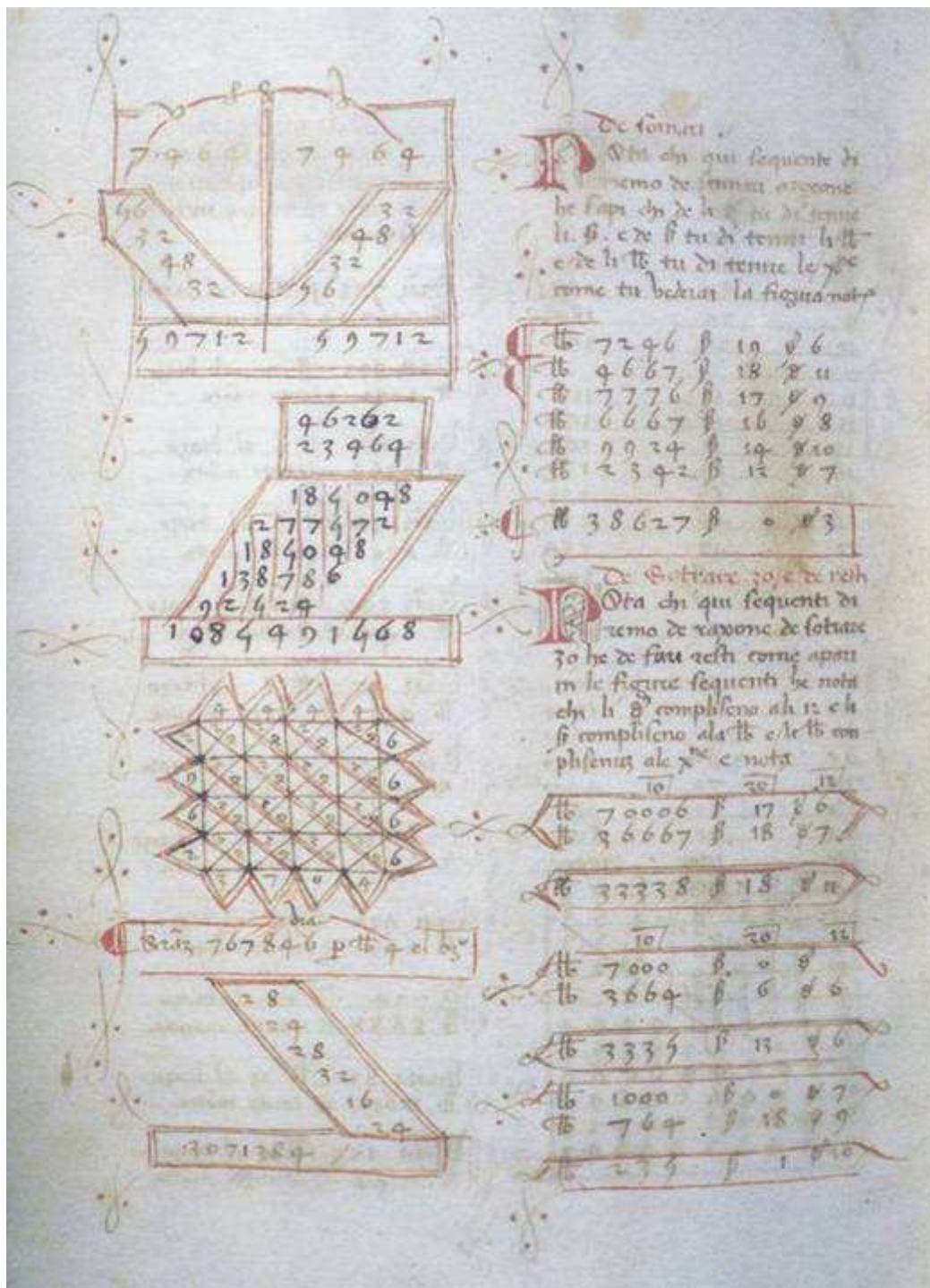


O niektorých stredovekých predstaviteľoch matematickej kultúry



Dušan JEDINÁK
Topolčany
2010

Úvodné poznámky

V roku 1469 použil na pápežskom dvore knihovník G. Andrea, možno ako prvý, termín *stredovek*, aby charakterizoval obdobie medzi grécko-rímskym starovekom a novou dobou renesancie klasických hodnôt. Vymedzenie doby stredoveku nie je ani dnes jednotné. Stredovek býva ohraničený rôznymi letopočtami. Napríklad:

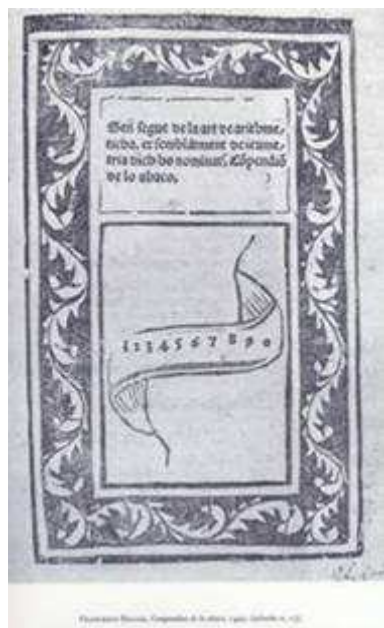
324 (presun centra Rímskej ríše z Ríma do mesta Byzantion – Konštantinopol) a **1453** (Turci dobyli Konštantinopol);

476 (dobytie Ríma germánskymi kmeňmi, zánik Západorímskej ríše) a **1517** (začiatok reformácie v Nemecku);

391 (zakázanie pohanských náboženstiev) a **1415** (upálenie J. Husa);

529 (zrušenie Akadémie v Aténach; benediktíni založili kláštor Monte Casino) a **1492** (objavenie Ameriky).

Náš prehľad osobností, ktoré vnímame z pohľadu vzťahu k matematickému mysleniu, sme ohraničili 6. až 15. storočím. Týchto 1000 rokov nie je žiarivým príkladom tvorivej matematiky, ale nie je ani „čiernou dierou“ matematickej kultúry. Možno je dlhodobou latentnou prípravou ďalších nových zaujímavých skúseností, sústredeného pozorovania prírody a trpezlivého hľadania rozumných dôvodov pre usporiadané systematické poznávanie. Po celý stredovek vo výchove vzdelaných ľudí hralo rozhodujúcu úlohu sedem slobodných umení (**trívium** a **kvadrívium**): **gramatika**, **rétorika** (rečnicke umenie), **dialektika** (umenie polemiky); **aritmetika** (vlastnosti čísiel, číselná mystika), **geometria** (základné geometrické útvary a ich miery, geografia), **astronómia** (aj zostavovanie kalendára), **muzika** (harmonické intervaly). Mnohé z nich majú vážny matematicko-logický charakter.



Štrnásť stručných životopisných medailónov (**Boethius**, **Izidor Sevilský**, **Beda Venerabilis**, **Alcuin z Yorku**, **Al-Chvárizmí**, **Gerbert z Aurilacu**, **Leonardo z Pisy**, **R. Grosseteste**, **R. Bacon**, **T. Bradwardinus**, **M. Oresme**, **M. Kuzánsky**, **Regiomontanus**, **L. Pacioli**) môže prispieť k náznakom toho, že v stredoveku len driemalo matematické myslenie v zápasoch o holé prežitie i v toku mnohých historických udalostí, aby neskôr vstalo z popola spoločenských premien pripravené na svoj úžasný rozvoj. Ľudské osobnosti a ich myšlienky nikdy neopustili možnosti pre vytváranie matematických modelov, užitočné uplatnenie logiky i abstraktnú výstavbu deduktívnych štruktúr.

A. M. S. Boethius – majster dialektiky a pomocník mnohých

Služobník kráľa



Medzi tých, ktorí podnecovali významné rozhodnutia o osude vytvárajúcej sa západnej Európy na pomedzí 5. a 6. storočia patrí aj autonómny rímsky vzdelanec a aristokrat **Anicius Manlius Severinus Boethius** (okolo 480–524). Narodil sa v Ríme, v patricijskej rodine. Mal možnosť navštevovať vynikajúce školy, ovládal rovnako dobre grécky ako latinsky, čítal Cicera i Senecu, študoval Aristotela i Platóna. V Aténach naštudoval aristotelskú, stoickú a novoplatónsku filozofiu. Neskôr vstúpil do služieb ostrogótskeho panovníka Teodoricha (asi 453–524), ktorý vládol asi od roku 471. Na jeho dvore pôsobil aj v mnohých dôležitých funkciách štátnej správy (roku 510 bol konzulom). Z nejasných príčin (mocenský zápas iných, politické či náboženské spory) upadol do nemilosti (obvinený zo zrady), bol väznený a bez súdneho prejednanja násilne zavraždený (asi 23. 10. 524).

Premostenie kultúr

Kresťanský novoplatonik **Boethius** podstatne prispel k tomu, aby sa vedomosti starovekého Grécka stali filozofickým základom pre celý Západ. Bol mostom medzi antickou a stredovekou kultúrou. Prispel k prepojeniu gréckej múdrosti a kresťanskej zvesti. Zaslúžil sa o pretlmočenie antického duchovného dedičstva (prekladal a komentoval diela Aristotela, Platóna i Porfýlia) do základov ranokresťanskej filozofie a teológie. Svojimi prácami inšpiroval mnohých mysliteľov stredoveku. Vytvoril odbornú latinskú filozofickú terminológiu, pripravil nové pojmy scholastického teologického slovníka. Zvýraznil zmysel i význam procesu učenia sa, naznačil hodnotu spojenia toho, čo robíme, s tým, čo vieme. Vytvoril, použil a radikálne obhajoval princíp preniknutia pravdy viery myslením. Odkázal aj nám: *Pokiaľ to dokážeš, spájaj vieru s rozumom.*

Boethius získal na pomedzí odchádzajúcej antickej kultúry a nastupujúceho sveta stredoveku výstižné charakteristické označenie „posledný Riman a prvý scholastik“. Vedel, že *všetko čo poznávame, nie je chápané podľa svojej prirodzenosti, ale skôr podľa schopností poznávajúcich.* Jeho zásluhou prehovoril latinsky k Rimanom Pytagoras, Ptolemaios, Nikomachos, Euklides, Archimedes. **Boethius** uznal: *Číslo bolo v myslí Stvoriteľa bezpochyby prvotným vzorom stvorených vecí... Všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti.*

Prekladal, komentoval, pretváral. Sedem slobodných umení rozdelil na



odvetvie literárne – *trívium* (gramatika, rétorika, dialektika) a oblasť vedeckú – *kvadrívium* (aritmetika, geometria, astronómia a muzika). Napísal k nim úvody, ale zachovali sa len spisy venované aritmetike a hudbe (harmónii). Zhrnul súdobú aritmetiku *Nikomacha z Gerasy* (žil okolo roku 100 n. l.), písal o prvočíslách, zložených číslach, pomeroch prirodzených čísiel a úmerách, t.j. rovnostiach pomerov.

[Na obr. je prvá stránka Boethiovej *Aritmetiky*, začiatok textu s venovaním Simmacovi, (Kodex N 258 sup., Biblioteca Ambrosiana, 13. stol.)]

