vysokost pak pěti loktů, z bílého hedvábí soukaného, a podstavkové budou mědění.



Obr. 5: Půdorys „Síně příbytku“ ve čtvercové síti – možné řešení

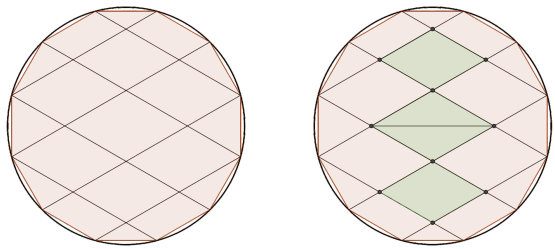
Stejně podrobně jsou pak popsány všechny rituální předměty (včetně každého kusu oblečení). To vše dokazuje, s jakou přesností se dodržovaly (či měly dodržovat) tehdejší rituály. Pro zajímavost snad ještě poznámku. Půdorys onoho „posvátného prostoru pro Archu“ má tvar obdélníku složeného ze dvou čtverců. Právě takový obdélník byl východiskem geometrických schémat zachycujících významné poměry délek úseček (pravděpodobně nejen) v Egyptě.

5 Strom života

Jedním ze schémat vycházejících z kruhu je tzv. Strom života. Byl užíván k odvozování vzájemných poměrů částí zejména církevních staveb. (Strom života se objevuje v Janově zjevení v Bibli při popisu „Svatého města“ a v různých podobách včetně těch geometrických, i v řadě spisů zabývajících se architekturou a esoterismem, kde se mu přičítá mnoho různých významů.) Nás mohou zajímat poměry délek úseček stran, úhlopříček kosočtverců a celková „výška“ Stromu. Zvolíme-li za jednotku delší úhlopříčku většího kosočtverce, je výška

$$v = (3 + \sqrt{3})/3 = 1{,}577...$$

Poměr 1 : 1,577 je využíván i v katedrále sv. Víta v Praze. Konstrukce Stromu je jednoduchá (viz obr. 6). Na kružnici vyznačíme vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku a sestrojíme dvě čtveřice rovnoběžných úseček podle obrázku. Tak získáme 10 bodů – průsečíků těchto úseček, které jsou vrcholy sestavy tří kosočtverců tvořících náš Strom. (Více v [2].) Získaná proporce není tak známá jako „zlatý řez“. Stavitelé katedrál si svá tajemství nechávali pro sebe.



