Riešenie matematických úloh

(počty a merba)

zostavil

Dušan Jedinák

MMXV

Začínať treba jednoducho a vtipne

Zámer

Mnohé školské matematické úlohy sú často len opakovaným dosadením do známych vzorcov alebo aplikovaním ukázaného algoritmu. Menej je takých, v ktorých treba vybadať zatiaľ neznámy postup alebo odhaliť nový matematický obrat. Ponúkam štyri príklady, v ktorých už žiaci posledných ročníkov základnej školy môžu z predloženého riešenia spoznať, že na to „majú“, ak budú získané a dobre pochopené matematické vedomosti vhodne a tvorivo využívať.

Čarovný trik ako kúzelník

Úloha: Napíšte si svoje trojciferné číslo. Urobte z neho ďalšie číslo s obráteným poradím číslic. Odčítajte menšie z týchto čísel od väčšieho. Z výsledku mi povedzte cifru na mieste jednotiek. Poviem vám celý výsledok.

Riešenie: Skúsme to: 537, 735

$$\begin{array}{r} 735 \\ -\ 537 \\ \hline 198 \end{array} \qquad \text{poviete } 8.$$

Ja si predstavím $99 \cdot x = \square\square 8$, teda $x = 2$, váš výsledok bol 198. V čom je podstata?

$$100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99\cdot(a - c)$$

Výsledok odčítania trojciferných tzv. *reverzných* čísel je vždy deliteľný 99.
Tento fakt využijeme na určenie rozdielu $(a - c)$ a teda aj celého výsledku.

Začnite a zbadáte to

Úloha: Dokážte, že $p_n = 2^n \cdot 5^{n+1} + 1$ nie je prvočíslo pre žiadne $n \in N$.

Riešenie:

Začnime od jednotky: $p_1 = 2^1 \cdot 5^2 + 1 = 51$

$p_2 = 2^2 \cdot 5^3 + 1 = 4 \cdot 125 + 1 = 501$

$p_3 = 2^3 \cdot 5^4 + 1 = 8 \cdot 625 + 1 = 5\,001$

.

.

tušíme a vidíme, že $p_n = 2^n \cdot 5^{n+1} + 1 = 2^n \cdot 5^n \cdot 5 + 1 = 10^n \cdot 5 + 1 = 5\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{ núl}}1$

Takéto čísla majú vždy ciferný súčet 6, ale to znamená, že sú deliteľné tromi.

Vynájsť sa aj z mála

Úloha: V znázornenom zápise súčinu dvoch kladných celých čísel stanovte nezapísané číslice (sú naznačené bodkami):

$$\begin{array}{r} \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \times\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \hline \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ 3\ 2\ 7\ 5\ \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \\ \hline \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

Riešenie: Musíme vychádzať z toho mála, čo vidíme a z toho, čo o násobení vieme.
Ak rozložíme číslo 3275 na súčin prvočísiel dostaneme $3275 = 5 \cdot 5 \cdot 131$, teda aby sme dostali toto číslo ako súčin trojciferného a jednociferného čísla treba zobrať $655 \cdot 5$. Potom násobenec bude 655 a druhá cifra násobiteľa 5. Pretože tretí čiastočný súčin je trojciferný, tak prvá číslica násobiteľa musí byť iba 1. Aby prvý čiastočný súčin bol štvorciferný a celkový súčin iba päťciferný, tak posledná cifra násobiteľa môže byť len 2. Naznačený súčin je

```
      6 5 5
    x 1 5 2
--------------
    1 3 1 0
  3 2 7 5
  6 5 5
 ___________
  9 9 5 6 0
```

Pohyblivá logika

Úloha: Ak v tabuľke (7x7) prirodzených čísel 1 – 49 (pozri znázornenie na schéme)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

vyberieme sedem čísel tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je vybrané práve jedno číslo, potom súčet vybraných čísel je vždy rovnaký. Dokážte toto tvrdenie a určte ten súčet.

Riešenie: Predstavme si, že na každé číslo v prvom riadku tabuľky položíme značky. Súčet označených čísel by bol $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, ale treba, aby práve jedna značka bola v každom riadku i v každom stĺpci. To dosiahneme tak, že značky posúvame v smere stĺpcov, aby v každom riadku bola práve jedna. Pri posune značky do 2. riadku sa číslo zväčší o 7, pri presune do 3. riadku o 14 atď. Preto pri presune značiek do jednotlivých riadkov (do každého práve jedna) sa súčet príslušných čísel zväčší o $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 7 = 147$.
V požadovanom rozdelení, podľa textu úlohy, je teda celkový súčet označených čísel vždy $28 + 147 = 175$. Logická predstava o pohybe značiek bola užitočná a presvedčivá.

Neuveriteľný rébus

Doplňte za každú • jednociferné prvočíslo, aby bolo znázornené násobenie správne:

```
     • • •
  ×    • •
  ---------
   • • • •
 • • • •
 ----------
 • • • • •
```

Riešenie: Jednociferné prvočísla sú iba: 2, 3, 5, 7.
Pretože súčiny 2×2, 2×3, 2×5, 2×7 nemajú na konci prvočíslo, môže byť poslednou cifrou oboch čísel iba 3, 5 alebo 7. Teda dvojice 3, 5; 5, 3; 5, 5; 5, 7; 7, 5.
Skúšame ...

```
     7 7 5
   ×   3 3
   -------
   2 3 2 5
 2 3 2 5
 ---------
 2 5 5 7 5
```

Vtipné riešenia zaujímavých úloh

Voda vo víne?

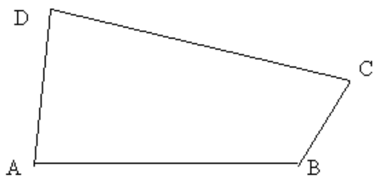
Máme dve rovnaké nádoby tak, že v jednej je víno a v druhej voda, vždy do rovnakej výšky, ale nie až po okraj (rovnaké objemy vína a vody). Zoberieme lyžicu vína a prelejeme ju do nádoby s vodou a premiešame. Potom zoberieme lyžicu tejto zmesi a nalejeme do nádoby s vodou. Stanovte, čoho je po tomto úkone viac, vína v nádobe s vodou alebo vody v nádobe s vínom.

Riešenie: *Chcete hádať? Rozmýšľajte, spočítajte si to pre konkrétne hodnoty.*
Nech sú objemy vody i vína po jednom litre. Nech lyžica má objem 0,1 litra. Po prvom preliatí je v nádobe s vodou 1 liter vody a 0,1 litra vína. Potom na druhé preliatie pripadá do 0,1 litrovej lyžice [(0,1 · 10) : 11] vody a [(0,1 · 1) : 11] vína. Teda v nádobe s vodou zostalo [(0,1 · 10) : 11] vína. A do nádoby s vínom sa dostalo druhým preliatím tiež [(0,1 · 10) : 11] vody.
Vína v nádobe s vodou je rovnako ako vody v nádobe s vínom.

Skúsme úlohu vyriešiť abstraktnou úvahou.
Tekutina je v nádobe s vínom po spomínanom úkone v rovnakej výške, čiže nezmenený objem. V nádobe síce odbudlo vína (to sa dostalo do nádoby s vodou), ale pribudlo vody. Keby bol úbytok väčší (alebo menší) ako prírastok, tak by tekutiny v nádobe bolo buď menej (alebo viac) než na začiatku. Teda v nádobe s vínom je úbytok vína, ktoré je teraz v nádobe s vodou, rovnako veľký ako prírastok vody, ktorý sa dostal do nádoby s vínom.
V nádobe s vínom je práve toľko vody ako vína v nádobe s vodou. *Vyberte si, ktorý postup vás presvedčil.*

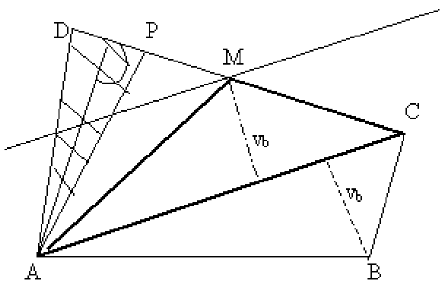
Rafinovane premyslené, logicky účinné

Rozdeľte štvoruholník ABCD (na obr.1) priamkou cez A na dva útvary s rovnakým obsahom. Zdôvodnite postup.



obr. 1

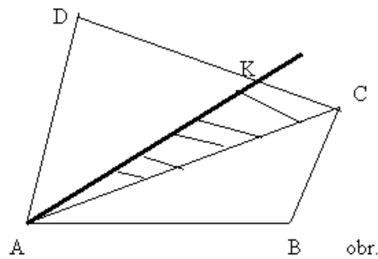
Riešenie:
Vidíme, že priamka *AC* rozdelí štvoruholník na dva trojuholníky s nerovnakým obsahom, ale so spoločnou stranou. Ak využijeme výšku trojuholníka *ACB* na stranu *b* v opačnej polrovine, dostaneme dva trojuholníky s rovnakým obsahom a jeden ďalší trojuholník *AMC* (pozri obr. 2).



obr. 2

Ak teraz rozpolíme úsečku *DM* bodom *P*, trojuholníky *AMP* a *APD* budú mať rovnaký obsah, lebo majú rovnaké základne $|PM| = |DP|$ a spoločnú výšku. Ak teraz od bodu *C* nanesieme na rameno *CD* vzdialenosť *DP* (dostaneme bod *K*), tak ukážeme, že útvary *AKD* a *ABCK* majú rovnaký obsah (pozri obr. 3).

$|KC| = |DP|$



obr. 3

Štvoruholník *ABCK* sa skladá z trojuholníkov *ABC*, *ACK*.
Obsah trojuholníka *ACK* je zhodný s obsahom trojuholníka *APD* (zhodné základne, tá istá výška, obr. 2).
Celý štvoruholník *ABCD* (obr. 2) sa skladal zo štyroch trojuholníkov, po dvoch trojuholníkoch s rovnakými obsahmi. Teraz sme ukázali, že útvar *ABCK* (obr. 3) má polovičný obsah z celého, teda druhá časť (trojuholník *AKD*) má tiež polovičný obsah celého štvoruholníka.

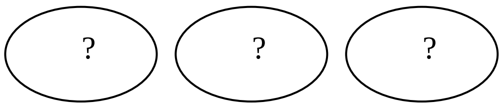
Všímaj si pravdu

Vo veštiarni sedia vedľa seba tri bohyne: *Pravda, Lož a Múdrosť*. *Pravda* vždy hovorí pravdu, *Lož* vždy klame a *Múdrosť* hovorí tak aj onak (niekedy pravdu, niekedy lož). Zistite, v akom poradí sedia bohyne, ak postupne odpovedali na otázky takto:

Kto sedí vedľa teba? *Pravda*. Kto si? *Múdrosť*. Kto sedí vedľa teba? *Lož.*

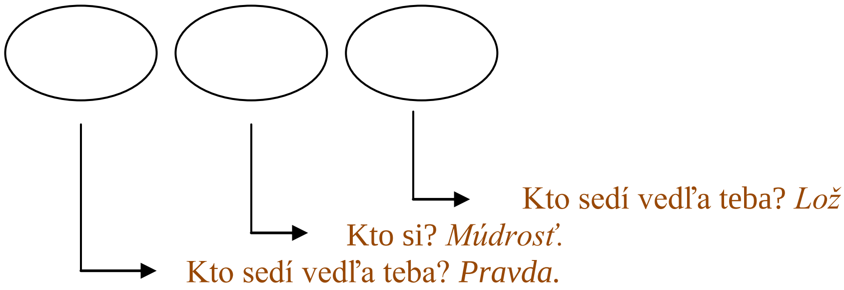
Riešenie: Znázornime si situáciu aj graficky:

1 2 3



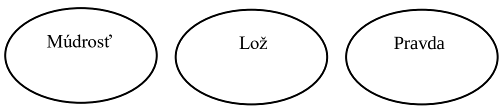
Po ich vyjadrení na otázky zapíšme ich odpovede :

1 2 3



A. Sledujme, kde by mohla byť *Pravda*, aby vyjadrenia zodpovedali danému stavu. Ak by na prvom mieste bola *Pravda*, jej odpoveď nesúhlasí. Ak by bola *Pravda* na druhom mieste, tiež odpoveď nie je v súlade s jej zásadou hovoriť vždy pravdu. Tak nech je na treťom mieste. Potom na druhom je naozaj *Lož* a na prvom *je Múdrosť*.

1 2 3



B. Úlohu môžeme vyriešiť aj rozpísaním všetkých možností a vyhodnotením príslušných odpovedí.

1	**2**	**3**	odpovede
P	L	M	nie
P	M	L	nie
L	M	P	nie
L	P	M	nie
M	L	P	vyhovuje
M	P	L	nie

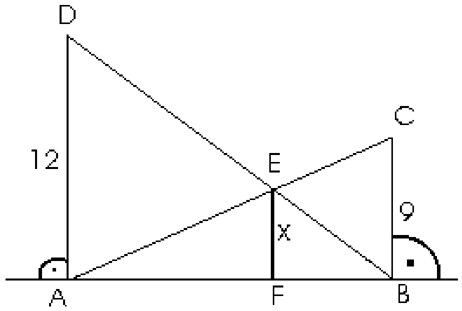
Labutia pieseň

Vyriešte rovnicu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=2$, pre navzájom rôzne prirodzené čísla *x, y, z, t.*

Riešenie: Pretože zlomky majú byť rôzne, musí pre aspoň jeden z nich, napr. $\frac{1}{x}$, platiť $\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<2$, t.j. $2>x>\frac{1}{2}$. Teda pre $x\in N$ z toho vyplýva, že $x = 1$. Potom $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$ a tiež $\frac{1}{3}<\frac{1}{y}<1$ t.j. $3>y>1$, teda pre $y\in N$ je $y = 2$. Ešte potom potrebujeme, aby $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$; tu bude znovu platiť napr. pre z nerovnica $\frac{1}{4}<\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$ t.j. $4>z>2$ v *N*, z toho vyplýva, že $z = 3$.

Potom už vyhovuje iba $t = 6$. Platí: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=2$.

Vypočítajte veľkosť ***x*** (údaje sú na obrázku):

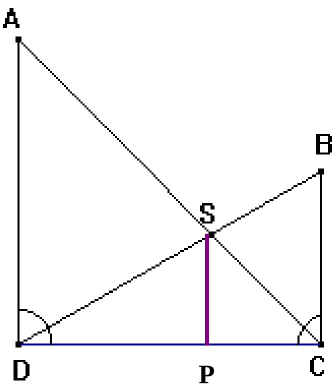


Riešenie:

Označme si *AF* ako *p* a *AB* ako *s*. Potom $FB = s - p$.
Pretože ΔABC je podobný ΔAFE, tak platí $9/x = s/p$.
Pretože ΔABD je podobný ΔFBE, tak platí $12/x = s/(s - p)$.
Z toho vyplýva $9p = s \cdot x$ a $12s - 12p = s \cdot x$
a teda $21p = 12s$ a tým aj $p/s = 4/7$.
Potom je zrejmé aj $x/9 = p/s = 4/7$ a z toho $\boldsymbol{x} = 36/7$.