Napríklad zaviedol pre čísla $a > p > b$ **aritmetický priemer** p čísiel a, b ako

$$\frac{a-p}{p-b} = \frac{a}{a},$$

geometrický priemer g čísiel a, b ako

$$\frac{a-g}{g-b} = \frac{a}{g},$$

harmonický priemer h čísiel a, b ako

$$\frac{a-h}{h-b} = \frac{a}{b}.$$

Muziku – harmóniu chápal ako klasifikáciu číselných vzťahov, matematické výpočty intervalov. Ladenie bolo pre neho získaním správnych a ideálne čistých pomerov. Z geometrie preložil aj prvé štyri knihy Euklidových *Základov*. Pomerne dosť ovplyvnil aj postupy logiky i argumentácie. Preložil a komentoval Aristotelove *Kategórie*, *O vyjadrovaní* i niektoré jeho ďalšie spisy o logike. **Boethius** sám vypracoval *Dve knihy o hypotetickom úsudku* a *Dve knihy o kategorickom úsudku*. Naznačil význam prísnej logickej argumentácie a presného definovania pojmov (napr. *Večnosť je úplné, súčasné a dokonalé vlastníctvo neohraničeného a nikdy nekončiaceho života*.) Spoznal, že **nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike**. Podľa niektorých jeho učebníc sa učilo možno až tisíc rokov. **Boethius** nepochybne prispel k priblíženiu antickej vzdelanosti budúcim generáciám stredovekých učencov.

S múdrosťou ducha

V väzení napísal **Boethius** podnetné filozofické dielo *Útecha z filozofie*. Naznačil v ňom aj to, že k ľudskej slobode a šťastiu prispieva čistý duch a dobrá vôľa každého človeka. Boh bol pre neho „najvyššia dobrá vôľa“. Človeka chápal ako individuum, teda niečo vlastné, osobitne utvorené a jedinečné. **Boethius** kládol dôraz na ľudskú individualitu a poznávaciu aktivitu. Bol presvedčený o významnosti ľudského postavenia v celku existujúceho sveta. Potvrdil, že

zodpovedné slobodné ľudské konanie je zároveň slávou i bremenom každého človeka. *Útecha z filozofie* bola v stredoveku po biblii najprekladanejším literárnym dielom a stala sa „povinným čítaním“ vyspelých študentov. Postupne ponúkala odpovede na problémy morálky i štátnej správy. Vzniklo k nej veľmi veľa komentárov od ľudí význačných i menej známych.

Už do základov stredoveku položil predstavu, že humanizmus a prírodoveda nemusia byť protikladné. **Boethius** ako originálny duch, filozof i matematik, vzdelaný gréckou kultúrou a presvedčený kresťanstvom, sa usiloval prispieť k výstavbe svetového poriadku, k jednote práva, mravov a vzdelanosti. Cesta k uplatneniu spojenia schopností rozumu a viery sa ukázala ako kľukatá a trnistá. *Aby sme poznali veľkú lásku, musíme najprv blúdiť a až potom sa dať na správnu cestu.*



Boethius
(Palazzo Ducale, Urbino)

Izidor Sevilský

– kresťanský encyklopedista raného stredoveku

Význam nielen pre Španielsko

Na Pyrenejskom polostrove poznajú skoro všetci ľudia osud človeka s menom **Isidoro de Sevilla** (asi 560/70–636). Tento španielsky učenec, teológ, filozof, polyhistor a encyklopedista sprostredkoval začiatkom stredoveku pre túto zem antické vzdelanie. Zhromažďoval, spracúval a spisoval náučné, náboženské i historické pojednania. Vychádzal z pôvodného významu slov, zozbieral základné poznatky oživej i neživej prírody, o udalostiach Starého i Nového zákona. Zaslúžil sa o záchranu podstatných starovekých kultúrnych hodnôt, prispel k udržaniu ľudskej múdrosti v toku dejín, vytváral intelektuálny most od patristiky k stredovekej civilizácii „na česť a slávu Božiu“.



Život siroty

Už v detstve mu zomreli obaja rodičia a tak sa o neho staral o veľa rokov starší brat Leander. Izidor často študoval staré spisy v kláštorenej knižnici. Zvolil si duchovné povolanie. Roku 599 bol zvolený za biskupa. Svojím kresťanským životom ponúkal sebazapieranie i poníženosť. S pokorou vykladal základné pravdy katolíckej viery. Podporoval budovanie škôl, pestoval dobročinnosť. Vystupoval aj na synódach miestnej cirkvi v Seville a Tolede, vysvetľoval liturgické praktiky, mníšsku tradíciu i základné odpovede na morálne problémy. Po smrti (4. apríla 636) získal úctu španielskeho ľudu i označenie cirkevného učiteľa (1722).

Vysvetľovať od základu

V histórii ľudstva boli, sú a možno aj budú veľmi obľúbené stručne formulované „základné vety“, sentencie z diel význačných osobností. Jednou z prvých uznávaných zbierok duchovného dedičstva otcov a najväčším literárnym dielom Izidora Sevilského je 20-zväzková encyklopédia *Etymologiae* (Origenes; počiatky). *Znalosť etymológie je často nevyhnutná pre výklad slov. Ak poznáš, aký je pôvod slova, pochopíš skôr jeho význam.* Táto práca obsahuje prehľad vtedajších náboženských i svetských vedomostí. Bola pomôckou pre pamäť a útechou pre dušu. Poukazovala na spojenie slov a ich zmyslu, dôležitosť pomenovania aj s jeho významom, vytvorenie správnej predstavy o skutočnej veci alebo jave.

Tretia časť spomínaného diela je venovaná matematike: *Matematika je teoretická veda, ktorá má za svoj predmet abstraktné množstvo. Abstraktné množstvo je to, o ktorom pojednávame iba uvažovaním, oddeľujúc ho rozumom od látky... Skrz číslo sa učíme nedať sa zmiatnuť. Ak odstrániš zo všetkého číslo,*

všetko zanikne. Odober ľudstvu počítanie a všetko zachváti slepá nevedomosť a nebude možné odlišiť človeka od ostatných živočíchov.

Možno vás zaujme ako **Izidor** uviedol definície priemerov dvoch čísiel, to znamená ich **aritmetický, geometrický a harmonický stred**: *Rozdiel medzi aritmetikou, geometriou a hudbou je v spôsobe ako sa v nich hľadajú stredy. V aritmetike ich hľadáš takto: sčítaš krajnosti a rozdelíš to na polovice... Podľa hudby hľadáš stred takto: Akým pomerom stred prevyšuje prvé, takým istým pomerom je stred prevýšený posledným... Podľa geometrie hľadáš stred takto: vynásobíš krajnosti a výsledok je ako keď sa vynásobia stredy...*

Hodnoty poznania i morálky

Svojím životom i dielom ovplyvnil **Izidor Sevilský** celý nasledujúce obdobie stredoveku. Ukázal, že zmysluplné štúdium a pravdivé svetské vedomosti prispievajú aj k trvalým kresťanským hodnotám. Ponúkal dialektiku ako náuku o výklade príčin vecí a javov. Logiku chápal ako rozumovú schopnosť definovať, skúmať a vykladať, formou rozpravy rozpoznávať pravdivé od nepravdivého. Jeho ústredné literárne dielo patrilo k pokladom kláštorných knižníc a zachovalo sa z neho asi tisíc exemplárov. Vo svojej dobe **Izidor** chcel zlúčiť dovtedajšiu tradíciu antiky s mocou nastupujúceho germánskeho sveta. Spracoval aj dejiny Vizigótov. Zapísal sa medzi tých, ktorí prispeli k rozvoju západnej civilizácie.



Beda Venerabilis (Ctihodný)

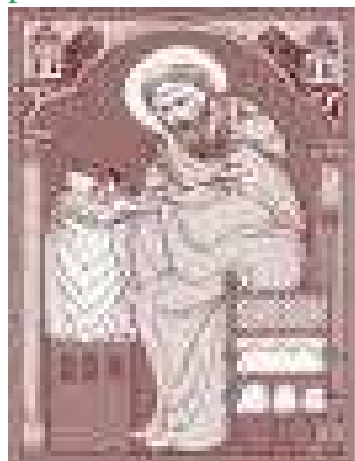
– učenec doznievajúcej patristiky

Výpočty pohyblivých sviatkov

Termín kresťanských veľkonočných sviatkov je určený na prvú nedeľu po prvom jarnom splne Mesiaca. Dátum veľkonočnej nedele sa pohybuje v kalendári v určitej postupnosti s periódou $28 \cdot 19 = 532$ rokov (tzv. veľkonočný cyklus). K tým, ktorí podstatne prispeli k základným postupom výpočtu veľkonočných sviatkov (Computus paschalis) patrí aj írsky benediktínsky mních **Beda Venerabilis** (asi 672/675 – 26.5.735). Vypočítal dátumy Veľkej noci pre roky 532 – 1063.

Kláštorný život

Pochádzal z Northumbrie. Príliš skoro sa stal sirotou a tak ho sedemročného dali príbuzní na výchovu do kláštora Wearmouth. Celoživotným domovom bol pre neho, od roku 682, kláštor Jarrow pri ústí rieky Wear. Získal bohaté



a všestranné vedomosti, zvládol biblickú gréčtinu i hebrejštinu. Svojou obdivuhodnou usilovnosťou v štúdiu, vyučovaní i spisovaní poznatkov sa vypracoval na známeho učenca, ktorý zanechal literárne dielo (väčšinou v latinčine) z oblasti nielen vieroučnej a mravoučnej, ale aj zemepisu, dejepisu prírodných vied i matematiky. Asi nikdy nezanedbával svoje mníšske povinnosti, ale priznal: *Aj keď som dodržiaval predpísaný režim a denne sa zúčastňoval chrámového spevu, moje hlavné potešenie spočívalo v štúdiu, učení a písaní.*

Z diela

K hlavným úspechom jeho učiteľskej činnosti patria výklad Písma, komentáre, kázne. Z historických spisov sú významné päťzväzkové *Cirkevné dejiny Anglicka* od čias Caesara až do roku 731. Zachytil aj základné historické údaje o kresťanských mučeníkoch.

Beda Venerabilis sa zaujímal aj o prírodu. Uznával učenie o guľatosti Zeme, popísal príliv a odliv mora v súvislosti s pohybom Mesiaca. Spísal (r. 701) traktát *De natura rerum – O prírode*.



V práci *De temporum ratione – O počítaní času* (z roku 725) vysvetlil, okrem iného, ako možno pomocou zmeny polohy rúk a prstov na nich znázorniť čísla až do milióna. (Jednotky boli reprezentované polohami prstov ľavej ruky, desiatky kombináciami polôh prstov ľavej ruky, stovky polohami prstov pravej ruky, tisíce kombináciami polôh prstov a palca pravej ruky, desaťtisíce, stotisíce a milióny

polohami rúk a trupu.) Vedel pracovať so zlomkami. V zbierke úloh *De arithmetica propositionibus* sa objavujú aj záporné čísla. Odrazom súdobých pomerov je aj Bedove konštatovanie: *Kto vie deliť, tomu sa žiadna záležitosť nebude zdať ťažká. Ja poznám veľa zložitých vecí, ale nič ne je zložitejšie ako operácie so zlomkami.*

Význam

Poeta, filozof a teológ **Beda Venerabilis** pôsobil v čase latinskej západnej patristiky (obdobie stredovekej filozofie v dobe formovania kresťanstva). Zanechal trvalé stopy na poli teológie a kresťanskej kultúry, stal sa aj cirkevným učiteľom a bol vyhlásený za svätého. Prijal a presadil datovanie udalostí od narodenia Krista (anno Domini). Stal sa „otcom anglických dejín“. Je považovaný aj za astronóma, lebo analyzoval výsledky pozorovaní pohybu Slnka a Mesiaca v astronomických tabuľkách a výpočtoch. Zistil, že dĺžka roka nie je určená presne.