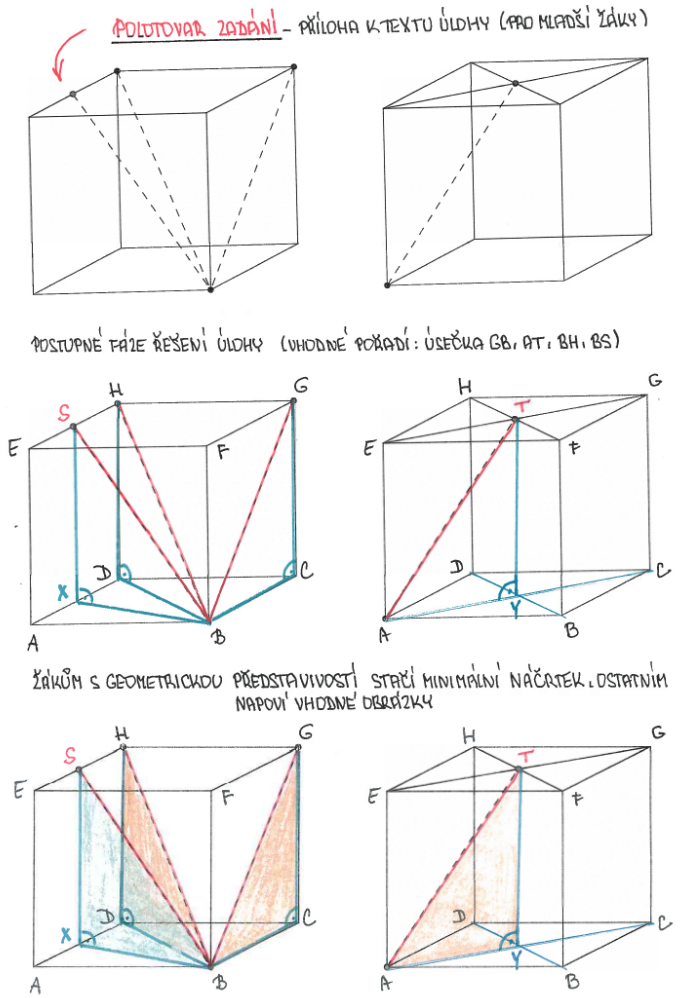
Obr. 6: Konstrukce Stromu života

6 Krychle jako symbol

Platon ve svých spisech přiznával velký význam geometrii. Známe platonská tělesa, která symbolizovala i živly. Krychle představuje „hmotu, zemi, materiál“. Na církevních obrazech býval prostý svět (naše okolí, lidé) umisťován většinou do kompozičních čtverců v dolní části plochy obrazu, posvátné události či postavy nahoru – do pomyslného kruhu. V prostoru hraje významnou roli krychle a čtverec jako tvar jejích stěn. Krychle sama o sobě je zdrojnicí důležitých délkových poměrů. Její nejznámější síť – tvar kříže – je ideálním tvarem katedrál, ale krychle byla za základní stavební prvek považována mnohem dříve.

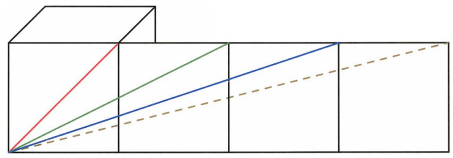
Ze čtvercové sítě v rovině se dá vyčíst řada vhodných poměrů délek i Pythagorova věta. Zajímavé vztahy (a stavební proporce) lze vyčíst také z krychle vhodným užitím této věty. Na obr. 7 jsou ve dvou jednotkových krychlích $ABCDEFGH$ vyznačeny koncové body úseček, jejichž délky se snadno odvodí. Jde o vrcholy krychlí, střed S strany EH a střed T stěny $EFGH$. Tyto

úsečky by si měli žáci zakreslit už sami: úhlopříčku stěny – BG, úhlopříčku krychle – BH, úsečku BS, úsečku AT. Na obrázku jsou už tyto úsečky zakresleny a pomocné trojúhelníky rovněž. (Částečná kontrola: úsečka BS měří $3/2$ jednotky, ostatní výrazy jsou s pěknými odmocninami.)



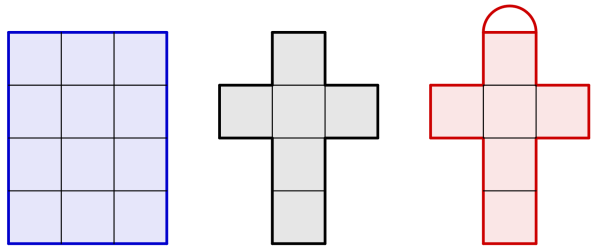
Obr. 7: Významné úsečky v jednotkových krychlích (částečné řešení)

Jednotková krychle a její plášť nabízejí i rozvinutí úlohy. Na obr. 8 je zobrazená krychle s pootevřeným pláštěm. Jedna boční stěna krychle je pootočena podél hrany krychle do roviny přední stěny. Získali jsme tak obdélník složený ze dvou čtverců. (Právě takový obdélník býval výchozím tvarem pro geometrická schémata ve starověkém Egyptě.) Budeme-li pokračovat v odvíjení dalších stěn krychle, získáme ještě dva obdélníky se zajímavými úhlopříčkami. Totéž lze provést v rozložené síti krychle a nic nebrání v pokračování tohoto postupu.