Pre vzdialenosti na obrázku platí: $|AD| = 9{,}6$ cm; $|DC| = 2{,}4$ cm; $|CB| = 3{,}2$ cm. Vypočítajte dĺžky úsečiek *DS*, *SB*, aj vzdialenosť bodu *S* od priamky *DC*.

Riešenie:

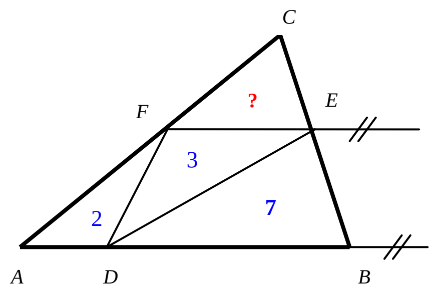


Priamky *AD*, *BC* sú rovnobežné, uhly *SCB*, *SAD* sú striedavé a preto $|\angle SCB| = |\angle SAD|$. Ďalej uhly *BSC*, *ASD* sú vrcholové a tak $|\angle BSC| = |\angle ASD|$. Odtiaľ vyplýva, že trojuholníky *ASD*, *CSB* sú podobné a $|AD| : |BC| = |DS| : |SB|$, t.j. $9{,}6 : 3{,}2 = |DS| : |SB|$. Teda $|DS| = 3|SB|$. Trojuholník *DCB* je pravouhlý a podľa Pytagorovej vety $|DC|^2 + |CB|^2 = |DB|^2 \Rightarrow |DB| = \sqrt{(3{,}2)^2 + (2{,}4)^2} =$ 4 cm. Avšak $|DB| = |DS| + |SB| = 3|SB| + |SB| = 4|SB|$, potom $|SB| = 1$ cm, $|DS| = 3$ cm. Trojuholníky *DPS*, *DCB* sú podobné,

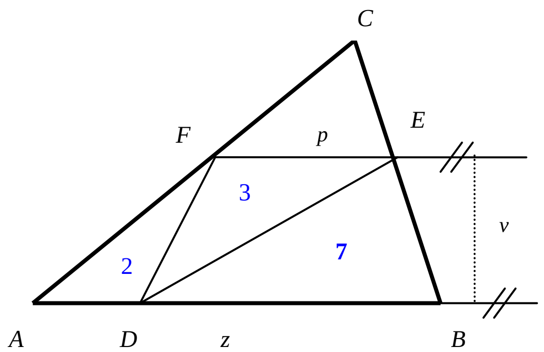
$$|SP| : |SD| = |BC| : |BD| \Rightarrow |SP| = 3 \cdot \frac{3{,}2}{4} = 2{,}4 \text{ cm.}$$

Podobnosť a odhalený pomer

Stanovte obsah trojuholníka *ABC*, ak poznáte obsahy trojuholníkov *ADF*, *DEF*, *DBE*, podľa zadania na obrázku (*AB* // *FE*).



Riešenie:



Označme $|FE| = p$, $|AB| = z$, potom $p = z/3$, lebo ak si označíme vzdialenosť rovnobežiek (*AB* // *FE*) ako *v*, tak podľa situácie zadanej na obrázku platí pre dané obsahy $\frac{z \cdot v}{2} = 9$ a tiež $\frac{p \cdot v}{2} = 3$.

Ak to dáme do pomeru, tak z toho vyplýva, že $\frac{z}{p} = 3$ t.j. $p = \frac{z}{3}$.

Pretože trojuholníky *ABC* a *FEC* sú podobné podľa vety (*u*, *u*) s koeficientom 1/3, tak pre ich obsahy (označme obsah trojuholníka *FEC* ako *x*) platí $x = \frac{1}{9} \cdot (x + 12)$. Z toho vyplýva, že $x = 3/2$. Obsah trojuholníka *FEC* je 1,5. Obsah trojuholníka *ABC* je 13,5.

Niekoľko poznámok pre riešenie úloh z matematiky v ZŠ

Ponúkam podnetné impulzy pre tvorivé riešenie školských matematických úloh. Už od Platóna (427–347 pred n. l.) vieme, že *počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk*. Ukážeme si na niekoľkých príkladoch riešenia trochu náročnejších úloh, ktoré sú prijateľné aj na úrovni vyučovania matematiky v základných školách.

Vtipne a s prehľadom

Úloha: Na dvore je 16 sliepok troch rôznych zafarbení: b – biele, s – strakaté, p – popolavé. Stanovte počet sliepok jednotlivých zafarbení, ak bielych je 7 krát viac než popolavých.

Riešenie: Nech b, s, p značí aj počet sliepok príslušného druhu ($b, s, p \in N$)

A: *Úsudkom:* Pretože $b = 7p$ je $7p + s + p = 16$, teda $s = 16 – 8p = 8 \cdot (2 – p)$, ale pre $s \in N$ môže byť len $p = 1$. Teda $p = 1$, $b = 7$, $s = 8$.

B: *Pomocou tabuľky:*

b	s	p
7	8	1
14	0	2

– volíme postupne $p \in N$

Vyhovuje iba $p = 1$, $b = 7$, $s = 8$.

C. *Pomocou rovnice a nerovnice*:

Platí: $b, s, p \in \langle 1;14 \rangle \wedge N$, potom $b + s + p = 16 \wedge b = 7p$, teda $s = 16 – 8p$.

Ďalej platí: ak $1 \le b \le 14$, tak aj $1 \le 7p \le 14$ t. j. $p \in N$, teda $p \in \{1,2\}$.

Ak $1 \le s \le 14$ tak aj $1 \le 16 - 8p \le 14$ t. j. $-15 \le -8p - 2$, odtiaľ $15 \ge 8p \ge 2$

$15/8 \ge p \ge 1/4$, $p \in N$.

Posledná nerovnosť je splnená, ak $p = 1$. Potom $b = 7$, $s = 8$.

Odvaha s celými kladnými číslami

Úloha: V triede je menej než 50 detí. Chlapcov je 72 % z počtu dievčat. Stanovte presný počet detí v tejto triede.

Riešenie: Situácia je trochu neobvyklá. Takto sa úloha na použitie percent bežne nezadáva. Skúsme zapísať úlohu zo zadania obvyklým spôsobom. Označme počet chlapcov t, počet dievčat s. Potom zapíšeme $t + s < 50$, čo vystihuje celkový počet detí. Percentuálny vzťah medzi t a s je:

$$t = \frac{s}{100} \cdot 72 = 0{,}72 s .$$

Nerovnosť $t + s < 50$ upravíme takto: $s < 50 – t$

$$s < 50 – 0{,}72 \cdot s$$
$$1{,}72 \cdot s < 50$$
$$s < 29{,}07.$$

Vieme, že za s môžu byť dosadzované iba celé kladné čísla 1, 2, ... 29.

Keďže pre t platí: $t = \frac{72}{100} \cdot s = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 5^2} \cdot s$, odtiaľ dostaneme: $t = \frac{2 \cdot 9}{25} \cdot s$.

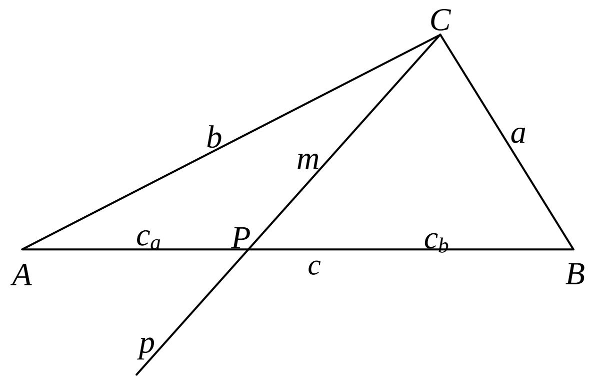
Aby bolo t kladné celé číslo, musí byť s rovné 25. Potom pre $s = 25$ je $t = 18$ a počet žiakov v triede je 43.

Riešenie úlohy vyžadovalo uplatniť osvedčený postup práce s premennými a odvahu skúmať rovnicu s dvomi neznámymi pre konečný počet 29 možných riešení. Stačilo si uvedomiť, že riešením sú kladné celé čísla.

Nedá sa rozdeliť?

Úloha: Dokážte, že žiadny rôznostranný trojuholník nemožno rozdeliť na dva zhodné trojuholníky.

Riešenie: Chceme ukázať, že nie všetko je v matematike realizovateľné. To znamená, že matematickými postupmi dôjdeme k sporu. Nech je daný rôznostranný trojuholník *ABC* s veľkosťami strán *a*, *b*, *c* tak, že $a \neq b \neq c \neq a$ (pozri obrázok).

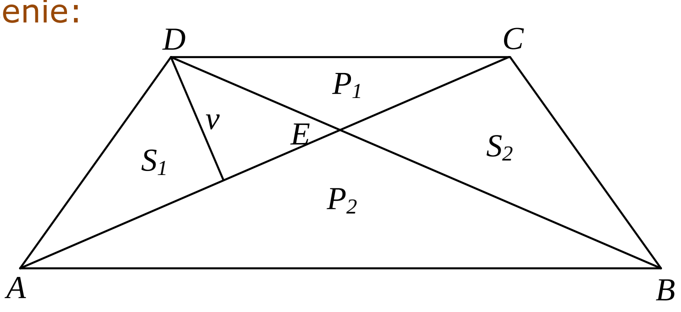


Ak majú vzniknúť dva trojuholníky, je nevyhnutné, aby deliaca čiara prechádzala niektorým vrcholom. Nech je to bod *C*. Označme priamku idúcu vrcholom *C* písmenom *p* a $(p \cap C) = P$.
Máme trojuholník *ABC* a trojuholník *PBC*. Označme $|AP| = c_a, |PB| = c_b, |PC| = m$. Ak sú tieto trojuholníky zhodné podľa vety o zhodnosti trojuholníkov (*sss*), musí platiť buď $(c_a = c_b \wedge a = b)$ alebo $(c_a = a \wedge c_b = b)$.
Prvý prípad nenastane, lebo $a \neq b$ podľa predpokladu úlohy. Teda by musela platiť druhá možnosť $(c_a = a \wedge c_b = b)$. Potom by platilo aj $c_a + c_b = a + b$, t. j. $c = a + b$, ale to nemôže nastať, lebo v každom trojuholníku je súčet dvoch strán väčší než tretia strana. Požadované rozdelenie trojuholníka *ABC* vedie k sporu. Rôznostranný trojuholník sa nedá rozdeliť na dva zhodné trojuholníky.

Lichobežník s uhlopriečkami

Úloha: Stanovte vzťah pre obsah lichobežníka *ABCD,* ak poznáte obsahy trojuholníkov $S_{\Delta DCE} = P_1, S_{\Delta ABE} = P_2$, *E* je priesečník uhlopriečok. Pozri nasledujúci obrázok.

Riešenie:



Obsahy S_1, S_2 trojuholníkov *AED* a *BEC* sú zhodné, pretože trojuholníky *ABD* a *ABC* majú rovnakú základňu a výšku, teda $P_2 + S_1 = P_2 + S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$. Trojuholníky *ABE* a *CED* sú podobné (podľa vety *uu;* využitím striedavých uhlov) s koeficientom podobnosti $\frac{P_2}{P_1} = k^2$ t. j. $k = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P_1}}$.

Trojuholníky *AED* a *ECD* majú spoločnú výšku *v* a tiež platí $|AE| = |EC| \cdot k$, tak

$P_1 = \frac{|EC| \cdot v}{2} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot P}{|EC|}$ $S_1 = \frac{|AE| \cdot v}{2} = \frac{|EC| \cdot k}{2} \cdot \frac{2 \cdot P_1}{|EC|} = k \cdot P_1 = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P_1}} \cdot P_1$. Obsah lichobežníka *ABCD* je:

$$P_1 + P_2 + 2S_1 = P_1 + P_2 + 2\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P_1}} \cdot P_1 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1}\sqrt{P_2} = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2.$$

Percentá sú zradné čísla pomerné

Úloha č. 1 (Presné percento)

V triede je menej než 50 detí. Chlapcov je presne 72 percent z počtu dievčat. Aký je presný počet detí v tejto triede?

Riešenie:

A. Ak si označíme počet chlapcov x a počet dievčat y, tak musí platiť $x + y < 50$ a zároveň $x = \frac{72}{100}y$. Aby $x = \frac{18}{25}y$ bolo celé kladné číslo (to má byť počet chlapcov), tak treba zvoliť y z množiny {25, 50, 75, ...} a potom x bude z množiny {18, 36, 54, ...}. Ak máme splniť požiadavku $x + y < 50$, to je možné len pre $x = 18$ a $y = 25$. V triede je 18 chlapcov a 25 dievčat, spolu 43 detí.

B. Označme si počet dievčat d. Potom počet chlapcov je $0{,}72 \cdot d$. Chlapcov a dievčat spolu je $1{,}72 \cdot d$. Podľa zadania úlohy má byť $1{,}72 \cdot d < 50$ a $d \in N$.

Ak si túto podmienku upravíme, dostaneme $d < \frac{50}{1{,}72}$, teda $d \in \{1, 2, 3, \dots, 29\}$.

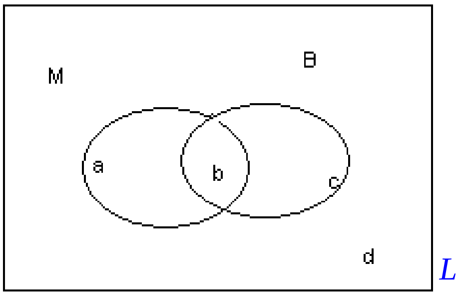
Vieme, že aj $0{,}72 \cdot d$ musí byť kladné celé číslo (je to počet chlapcov), to ale znamená, že $\frac{72 \cdot d}{100} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot d}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{18 \cdot d}{25}$ má byť celé kladné číslo. To splníme, ak zvolíme $d = 25 \cdot k$, kde $k \in N$.
Pretože hľadáme $d < 29$, vyhovuje iba $d = 25$. To znamená, že v triede je 25 dievčat, 18 chlapcov ($0{,}72 \cdot 25 = 18$). V triede je 43 detí.

Úloha č. 2 (Modrookí blonďáci):

Percento modrookých medzi blonďákmi je väčšie ako percento modrookých medzi všetkými ľuďmi sveta. Vyplýva z toho, že percento blonďákov medzi modrookými je väčšie ako percento blonďákov medzi všetkými ľuďmi sveta? Zdôvodnite.