Vďaka Bedovi sa do celej Európy rozšírilo nielen počítanie na prstoch a rukách, ale aj stále výraznejšia učenosť v gramatike, metrike i rétorike. **Beda Venerabilis (Ctihodný)** patril k najvýznamnejším učencom svojej doby.



Beda Venerabilis (Ctihodný)

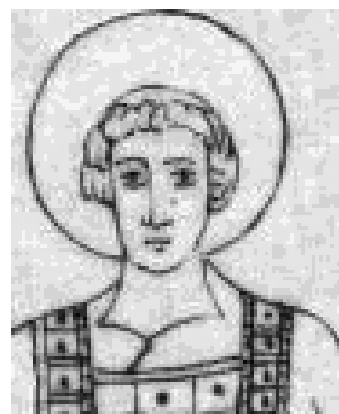
Alcuin z Yorku – bystrý mladík stredoveku

Veľmi staré úlohy

Asi poznáte príhodu o vlkovi, koze a hlávke kapusty a ich prevoze cez rieku za daných podmienok. Táto úloha je veľmi stará. Nachádza sa aj v spise *Úlohy na bystrenie rozumu mladých*, už z 8. storočia. Autorom tejto práce, ktorá obsahuje napríklad aj úlohy o psovi a králikovi, o sto mericiach pšenice a ďalšie je **Alcuin z Yorku** (asi 735–804) učiteľ, filozof i básnik na dvore Karola Veľkého (747–814) v Aachene okolo roku 781. Jeho latinské meno **Alcuin** (Albinus) pochádza z keltského Alh-win, čo znamená priateľ chrámu.

Doba a prostredie

York je arcibiskupské sídlo so starou kultúrnou tradíciou a známou kláštornou školou. Tam sa okolo roku 735 narodil anglosaský učenec **Alcuin**. Vyštudoval a potom prednášal v miestnom kláštore. Od roku 781 viedol kultúrne a školské záležitosti panovníka (od roku 768) Karola Veľkého, šíril v jeho ríši vzdelanie (elementárne, artistické i teologické). Základom boli modlitby, žalmy a spev, sedem slobodných umení (gramatika, rétorika, logika, aritmetika, geometria, hudba, astronómia), Biblia a komentáre cirkevných Otcov. Cieľom bolo spoznať spájať kresťanský obsah s klasickými znalosťami. Metódou boli otázky a odpovede s ohľadom na proces vnímania, pamäti a obrazotvornosti. Jednou zo zásad bola myšlienka: *Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať*. **Alcuin** spísal traktáty o gramatike, rétorike, dialektike i muzike, filozofické a teologické spisy i pojednania z histórie. Zvlášť vnímal logiku ako umenie rozumu, ktoré usporadúva poznanie javov ľudských i božských. Radil cisárovi aj v politických otázkach. Od roku 796 bol opäť v kláštore sv. Martina v Tours, kde vybudoval úspešnú školu pre šírenie vzdelanosti vo Francúzsku. **Alcuin z Yorku** zomrel 19. 5. 805 a jeho telo je pochované v kláštornom kostole v Tours.



Bystrý um

Už spomínaný spis *Úlohy na bystrenie umu mladých* (*Propositiones ad acuendos iuvenes*) je zbierkou 53 počtárskych úloh. V nej je ukázané napríklad riešenie úlohy ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. **Alcuin** uvádza riešenie, podľa ktorého bolo zo 100 osôb 11 mužov, 15 žien a 74 detí. Iné z ďalších piatich možných riešení neuvádzal. (Vy poznáte tieto ďalšie riešenia?; v podstate sa jedná o riešenie rovnice o dvoch neznámych v množine prirodzených čísel). Súčasťou tejto zbierky úloh sú aj zadania na postupnosti (napr. o počte holubov na 100 priečkovom rebríku, ak na jednotlivých priečkach holuby sedia postupne v počte 1, 2, 3, ..., 100), výpočet obsahov, ale aj zadania

kombinatorických úloh i rôzne výpočtové zadania a úlohy s nematematickou základnou úvahou.

Historické zázemie

Karolínska renesancia priniesla oživenie vzdelávania v starších kláštorných školách a začínajúcich školách pri katedrálach. Írsky mních **Alcuin z Yorku** usporiadal zásadné výroky autorít (*Beda Venerabilis, Isidor, Boethius, Augustín, Cicero*) pre školské potreby. Prispel k celkovej obnove a reforme vzdelania vo Franskej ríši (*Karol Veľký* sa stal cisárom v Ríme roku 800). Ukazuje sa, že aj podnety zo začiatku stredoveku, ktoré sú ešte stále súčasťou našej školskej matematiky, patria k európskemu kultúrnemu dedičstvu a vytvárajú historické korene rôznych matematických disciplín.



Alcuin z Yorku

Muhammad Ibn Múšá al-Chvárizmí

– znalec počtárskeho umenia

Realita rozprávok

Poznáte príbehy z Tisíc a jednej noci? V rozprávaní Šeherezády vystupuje aj Hárun al-Rašíd (Spravodlivý). Tento vládca – kalif skutočne vládol v Bagdade v rokoch 786–809. Sústredil tam mnoho učencov, rozšíril veľkú knižnicu a v nej zhromaždil rukopisy z celého sveta, najmä grécke, perzské a indické. Kalif al-Mamún v rokoch 813 až 833 vytvoril pre vtedajších učencov akadémiu Bajt al-hikma, to znamená *Dom múdrosti*. Súčasťou takejto vtedajšej inštitúcie bolo aj dobre vybavené astronomické observatórium. Knihovníkom, matematikom a astronómom na panovníckom dvore bol



v tom čase **Abú Abdalláh Muhammad Ibn Múšá al-Chvárizmí al-Madzúší** (asi 783 – 850).

Pochádzal z územia Chorezmu, v okolí ústia rieky Amurdarji pri Aralskom jazere. Žil v Bagdade a na príkaz kalifa zostavil požadované spisy o počtárskom umení. Z jeho diela sa zachovalo päť čiastočne prepracovaných odpisov, ktoré sú venované aritmetike, algebre, astronómii, geografii a výpočtom kalendára. **Al-Chvárizmí** v nich sústredil všetko podstatné, čo vtedy potrebovali učenci, obchodníci a úradníci.

Spisy v knižniciach

V knižnici univerzity v Cambridge je uložený latinský preklad z 12. storočia Chvárizmího spisu napísaného okolo roku 820. Začína sa slovami: *Dixit Algorizmi...*, čo znamená: *Algorizmi povedal...* Táto *Kniha o sčítaní a odčítaní podľa indického počtu* ukazuje, ako v Indii zostavujú z deviatich znakov ľubovoľné číslo vďaka rozmiestneniu, ktoré si určili, a aké uľahčenie tento pozičný desatinný systém umožňuje tým, ktorí sa ho naučili. Zásluhou tejto knihy prenikol do Európy i celého sveta pozičný desiatkový systém počítania s "arabskými" číslami.



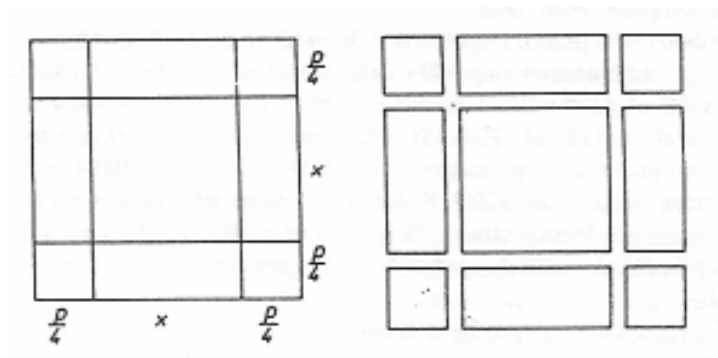
Oxfordská univerzita uchováva arabský rukopis Chvárizmího práce *Krátka kniha o počte pripočítaním a porovnaním* v origináli *Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-mugábala*. Obsahuje jednoduché i zložitejšie aritmetické úlohy, ktorých vyriešenie bolo veľmi potrebné pre ľudí vtedajšej doby pri delení dedičstva, zostavovaní závete, rozdeľovaní majetku, súdnych sporoch, v obchode, pri vymeriavaní pozemkov, stavbe kanálov a pod. Al-Chvárizmího *Algebra* je náukou o riešení lineárnych a kvadratických rovníc s celočíselnými koeficientmi.

Zostali matematické termíny

Zaujímavou skutočnosťou je, že z latinských prekladov Chvárizmího prác zostali pre súčasnú matematiku dva dôležité termíny. Polatinčením mena **al-Chvárizmí** vzniklo slovo *algorithmus*. Dnes znamená presný a logický jednoznačný predpis na vykonanie určitej postupnosti operácií pre vyriešenie úloh daného typu. Zo slova *al-džabr* vyslovovaného ako *al-gabr* zostalo v latinčine *algebra*, od 14. storočia je názvom celej vedy o riešení rovníc. V dnešnej dobe chápeme *algebru* ako disciplínu o matematických operáciách v symbolickej forme.

Geometrická predstava pre riešenie kvadratických rovníc

Al-Chvárizmí si vedel predstaviť postup pre riešenie kvadratickej rovnice $x^2 + p \cdot x = q$, kde p, q sú kladné reálne čísla, pochopením a využitím tohto obrázku:



Obsah prostredného štvorca je x^2 , menšie štvorce majú každý obsah $(p/4)^2$, obdĺžniky majú vždy obsah $(p/4) \cdot x$. Preto pre obsah celého veľkého štvorca platí

$$P = x^2 + 4 \cdot (p/4) \cdot x + 4 \cdot (p/4)^2 = x^2 + p \cdot x + (p^2/4) = q + (p^2/4).$$

Tento veľký štvorec má veľkosť svojej strany $x + (p/2)$ a teda $P = [x + (p/2)]^2$.

Porovnaním oboch obsahov $[x + (p/2)]^2 = q + (p^2/4)$, z toho vyplýva

$$x = (-p/2) + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

(lebo sa uvažovalo iba kladné riešenie).

Dnes týmto spôsobom môžeme didakticky zdôvodniť to, čo nazývame doplnenie kvadratického výrazu $x^2 + p \cdot x$ na úplný štvorec $x^2 + p \cdot x + (p/2)^2 = [x + (p/2)]^2$ a tak ukázať postup pre nájdenie riešenia kvadratickej rovnice $x^2 + p \cdot x = q$ doplnením na úplný štvorec.

Pre praktické úlohy **al-Chvárizmí** používal pre π hodnotu $22/7$, pre vedecké účely kládol $\pi = \sqrt{10}$ alebo $\pi = 62832/20000$. V geometrických prácach sa zamerl na určovanie obsahu obrazcov a využitie algebry v úlohách o trojuholníkoch. **Al-Chvárizmí** vypracoval prvé arabské tabuľky sínusov i tangensov.

Význam osobnosti a školy

Bagdadská matematická škola pracovala aktívne asi 200 rokov. Jej členovia preložili do arabčiny veľa prác z gréčtiny a sústredili výsledky matematických vedomostí z Indie, Perzie, Mezopotámie a Číny. Preklady niektorých al-Chvárizmího prác do latinčiny ovplyvnili stredoveké európske počítanie a priniesli indický desatinný pozičný systém do západne Európy spolu s arabskými číslicami aj ich algebrou.