Obr. 8: Geometrická konstrukce některých odmocnin

Na závěr těchto ukázek zajímavostí se vrátíme k prosté síti jednotkové krychle „vystřižené“ ze čtvercové sítě. Na obrázku 9 vidíme obdélník složený z 12 čtverců. Síť krychle je složena ze šesti čtverců. Oba obrazce však mají stejný obvod. Obdélník připomíná pythagorejskou trojici 3, 4, 5, druhý obrazec půdorys katedrál. Pro úplnost bychom ho měli doplnit ještě půlkruhem, protože závěry katedrál byly většinou budovány na půdorysu polokruhovém či na polovinách pravidelných mnohoúhelníků. Četla jsem kdysi v knize o staré francouzské architektuře, že právě panák – hra pro děti (i s příslušným říkadlem k obrázku) je časem přetvořený a zdegenerovaný rituál vyměřování katedrál, který se šířil se stavebnímu hutěmi po Evropě v raném středověku. (Už nevím, která kniha to byla, netušila jsem tehdy, že budu jednou psát článek o zajímavostech, které by mohly zvýšit zájem studentů o geometrii – stejně jako netuším, co bude dál.)



Obr. 9: Obdélník v jednotkové síti, plášť jednotkové krychle a schematický půdorys katedrály z raných středověkých písemností

7 Závěr

Na závěr vás chci upozornit na poslední knihu uvedenou v „literatuře“. Jde v podstatě o dvě knihy, Papírová zeměkoule a Kouzelný dalekohled, dva díly shrnuté pod společným názvem Pojďte s námi měřit zeměkouli. Kniha vyšla v roce 1942. (V době války vycházely krásné knihy, politikou se zabývat nemohly, ale dávné historii, architekturou, či lidovým písním byla věnována řada velmi výpravných odborných či populárně vědeckých textů. Škoda, že na ně již zapomínáme.) Tato mnou doporučovaná „kniha“ je psána velmi srozumitelně. Věnuje se kartografii a topografii od dávných dob do časů 1. republiky. Pro učitele by mohlo být zajímavé množství historických poznámek –

a zejména přetisky rytin z historických knih (návody, „kterak vyměřit v terénu…“ atp.), ukázky starých map, starých přístrojů aj. Z knihy mohou „čerpat motivaci“ nejen matematici, ale i historii, zeměpisci a češtináři.

Snad se vám tyto ukázky „starých praktik“ zdají až moc staré. Ale nemylme se! Ještě v době baroka lze bezpečně dokázat užívání mnohých starověkých postupů ve stavebnictví. A ve znacích mnoha stavebních společenství se stále objevuje pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník či krokvice, kladívko a kružítko (místo provazce). Nic na podstatě praktické geometrie nemění používání laserového dálkoměru místo pravítka.

Literatura

[1] Fr. Kadeřávek, *Geometrie a umění v dobách minulých*, Půdorys, 1994.

[2] L. Moučka, *Matka katedrála*, Půdorys, 2016.

[3] P. Bogan, *Původ postavení geometrie v indické matematice druhé poloviny prvního tisíciletí*, disertační práce, UJEP, 2015.

[4] Š. Voráčová a kol., *Atlas geometrie*, Academia, Praha, 2012.

[5] *Bible kralická*, 1923.

[6] J. Hons, B. Šimák, *Pojďte s námi měřit zeměkouli*, Nakl. K. Kolářová, Praha, 1942.

PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
sarounov@karlin.mff.cuni.cz

CESTY K MATEMATICE III
Sborník konference

Praha, 24. a 25. září 2018

Jana Hromadová, Antonín Slavík (ed.)

Vydal MatfyzPress
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 567. publikaci.

Vydání první
Praha 2018

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením nakladatelství MatfyzPress.
Nakladatelství MatfyzPress neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Publikace byla vydána pro potřeby konference Cesty k matematice.

ISBN 978-80-7378-373-0