Riešenie:

Využijeme množinovú schému ($a, b, c, d \in N$), kde $M = a + b$ je počet modrookých ľudí, $B = b + c$ je počet blonďákov, $L = a + b + c + d$ je počet všetkých ľudí. Potom zadanie úlohy znamená porovnanie zlomkov



$$\frac{b}{b+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d} \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot d > a \cdot c$$

$$\frac{b}{a+b} > \frac{b+c}{a+b+c+d} \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot d > a \cdot c$$

Áno, vyplýva to; príslušné nerovnice sú ekvivalentné.

Úloha č. 3 (Sušené huby):

Čerstvé huby obsahujú 88 % vody, sušené iba 14 % vody. Koľko kilogramov čerstvých húb treba nazbierať, aby sme získali 3 kg sušených ?

Riešenie:

Nech sa huby skladajú iba z vody a sušiny:
1 kg čerstvých húb obsahuje 0,12 kg sušiny; 0,88 kg je tam vody.
1 kg sušených húb obsahuje 0,86 kg sušiny; 0,14 kg je tam vody.
3 kg sušených húb obsahuje 2,58 kg sušiny.
Aby sme mali 2,58 kg sušiny potrebujeme 2,58 : 0,12 = 21,5 kg čerstvých húb.

Úloha č. 4 (Úspora energie):

Boli zverejnené tri rôzne, od seba nezávislé, vynálezy, ktoré zabezpečovali úsporu 20 %, 35 % a 25 % energie. Niektorí „tiež odborníci" z toho usúdili, že pri súčasnom použití týchto troch vynálezov bude celková úspora 20 + 35 + 25 = 80 % energie. Je to naozaj tak? O koľko percent poklesne spotreba energie pri súčasnom uplatnení spomínaných troch vynálezov?

Riešenie:

A. Nech je pôvodná spotreba energie 100 energetických jednotiek (*ej*). Po uplatnení vynálezu s 20 % úsporou bude spotreba 80 *ej*. Po uplatnení vynálezu s 35 % úsporou bude spotreba 80 - 0,35·80 = 80 - 28 = 52 *ej*. Ak uplatníme aj tretí vynález (25 % úspora energie) bude spotreba 52 - 0,25·52 = 52 - 13 = 39 *ej*.
Ušetrí sa 100 - 39 = 61 *ej*. To znamená, že spotreba poklesne o 61 %.

B. Prvý vynález má spotrebu 0,8 pôvodnej spotreby energie, druhý 0,65 z tej zmenšenej a tretí 0,75 z tej už dvakrát zmenšenej. Pretože vynálezy sa uplatnia naraz a sú nezávislé, tak celková spotreba je 0,8 · 0,65 · 0,75 = 0,39 pôvodnej spotreby energie. To znamená, že úspora je 61 %.

Úloha č. 5 (Pomerné zmeny v percentách):

Stanovte, ako sa zmenil počet dievčat, ak sa počet všetkých žiakov v triede znížil o 10 %, ale počet dievčat vzrástol pritom z 50 % na 55 % .

Riešenie:

Chlapci i dievčatá sú žiaci. Pôvodný počet žiakov bol x. Po znížení o 10 % ich bolo $(0{,}9 \cdot x)$;
pôvodný počet dievčat bol $(0{,}5 \cdot x)$ a po zmene bol počet dievčat $(0{,}55 \cdot 0{,}9 \cdot x) = 0{,}495 \cdot x$;
pretože pôvodný počet dievčat bol $0{,}5 \cdot x$, určíme zmenu počtu dievčat percentuálne:
100 % .... $0{,}5 \cdot x$
1 % .... $0{,}005 \cdot x$

Zmenený počet $(0{,}495 \cdot x)$ je z pôvodného počtu $(0{,}5 \cdot x)$ presne 99 %, lebo $\dfrac{0{,}495 \cdot x}{0{,}005 \cdot x} = 99$.

Dievčat zostalo 99 % z pôvodného počtu, teda počet dievčat sa znížil o 1 % .
Očakávali ste, že sa počet dievčat znížil? Výpočet vás presvedčil?

Úloha č. 6 (Zradné percento):

Akú časť zmiešaného lesa chcú lesníci vyrúbať, ak ich vedúci nevinne vyhlásil: *Budeme rúbať iba sosny, ktorých je v našom zmiešanom lese 99 %. Po výrube budú sosny tvoriť 98 % všetkých ponechaných stromov.*

Riešenie:

Označme počet všetkých stromov pred výrubom x. Počet sosien je teda $0{,}99 \cdot x$ a počet všetkých ostatných stromov je $0{,}01 \cdot x$; po výrube m stromov (sosien) bude počet sosien $0{,}98 \cdot (x - m)$ a počet ostatných $0{,}02 \cdot (x - m)$. Chceme poznať pomer m/x. Pretože sa majú vytínať iba sosny, počet iných stromov sa nezmení:
$0{,}01 \cdot x = 0{,}02 \cdot (x - m)$, teda $0{,}02 \cdot m = 0{,}01 \cdot x$ a to znamená,
že pomer $m/x = (0{,}01/0{,}02) = 1/2$. **Lesníci chcú vyrúbať polovicu lesa!**

Rozložte číslo (2^{18} – 1) na súčin prvočísiel.

$(2^{18} - 1) = (2^9 + 1)\cdot(2^9 - 1) = 513 \cdot 511 = 3\cdot3\cdot3\cdot19 \cdot 7\cdot73 = 3^3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 73$

Stanovte počet kladných celočíselných deliteľov čísla 9! (deväť faktoriál).

$9! = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2\cdot3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

Počet kladných celočíselných deliteľov je $8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 =$ **160**.

Stanovte najmenšie aj najväčšie päťciferné prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom 36, doplnením číslic *p*, *q*, v čísle 67*p*3*q*.

Aby spomínané päťciferné číslo bolo deliteľné číslom 36 musí byť deliteľné číslami 4 aj 9. Aby bolo deliteľné číslom 4 musí byť jeho posledné dvojčíslo deliteľné číslom 4. Teda q môže byť buď 3 alebo 6 (len dvojčísla 32 a 36 sú deliteľné štyrmi). Zároveň musí byť ciferný súčet spomínaného čísla deliteľný 9. Tento ciferný súčet musí byť násobkom čísla 9, teda $6 + 7 + p + 3 + q = 16 + p + q = k \cdot 9$, teda iba 18 alebo 27 (súčet $p + q$ môže byť najviac 18; p, q sú cifry od 0 do 9). To znamená, že $p + q$ môže byť iba 2 alebo 11. Ak $q = 2$, tak $p = 0$ alebo $p = 9$; ak $q = 6$, tak $p = 5$. Do úvahy pripadajú čísla 67 032, 67 932, 67 536. Hľadané najmenšie číslo s požadovanými vlastnosťami je **67 032** a najväčšie je **67 932**.

Nájdite všetky trojciferné prirodzené čísla, ktoré po vydelení číslom 15 majú zvyšok 12 a po vydelení číslom 11 zvyšok 9.

Hľadané čísla X musia vyhovovať podmienkam:
(1) $X = 15\cdot k + 12$ (2) $X = 11\cdot t + 9$ (3) $100 \le X \le 999$
Ak by sme začali vypisovať postupne X pre k a t od 0, 1, ... uvidíme, že prvým číslom, ktoré vyhovuje prvým dvom podmienkam je číslo 42. Pretože najmenší spoločný násobok čísel 11 a 15 je 165, tak podmienkam úlohy vyhovujú čísla $X = 42 + 165\cdot m$. Aby bola splnená tretia podmienka treba nájsť prirodzené čísla m, ktoré vyhovujú vzťahu $100 \le 42 + 165\cdot m \le 999$. Tejto nerovnici vyhovujú $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, teda hľadanými číslami sú **207**, **372**, **537**, **702** a **867**.

Nájdite najväčšie štvorciferné prirodzené číslo s ciferným súčinom 420.

Rozložením čísla 420 na súčin prvočísiel vidíme: $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Teda najväčšie číslo s požadovanou vlastnosťou je **7652**.

Nájdite najmenšie päťciferné prirodzené číslo, s ciferným súčinom 1080.

Rozložením čísla 1080 na súčin prvočísiel vidíme: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$. Teda najmenšie číslo s požadovanou vlastnosťou je **13589**.

Predstava o deliteľnosti

Úloha:

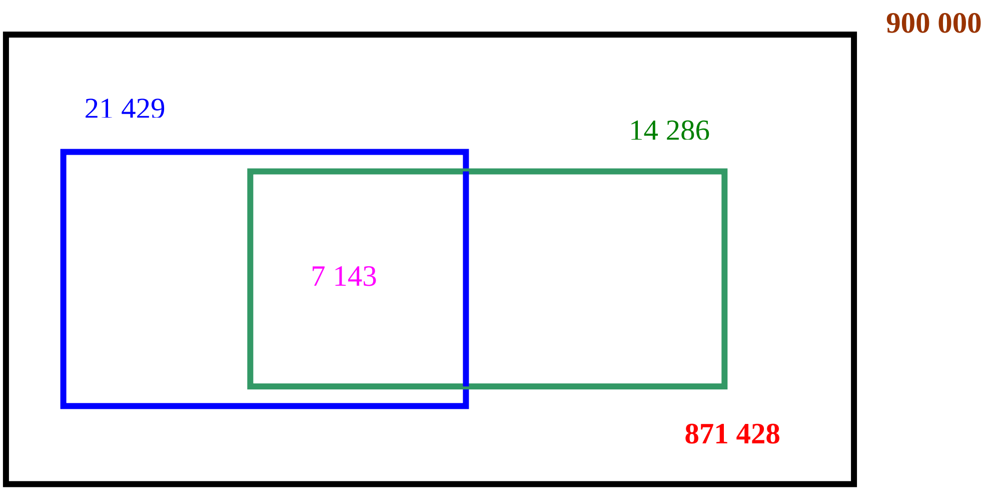
Stanovte počet šesťciferných prirodzených čísiel, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísiel 42, 63.

Riešenie:

Pre čísla od 1 do 999 999 platí:
počet čísiel deliteľných 42 (999 999 : 42 = 23 809,5) je **23 809**;
počet čísiel deliteľných 63 (999 999 : 63 = 15 873) je **15 873**;
počet čísiel deliteľných oboma číslami 42 i 63 (t.j. ich najmenším spoločným násobkom 126) je (999 999 : 126 = 7 936,5) **7 936**.

Pre čísla od 1 do 99 999 (teda najviac päťciferné) platí:
počet čísiel deliteľných 42 (99 999 : 42 = 2380,92...) je **2 380**;
počet čísiel deliteľných 63 (99 999 : 63 = 1587,28...) je **1 587**;
počet čísiel deliteľných oboma číslami 42 i 63 (99 999 : 126 = 793,64...) je **793**.

Pre čísla od 100 000 až po 999 999 (teda práve šesťciferných), ktorých je **900 000**, platí:
počet čísiel deliteľných 42 je 23 809 – 2 803 = **21 429**;
počet čísiel deliteľných 63 je 15 873 – 1 587 = **14 286**;
počet čísiel deliteľných 42 i 63 je 7 936 – 793 = **7 143** (tie sú vlastne počítané dvakrát, aj medzi deliteľné 42 aj medzi deliteľné 63; pozri obr.; deliteľné 42 sú modré, deliteľné 63 sú zelené).



Z uvedenej predstavy vyplýva, že počet tých prirodzených šesťciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísiel 42, 63 je **900 000** – 21 429 – 14 286 + 7 143 = **871 428**.

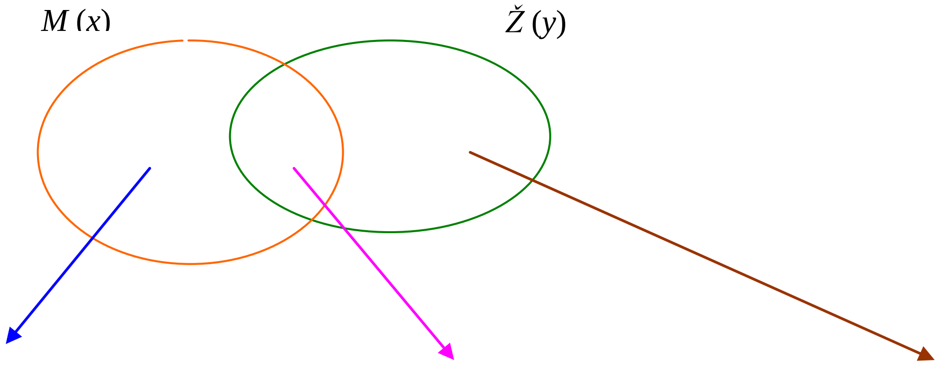
Slobodní obyvatelia mesta

Úloha:

V našom meste sú 3/5 žien vydatých za 2/3 mužov. Stanovte, aká časť obyvateľstva je slobodná (nežije v manželstve).

Riešenie:

A. Označme si počty mužov a žien písmenami *x*, *y*, a vyznačme si diagramom situáciu:



$1/3 \cdot x$
počet slobodných mužov

$2/3 \cdot x = 3/5 \cdot y$
počet vydatých (ženatých)

$2/5 \cdot y$
počet slobodných žien

Nech m je celkový počet mešťanov, sú to buď muži alebo ženy: $m = x + y$.

Pretože $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot y$, tak $10 \cdot x = 9 \cdot y$, teda $x = \frac{9}{10} y$ alebo $y = \frac{10}{9} x$.

Môžeme vyjadriť $m = \frac{9}{10} \cdot y + y \Rightarrow y = \frac{10}{19} \cdot m$, alebo $m = x + \frac{10}{9} \cdot x \Rightarrow x = \frac{9}{19} \cdot m$.

Potom slobodných je $\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot y = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{19} \cdot m + \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{19} \cdot m = \frac{7}{19} \cdot m$

Počet slobodných mužov je 3/19, počet slobodných žien 4/19, počet vydatých žien 6/19 a počet ženatých mužov je tiež 6/19 z celkového počtu obyvateľov mesta.

Počet slobodných je 7/19 z celkového počtu obyvateľov mesta.

B. Platí $2/3 \cdot x = 3/5 \cdot y$ (počet oddaných párov), teda aj $10x = 9y$ a tiež $y = (10/9) \cdot x$.

Nás zaujíma pomer slobodných k počtu všetkých, teda

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot y}{x + y}$$

a to po dosadení za $y = (10/9) \cdot x$ bude 7/19.

C. Možno uvažovať aj takto: 3/5 znamená aj 6 z 10 a 2/3 znamená aj 6 z 9.

Napríklad z 19 (= 10 + 9) osôb žije v manželstve 6 + 6, teda 12/19. Slobodných teda zostáva 7/19.