Al-Chvárizmí, nadaný, zdatný a: pre vec zaujatý perzský matematik a astronóm, veľmi dobre poznal matematické tradície Blízkeho a Stredného východu. Svojimi knihami sprostredkoval stredovekej európskej vede matematické poznatky z Indie a Grécka. Prispel k rozšíreniu arabského vplyvu na algebru, trigonometriu, astronómiu. **Al-Chvárizmí** zostane natrvalo zapísaný medzi klasikmi arabskej matematiky.



Gerbert z Aurilacu – matematik pápežom

Nečakané spojenie

Možno je to nezvyčajná otázka: Bol niekedy v histórii pápežom človek, ktorý bol aj uznávaným matematikom? Správna odpoveď znie – áno, francúzsky matematik **Gerbert z Aurilacu** (bol neskôr pápežom **Silvestrom II.**).

Poznal arabskú matematiku

Pravidlá vedú k zovšeobecneniu. Zovšeobecnenie predpokladá presnú znalosť súvislostí. Z matematiky sa stáva skoro čarodejníctvo. O tom, kto ovládal umenie deliť ľubovoľné veľké čísla hovorili, že sa upísal diabli. Aritmetika vyžadovala formálnu obratnosť. Bystré hlavy ponúkali pre výpočty spôsob abacistov (počítanie na „línkách“) alebo algoritmikov (počítanie „perom“). Slávnym abacistom bol **Gerbert z Aurilacu** (930/945–1003). Narodil sa medzi rokmi 930 až 945 v Auvergene. Dostal úplné vzdelanie, mimoriadne prospieval v matematike i astronómii. Osud ho priviedol aj do Španielska, kde tento francúzsky kňaz ako jeden z prvých európskych učencov zodpovedne študoval arabskú matematiku. V tej dobe bola v Cordobe arabská vysoká škola (s bohatou knižnicou arabských, gréckych a latinských textov), kde sa prednášala aj matematika.



Vyznal sa vo všeličom

Gerbert skvele popularizoval dielo Boethiovo, časti Euklidových Základov i praktickú geometriu. Ovládal počítanie na abaku – sčítacej doske. Namiesto kamienkov používal žetóny s číselnými znakmi. V jeho *Knihe o delení čísel a Pravidlách o počítaní na abaku* možno spoznať termíny delenec a deliteľ. V pojednaní *Geometria* (94 článkov) vysvetlil základné pojmy (bod, čiara, plocha, teleso), jednoduché poznatky a metódy výpočtov výšok, hĺbok a vzdialeností. V časti o zememeračských praktikách spomína i počítanie s figurálnymi číslami. Zorganizoval školu v Remeši, kde vyučoval disciplíny kvadrívia (aritmetika, geometria, astronómia, hudba). Okrem matematiky sa zaoberal aj logikou, filozofiou i astronómiou. Napísal pojednania o dialektike, teológii i politike. V Magdeburgu skonštruoval slnečné hodiny, keď predtým skúmal polohu Polárky. Zaoberal sa mnohostranným využitím astrolábu (prístroj na meranie uhlov v súdobej astronómii).

Nábožný aj učený

Gerbert z Aurilacu ako učenec, výnimočná osobnosť na poli cirkevnom i politickom, posunul západné myslenie bližšie k prameňom antickej filozofie a vedy, podnietil aj záujem o samostatné pozorovanie a skúmanie. Študoval

Vergília, uplatňoval novoplatónsky štýl myslenia. Stal sa vplyvným mužom svojej doby, oslňoval všestrannosťou a prenikavosťou svojho umu. Vynikal aj ako široko vzdelaný a originálny učiteľ. Ako učený arcibiskup raveneský radil aj cisárovi Otovi III. (panoval 995–1002) a ten ho určil roku 999 za pápeža. **Gerbert** bol prvý Francúz na pápežskom stolci a prijal meno **Silvester II.** V tejto funkcii prispel k organizácii cirkvi v Poľsku i v Uhorsku. V roku 1001 poslal uhorskému kráľovi Štefanovi I. kráľovskú korunu. Vyhlásil za svätého pražského biskupa Vojtecha. S úspechom sa zapísal do dejín cirkvi i matematiky. Zomrel 12. mája 1003.

Je mimoriadne zaujímavé i podnetné, že k popredným osobnostiam pred tisíc rokov patrí **Gerbert z Aurilacu**, človek mnohostranných kultúrnych záujmov, literatúry, hudby, vedy i matematickej kultúry.



Leonardo z Pisy

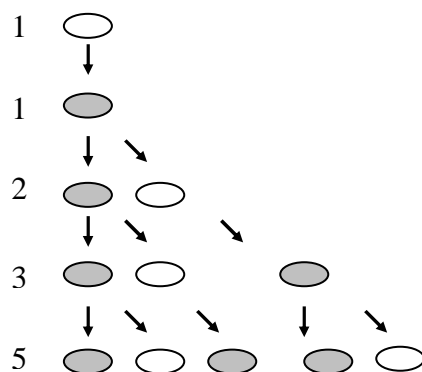
– vynikajúci matematik medzi Diofantom a Fermatom

Zaujímavá číselná postupnosť

Pozrite sa na postupnosť čísiel: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, Viete podľa spoznaného pravidla napísať ďalšie čísla? Stačí, keď odhalíte zákonitosť ich postupného vzniku. Od tretieho čísla počínajúc, vzniká táto postupnosť čísiel tak, že súčet predchádzajúcich dvoch je hľadaným ďalším číslom. Teda pre každé $i \geq 3$ platí $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$. Postupnosť s touto vlastnosťou je známym príkladom rekurentnej postupnosti, lebo keď chcete poznať ďalší člen, musíte „bežať späť“ (latinsky *recurrere*), aby ste podľa určitého pravidla použili predchádzajúce členy. Takúto postupnosť vygeneruje riešenie tejto úlohy: *Predstavte si párik králikov (samička a samček). Predpokladajme, že v prvom mesiaci života sa ešte nerozmnožujú a dospejú ako dvojmesačné. Po druhom mesiaci samička každý mesiac vrhne nový párik. Každý párik sa potom rozmnožuje rovnakým spôsobom (a nehynú). Aký bude počet párov králikov postupne na začiatku každého mesiaca? Znázorníme si danú úlohu:*

○ – mladý párik

● – dospelý párik



n -tý člen tejto postupnosti vypočítame ako súčet jeho dvoch predošlých členov. Teda platí: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Počet párov králikov v jednotlivých mesiacoch vytvára postupnosť čísiel, ktorú dnes nazývame **Fibonacciova postupnosť**. Tak ju pomenoval francúzsky matematik F. Lucas (1842–1891) na pamiatku jedného z najlepších matematikov celého stredoveku Leonarda z Pisy, ktorého prezývali **Fibonacci**.

Zo známeho mesta

Okolo roku 1170 sa v rodine mestského pisára v Pise, prezývaného Bonaccio (dobrák), narodil syn Leonardo. Keď vyrástol, odišiel na otcovo prianie, do Bougie v Alžírsku, aby sa naučil obchodné počty a aritmetiku. Neskôr si mimoriadne nadaný Leonardo rozšíril vedomosti cestovaním za obchodom po Egypte, Grécku, Sýrii, Byzancii, Sicílii a Provensálsku. Jeho matematické

poznatky dosiahli na vtedajšiu dobu vysokú úroveň. Zvládol dokonale arabskú aritmetiku i algebru. Napísal dve významné učebnice: *Liber abaci* – *Kniha o abaku* (tu sa pod slovom abak rozumie aritmetika) a *Praktická geometria*. Do dejín matematiky vošiel pod menom **Leonardo Fibonacci** to znamená Leonardo, syn Dobrákov, alebo **Leonardo Pisánský**. Zomrel okolo roku 1240.

Inšpiratívna učebnica

Kniha o abaku vyšla v roku 1202. Mala 15 kapitol, neskôr vytlačená mala 459 strán. **Leonardo** ju neskôr doplnil (1228) a postupne prepracoval. Bola výkladom o užitočných praktických výhodách indicko-arabského desiatkového pozičného systému. Obsahovala aritmetiku a algebru lineárnych a kvadratických rovníc v plnej hĺbke a úplnosti. **Fibonacci** v nej skúmal aj rozklad čísiel na súčin prvočísiel, odhaľoval kritériá deliteľnosti, napr. číslami 2, 3, 5, 9. Podal výklad poznatkov o úmerách. Zlomky upravoval na najmenších spoločných menovateľov. Ako prvý v Európe prišiel na myšlienku zaviesť záporné čísla a predstavovať si ich ako dlh. Vedel dobre riešiť neurčité rovnice i približne určovať druhé i tretie odmocniny. **Fibonacci** uviedol veľké množstvo výpočtových metód aritmetiky, algebry i teórie čísiel, mnohé sú z arabských zdrojov. Poznatky uvádzal na príkladoch a riešených úlohách.



Praktické súvislosti

V roku 1220 napísal **Leonardo z Pisy** prácu *Prax geometrie* (má osem častí), ktorá obsahuje aj zememeračské postupy, výpočty vzdialeností a výšok. Dokázal v nej, že tri ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Uviedol geometrické vedomosti zo svojich ciest, ktoré mali vzťah k meraniu veličín, k aritmetike, planimetrii a stereometrii. **Leonardo** učil určovať vzdialenosti a výšky pomocou kvadrantu rozdeleného určitým spôsobom. Práca *Kniha štvorcov*, napísaná okolo roku 1225, je pokrokom v teórii čísiel a obsahuje úlohy na neurčité kvadratické rovnice. Zaujímavosťou je, že **Fibonacci** vedel vyriešiť kubickú rovnicu $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ veľmi presne v šesťdesiatkových zlomkoch, ale neuviedol, akým spôsobom na to prišiel.

Jednoduchá úloha

Leonardo Pisánsky riešil veľké množstvo úloh a prispel k vytvoreniu matematických metód pre riešenie veľkých skupín podobných úloh. Túto jednoduchú úlohu z **Liber abaci** určite vyriešite: *Jeden hovorí druhému: Daj mi 7 denárov a budem mať päťkrát viac ako ty. Druhý hovorí: Daj ty mne 5 denárov a ja budem mať 7 krát viac než ty. Koľko denárov mal každý?* **Fibonacci** asi poznal arabské dielo Al-Chvárizmího, Abu Kámila, Al-Karádžího i Omara Chajjáma. Sprostredkovane poznal výsledky čínskej, babylonskej i egyptskej matematiky.

Nesmrtel'ná postupnosť

Už spomínaná úloha *Koľko párov králikov bude po jednom roku z jedného páru, keď každý pár má v každom mesiaci, okrem prvého, jednu dvojicu potomkov, ktorá sa od druhého mesiaca rozmnožuje takým istým spôsobom (uhynutie sa nepredpokladá)?* Odpoveď je skrytá v súčte príslušnej Fibonacciovej postupnosti. Budete sa asi čudovať, ale Fibonacciova postupnosť sa objaví, aj keď budete skúmať špirály pri usporiadaní semien v slnečnici, prechod svetelných lúčov cez priesvitné platne alebo postup pri stavbe včelieho plástu. V moderných matematických disciplínach sa využitie vlastností tejto postupnosti objavilo pri optimálnych metódach programovania, pri strojovom triedení, pri generovaní náhodných čísel. **Fibonacciova postupnosť** má naozaj veľa zaujímavých vlastností.