Využitie zásuvkového (Dirichletovho) princípu

Pomerne známy je **Dirichletov (zásuvkový) princíp**:

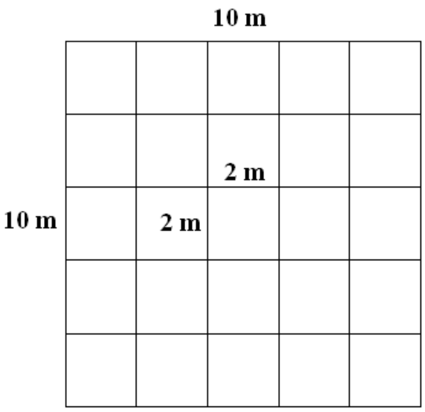
Ak je viac než n predmetov rozdelených do n skupín (zásuviek), tak existuje aspoň jedna skupina (zásuvka), v ktorej sa nachádzajú aspoň dva predmety.

Dokážme túto skutočnosť:
Nech po rozdelení je k_i počet predmetov v i – tej skupine (zásuvke) [$i = 1, 2, 3, ... n$]. Keby v každej skupine bol najviac jeden predmet, teda k_i by bolo vždy menšie alebo rovné 1, tak potom by všetkých predmetov spolu bolo $k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n \leq n$, ale to je spor, lebo predmetov na rozdelenie je viac než n, teda v niektorej skupine (zásuvke) musí byť viac než jeden predmet, teda aspoň dva.

Úloha:

Dokážte, že ak v miestnosti s rozmermi 10 x 10 metrov je 27 osôb, potom aspoň dve osoby sú od seba vzdialené menej ako 3 metre.

Riešenie:



Rozdeľme miestnosť s rozmermi 10 x 10 metrov na štvorce so stranou dĺžky 2 metre. Týchto štvorcov je 25. Pretože osôb je 27 (teda viac než 25), musia sa *aspoň dve osoby* nachádzať v (niektorom) jednom štvorci (ak by osôb bolo 25, mohli by byť rozmiestnené tak, že v každom štvorci je práve jedna osoba) a teda ich vzdialenosť je menšia alebo sa rovná dĺžke uhlopriečky štvorca so stranou 2 metre. Podľa Pytagorovej vety pre veľkosť $\boldsymbol{u}$ uhlopriečky štvorca so stranou 2 m platí $\boldsymbol{u}^2 = \sqrt{8} = 2{,}83...$ metra a to je menej ako 3 metre. Teda, ak v miestnosti so spomínanými rozmermi je prítomných 27 osôb, tak tam skutočne musia existovať aspoň dve osoby (aj keď ich nevieme jednotlivo určiť), ktoré sú od seba vzdialené menej ako 3 metre.

Úloha:

Dokážte, že medzi piatimi rôznymi ľubovoľnými prirodzenými číslami sú vždy aspoň dve také, že ich rozdiel je deliteľný štyrmi.

Riešenie:

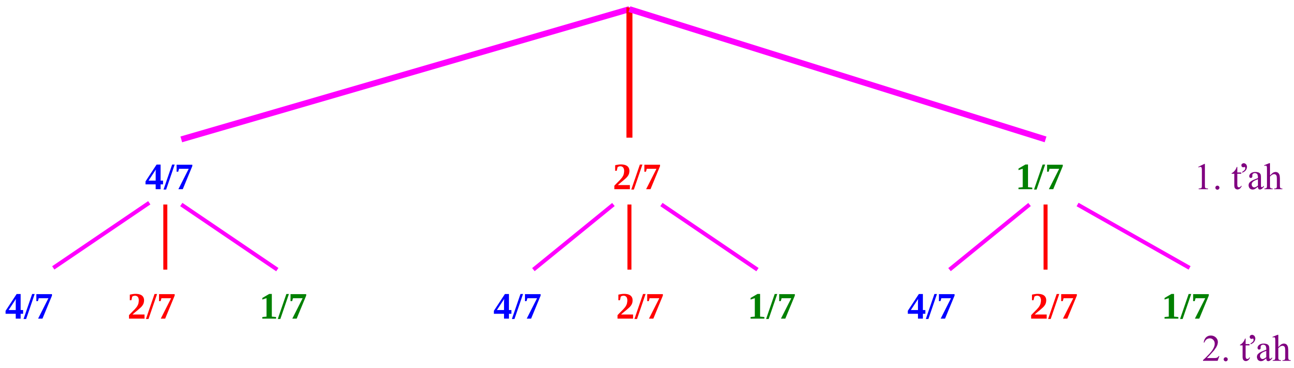
Zvyšky po delení číslom 4 sú len: 0,1,2,3.
Z piatich čísel aspoň dve musia mať rovnaký zvyšok. Ak takéto čísla odčítame, z rozdielu zvyškov zostane nula a to znamená, že rozdiel čísel je deliteľný štyrmi.

Výber farebných guliek

Do nepriehľadného vrecúška sme vložili štyri modré, dve červené a jednu zelenú guľku. Náhodne vyberieme jednu guľku, zaznačíme si jej farbu a vložíme naspäť. Znovu vyberieme náhodne ďalšiu guľku a zaznačíme si jej farbu. Stanovte pravdepodobnosť, že pri týchto dvoch výberoch nevytiahneme červenú guľku.

Riešenie:

A: Ak využijeme „strom logických možností" a vyčíslime pravdepodobnosti výberu jednotlivých farieb:



Pravdepodobnosť, že nevytiahneme ani v jednom ťahu červenú guľku bude
4/7 · 4/7 + 4/7 · 1/7 + 1/7 · 4/7 + 1/7 · 1/7 = 16/49 + 4/49 + 4/49 + 1/49 = **25/49**.
Pravdepodobnosť, že vytiahneme aspoň jednu červenú guľku je 24/49.

B: Pravdepodobnosť, že nevytiahneme červenú guľku v prvom ťahu je 5/7.
Pravdepodobnosť, že nevytiahneme červenú guľku v druhom ťahu je tiež 5/7.
Oba ťahy sú nezávislé, tak pravdepodobnosť, že nevytiahneme červenú guľku v prvom a zároveň ani v druhom ťahu je (5/7)· (5/7) = **25/49**.

Správne riedenie v požadovanom pomere

Sirup je potrebné riediť v pomere 2 : 9. Predtým ho niekto rozriedil v pomere 3 : 5. Stanovte, v akom pomere teraz treba doriediť ten predpripravený koncentrát, aby to bolo tak, ako to má byť.

Riešenie:

A. V tom predpripravenom koncentráte sú tri diely sirupu a päť dielov vody.
Pre pomer 2 : 9 potrebujeme buď dva diely sirupu a 9 dielov vody alebo 4 diely sirupu a 18 dielov vody alebo 6 dielov sirupu a 27 dielov vody atď. Hľadané počty dielov by mali byť násobkami čísla 8 (3 + 5). Vhodné je napr. 48 dielov sirupu a 216 dielov vody. Ak zoberieme 16 porcií predpripraveného koncentrátu (porcia - určitý dohodnutý objem; rozlišujeme tam 8 dielov, 3 diely sirupu a 5 dielov vody), budeme tam mať 48 dielov sirupu a 80 dielov vody. Ak potom k tomu pridáme **17** porcií vody (to je 136 dielov vody), budeme mať to, čo potrebujeme (48 dielov sirupu a 216 dielov vody) a to je pomer sirupu k vode 48 : 216, ale to je aj potrebný pomer 2 : 9.
To ale znamená, že sme riedili v pomere 16 porcií predpripraveného koncetrátu a 17 porcií vody.
Hľadaný pomer riedenia je 16 : 17.

B. Požadovaný pomer je aj 3 : 13,5. Stačí teda do predpripraveného koncetrátu priliať 8,5 dielov vody. To ale znamená, že požadovaný pomer doriedenia je 8 : 8,5; teda aj 16 : 17.

Úloha Sophie Germainovej

Rozložte výraz $x^4 + 4$ ***na súčin činiteľov nižšieho stupňa.***

Urobíme to doplnením na rozdiel druhých mocnín

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 =$$

$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x) \cdot (x^2 + 2 - 2x) =$$

$$= (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$$

Čo je na tom pozoruhodné alebo podnetné?
Uvedený postup umožnil S. Germainovej (1776–1831) vyriešiť úlohu:
Dokážte, že každé prirodzené číslo tvaru $a^4 + 4$ je pre prirodzené $a > 1$ zloženým číslom.

Francúzska matematička Sophia Germainová sa narodila 1. apríla 1776 v Paríži. Pád Bastily v roku 1789 ovplyvnil jej rozhodnutie vážne študovať matematiku. Čudujete sa nad touto súvislosťou? Mladá *Sophia* v tom čase nevychádzala do ulíc, ale usilovne študovala v otcovej knižnici. Najviac ju zaujali matematické knižky, história matematiky a fyziky jej učarovali. Obdivovala Archimedov spôsob obrany Syrakúz, jeho poznatky a ich uplatnenie. Samostatne preštudovala mnohé partie vtedajšej matematiky. Rodičia tým neboli nadšení, pretože ženy v tom období nesmeli študovať na vysokých školách. Sophia sa vynašla. Pod pseudonymom *Monsieur Le Blanc* riešila písomné úlohy Polytechnického inštitútu v Paríži. Neskôr si dopisovala o matematickej analýze s *Lagrangeom* a o aritmetických problémoch s *Gaussom*. V rokoch 1811 až 1815 pracovala na vyjadrení kmitavého pohybu pružných doštičiek matematickými vzťahmi. V roku 1815 získala za tieto práce cenu Institutu de France.

V teórii čísel dokázala S. Germainová tzv. veľkú Fermatovu hypotézu, pre niektoré čísla menšie ako sto. *Gauss* ocenil jej matematické práce návrhom na čestnú akademickú hodnosť univerzity v Göttingene. Sophie Germainová vynikala aj v chémii, fyzike, geografii, histórii a filozofii. Svoje hlboké myšlienky vyjadrovala elegantne, čím naznačila cestu ku krásam matematiky aj pre ďalšie ženy. Zomrela (27. 6. 1831), ale skromná spomienka na ňu žije naďalej.

TOMBOLA

Úloha:

V tombole je 100 žrebov a 10 výhier. Máme dva žreby. Aká je pravdepodobnosť, že výhra pripadne ***aspoň na jeden*** náš žreb?

Riešenie:

A.

Možností vybrať 10 žrebov zo sto je $C_{10}(100)$. Ak nebude medzi nimi žiadny náš žreb, takých možností je $C_8(98)$. Pravdepodobnosť, že žiadny náš žreb nevyhrá je

$$\frac{C_{10}(98)}{C_{10}(100)} = \frac{\dfrac{98\cdot 97\cdot\ldots\cdot 91\cdot 90\cdot 89}{10!}}{\dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 91}{10!}} = \frac{90\cdot 89}{100\cdot 99} = \frac{89}{110}.$$

Pravdepodobnosť, že aspoň jeden náš žreb vyhrá je $1-\dfrac{89}{110}=\dfrac{21}{110}\approx 0{,}1909$.

B.

Stanovme všetky možnosti výberu dvoch žrebov zo sto, aj všetky priaznivé možnosti výberu. Potom $P=\dfrac{C_2(10)+C_1(10)\cdot C_1(90)}{C_2(100)}=\dfrac{945}{4950}=\dfrac{21}{110}\approx 0{,}1909$.

C.

Stanovme, pravdepodobnosť, že žiadny náš žreb nevyhrá: $P_n=\dfrac{C_2(90)}{C_2(100)}=\dfrac{89}{110}$.

Teda $P = 1 - P_n = 1-\dfrac{89}{110}=\dfrac{21}{110}\approx 0{,}1909$.

D. (pozor, hrozí možnosť nesprávneho postupu)

Zdá sa, že pravdepodobnosť výhry na každý žreb je 0,1. Potom by pravdepodobnosť pre priaznivú možnosť (prvý žreb vyhrá – druhý nevyhrá, prvý nevyhrá – druhý vyhrá, oba vyhrajú) bola $P = 0{,}1\cdot 0{,}9 + 0{,}9\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}1 = 0{,}19$. Ale to je iný výsledok ako 0,1909. Musíme si uvedomiť, že pri postupnom výbere žreby nemajú rovnakú pravdepodobnosť výhry, sú to podmienené javy:

prvý má pravdepodobnosť výhry 0,1; ale druhý už $\dfrac{9}{99}=0{,}0909\ldots$

a podobne pre pravdepodobnosť nevýhry.

Potom správne určenie hľadanej pravdepodobnosti je

$$P=\frac{1}{10}\cdot\frac{90}{99}+\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{99}+\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{99}=\frac{189}{990}=\frac{21}{110}\approx 0{,}1909$$

alebo $P = 1-\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{89}{99}=\dfrac{189}{990}=\dfrac{21}{110}\approx 0{,}1909$.

Študenti a učitelia

Úloha: Koľko je možností pridelenia štyroch študentov na preskúšanie trom učiteľom, ak požadujeme:
a) aby každý študent bol preskúšaný ***aspoň jedným*** učiteľom;
b) aby každý študent bol preskúšaný ***práve jedným*** učiteľom;
c) aby každý učiteľ preskúšal ***aspoň jedného*** študenta;
d) aby každý učiteľ preskúšal ***práve jedného*** študenta.

Riešenie:

Označme si študentov A, B, C, D a učiteľov P, Q, R. Potom

a) študenta A môže preskúšať P, Q, R, PQ, PR, QR, PQR, teda to je 7 možností; pre študenta B je to tiež týchto 7 možností, podobne aj pre C i D. Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé, tak všetkých možností spolu je $7^4 = 2401$.

b) naznačme jednotlivé možnosti pre každého študenta do tabuľky:

A	**B**	**C**	**D**
P	P	Q	R
R	R	R	R
Q	R	P	P
.			
.			

v jednotlivých riadkoch sú variácie štvrtej triedy (štyria študenti) z troch prvkov (traja učitelia) s opakovaním. Ich počet je $V_4'(3) = 3^4 = 81$.

c) učiteľ P môže preskúšať A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD, teda 15 možností. Podobne 15 možnosti je pre Q aj pre R. Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé a tak spolu je možnosti $15^3 = 3375$.

d) rozpíšme jednotlivé možnosti pre každého učiteľa do tabuľky:

P	**Q**	**R**
A	A	A
A	B	B
B	B	A
B	C	D
D	C	B
D	D	D
.		
.		

to sú variácie tretej triedy (traja učitelia) zo štyroch prvkov (štyria študenti) s opakovaním a ich počet je $V_3'(4) = 4^3 = 64$.