Kone a ovos

Uveďme ešte jednu pomerne ľahkú úlohu z matematických prác od Leonarda z Pisy: *Päť koňov spotrebuje za 9 dní 6 meríc ovsu. Za koľko dní spotrebuje 10 koňov 16 meríc ovsu?* Vyriešte hravo túto úlohu pred svojimi neskôr narodenými súkmeňovcami.

Mohutne prevýšil súdobú úroveň

Bohatosť úloh, rozmanitosť a efektívnosť metód, presvedčivosť výkladu zachovali výsledky prác Leonarda z Pisy pre ďalekú budúcnosť. Spoznal to Luca Pacioli (1445–1514) a zaradil tieto poznatky do svojej *Summy aritmetiky*, ktorá vyšla tlačou v Benátkach roku 1494. **Leonardo Pisánsky** prispel v Európe k zavedeniu indických čísiel a nuly. Samostatne rozpracoval nové algebrické postupy pre kupecké počty i geometrické problémy, približné výpočty aj teóriu čísiel. Vytvoril nové pôvodné úlohy, kládol dôraz na dôkazy. Stal sa prvým európskym stredovekým matematikom, ktorý zvládol arabskú matematiku, sprostredkoval ju ale aj obohatil. Medzi prvými používal algebru pre riešenie geometrických úloh. Spoznal, že aritmetika, algebra a geometria spolu súvisia a vytvárajú matematickú jednotu. Na jeho počesť nazývame identitu $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ **Fibonacciho identita**. Matematické dielo **Leonarda z Pisy** malo veľký vplyv na rozvoj európskej matematiky a právom je trvalo zapísané v jej histórii.



Robert Grosseteste – zakladateľ oxfordskej školy

Univerzitný predstaviteľ



Oxfordskí učenci sa už od počiatku venovali skúmaniu prírody, študovali aj matematiku, fyziku. Ich empirické zameranie sa stalo dlhodobou charakteristikou anglickej prírodnej filozofie. Idealizmus pre nich neznamenal nijaký protiklad ku štúdiu skúsenosti. Významným predstaviteľom univerzitetnej pospolitosti v Oxforde bol aj **Robert Grosseteste** (okolo 1168–1253), františkánsky mních, neskôr (r. 1215) biskup v Lincolne, ktorý sa preslávil svojou metafyzikou svetla i požiadavkou uplatňovať na vysvetlenie prírodných javov kvantitatívne a matematické metódy.

Zo života i diela

Základné vzdelanie získal v katedrálnej škole v biskupstve Hereford. Bol žiakom a neskôr dlhoročným učiteľom františkánskej školy v Oxforde. Teológiu vyštudoval v Paríži. Na univerzite bol jedným z jej prvých kancelárov a asi 20 rokov sa venoval aj vyučovaniu teológie. Bol učiteľom Rogera Bacona (asi 1219 – 1292). **Grosseteste** je pochovaný v hrobke katedrály v rodnom Lincolne.

Robert Grosseteste je autorom prírodno-filozofických prác: *O priamkach, uhloch a obrazoch*; *O pohybe telies a svetle*; *O guli*. Napísal aj diela o kalendároch, o astronómii a optike. Preložil Aristotelovu *Etiku* a komentoval jeho *Fyziku*. Napísal základnú učebnicu „slobodných umení“ – *De artibus liberalibus*, v ktorej zdôrazňoval význam dvoch druhov skúseností – zmyslovej i mystickej. Poznanie je odraz svetla, v ktorom človek sleduje pravdu vecí. Cieľom všetkých vied má byť aj obohatenie ľudského života v humánnej i etickej zložke.

Možnosti matematiky

Vychádzal z Aristotelovej koncepcie logiky, z novoplatónskych predstáv a informácií gréckych i arabských. Presvedčivo vysvetľoval použitie matematiky pri riešení jednotlivých fyzikálnych problémov. Matematika sa aj pre neho stala nepostrádateľným nástrojom opisu prírody a fyzikálnej argumentácie.

Jedinečnosť, konečnosť i pominuteľnosť pozorovaných javov možno zjednocovať a zlučovať do spoločných predstáv, ak použijeme matematickú formalizáciu. Geometria je založená na vlastnostiach svetla. Priestor je podmienený expanziou svetla. Geometria je univerzálnym výkladovým princípom. *Matematika je prvou vedou, bez ktorej sa nedajú popísať ďalšie*

vedy. Svet má matematickú povahu, lebo svetlo ustanovilo geometrické podmienky. *Geometrické tvary a vzťahy pôsobia v celom univerze a vo všetkých jeho častiach.* **Grosseteste** uznal, že vedecké poznatky sa budú používať na skúmanie reality a pravdy o nej. Postupne sa stanú zásadným poznaním podstatných princípov.

Poznávanie prírody

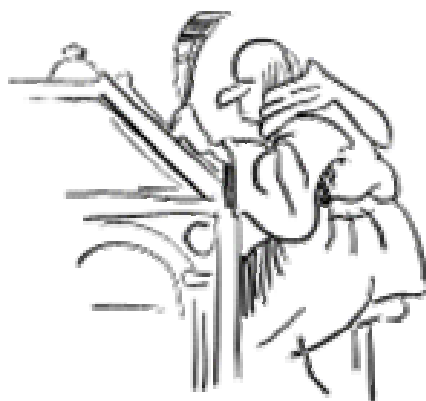
Pri hľadaní príčin prírodných javov **Grosseteste** prijal dva princípy: *princíp uniformity prírody* (tá istá príčina vyvoláva za tých istých podmienok rovnaké účinky) a *princíp hospodárnosti* (dianie v prírode prebieha najkratšou cestou). Fyzikálny popis sveta musí používať matematicky formulované teórie. Navrhol, aby sa pri popise fyzikálnych dejov používali aj geometrické obrazce. V jeho prácach sa stretávame aj s vytýčením problému porovnávania rôznych stupňov nekonečna.

Úloha svetla

Veľmi úspešnou a podnetnou prácou sa stalo pojednanie *O svetle*. **Grosseteste** chápal svetlo ako spojnicu medzi látkou a formou, hmotou a duchom, ale aj uznal svetlo za najvšeobecnejšiu formu pre tvarovanie všetkého (látka existuje vždy spolu so svetlom). Svetlo je najaktívnejšie. Takéto svetlo môžeme chápať ako štrukturáciu priestoru. Hmotné veci sú usadeninou tvorivého svetla. Vznik vesmíru je podľa neho zrodom prvotného svetla, vznikom poriadku z chaosu. Niekedy sa tento výklad vesmíru a bytia sveta veľmi podobá modernej podobe „veľkého tresku“, kde rýdze svetlo výrazne tvaruje prvotné elementárne častice.

Prínos

Oxfordská scholastika aj v diele **R. Grossetesta** ukázala, že idealizmus môže spolupracovať s empirizmom. Matematika môže prispievať k vysvetleniu nedokonale pozorovaných prírodných javov a tak umožňovať lepšie poznanie a pochopenie prírody. Syntéza geometrie a optiky naznačila nový smer fyzikálneho myslenia. **Grosseteste** začal študovať príčiny prírodných javov pomocou racionálne zdôvodnených čiar, uhlov a geometrických obrazcov. Zvýraznil nové možnosti poznania, ktoré získavame iba prostredníctvom matematiky.



Roger Bacon – dôraz na skúsenosť a poznanie

Stredoveké štúdiá

Medzi najstaršie vysoké školy patria univerzity v Paríži a v Oxforde, ktoré sa stali bránou k vrcholnej scholastike (vyučovať a učiť sa bolo „in“ ; čas metafyzického ducha, kde premýšľajúci človek bol viac než stroj a peniaze). Základom stredovekého štúdia bolo sedem slobodných umení: gramatika, rétorika, dialektika, aritmetika, geometria, astronómia a hudba. Jedným z najkritickejších mužov oxfordskej scholastiky bol františkánsky mních **Roger Bacon** (asi 1214 – 1294).

Osudy života

Dôkladnú znalosť všetkých odborov niekdajšej vedy (matematiky, medicíny, teológie a filozofie) získal v Oxforde a v Paríži (1244–1250). Mal značný ohlas ako prírodovedec a univerzálny mysliteľ. Viac ako tridsaťročný vstúpil do reholy františkánov a dôverne sa oboznámil s jej myšlienkovým svetom. Stretol sa s Albertom Veľkým, Alexandrom z Halesu, Bonaventúrom i Tomášom Akvinským. Keď sa jeho priateľ G. Fulconi stal pápežom Klementom IV. (1265–1268), požiadal Bacona o zaslanie jeho diela. Za kritiku panovníkov i rádových predstavených sa Bacon dostal do kláštorného väzenia v Paríži aj Oxforde (1271–1292). Zomrel opustený a neuznaný.

Roger Bacon zvyrazňoval úlohu znalosti jazykov (hebrejčiny, gréčtiny,



arabčiny) pre lepšie pochopenie diel Aristotela, Avicenu i Averroesa, ale aj Biblie. Pri skúmaní prírodných javov požadoval väčší dôraz na pokus, fyzikálnu skúsenosť. *Bez skúsenosti nemožno nič dostatočne poznať... Iba skúsenosť dáva istotu, a nie logický dôkaz.* Sám rozpracoval niektoré fyzikálne idey, napr. v optike, magnetizme a praktickej fyzike (využitie strelného prachu, vízia nových technických prostriedkov). Zovšeobecnenie vnútornej a vonkajšej skúsenosti videl v abstrakcii a matematizácii, ktorú treba následne preveriť v praxi. Na ceste za

experimentálnym poznaním podporoval vnútornú intuíciu, šikovnosť rúk a matematické zovšeobecnenie. V optike, astronómii i v teórii hudby odhalil matematickú povahu vecí. Krásu pramení zo svetla a harmónie.

Smerom k istote

V diele *Opus maius* (Väčšie dielo) uvažoval o príčinách ľudskej nevedomosti, o vzťahu medzi filozofiou a teológiou, o využití náuk o jazyku, o význame matematiky aj o experimentálnom poznaní i o etike. *Opus minor* (Menšie dielo) je súhrn Baconových najhlavnejších myšlienok, *Opus tertium* (Tretie dielo) je prehľad téz hlavného spisu. *Filozofia rozvíja božskú múdrosť pomocou vedy a umenia.* **Roger Bacon** spájal idealizmus a empirizmus,

dôsledne odlišoval teológiu a profánne vedy. Uprednostnil výskum konkrétnych predmetov proti prílišnému odvolávaniu sa na authority. Uznal, že experiment je nielen zdrojom poznania, ale aj rozhodujúcim kritériom pravdivosti. Ľudský rozum a skúsenosť uznal za nespochybniteľné authority v oblasti prírodných vied. Zdôrazňoval, že exaktné skúmanie reálnych skutočností spolu s matematickým popisom vedie ku koreňom istoty. Ocenil nevyhnutnosť metodologickej precíznosti, exaktnosti a dôslednosti v overovaní prírodovedných poznatkov.

Experiment a myslenie

Matematiku (v širšom a súdobom zmysle) vnímal **Roger Bacon** ako myšlienkový postup najbližší prirodzenému poznávaniu. Matematické úkony sú prístupné už deťom. Pomerne dôrazne naznačil, že všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky. *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.* Matematické poznatky vnímal ako základ všetkého vedeckého poznania a odkázal aj nám: *Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac základ prírody rozširujeme, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať.* **Roger Bacon** uprednostnil až mystickú intuíciu, ktorú sa snažil preverovať experimentom a popisovať matematicky. *Máme dva spôsoby poznávania: špekuláciu (teóriu) a experiment.* Pochopil, že prírodné vedy majú viesť ľudí k zdokonaleniu sveta, v ktorom žijeme. Vyznačil podstatný význam i úlohy experimentálnych skúseností, aby vychádzajúc zo správnej teórie smerovali k matematizácii celého ľudského poznania. *Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.*

vnímal **Roger Bacon** ako



Aj dnes si uvedomujeme, spolu s Rogerom Baconom, podstatnú odlišnosť zmyslového a rozumového poznania. Vedecké postupy môžu predstavovať premostenie pre harmonickú a pevnú syntézu zjavenej viery a ľudského rozumu, aby sme postupne vylúčili príčiny našich omylov, *pretože kým zotrávajú v ľudskom srdci, rozum nemôže uznať pravdu.* Kritický duch Rogera Bacona nám ponúkol zvýraznenie významu experimentálneho a matematického poznávania voči zostarnutým mienkam zdedených autorít. Napriek ťažkému životnému osudu a nepochopeniu zostal **Roger Bacon** verný presvedčeniu, že rozum i viera môžu nájsť oporu v experimentálnej vede i kresťanskej teológii.

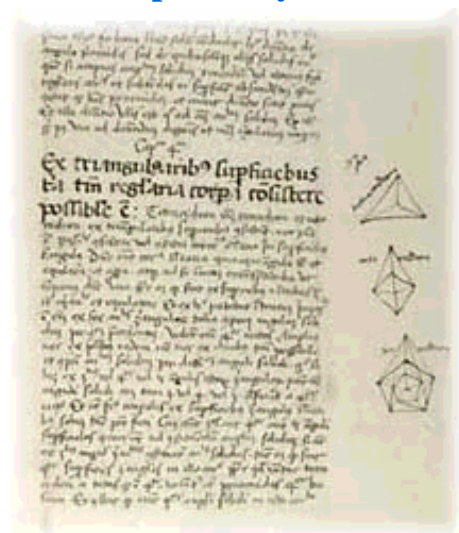


Thomas Bradwardinus – počtár vhodných pomerov

Doba a život

Jedným z významných predstaviteľov oxfordskej školy prírodnej filozofie je aj **Thomas Bradwardinus** (asi 1290–1349). Pochádzal z mestečka Chichester. Vyštudoval teológiu Merton College na Oxfordskej univerzite, ako františkánsky mních sa stal aj kanonikom (1333) i kancelárom Katedry sv. Pavla v Londýne (1335). Bol aj osobným kaplánom kráľa Edwarda III. Od 4. júna 1349 bol **Bradwardinus** ustanovený za arcibiskupa cantenburského. Ako obeť moru zomrel 26. 8. 1349 v Londýne.

Vzťah k prírodným vedám



Bradwardinus bol presvedčený o tom, že všetky príčiny prírodných javov sa dajú vyjadriť matematicky (pomocou čiar, uhlov, číselných pomerov). Vydal odbornú prácu *O pomeroch rýchlosti pri pohybe* (1328). Skúmal závislosť medzi rýchlosťou a silou, ktorá ju spôsobuje. Uvádzal, že rýchlosť je priamo úmerná pôsobiacej sile a nepriamo úmerná odporu, teda hmotnosti a treniu. Z matematiky napísal práce: *Praktická aritmetika*, *O teoretickej aritmetike*, *Teoretická geometria*, *Traktát o spojitosti*. V nich skúmal napríklad aj pravidelné mnohoholníky, izometrické vlastnosti kruhu a

gule, pomery iracionálnych čísiel, vyplňanie priestoru pomocou pravidelných mnohostenov. Zvlášť zaujímavé úvahy viedol **Bradwardinus** o spojitosti (z rokov 1328–1335). Odmietal názor o tom, aby kontinuum pozostávalo z konečného počtu nedeliteľných častí, ale aj tvrdenie, že spojité možno dostať ako nekonečne veľa nedeliteľného. *Žiadne kontinuum sa nedá zložiť z nekonečne veľa nedeliteľných*. V podstate už vo svojej dobe rozlišoval aktuálne a potencionálne nekonečno. V *Traktáte o pomeroch* (1328) jasne odlíšil počítanie s kvantitami veličín od výpočtov s prostými číslami. Pochopil pojem funkcia, jej argument a hodnotu funkcie.

Filozof a teológ

Ostro vystúpil (1344) proti pelagiánskym názorom, podporil priamu všemohúcnosť Boha prísnou determináciou. V práci *De causa Dei* písal o možnostiach všetko poznávajúcej vedy. Bol nasledníkom učeného Dunsca Scota (1270–1308), ktorý uprednostňoval vôľu pred poznávaním (pretože aktívna vôľa usmerňuje intelekt), ale za vedu považoval v prvom rade prírodnú vedu (náboženské dogmy sú exaktne nedokázateľné, majú praktický význam pre ľudské konanie). **Bradwardinus** začal sústreďovať svoju pozornosť na formy, metódy a možnosti ľudského premýšľania.

S novým pohľadom

Thomas Bradwardinus nesporne prispel k vytváraníu pojmu funkcia, lebo spoznal, že existuje časový priebeh nejakej fyzikálnej veličiny. Pýtal sa, ako prebieha zmena, hľadal medzi zmenami veličín príslušné pomery. Zvlášť citlivo pristúpil k chápaniu spojitého a diskrétného, ktoré leží na rozhraní medzi fyzikou, matematikou a filozofiou. Pohyb chápal ako prechod priestorového kontinua časom. **Bradwardinus** chcel pomocou matematických úvah vysvetliť niektoré vlastnosti základných pojmov priestoru, času a pohybu.



THOMAS BRADWARDINE, *Geometria speculativa*, 1495, (scheda n. 18).

Mikuláš z Oresmu – bádavý mních

Zakladanie univerzít

Najvplyvnejšia univerzita vrcholného stredoveku bola v Paríži založená v roku 1160 s potvrdenými cisárskymi privilégiami z roku 1174, kde okolo roku 1258 založil Robert de Sorbon prvé študentské domovy. V tom čase bola už univerzita v Bologni (1119) a postupne vznikali v Oxforde (1167), v Cambridgi (1209), v Padove (1222), v Neapoli (1224). Neskôr pribudli v Prahe (1348), v Krakove (1364), aj vo Viedni (1365) a Heidelbergu (1385). Univerzity zohrali dôležitú úlohu aj v rozvoji matematiky, i keď výchova matematikov nebola špeciálnym cieľom univerzít.

Osobnosť a záujmy



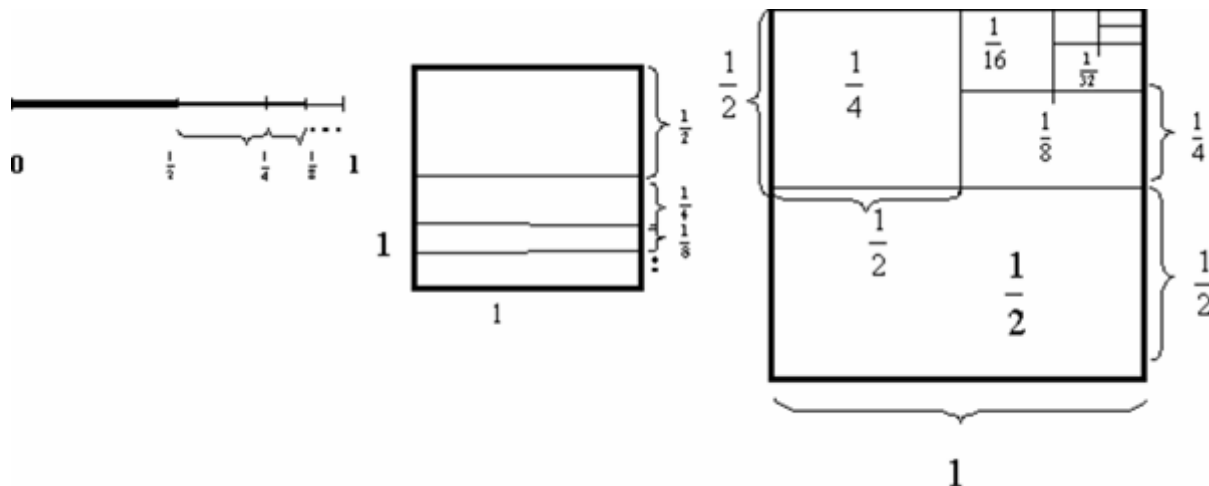
V 14. storočí bol vynikajúcim učencom – matematikom **Mikuláš z Oresmu (Nicole Oresme, asi 1323–1382)**. V rokoch 1348 až 1361 prednášal na Collége de Navarre v Paríži, prekladal latinské texty do francúzštiny a komentoval ich. Vytváral francúzsku vedeckú terminológiu hlavne v astronómii a geografii. V oblasti matematiky a mechaniky predvídal niektoré pojmy a metódy, ktoré sa uplatnili až v 16. a 17. storočí. V roku 1356 bol vysvätený na kňaza a od roku 1377 bol biskupom v Lisieux v Normandii.

Mikuláš sa snažil o matematický popis pohybu, uvažoval o možnosti iných svetov aj o rotácii Zeme. V práci *O konfigurácii kvalít* používal geometrické vyjadrenie veličín a ich vzájomné súvislosti. Nad úsečkou znázorňujúcou čas zostrojil „čiaru intenzity pohybu“ a porovnával „formy o premennej šírke.“ V podstate sa jednalo o grafy rýchlosti, kde obsah obrazca vyjadroval veľkosť dráhy.

Z diela

V spise *Algorismus proportionum* pojednal **Mikuláš z Oresmu** o počítaní s mocninami s lomeným mocniteľom a vedel napríklad, že $8 = 4^{\frac{3}{2}}$ (v našom zápise), pretože $4^3 = 64$ a $64 = 8^2$, t.j. 8 sa nachádza v „poldruhanásobnom pomere“ k 4. V podstate vedel slovne formulovať operácie s mocninami s lomenými exponentmi.

Geometrickou interpretáciou vedel **Mikuláš z Oresmu** určovať aj súčet nekonečných radov. Ukázal, že $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$, pretože „pochopil obrázky“:

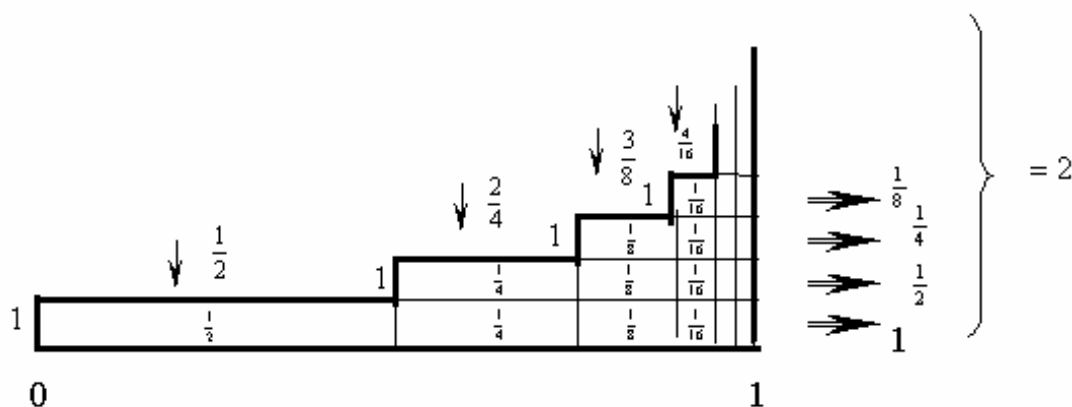


Vtipne predviedol, už v roku 1350, že harmonický rad $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ nemôže mať konečný súčet, lebo (v našom zápise)

$$\begin{array}{l}
 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\dots} \\
 \end{array}$$

a to znamená súčet blížiaci sa k nekonečnu.