J. J. Sylvester ponúkol úlohu

Zadanie:

*Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami **5** a **17** sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je **najväčšia** hodnota, ktorá **sa nedá** vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?*

Riešenie:

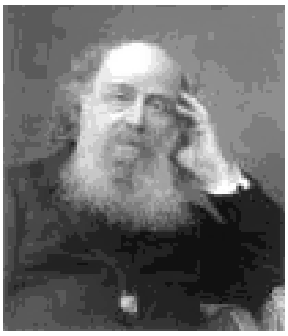
Generujme systematickú tabuľku hodnôt, ktoré dostávame postupným sčítavaním jednotlivých hodnôt:

	5	10	15	20	25	...
17	22	27	32	37	42	...
34	39	44	49	54	59	...
51	56	61	66	71	76	...
68	73	78	83	88	93	...

Vidíme, že vieme vytvoriť číselné hodnoty
na konci s číslicou 0 pre čísla ≥ 10;
na konci s číslicou 5 pre čísla ≥ 5;
na konci s číslicou 7 pre čísla ≥ 17;
na konci s číslicou 2 pre čísla ≥ 22;
na konci s číslicou 4 pre čísla ≥ 34;
na konci s číslicou 9 pre čísla ≥ 39;
na konci s číslicou 1 pre čísla ≥ 51;
na konci s číslicou 6 pre čísla ≥ 56;
na konci s číslicou 8 pre čísla ≥ 68;
na konci s číslicou 3 pre čísla ≥ 73;

teda **najväčšou hodnotou**, ktorá sa nedá z daných hodnôt vytvoriť je **63**.

Osudy žitia



V londýnskej židovskej rodine sa 3. 9. 1814 narodil James Joseph Sylvester. Po vychodení základnej školy navštevoval strednú školu v Liverpoole. V rokoch 1831–1837 študoval na St. John´s College v Cambridgi. Potom učil fyziku na univerzite v Londýne. *Objekt čistej fyziky je sledovanie zákonov sveta, objekt čistej matematiky je sledovanie ľudskej inteligencie*. V roku 1841 pôsobil polrok na univerzite vo Virginii (USA). Po návrate do Anglicka študoval právo a pracoval ako matematický štatistik v poisťovacej spoločnosti. Na súdnom dvore v Londýne sa zoznámil s A. Cayleym (1821–1895) a spolupracovali na rozvoji teórie matíc. Do profesionálnej matematiky sa Sylvester vrátil ako profesor na Kráľovskej vojenskej akadémii vo Woolwichi (1854–1870). V rokoch 1877–1883 pôsobil na univerzite J. Hopkinsa v Baltimore (USA). Keď sa vrátil z Ameriky učil v Oxforde na katedre geometrie. Bol úspešným tvorcom matematických termínov (napr. *invariant*, *kovariant* a pod.), zaviedol pojem matice, využíval teóriu matíc na štúdium viacrozmernej geometrie, študoval kanonické tvary kvadratických foriem. Prispel k rozvoju modernej matematiky v Amerike (r. 1878 založil prvý americký matematický časopis). V roku 1892 sa vrátil (s poruchami zraku i pamäti) do Londýna, kde 15. 3. 1897 zomrel.

Stendhalov údiv

Henri Beyle (1783–1842), známy francúzsky románopisec (napr. *Červený a čierny*, *Väznica parmská*) pod známym pseudonymom Stendhal, vyjadril vo svojej *Autobiografii* študentský zážitok nad jednou úlohou z *Úvodu do algebry*, ktorý napísal Leonhard Euler (1707–1783). Svoje prekvapenie nad tým, že aj z čudného zadania možno úlohu vyriešiť, komentoval Stendhal slovami: *Pochopil som, čo znamená používať nástroj, ktorý sa volá algebra. Prečo mi, do čerta, nikto o tom nič nepovedal.* Sám uznával, že *logika je umenie ako sa nezmýliť na ceste, keď ideme za cieľom, ktorý chceme dosiahnuť.*

Spomínaná úloha mala zadanie:

Dve gazdiné priniesli predať na trh spolu 100 vajec, jedna viac ako druhá. Obe však utŕžili za všetky svoje predané vajcia rovnaký peňažný obnos. Keby bola prvá gazdiná mala na predaj taký počet vajec ako druhá, utŕžila by 45 grajciarov. Ak by mala druhá gazdiná na predaj taký počet vajec ako prvá, dostala by za ne 20 grajciarov. Aký počet vajec priniesla na trh každá z gazdiniek?

Riešenie:

Pýtate sa, či gazdinky predávali vajcia za rovnakú cenu za kus? Zatiaľ si označme počet predaných vajec prvej gazdinej písmenom x a počet druhej y. Nech je cena za jedno vajce od prvej označená p a od druhej q. Potom podľa zadania musí byť zároveň splnené:

$x + y = 100$ (1) $\quad x \cdot p = y \cdot q$ (2) $\quad y \cdot p = 45$ (3) $\quad x \cdot q = 20$ (4)

Ak vyjadríme z (2) pomer $\frac{x}{y} = \frac{q}{p}$, tak po dosadení z (3) za p a z (4) za q, dostaneme

$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, teda $x = \frac{2}{3}y$. Po dosadení tohto x do (1) dostaneme, že $y = 60$ a potom $x = 40$.

Druhá gazdiná priniesla na trh 60 kusov a prvá 40 kusov vajec.

Podnetný je aj tento postup riešenia:

Pretože gazdinky utŕžili za rozdielny počet vajec pri rozdielnych cenách rovnaký finančný obnos, tak tá, ktorá mala k krát viac vajec, musela predávať k krát lacnejšie. Keby mali pred začiatkom predaja vymenený počet vajec, tak by tá, ktorá mala k krát väčší počet, predávala aj k krát drahšie, teda by získala k^2 krát viac peňazí.
To znamená, že $k^2 = 45/20 = 9/4$, teda $k = 3/2$. Ak rozdelíme celkový počet vajec (100) v pomere 3 : 2, tak dostaneme počty 60 a 40.

Aj spomínaná príhoda o údive nad úlohou z učebnice matematiky charakterizuje Stendhalove slová: *Moja láska k matematike možno pramenila z mojej nenávisti k pretvárke. Zdalo sa mi, že v matematike nie je pretvárka možná.* Už sa možno nečudujete nad údivom Stendhala, ktorý vo svojom živote spoznal: *Osamelosť človeka nie je vždy v tom, že je sám... V samote možno získať všetko, okrem charakteru.*

Rozhovor dvoch matematikov

Úloha:

Dvaja matematici (***A***; ***B***) sa takto zhovárali:

A: *Súčin veku mojich troch synov je 36.*

B: *Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich.*

A: *Súčet veku mojich synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.*

B: *Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.*

***A*:** *Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.*

B: *Ďakujem, to stačí, už poznám vek tvojich synov.*

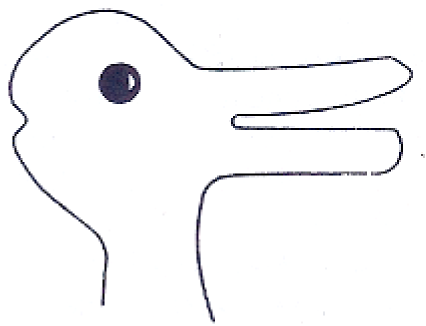
Koľko rokov má každý zo spomínaných synov?
Koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

Riešenie:

Vek synov je celočíselný. Rozložme číslo 36 na súčin troch kladných celých čísiel a zapíšme do tohto riadku hneď aj súčet ich veku:

$1 \cdot 1 \cdot 36$	*38*
$1 \cdot 2 \cdot 18$	*21*
$1 \cdot 3 \cdot 12$	***16***
$1 \cdot 4 \cdot 9$	***14***
$1 \cdot 6 \cdot 6$	***13***
$2 \cdot 2 \cdot 9$	***13***
$2 \cdot 3 \cdot 6$	***11***
$3 \cdot 3 \cdot 4$	***10***

Teraz jasne vidíme, prečo ***B*** nemohol po druhej odpovedi určiť vek synov – na budove bolo 13 okien. To znamená, že sú dve možnosti pre vek synov: buď 1, 6, 6 alebo 2, 2, 9. Matematik ***A*** v poslednej odpovedi (***najstarší*** z mojich synov) naznačil, že ***najstarší*** jeho syn ***nie je z dvojičiek*** (mali by rovnaký vek). Teda synovia majú vek **dva, dva** a **deväť** rokov.



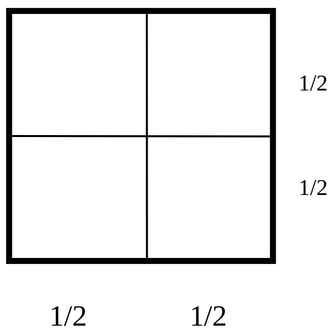
Rozdelenie štvorca na štvorce

Úloha:

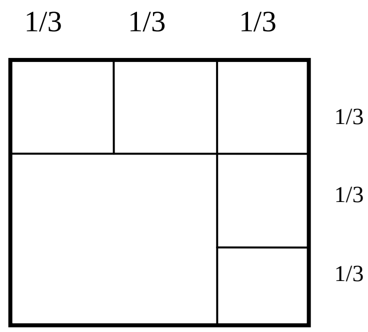
Ukážte, že každý štvorec sa dá rozdeliť na n ($n \geq 6$) menších štvorcov.

Riešenie:

Nie je problém rozdeliť štvorec na štyri menšie štvorce (pozri obr. 1).
Vieme rozdeliť štvorec na šesť menších štvorcov (pozri obr. 2).

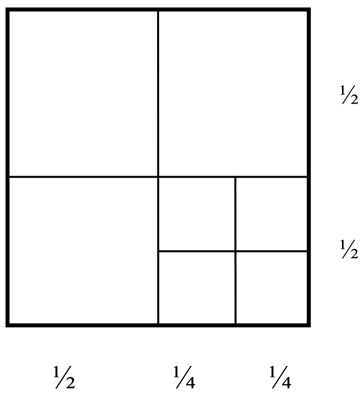


obr. 1

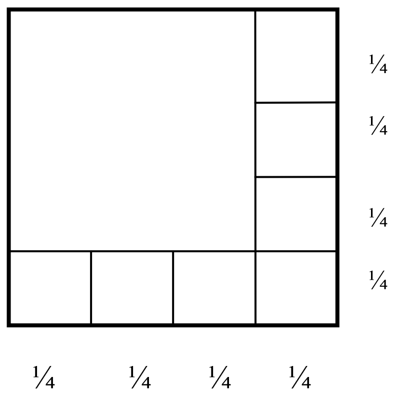


obr. 2

Vieme rozdeliť štvorec na sedem menších štvorcov (pozri obr. 3).
Vieme rozdeliť štvorec aj na osem menších štvorcov (pozri obr. 4).



obr. 3



obr. 4

To znamená, že vieme rozdeliť daný štvorec aj na 9 menších štvorcov, lebo jeden zo šiestich štvorcov (na obr. 2) rozdelíme na 4, teda spolu ich bude $5 + 4 = 9$. Podobne sa to dá urobiť aj pre pre $n = 10 = 7 + 3 = 6 + 4$ (na obr. 3),
i pre $n = 11 = 8 + 3 = 7 + 4$.

Pre ďalšie n je konštrukcia zrejmá (opakuje sa postup rozdelením jedného malého štvorca na štyri ešte menšie a tak k doterajšiemu počtu rozdelených pridáme tri).
Ak teda vieme rozdeliť štvorec na počet n pre tri za sebou idúce n a vždy aj na počet $n + 3$, tak vieme rozdeliť štvorec na n menších štvorcov pre všetky $n \geq 6$.

Možnosti pre milión

Úloha:

Stanovte počet usporiadaných trojíc prirodzených čísel *x, y, z,* ktoré vyhovujú vzťahu $x \cdot y \cdot z = 10^6$.

Riešenie:

10^6 môžeme rozložiť na súčin prvočísiel: $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$.

Hľadaný rozklad $x \cdot y \cdot z = 10^6$ môžeme „vidieť“ takto:

$$(2^a \cdot 5^p) \cdot (2^b \cdot 5^q) \cdot (2^c \cdot 5^r) = 2^6 \cdot 5^6$$

t.j. $x = 2^a \cdot 5^p$, $y = 2^b \cdot 5^q$, $z = 2^c \cdot 5^r$, potom treba aby $a + b + c = 6$

a tiež $p + q + r = 6$, kde a, b, c, p, q, r sú nezáporné celé čísla.

Koľko je možností pre $a + b + c = 6$, ak $a, b, c \in \{0, 1 ....6\}$?

0	0	6	**3**	
0	1	5	**6**	
0	2	4	**6**	
0	3	3	**3**	**28**
1	2	3	**6**	
1	1	4	**3**	
2	2	2	**1**	

Ak si to systematicky rozpíšeme, dostaneme 28 možností

(alebo kombinatoricky pri predstave: 1 1△1 1△1 1 je to $C_2(8) = P'_{2,6}(8) = 28$).

Taký istý počet je aj pre $p + q + r = 6$.

Pretože ku každej trojici $[a, b, c]$ existuje iný výber $[p, q, r]$,

tak počet všetkých možností pre x, y, z sa rovná $28 \cdot 28 = 784$.

Usporiadaných trojíc prirodzených čísel *x, y, z,* ktoré vyhovujú vzťahu $x \cdot y \cdot z = 10^6$ je 784.

MIERNE RAFINOVANÉ SLOVNÉ ÚLOHY

Číslicová ekvilibristika

Úloha:
Ak vezmem polovicu súčtu všetkých šesť dvojciferných čísel, ktoré možno z číslic môjho čísla zostaviť (bez opakovania), dostanem znovu moje číslo. Ktoré je to číslo?

Riešenie:
Z koľkých prvkov sa dá urobiť šesť variácií druhej triedy bez opakovania?

$V_2(n) = 6$, teda $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$ t.j. $n = 3$. Číslo je teda trojciferné $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, polovica súčtu všetkých dvojciferných čísel z týchto číslic je:

$$\frac{1}{2}(10 \cdot a + b + 10 \cdot b + c + 10 \cdot c + a + 10 \cdot b + a + 10 \cdot c + b + 10 \cdot a + c) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$$

$$22 \cdot a + 22 \cdot b + 22 \cdot c = 200 \cdot a + 20 \cdot b + 2 \cdot c$$

$$89 \cdot a - b - 10 \cdot c = 0$$

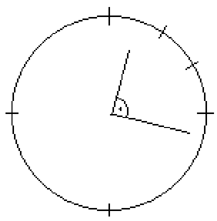
$$89 \cdot a = 10 \cdot c + b$$

a, b, c majú byť z {1, 2, 3, ... 8, 9} teda $c = 8$, $b = 9$, $a = 1$; Požadované číslo je **198**.

Ručičkové hodinky

Úloha:
Aký je čas na ručičkových hodinkách s presnosťou na sekundy, ak krátko po štvrť na jednu zvierajú ručičky pravý uhol?

Riešenie:



malá ručička prejde za hodinu $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$; *veľká* za hodinu 360°;

malá za sekundu $\frac{30^\circ}{3600} = \frac{3}{360} = \frac{1}{120}$ stupňa;

veľká za sekundu $\frac{360^\circ}{3600} = \frac{1}{10}$ stupňa

od 12:00 hod. za x sekúnd je uhol medzi ručičkami 90° stupňov, to znamená, že veľkosť uhla veľkej ručičky mínus veľkosť uhla malej je 90° stupňov:

$$x \cdot \frac{1}{10} - x \cdot \frac{1}{120} = 90^\circ$$

$$x \cdot \frac{12-1}{120} = 90^\circ$$

$$x \cdot \frac{11}{120} = 90^\circ$$

$$x = \frac{90 \cdot 120}{11} = \frac{10800}{11} = 981 + \frac{9}{11}$$

Teda x = 16 minút a 21 sekúnd a ešte 9/11 sekundy.
S presnosťou na sekundy je 12 hodín 16 minút a 22 sekúnd (12 : 16 : 22).

On a ona

Úloha:
On má dvakrát viac rokov, než mala ona, keď on mal toľko, koľko má ona teraz. Spolu majú 49 rokov. Koľko rokov má on a koľko ona?

Riešenie:
Nech majú teraz: on............ x rokov; ona.......... y rokov; spolu...... $x + y = 49$;
Keď mal on y rokov, t.j. pred $(x - y)$ rokmi, on mala $y - (x - y) = (2y - x)$ rokov.
Teda teraz $x = 2(2y - x)$ t.j. $x = 4y - 2x$. Má platiť $3x = 4y$ a $x + y = 49$.
Po dosadení a úprave: $y = 21$ a $x = 28$. On má 28 rokov a ona 21 rokov.

Prítok i odtok súčasne

Úloha:
Prázdna nádrž sa prítokom naplní za 30 minút. Plná nádrž sa otvoreným odtokom vyprázdni za 75 minút. Za aký čas sa naplní prázdna nádrž, ak je súčasne otvorený prítok i odtok?
Riešenie:
Prítok za minútu........................ $\frac{1}{30}$ nádrže; odtok za minútu........................ $\frac{1}{75}$ nádrže
prítok i odtok za minútu............ $\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{75}\right)$ nádrže; za t minút prítok i odtok............ $t.\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{75}\right)$;
má platiť $t\cdot\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{75}\right)= 1$ (nádrž plná). Potom: $t = 50$ minút.

Priemerná rýchlosť je harmonickým priemerom

Úloha:
Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.
Riešenie:
Priemer dvoch čísel m, n počítame ako $\frac{m+n}{2}$ ($\frac{m+n}{2}$ je aritmetický priemer čísel m, n).
Ak sa vám však zdá, že priemerná rýchlosť danej úlohy je 50 km/h, tak sa mýlite.
Priemerná rýchlosť vo fyzike je podiel celkovej dráhy ku spotrebovanému času. Teda:
tam.......... *dráha* s ....*rýchlosť* $v_1 = 60$ km/h .... *čas* t_1
späť......... *dráha* s .... *rýchlosť* $v_2 = 40$ km/h. ....*čas* t_2
celková dráha 2 · *s* .... *rýchlosť* v ....*čas* $t_1 + t_2$
priemerná rýchlosť: $\bar{v} = \frac{2s}{t_1+t_2}$
po úprave: $\bar{v} = \dfrac{2s}{\frac{s}{60}+\frac{s}{40}} = \dfrac{2s}{\frac{5s}{120}} = \dfrac{240s}{5s} = 48$ km/h
V matematike zavádzame aj harmonický priemer a, b ($a, b \in R^+$) ako $\dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).
Potom vidíme, že priemerná rýchlosť pohybu po tej istej trase dvomi rôznymi rýchlosťami je harmonickým priemerom oboch rýchlostí $\bar{v} = \dfrac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$.

Využiť rýchlosť alebo vtip?

Úloha:
Povoz s dlhým kmeňom sa pohybuje priamočiaro a stálou rýchlosťou. Kočiš potrebuje na zmeranie dĺžky kmeňa v krokoch v protismere pohybu 16 krokov a v smere pohybu 112 krokov. Aká je dĺžka kmeňa v krokoch (rovnomerne sa pohybujúceho) kočiša?
Riešenie:
A) *cez rýchlosť pohybu* (v krokoch za minútu)
rýchlosť povozu ... v_1 rýchlosť kočiša ... v_2 dĺžka kmeňa ... d

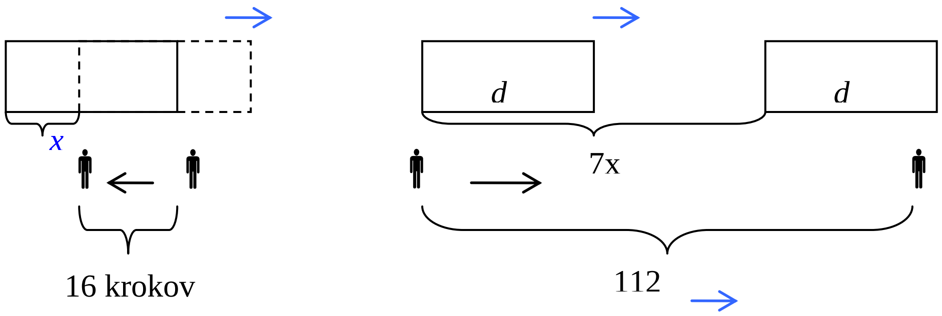
proti pohybu povozu: $t_1 = \dfrac{d}{v_1+v_2} = \dfrac{16}{v_2}$; v smere pohybu povozu: $t_2 = \dfrac{d}{v_2-v_1} = \dfrac{112}{v_2}$;

potom $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{v_2-v_1}{v_1+v_2} = \dfrac{16}{112} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow v_2 = \dfrac{4}{3}v_1$; v smere pohybu kmeňa za t_2 prejdeme.. $t_2 \cdot v_2 = 112$;

kmeň sa posunie za t_2 .... $t_2 \cdot v_1 = 112 - d$; po dosadení...... $\dfrac{t_2 \cdot \frac{4}{3}v_1}{t_2 . v_1} = \dfrac{112}{112-d} = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \underline{\underline{d = 28}}$

B) *cez vtip* (vhodný obrázok a duchaplná úvaha) Znázornime si situáciu:

Obr.1 Obr.2



Z obr.1 vyplýva: $x+16 = d$ a $x = d - 6$. Za dobu chôdze (16 krokov) sa posunie kmeň o x krokov, za dobu chôdze (112 krokov) sa posunie o $\dfrac{112}{16}x$, t.j. $7x$ krokov. Teda na obr. 2 je vzdialenosť označených koncov klady $7x$ krokov. Potom platí: $112 = 7x + d$. Po dosadení: $x = d - 16$ bude platiť $112 = 8d - 112$, t.j. $d = 28$. Kmeň má dĺžku 28 krokov kočiša.

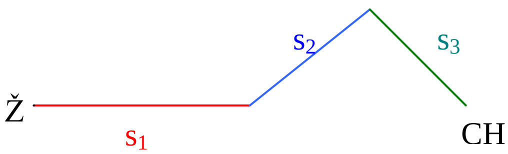
Zaujímavá turistika

Úloha:

Turista kráčal od železnice ku chate a späť v rôzne vlnitom teréne spolu 6 hodín. Do kopca šiel rýchlosťou 3 km/h, po rovine 4 km/h a z kopca 6 km/h. Koľko kilometrov prešiel?

Riešenie:

Predstavme si situáciu aj na obrázku (riešenie úlohy je nezávislé od profilu cesty, pretože priemerná rýchlosť pohybu do kopca a z kopca je harmonickým priemerom oboch rýchlostí a sa rovná 4 km/h). Napríklad:



$$6 \text{ hod} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

$$6 = \underbrace{\frac{s_1}{4} + \frac{s_2}{3} + \frac{s_3}{6}}_{tam} + \underbrace{\frac{s_3}{3} + \frac{s_2}{6} + \frac{s_1}{4}}_{späť}$$

$$6 = \frac{3s_1 + 4s_2 + 2s_3 + 4s_3 + 2s_2 + 3s_1}{12}$$

$$6 \cdot 12 = 6s_1 + 6s_2 + 6s_3 = 6 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)$$

$$12 = \underbrace{s_1 + s_2 + s_3}_{s}$$

$$2s = 2 \cdot 12 = 24$$

Turista prešiel celkom 24 km.

Manželské páry – vyberajte vhodným postupom

Úloha:

Z desiatich manželských párov (m – ž) vyberáme päť osôb. Koľko je všetkých takých pätíc, že v nich nie je ani jeden manželský pár (postup zdôvodnite).

Riešenie:

Budeme si predstavovať, akým postupom požadované podmienky splníme:

A. Vyberieme päť párov z desiatich manželských párov, to sa dá urobiť $C_5(10) = 252$ spôsobmi. Potom vyberieme z každej manželskej dvojice jedného, pre tento výber je $V'_5(2) = 2^5 = 32$ možností. Uplatnením princípu násobenia (spomínané výbery sú nezávislé ku každému prechádzajúcemu výberu) dostávame, že požadovaných pätíc, tak že v nich nie je ani jeden manželský pár, je $C_5((10)\cdot V'_5(2) = 252\cdot 32 = 8064$.

B. Určíme počet pätíc v možných zloženiach podľa pohlavia:
Samí muži (5 m); to je $C_5(10) = 252$ možností.
Pre výber pätíc samých žien (5 ž) je tiež 252 možností.
Ďalej určíme počet pätíc v zložení:
1 m + 4 ž ..... $C_1(10)\cdot C_4(9) = 10\cdot 126 = 1260$
1 ž + 4 m ..... $C_1(10)\cdot C_4(9) = 10\cdot 126 = 1260$
2 m + 3 ž ..... $C_2(10)\cdot C_3(8) = 45\cdot 56 = 2520$
2 ž + 3 m ..... $C_2(10)\cdot C_3(8) = 45\cdot 56 = 2520$
To znamená spolu (sčítaním) 252 + 252 + 1260 + 1260 + 2520 + 2520 = 8064 možností.

C. Budeme postupne vyberať do pätíc tak, aby boli splnené požiadavky:
Prvý môže byť hocikto z dvadsiatich, teda 20 možností.
Druhý môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraného manželského druha, teda 18 možností.
Tretí môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 16 možností.
Štvrtý môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 14 možností.
Piaty môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 12 možností.
Spolu (princíp násobenia) je to $20\cdot 18\cdot 16\cdot 14\cdot 12 = 967680$ možností, ale medzi nimi sa niektoré pätice opakujú (z každých 5! = 120) zostane iba jedna, teda všetkých požadovaných pätíc je

$$\frac{20.18.16.14.12}{5!} = \frac{967680}{120} = 8064.$$

D. Vyberieme päť ľudí z dvadsiatich, na to máme $C_5(20) = 15504$ možností. Tam však budú aj pätice, v ktorých bude jedna alebo aj dve manželské dvojice (tieto možnosti musíme z daného počtu odčítať). Určíme koľko zo spomínaných pätíc obsahuje

a) práve jednu manželskú dvojicu: takých možností je

$$\underset{\text{manž. dvoj.}}{C_1(10)} \cdot [\underset{3m}{C_3(9)} + \underset{3ž}{C_3(9)} + \underset{m \text{ a } 2ž}{9 \cdot C_2(8)} + \underset{ž \text{ a } 2m}{9 \cdot C_2(8)}] = 10 \cdot 672 = 6720$$

b) práve dve manželské dvojice:
$C_2(10) \cdot 16$, pretože ku každej z dvoch vybraných manželských dvojíc možno ešte priradiť jedného človeka zo (20 – 4) = 16. Pätíc s dvomi manželskými dvojicami je 720.

Teda po odčítaní nevhodných možností (6720 + 720) dostaneme 15504 – (6720 + 720) = 8064 požadovaných dvojíc spĺňajúcich požiadavky danej úlohy.

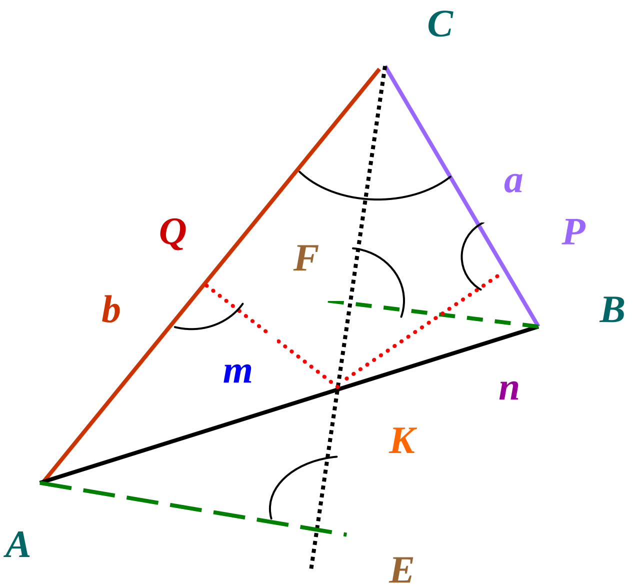
JEDNODUCHÁ ZÁKLADNÁ GEOMETRICKÁ VETA

Úloha:

Dokážte, že os ľubovoľného vnútorného uhla v každom trojuholníku rozdeľuje protiľahlú stranu v pomere strán priľahlých.

(V trojuholníku ABC, pozri obr., ak CK je os uhla ACB a $|AK| = m$, $|KB| = n$, tak $m : n = b : a$).

Riešenie:



os uhla *ACB*

A.

Pravouhlé trojuholníky AEC a BFC sú podobné (podľa vety *uu* – pravé uhly pri E, F, rovnaké uhly pri C). Teda platí $a : b = |FB| : |EA|$.

Trojuholníky BFK a AEK sú podobné (podľa vety *uu*), tak platí $|FB| : |EA| = n : m$.

Potom z oboch rovností platí aj $n : m = a : b$.

B.

Ak KQ je výška na stranu $AC = b$ v trojuholníku AKC

a KP je výška na stranu $BC = a$ v trojuholníku KBC,

tak pri označení S_1 obsahu $\Delta\, AKC$ a S_2 obsahu $\Delta\, KBC$ platí vzťah $S_1 : S_2 = b : a$.

Podobne platí $S_1 : S_2 = m : n$, pretože trojuholníky AKC a KBC majú spoločnú výšku z vrcholu C. Potom platí aj $m : n = b : a$.

Kto je nevinný?