Takýmto obrázkom



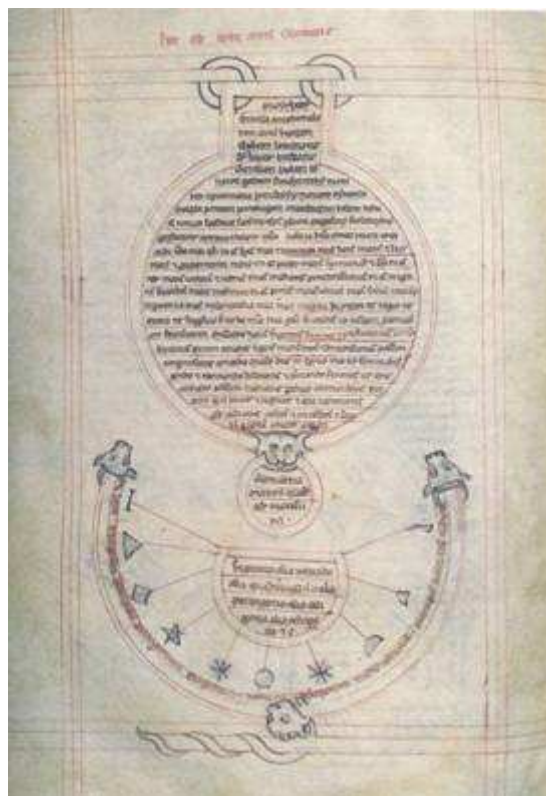
vedel určiť súčet $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots = 2$

Mikuláš z Oresmu prispel k stanoveniu závislosti medzi časom a meranou veličinou, grafický záznam priebehu bol už výrazom prírodného zákona. Vytušil úlohu funkčných závislostí (funkcia ako „faustovské číslo“) ako nástroja pre skúmanie prírody a jej merateľných zákonov. Patrí k prvým, ktorý sa nezľakol tajomstiev nekonečna a spoznal, že môže existovať nekonečný

útvár s konečným obsahom. Vo svojich úvahách obsiahol niekoľko hlbokých myšlienok matematiky premenných veličín, ktoré však museli počkať, pokiaľ sa neobjavil matematický aparát pre riešenie konkrétnych reálnych problémov fyziky a ďalších technických i prírodných vied.



Mikuláš z Oresmu



Mikuláš Kuzánsky – hľadač Jednoty, v ktorej sa protiklady nevyučujú

Neskorý stredovek

Žil na rozhraní stredoveku a renesancie. Osamotený mysliteľ ovládal súdobé myšlienkové prúdy aj ich antické pramene. Zavŕšil stredovekú teologickú tradíciu, vyzval k vyhodnoteniu empirických faktov poznávaných v prírode. Spoznal, že na pochopenie tajuplných a protikladných vlastností sa najlepšie hodí matematika. Rozlíšil tri stupne poznania. Zmyslové poznanie predkladá základné javy, rozumové spoznáva všeobecné a vytvára čísla, intelektuálno-duchovné poznávanie objavuje súvislosti i súperenie protikladov.

Mikuláš Kuzánsky (1401–1464) pochádzal z mestečka Kues na brehu rieky Mosel. Jeho otec Henne Chrypffs bol lodiar a vinár. Po odchode z domova syn používal nové meno **Nicolas Cusanus**. Vyštudoval právo v Heidelbergu a Padove (1422), nevenoval sa mu, rozhodol sa pre duchovnú službu. Bol vysvätený za kňaza, neskôr sa stal duchovným hodnosťom (kardínal 1448, biskup 1450) a diplomatom. Ako pápežský vyslanec bol na koncile v Bazileji (1431) i vo Florencii (1439). Slúžil myšlienke intelektuálnej a náboženskej jednoty kresťanského sveta, koordinoval moc svetskú a duchovnú.



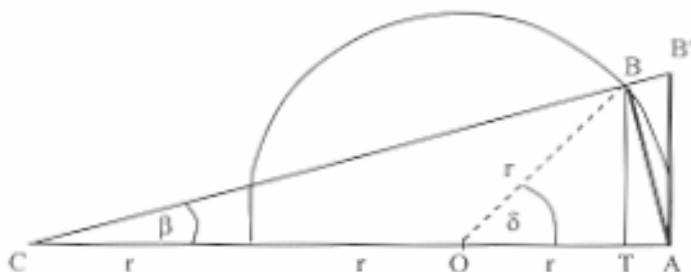
Rozptýlená jednota mnohosti

Zaujímavou charakteristikou jeho obsiahleho diela (spisy politicko-náboženské, filozoficko-teologické i fyzikálno-matematické) je učenie o jednote a splývaní protikladov v Bohu ako absolútne nekonečnom bytí. V práci *O učenej nevedomosti* (*De docta ignorantia*, 1439–1440) si uvedomil, že naša principiálna neschopnosť úplného poznania (*Intelekt, ktorý nie je pravdou, nikdy nepochopí pravdu tak presne, že by postupom do nekonečna nemohla byť pochopená presnejšie.*) je základom ľudskej učenej nevedomosti o podstate sveta. O Bohu i prírode budeme mať vždy iba domnienky. Boh je večná Jednota, Zhoda, Totožnosť. Boh obsahuje všetko stvorené i vo všetkom je prítomný. Všetko v ňom je ním, je vo všetkých veciach tým, čím sú. Boh sa ukazuje ako svet. Svet je jednota v mnohosti, odvodené nekonečno, priestor a symbol neviditeľného. Boh je skrytá rovina všetkého existujúceho. Boh je nevysloviteľný, lebo je nekonečne väčší od všetkého, čo sa dá vymenovať. Jednota je rozptýlená do mnohosti, jednoduchosť do zložitosti, nekonečno do konečna, večnosť do času, nevyhnutnosť do možnosti. Poznanie je tvorivé priblíženie rozumu k podstate pozorovaných a vnímaných javov, ktoré sú vysvetliteľné zo seba samých, ale len vo vzťahu k celku.

Priateľ matematiky

Kuzánsky uvažoval aj o prírodných vedách. Uznal, že jednota látky a formy sa uskutočňuje prostredníctvom pohybu. Zem nepokladal za centrum vesmíru, uznával hypotézu jej pohybu. Predpokladal systém a harmóniu vesmíru na základe matematických princípov. Poukázal na potrebu reformovať kalendár, zostavil mapu strednej Európy. Zaviedol meranie pulzu ako pomôcku pre diagnostiku, navrhol okuliare s konkávnymi šošovkami. Bol označovaný aj za milovníka matematiky. Zaujímal sa o približné geometrické konštrukcie. Vedel, že nie je možná presná kvadratura kruhu. Pre postup rektifikácie kružnicového oblúka podal zaujímavý návrh, ktorý bol jednoduchý a pomerne presný, s chybou asi 0,2%.

Kuzánskeho aproximácia pre dĺžku kružnicového oblúka



$$\begin{aligned} \text{arc } AB &\approx AB' \\ \text{ak } r = 1 \quad \sin \delta &= |BT| \\ &\quad \cos \delta = |OT| \\ |AB'| &= 3 \cdot \text{tg } \beta \end{aligned}$$

Pre $\triangle CTB$ platí $\sin \beta = \frac{TB}{BC} = \frac{\sin \delta}{CB} = \frac{\sin \delta}{\sqrt{5+4\cos \delta}}$, ale

$$|CB| = \sqrt{(2+OT)^2} = \sqrt{(2+\cos \delta)^2 + (\sin \delta)^2} = \sqrt{4+4\cos \delta + \cos^2 + \sin^2 \delta} = \sqrt{5+4\cos \delta},$$

$$\text{potom } |AB'| = 3 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 3 \cdot \frac{\sin \delta}{CB} \cdot \frac{1}{\frac{2+OT}{CB}} = 3 \cdot \frac{\sin \delta}{CB} \cdot \frac{CB}{2+OT} = 3 \cdot \frac{\sin \delta}{2+\cos \delta},$$

napr. pre $\delta = 45^\circ$ je $|AB'| \approx 0,7836\dots$

dĺžka oblúka $AB = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854\dots$ – chyba asi 0,2 % .

Matematické myslenie slúži k poznaniu pravdy

Matematika môže byť nástrojom skúmania prírody. Údaje získané z pozorovania a merania vedú k poznaniu pravdy. **Mikuláš Kuzánsky** zistil: *Všetko skúmanie je porovnávaním, lebo používa pomer ako prostriedok... Číslo je výrazom jednoty.. Počet (číslo) znamená pomer. Pomer je myšlienková konštrukcia... Číslo je základ všetkých vecí chápaných myslením... K poznaniu božských vecí je nám otvorená iba cesta prostredníctvom symbolov... Matematika nám najviac pomáha pri pochopení*

rozličných božských vecí. **Kuzánsky** ponúkol už vo svojej dobe systémové a štruktúralne myslenie, v ktorom sa poznávané entity premieňajú vo vzájomných väzbách. Celok v jednote mnohosti spája aj protiklady. Filozoficky si všimol problém aktuálneho nekonečna, dialektiku spojitého a diskrétného, jednoty a mnohosti, možnosti a uskutočnenia, bytia i nebytia. Vytušil zhodu protiv vo vyššom pohľade, v najvyššom existujúcom bytí.

Jednota pre vieru, Tajomstvo pre rozum

Filozof a teológ, hodnostár a diplomat, učenec a humanista **Mikuláš Kuzánsky** zjednocoval náboženský i svetský zmysel duchovného zápasu, smelé špekulácie i hlbokú katolícku nábožnosť, plodné myšlienky novoplatonizmu i mysticizmu prijímané cez prizmu racionálnej vedy a rodiacej sa renesancie, spoločenskú znášateľnosť náboženských konfesií. Aj po stáročiach ukazuje smer k vnútorne skrytej povahe ľudskej objavnosti a myšlienkovej tvorivosti, k odhaľovaniu a odkrývaniu tajomstiev každého druhu. Napriek tomu, že vedieť znamená poznávať nemohúcnosť spoznania, **Mikuláš Kuzánsky** nás stále inšpiruje smerom k Jednote nad všetkými protikladmi.



Johannes Müller (Regiomontanus)

– systematik rovinnej a sférickej trigonometrie

Úlohy aj v listoch

Ľudia si v dopisoch oznamujú rôzne správy. Matematici si posielajú úlohy. Taliansky astronóm Giovanni Bianchini dostal v liste úlohu: *Vypočítajte obsah štvoruholníka vpísaného do kruhu s polomerom 60, ak strany štvoruholníka sú v pomere 4:7:13:17.* Zvedavý pisateľ bol mladý nemecký matematik a astronóm **Johannes Müller–Regiomontanus** (1436–1476). V záznamoch o ňom sa vyskytujú rôzne mená: Joannes de Monte Regio, Hans von Köninsperk, Königsberger, Molitor, Moller a ďalšie obmeny. Druhé prímene **Regiomontanus** je zlatinizovaný názov rodiska – Königsbergu, mestečka neďaleko Coburgu (dnes Bavorsko v Nemecku).