Úloha:

Niekto z podozrivých *A*, *B*, *C* v galérii odcudzil obraz.
Traja svedkovia o udalosti pravdivo vypovedali takto:

1. *Podozrivý C bol v galérii práve vtedy, keď tam nebol žiaden z dvojice A, B.*

2. *V galérii nebol podozrivý C alebo nebola pravda, že tam bol aspoň jeden z dvojice A, C.*

3. *Ak nie je pravda, že v galérii bol podozrivý A zároveň s B, potom tam bol podozrivý C.*

Kto je nevinný?

Riešenie:

Zapíšeme si výpovede svedkov pomocou logických spojok.

1. $C \Leftrightarrow (A' \wedge B')$
2. $C' \vee (A \vee C)'$
3. $(A \wedge B)' \Rightarrow C$

Zistíme pravdivostné hodnoty týchto výrokov pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt. Na zistenie toho, kto bol nevinný, je treba vyhovieť všetkým svedkom súčasne, a preto nás bude zaujímať pravdivosť výrokov 1, 2, 3 súčasne

A	B	C	A'	B'	C'	$C \Leftrightarrow (A' \wedge B')$	$C' \vee (A \vee C)'$	$(A \wedge B)' \Rightarrow C$	$(1 \wedge 2 \wedge 3)$
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0

V tabuľke vidíme, že všetci traja svedkovia sa zhodnú len v jedinom prípade – keď platia výroky *A* a *B* a pritom neplatí výrok *C*.
Na základe tohto možno tvrdiť, že ***podozrivý C je zaručene nevinný***.

JABLKÁ PRE DETI

Úloha:

Koľko je rôznych možností pre rozdelenie 8 jabĺk trom deťom, ak záleží len na počte jabĺk pre jednotlivé deti?

Riešenie:

A. rozpíšme systematicky jednotlivé možnosti pre jednotlivé deti A, B, C :

	A	B	C	
počet	0	0 – 8	čo zostane	9 možností
	1	1 – 7	čo zostane	8 možností
	2	2 – 6	čo zostane	7 možností
	.	.		.
	.	.		.
	8	0	0	1 možnosť

sčítaním všetkých možností dostávame počet 45.

B. Ak si označíme každé jablko menom dieťaťa, ktorému ho chceme dať, tak dostaneme napr. A A B B C C C C, teda jednotlivé kombinácie ôsmej triedy z troch prvkov s opakovaním. Ich počet je $C_8'(3) = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$.

C. Osem jabĺk môžeme oddeliť dvomi značkami na tri skupiny (pre A, B, C), napr. Ỏ Ỏ ∆ Ỏ Ỏ ∆ Ỏ Ỏ Ỏ Ỏ , takých možností je toľko, ako rozmiestniť dve značky na 10 polí, t.j. $C_2(10) = 45$.

D. Predchádzajúci počet možností môžeme určiť aj ako počet možností rozdeliť dva druhy prvkov s počtom 8 a 2 do 10 políčok, t.j. ako počet permutácií 10 prvkov s opakovaním z dvoch druhov s počtom 8 a 2 prvky: $P'_{8,2}(10) = 45$.

E. Rozpis s pochopením:

A	B	C		
8	0	0	3 možnosti	
7	1	0	6 možností	
6	2	0	6 možností	
5	3	0	6 možností	
4	4	0	3 možnosti	
6	1	1	3 možnosti	
5	2	1	6 možností	
4	3	1	6 možností	
4	2	2	3 možnosti	
3	3	2	3 možnosti	spolu 45 možností.

Riešenie úlohy nám umožnilo použiť rozpis, poznatky o kombináciách bez opakovania i s opakovaním prvkov, aj permutácie s opakovaním prvkov.

VYRIEŠENÉ PRE ROK 2015

Stanovte najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2015.

Riešenie:

Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najmenší rád, t. j. počet cifier a teda čo najviac číslic 9.
Pretože 2015 : 9 = 223 + 8, hľadané číslo bude 8999...9 (223 deviatok).

Stanovte, aká číslica bude na 2015. mieste od začiatku, ak postupne zapisujeme za sebou prirodzené čísla od 1: 123456789101112131415...

Riešenie:

Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest.
Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest.
Trojciferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2700 miest.
Hľadané 2015. miesto je 1826. (2015 mínus 189) miesto medzi trojcifernými číslami.
Na 1826 miest sa zmestí (1826 : 3) 608 trojciferných čísel a ešte dve cifry.
608. trojica cifier v postupnosti 100101102... je číslo 707 (lebo 100 je prvá trojica, 101 je druhá trojica a teda číslo 707 je 608. trojica) za ním nasleduje číslo 708, teda číslica na 2015. mieste je **0**.

Stanovte všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, pre ktoré platí $x \cdot y \cdot z = 2015$.

Riešenie:

Rozklad čísla 2015 na prvočísla je $5 \cdot 13 \cdot 31$.
Teda do úvahy prichádzajú trojice 1, 5, 403; 1, 13, 155; 1, 31, 65; 5, 13, 31;

Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2015} číslom 15.

Riešenie:

Vieme, že $10^{2015} = \underbrace{100...000}_{\text{2015 núl}} = \underbrace{99 ... 990}_{\text{2014 deviatok}} + 10.$

Číslo 99... 990 (je tam 2014 deviatok) je deliteľné 3 aj 5, teda aj 15,
a preto číslo 10^{2015} = 100 ... 000 =(99 ... 990 + 10) má po delení číslom 15 zvyšok **10**.

Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2015} má ciferný súčet 3.

Riešenie:

Každé prirodzené číslo menšie než 10^{2015} má najviac 2 015 cifier.
Teda s práve jednou číslicou (3) je ich 2 015 (3, 30, 300, ... $3 \cdot 10^{2014}$).
Ak tam bude dvojica číslic 1 a 2, možností je C_2 (2015) a za dvojicu 2 a 1 rovnako veľa.
Spolu je to $2 \cdot C_2$ (2015) = 2015 · 2014 = 4 058 210
Ak tam budú práve tri jednotky, môžeme ich dávať na 2015 políčok,
teda počet možností je C_3 (2015) = (2015·2014·2013)/6 = 1 361 529 455
Spolu všetkých požadovaných možností teda je 2015 + 4 058 210 +1 361 529 455 = **1 365 589 680**.

Stanovte, koľkokrát sa v encyklopédii, ktorá má očíslovaných 2015 strán (prirodzené čísla od 1 do 2015 vrátane), vyskytuje číslica 5.

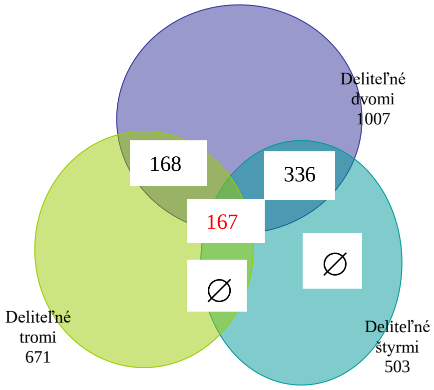
Riešenie:

Predstavme si čísla od 1 do 2015 napísané pod sebou:
Určíme počet číslic **5** na miestach jednotiek.
V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna **5**;
desiatok je medzi 2015 číslami práve 201, tam je počet **5** práve 201 a ešte jedna **5** za číslo 201**5,**
teda počet **5** na miestach jednotiek je 202.
Na mieste desiatok je **5** v stovke čísel 10 krát (**5**0, **5**1, ..., **5**9).
V postupnosti 2015 čísel je stoviek 20. To znamená spolu 200 číslic **5** na mieste desiatok.
Na mieste stoviek je v tisícke čísel cifra **5** v číslach **5**00, **5**01,..., **5**99, teda 100 krát. V postupnosti 2015 čísel sú dve tisícky, teda na miestach stoviek je 200 pätiek.
Spolu je číslic **5** zrejme 202 + 200 + 200 = 602.
Na stránkach očíslovaných od 1 do 2015 vrátane je cifra 5 použitá práve **602** krát.

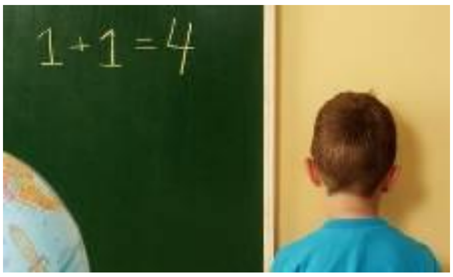
Na tabuli sú napísané všetky čísla od 1 do 2015 (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi. Stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.

Riešenie:

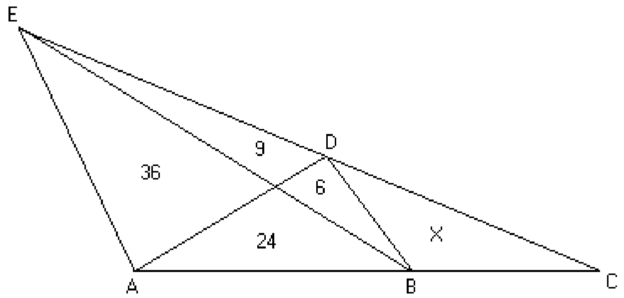
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ... 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015
z nich všetkých deliteľných dvomi je 1007;
z nich všetkých deliteľných tromi je 671;
z nich všetkých deliteľných štyrmi je 503;
čísel deliteľných dvomi aj štyrmi (čísla deliteľné štyrmi sú deliteľné aj dvomi) je 503
čísel deliteľných dvomi a zároveň tromi (teda deliteľných šiestimi) je 335;
čísel deliteľných tromi a zároveň štyrmi (teda deliteľných dvanástimi) je 167;
čísel deliteľných dvomi a tromi a zároveň štyrmi (deliteľných dvanástimi) je 167;



Práve dvomi značkami bude označených 5**04** čísel (168 + 336).



Dajme do pomeru



Čísla na obrázku znamenajú veľkosti obsahov príslušných trojuholníkov. Určte *x*, t.j. obsah trojuholníka *BCD*.

Riešenie:

A: Označme si $|AB| = p, |BC| = q$

a spoločné výšky trojuholníkov (podľa obr.) $|EK| = r, |DL| = s$

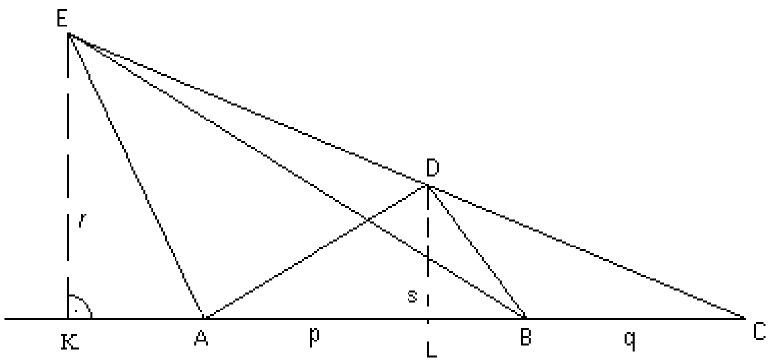
Potom platí :

$$S_{\Delta ABE} = \frac{p \cdot r}{2} = 60$$

$$S_{\Delta BCE} = \frac{q \cdot r}{2} = 15 + x$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{q \cdot s}{2} = x$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{p \cdot s}{2} = 30$$



Dajme do pomeru:

$$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{q}{p} = \frac{15 + x}{60}$$

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{q}{p} = \frac{x}{30}$$

Z toho vyplýva, že $\frac{15 + x}{60} = \frac{x}{30}$. Potom $x = 15$.

B: Pretože

$$S_{\Delta ABE} = \frac{p \cdot r}{2} = 60$$

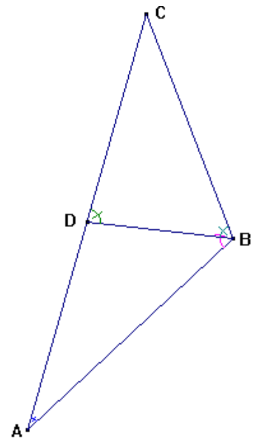
$$S_{\Delta ABD} = \frac{p \cdot s}{2} = 30,$$

tak $\frac{r}{s} = 2$, teda $r = 2 \cdot s$.

Vidíme, že $S_{\Delta BCE} = \frac{q \cdot r}{2} = \frac{q \cdot 2 \cdot s}{2} = q \cdot s = 15 + x$, $S_{\Delta BCD} = \frac{q \cdot s}{2} = x$,

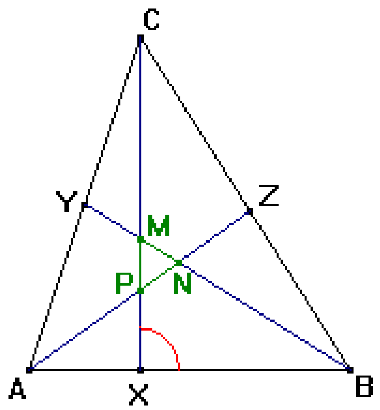
teda $q \cdot s = 2 \cdot x = 15 + x$, potom $x = 15$.

Dokážte, že v trojuholníku oproti väčšej strane leží väčší uhol.



Nech v trojuholníku *ABC* je strana *AC* väčšia ako strana *BC*. Zostrojme na strane *AC* bod *D* tak, aby platilo: $|BC| = |CD|$. Označme: $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$. Bod *D* leží vnútri úsečky *AC*, teda platí: $\beta > \varepsilon$ (1).
Trojuholník *BDC* je rovnoramenný ($|BC| = |CD|$), teda $|\angle CDB| = |\angle CBD| = \varepsilon$ (oproti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly).
Súčasne je uhol *CDB* vonkajším uhlom trojuholníka *ABD*, teda platí: $\varepsilon > \alpha$ (2). Podľa vzťahov (1) a (2) platí: $\beta > \alpha$. V trojuholníku oproti väčšej strane *AC* leží väčší uhol β .

V ostrouhlom trojuholníku *ABC* je z vrcholu *C* spustená výška. Z vrcholu *B* vychádza ťažnica a z vrcholu *A* os uhla. Ich vzájomné priesečníky sú vrcholmi trojuholníka *MNP*. **Dokážte**, že trojuholník *MNP* nemôže byť rovnostranný.



Ak by bol trojuholník *MNP* rovnostranný, tak by mali všetky jeho vnútorné uhly veľkosť 60°. Trojuholník *MXB* je pravouhlý a pre jeho uhol *MBX* by platilo: $|\angle MBX| = 30°$, lebo $|\angle XMB| = 60°$.
Trojuholník *APX* je tiež pravouhlý a pre jeho uhly by platilo:

$|\angle APX| = 60°$

$|\angle PAX| = 30°$.