Cesty životom

Jeden z najlepších stredovekých astronómov a matematikov 15. storočia sa narodil 6. júna 1436. Dvanásťročný začal študovať na univerzite v Lipsku, štúdiá dokončil vo Viedni u významného astronóma a matematika Georga



Peurbacha (1423-1461). Tu začal aj prednášať matematiku a astronómiu (1458). Niekoľkoročný pobyt v Taliansku mu umožnil zdokonaľiť sa v gréčtine a vyučovať astronómiu v Padove. Na pozvanie kráľa Mateja Korvína **Regiomontanus** možno aj krátko prednášal na novozaloženej univerzite **Academia Istropolitana** v Pressburgu (od 1467), dnešnej Bratislave. Pôsobil aj v Ostrihome, Rábe, v Budíne bol správcom kráľovskej knižnice. Vo vlastnej tlačiarňi v Norimbergu (1471) vydával vedeckú literatúru a riadil astronomické observatórium. V roku 1475 odišiel na pozvanie pápeža Sixta IV. do Ríma, aby sa zúčastnil prác na reforme juliánskeho kalendára. Morová epidémia zasiahla aj jeho. Zomrel 6. júla 1476 v Ríme.

Odborné práce

Regiomontanus preložil veľa odborných prác z gréčtiny, dokončil po Puerbachovi z arabštiny preklad slávnej astronomickej knihy Klaudia Ptolemaia *Veľká skladba*. Preštudoval práce arabského učenca al-Battáního (okolo 858–929) a v jeho diele našiel a zdôraznil kosínusovú vetu pre sféricnú trigonometriu. V rokoch 1462–1464 napísal dielo *Päť kníh o všetkých druhoch trojuholníkov*, ktoré však vyšlo tlačou až neskôr (1533). Je to prvá práca, v ktorej bola trigonometria jasne oddelená od astronómie, zároveň bol vyložený celý systém viet rovinnej a sférickej trigonometrie. V roku 1467 spísal prvé desatinné trigonometrické tabuľky, ktoré vyšli až roku 1490. **Regiomontanus** neriešil trigonometrické úlohy iba konštruktívne, ale aj algebraicky, t.j. výpočtom. Okrem astronomickej teórie a pozorovania komét sa venoval aj opisu a konštrukcii astronomických prístrojov.

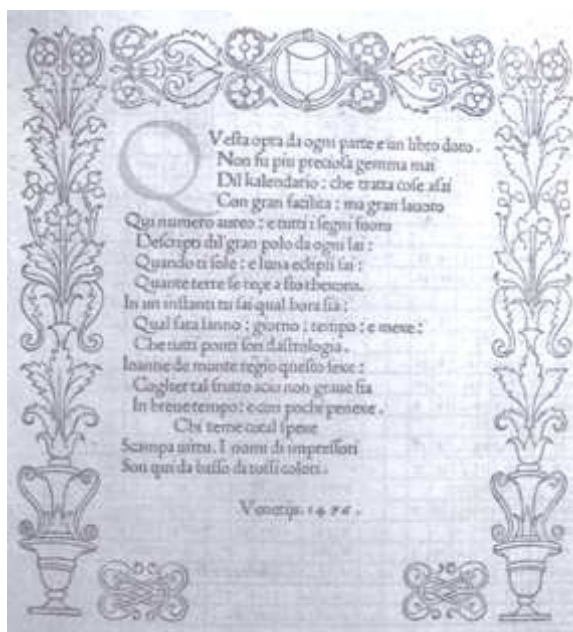
Johannes Müller–Regiomontanus rozvinul astronomické i matematické bádanie svojej doby. Medzi prvými v Nemecku počítal s arabskými číslicami, bol vynikajúcim znalcom antickej gréckej matematiky, systematicky študoval trigonometriu a ukázal ju ako samostatnú matematickú disciplínu. Stal sa pozoruhodným astronómom európskej tradície medzi Ptolemaiom a Koperníkov. I keď **Regiomontanus** zomrel veľmi mladý, získal si svojimi odbornými prácami autoritu medzi matematikmi i v radoch astronómov.

Zaujímavý je úryvok z listu, ktorý poslal **Regiomontanus** rektorovi univerzity v Erfurte: *I keď iní chcú riešiť svoje problémy svoje problémy vojnami, my chceme zápasit' inými prostriedkami, nie v bitkách, ale pomocou vydávania kníh, treba aby našimi zbraňami neboli zbrane vrhačské, bodáky a baranidlá na búranie pevnosti, ale prístroje Hipparcha a Ptolemaia, ktoré som zostrojil z kovu, obrovské a vhodné pre pozorovanie hviezd.* V roku 1474 vydal **J. Müller** tabuľky polôh Slnka, Mesiaca a planét na každý deň pre roky 1475–1506. Na 896 stranách obsahovali 30 000 číselných údajov spolu s návodom ako prepočítať tieto údaje pre rôzne miesta v Európe. Regiomontanove tabuľky používal aj Krištof Kolumbus a ďalší moreplavci.



Objavil ďalšiu dokonalosť

Nikomachos z Gerasy (1.–2. stor. n. l.) sa vyjadril: *Dokonalé čísla sú krásne a krásne veci bývajú zriedkavé.* Dokonalé čísla sú tie prirodzené čísla, ktoré sa rovnajú súčtu všetkých svojich deliteľov, menších ako oni samé. Prvé štyri dokonalé čísla sú **6** = 1 + 2 + 3, **28** = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, **496**, **8128**. Už *Euklides* dokázal, že ak je $2^n - 1$ prvočíslo, tak $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ je dokonalé číslo. Piate dokonalé číslo **33550336** objavil **Johannes Müller–Regiomontanus**.



J. Regiomontanus, Calendarium, 1476

Luca Pacioli – algebra ako väčšie umenie

Stredovekí študenti



Koncom 15. storočia medzi najznámejšie a najväčšie vzdelávacie inštitúcie patrila univerzita v Bologni. Jej študentmi boli Mikuláš Koperník, Albrecht Dürer, ale aj **Luca Pacioli** (asi 1445–1514), neskôr mních františkánskej reholi, profesor matematiky vo Florencii, v Ríme, v Neapoli i v Benátkach a učiteľ i priateľ Leonarda da Vinci.

Vyššie umenie

Jednou z prvých tlačených matematických kníh vôbec, s charakterom encyklopédie matematických vedomostí svojej doby, bola z roku 1494 *Suma znalostí z aritmetiky, geometrie, pomerov a úmerností*, napísaná po taliansky, rozdelená do piatich častí {aritmetika, zememeračstvo, kupecké počty (3 časti)}. Autor **Luca Pacioli** tu nazýva algebru vyšším umením a kladie ju do základov každého počítania. Zaviedol aj označenie znamienok plus \tilde{p} a mínus \tilde{m} , neznámu označoval co , jej druhú mocninu ce , tretiu mocninu cu . Odmocninu označoval písmenom R (z latinského radix – koreň). Bez dôkazu vyslovil pravidlá o násobení záporných čísel. Popísal aj pravidlá pre numerické operácie s druhými odmocninami, vedel dokázať, že $\sqrt{10} + \sqrt{40} = \sqrt{90}$. Zaujímavé je určite aj to, že na určenie odmocniny používal postupné približné vyjadrenia zo vzťahu $\sqrt{N} = p + \frac{N - p^2}{2p}$, kde p je získaná približná hodnota a N dané číslo. Spomínaná *Suma* sa stala prvou základnou matematickou prácou v 15. storočí.



Stredoveké násobenie

	2	7	8	3	
9	0	2	2	0	3
	6	1	4	9	
	4	4	6	6	2
0	0	2	3	1	4
	8	8	2	2	
	1	6	9	2	

Možno aj dnes zaujme spôsob, akým **Luca Pacioli** násobil „*po štvorcoch*“. Z uvedených obrázkov by ste na to mohli prísť. V tom čase vedel **Pacioli** násobiť aspoň ôsmimi spôsobmi. Zásľuhu si získal aj tým, že rozšíril dnešný spôsob delenia viacciferných čísel. Neskôr zostavil aj zbierku zaujímavých úloh „pre bystré hlavy“. Veľmi známym sa stalo jeho prehlásenie:

Zlato sa skúša ohňom a talent matematikou.

Podnetné zadanie

Vyriešte túto úlohu: V trojuholníku je vpísaná kružnica s polomerom $\rho = 4$ cm. Bod dotyku delí jednu zo strán trojuholníka na časti dlhé 6 cm a 8 cm. Vypočítajte dĺžky ostatných dvoch strán trojuholníka. (Ak potrebujete dobrú radu pre vyriešenie tejto úlohy, tak je tu: Spomeňte si na Herónov vzorec pre obsah trojuholníka, a ešte jeden ďalší vzťah pre obsah trojuholníka, kde sa využíva polomer vpísanej kružnice.)

Božský pomer



Luca Pacioli vyjadril svoj úžas nad „zlatým rezom“ (rozdelenie úsečky na dve časti tak, že pomer dĺžky pôvodnej úsečky k väčšej časti je rovnaký ako pomer dĺžky väčšej časti k menšej) až tridsiatimi prídavnými menami. Tento pomer nesie aj označenie *divina proportio* – *božský pomer*. Vydal o ňom pojednanie (r. 1509) s ilustráciami od Leonarda da Vinci. *Zlatý rez pôsobí na nás podstatne zvláštne, nepopísateľne, ... najdôstojnejšie.*





MÍSTA VÝZNAMNÁ PRO VÝVOJ MATEMATIKY VE STŘEDOVĚKU

- | | | |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. Ujjain: <i>Bráhma Gupta, Bhaskara</i> | 4. Cordoba: <i>Středisko západoarabské kultury</i> | 7. Pisa: <i>Leonardo Pisánský</i> |
| 2. Patna: <i>Aryabhata</i> | 5. Toledo: <i>Arabská překladatelská škola</i> | 8. Konstantinopol: <i>Středisko byzantské kultury</i> |
| 3. Bagdád: <i>Středisko východoarabské kultury</i> | 6. Bugia: <i>Leonardo Pisánský</i> | 9. Alexandrie |
| | | 10. Chorezme: <i>Al Chovarizmi</i> |

Závěrečné presvedčenie

Spomínané osobnosti sú významnou ukázkou tých, ktorí udržiavali vo svojej dobe dôraz aj na matematické okolnosti svojho životného pôsobenia. Možno by sme mohli k nim pripojiť aspoň niekoľko ďalších mien: *Cassiodorus* (okolo 490 – 580), *Brahmagupta* (asi 598–625), *Abu Kámil* (asi 850–930), *M. Pellos* (asi 1018–1078), *O. Chajjám* (1048–1131), *Bháskara II.* (asi 1140–1185), *Jordanus Nemorarius* (asi 1225–1260), *Křišťan z Prachatic* (asi 1370–1439), *G. Peurbach* (1423–1461). O nich, ale aj o ďalších stredovekých šíriteloch matematickej vzdelanosti si už hľadajte ďalšie informačné zdroje sami.

Možno vás tento prehľad aspoň trochu presvedčil, že dlhé obdobie stredoveku nebolo bez význačných osobností, učených ľudí, ktorí ponúkali ešte nerozvinuté logicko-matematické myslenie, aby tak pripravili myšlienkovú pôdu pre trvalé korene hlbokej a užitočnej matematickej kultúry.

Dušan Jedinák