Keďže *AZ* je os uhla *BAC*, tak by platilo: $|\angle BAC| = 2 \cdot 30° = 60°$.
V trojuholníku *ABY* by potom pre veľkosť uhla *BYA* platilo:

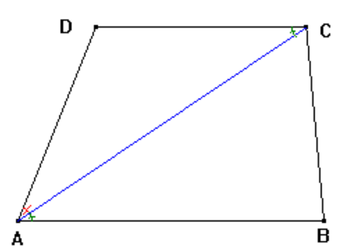
$|\angle BYA| = 180° - |\angle YAB| - |\angle ABY|$

$|\angle BYA| = 180° - 30° - 60°$

$|\angle BYA| = 90°$.

Podľa vety *sus* by bol trojuholník *ABY* zhodný s trojuholníkom *CBY* a platilo by $|\angle BAY| = |\angle CBY| = 60°$, čo však znamená, že trojuholník *ABC* je rovnostranný.
Ak by bol trojuholník *ABC* rovnostranný, tak by body *M*, *N*, *P* splynuli a netvorili by spolu trojuholník.

Dokážte, že v danom lichobežníku *ABCD* ($AB \| CD$), v ktorom platí $|AD| = |DC|$, je uhlopriečka *AC* osou uhla *DAB*.



Ak $|AD| = |DC| \Rightarrow$ trojuholník *ACD* je rovnoramenný s ramenami *AD* a *DC* a platí: $|\angle DAC| = |\angle DCA|$ (1). Pretože *AB* je rovnobežné s *CD* $\Rightarrow |\angle DCA| = |\angle CAB|$ (2) (striedavé uhly). Z rovností (1) a (2) dostávame: $|\angle DAC| = |\angle CAB|$, teda uhlopriečka *AC* delí uhol *DAB* na dva zhodné uhly, t.j. priamka *AC* je os uhla *DAB*.

Dokážte, že v každom trojuholníku delí os ľubovoľného vnútorného uhla protiľahlú stranu v pomere veľkostí strán priľahlých.

Riešenie: Ak zostrojíme kolmice na os uhla ACB z vrcholov A a B, vzniknú dve dvojice podobných trojuholníkov.

$|\angle ACL| = |\angle BCK|$ (CK je os uhla ACB)

$|\angle ALC| = |\angle BKC| = 90°$

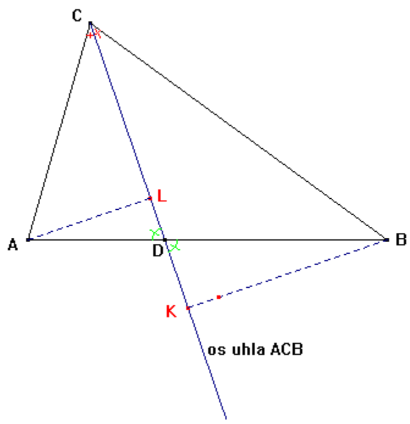
$|\angle ADL| = |\angle BDK|$ (*vrcholové uhly*)

$|\angle ALD| = |\angle BKD| = 90°$ a teda platí:

$\Delta ALC \sim \Delta BKC$ (podľa vety uu) $\Rightarrow \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|AL|}{|BK|}$ (1)

$\Delta ADL \sim \Delta BDK$ (podľa vety uu) $\Rightarrow \dfrac{|AL|}{|BK|} = \dfrac{|AD|}{|BD|}$ (2)

potom z (1) a (2) $\Rightarrow \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|AL|}{|BK|} = \dfrac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BD|}$.



V rovnostrannom trojuholníku ABC je vedená stredom D strany BC kolmica na stranu AB. Jej päta je bod E. **Dokážte**, že platí: $|AE| = \dfrac{3}{4}|AB|$.

Riešenie:

V trojuholníku ABC zostrojíme výšku CF na stranu AB. Trojuholník ABC je rovnostranný.

Bod F je stredom strany AB a platí: $|FB| = \dfrac{1}{2}|AB|$ (1).

Keďže v trojuholníku FBC a v trojuholníku EBD platí: $|\angle EBD| = |\angle FBC| = \alpha$;

$|\angle CFB| = |\angle DEB| = 90°$ sú trojuholníky FBC a EBD podobné podľa vety uu.

Bod D je stredom strany BC, pre pomer podobnosti k potom platí

$k = \dfrac{|BD|}{|BC|} = \dfrac{1}{2}$, ale taktiež platí: $k = \dfrac{1}{2} = \dfrac{|FB|}{|EB|} \Rightarrow |EB| = \dfrac{1}{2}|FB|$ (2).

Dosadením vzťahu (1) do (2) dostávame:

$$|EB| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|AB|$$

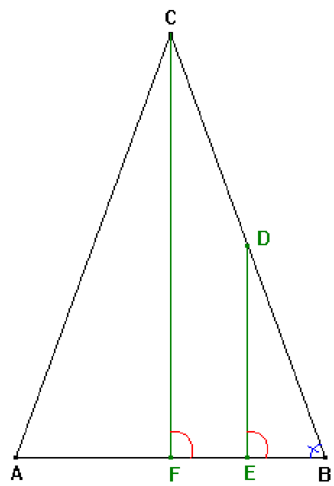
$$|EB| = \frac{1}{4}|AB|,$$

keďže $|AB| = |AE| + |EB|$ pre dĺžku AE platí:

$$|AE| = |AB| - |EB|$$

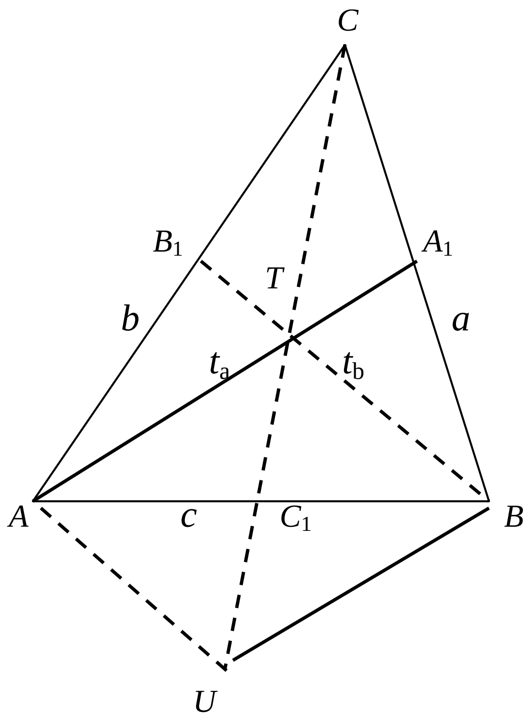
$$|AE| = |AB| - \frac{1}{4}|AB|$$

$$|AE| = \frac{3}{4}|AB|.$$



DVA ZAUJÍMAVÉ DÔKAZY

Dokážeme, že všetky tri ťažnice trojuholníka prechádzajú spoločným bodom T, ktorý sa volá ťažisko.



1. Narysujeme ťažnice t_a, t_b ($t_a = AA_1$, $t_b = BB_1$).
2. Ich priesečník označme písmenom T.
3. Narysujeme polpriamku CT.
4. Na polpriamke CT zostrojme bod U tak, aby platilo $|CT| = |TU|$.
5. Bod U spojme úsečkami s bodmi A, B. Dostaneme štvoruholník $AUBT$.
6. V trojuholníku UBC je úsečka TA_1 strednou priečkou, lebo $|UT| = |TC|$ a $|BA_1| = |A_1C|$.
7. Priamky UB a TA_1 sú rovnobežky.
8. Podobná situácia je aj v trojuholníku AUC. Priamky TB_1 a UA sú rovnobežky.
9. Štvoruholník $AUBT$ je teda rovnobežník.
10. Spojnice jeho protiľahlých vrcholov AB, UT sú uhlopriečky. Uhlopriečky rovnobežníka sa navzájom rozpoľujú.
11. Teda bod C_1 je stredom úsečky AB i úsečky TU.
12. Úsečka CC_1 je tiež ťažnica, lebo spája vrchol trojuholníka C so stredom C_1 protiľahlej strany.

Záver: Všetky tri ťažnice trojuholníka prechádzajú práve jedným spoločným bodom T.

Ukážeme, že také neexistujú

Dokážte, že neexistujú prirodzené čísla x, y, aby vyhovovali rovnici $x^2 - 5y + 8 = 0$.

Ak upravíme danú rovnicu na tvar $y = 1 + \dfrac{x^2+3}{5}$, vidíme, že $x^2 + 3$ by malo byť deliteľné piatimi (pretože y má byť prirodzené číslo). To ale znamená, že $x^2 + 3$ by malo byť číslo, ktorého posledná cifra je buď 0 alebo 5. Z toho vyplýva, že x^2 by malo mať na konci číslicu buď 7 alebo 2.

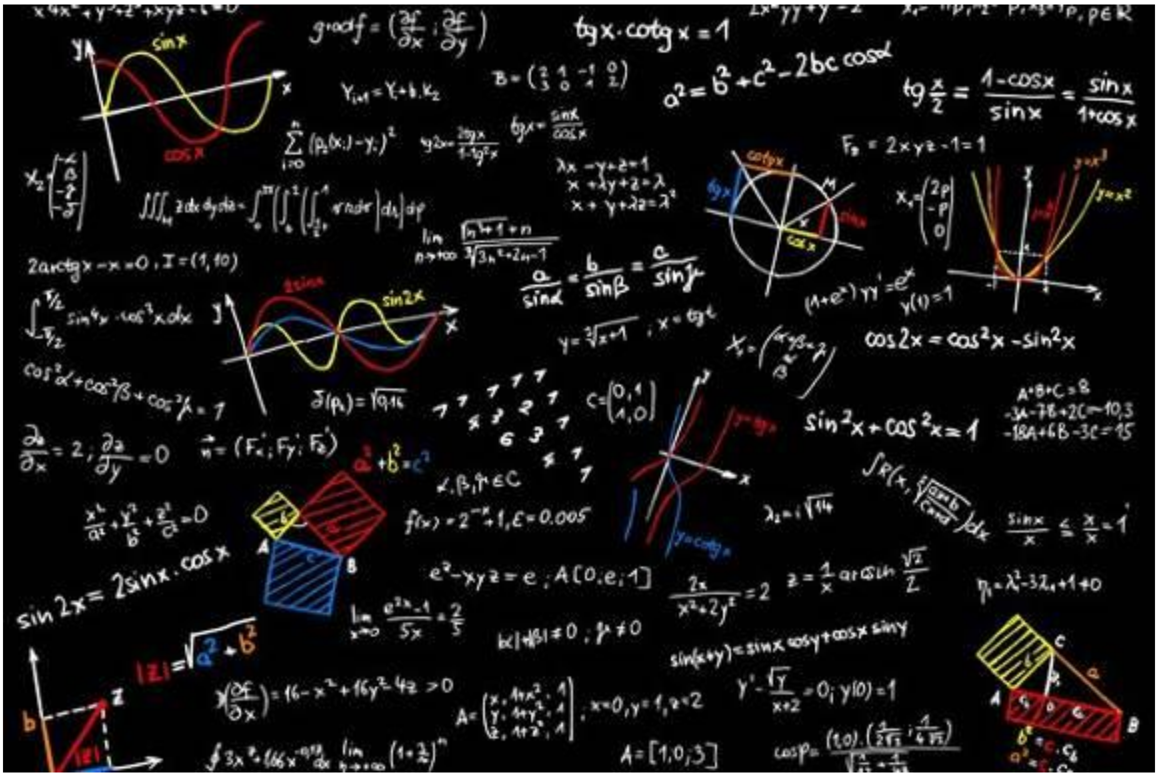
Ak si predstavíme všetky x ako prirodzené čísla, na konci ktorých sú len cifry 0, 1, 2, ... , 8, 9 jasne vidíme, že x^2 môže mať na konci len cifry 0, 1, 4, 9, 6, 5 a to znamená, že nikdy tam nie je 2 ani 7. Preto **neexistujú** požadované prirodzené čísla x, y, aby vyhoveli danej rovnici.

PRE PODNETNÝ ROK 2015

Doplňte ďalší člen postupnosti a zdôvodnite to:
1, 2, 3, 4, 5, $\square$

Dopĺňam **2015**.
Myslel som postupnosť $\{a_n\}$ zadanú
$$a_n = n + 2009 \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{5!}$$
Šiesty člen mnou myslenej postupnosti je $a_6 = 2015$.
Prvých päť členov tejto postupnosti si určite vyčíslite sami. Vyhovuje to. V roku 2015 je to predsa celkom dobre pochopiteľné.

Čo ste mysleli vy?
Viete predsa, že postupnosť nie je jednoznačne určená svojimi prvými členmi.



Mojim žiakom, študentom aj poslucháčom

Priatelia, uvedomte si, že aj mladý človek bez odvahy a charakter je len vec. Mierou dospelosti je ochota zobrať vlastné záležitosti do svojich rúk. Škola má byť prostredníkom pre vašu výchovu a vzdelanie. Podstatou štúdia je aktivita ducha. Horlivosť v učení záleží na vôli, ktorá sa nedá vynútiť. Vaše odhodlanie pre vzdelávanie podporujte vnútorným záujmom i tvorivými aktivitami. Využívajte právo otázky, poznatky ukladajte do systému s príčinnými a logickými súvislosťami, vytvorte si pravidelný systém študijnej práce. Preverovanie a hodnotenie vedomostí chápte ako spätnú väzbu medzi vami a učiteľmi, ako pomoc pri samostatnom overení si svojich skutočných schopnosti. Nenechajte sa nikdy znechutiť, nevzdajte sa primeraných reálnych cieľov, kriticky hodnoťte svoje možnosti i výkony, triezvo hľadajte nové perspektívy. Čím lepšie spoznáte svet, tým viac fascinujúcich záhad v ňom spozorujete. S nárastom vedomosti sa zvýši aj ďalšia chuť. "*Bohatstvo k vám môže prísť, ale k múdrosti musíte kráčať sami*“ (R. Young).

Vôbec nie sme dokonalí, ale snažme sa robiť dobré veci: žiť zmysluplne, odhaliť skryté vnútorné sily, otvoriť sa iniciatíve ducha na základe trvalých mravných hodnôt. Čestný človek koná často správne aj bez príkazov a nariadení - na pokyn vlastného svedomia. Využívajte aj túto príležitosť.

Asi viete, že do vrchov sa ide krokom pomalým, dlhým a rovnomerným. Vykročte rozvážne, ale presvedčivo. "*Statočnosť a schopnosť prekonávať sa získame len vtedy, keď sa odhodláme na obete*“ (Solženicyn). Spoločnými silami môžete nachádzať, aj na už vychodenej ceste, nečakané príjemné prekvapenia, ktoré vám prinesú nielen nové poznanie, ale aj vzájomnú spoločnú radosť i úžitok z dobre vykonanej študijnej práce. Prajem vám pravidelný mierny úspech.

Dušan Jedinák