

Heuristiky ve výuce matematiky

Petr Eisenmann

Univerzita J. E. Purkyně Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta

Autoři

Tato prezentace popisuje výsledky projektu, jehož hlavními řešiteli byli:

Petr Eisenmann

Jiří Příbyl

Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem

a

Jarmila Novotná

Pedagogická fakulta UK Praha

Zdroje

- Pólya, G. (2004). *How to Solve It: A New Aspects of Mathematical Method*. Princeton. (I. vydání 1945)

Zdroje

- Pólya, G. (2004). *How to Solve It: A New Aspects of Mathematical Method*. Princeton. (I. vydání 1945)
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London.

Zdroje

- Pólya, G. (2004). *How to Solve It: A New Aspects of Mathematical Method*. Princeton. (I. vydání 1945)
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London.
- Kopka, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy*. Praha

Zdroje

- Pólya, G. (2004). *How to Solve It: A New Aspects of Mathematical Method*. Princeton. (I. vydání 1945)
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London.
- Kopka, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy*. Praha
- Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice.

Dlouhodobý experiment

- Gymnázium Jana Nerudy, Praha, 20 žáků ve věku 16-18 let
- Gymnázium Václava Hraběte, Hořovice, 24 žáků ve věku 12-14 let
- Základní škola Pod Vodojemem, Ústí nad Labem, 18 žáků ve věku 14-16 let
- Základní škola Na Slovance, Praze, 16 žáků ve věku 14-16 let

Strategie

- Analogie

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky
- Systematické experimentování

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky
- Systematické experimentování
- Pokus – ověření – korekce

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky
- Systematické experimentování
- Pokus – ověření – korekce
- Užití falešného předpokladu

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky
- Systematické experimentování
- Pokus – ověření – korekce
- Užití falešného předpokladu
- Konkretizace a zobecnění

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky
- Systematické experimentování
- Pokus – ověření – korekce
- Užití falešného předpokladu
- Konkretizace a zobecnění
- Přeformulování problému

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky
- Systematické experimentování
- Pokus – ověření – korekce
- Užití falešného předpokladu
- Konkretizace a zobecnění
- Přeformulování problému
- Zobecnění a konkretizace

Strategie

- Analogie
- Zavedení pomocného prvku
- Vypuštění podmínky
- Systematické experimentování
- Pokus – ověření – korekce
- Užití falešného předpokladu
- Konkretizace a zobecnění
- Přeformulování problému
- Zobecnění a konkretizace
- Řešitelský obrázek

Analogie

Úloha č. 1

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$?

Úloha č. 1

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$?

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{3}{4}$ nebo $\frac{2}{3}$?

Úloha č. 1

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$?

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{3}{4}$ nebo $\frac{2}{3}$?

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

Úloha č. 1

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$?

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{3}{4}$ nebo $\frac{2}{3}$?

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

Větším zlomkem je zlomek $\frac{125}{126}$.

Úloha č. 2

Auto ujelo 420 km a spotřebovalo při tom 29 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Úloha č. 2

Auto ujelo 420 km a spotřebovalo při tom 29 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Auto ujelo 200 km a spotřebovalo při tom 16 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Úloha č. 2

Auto ujelo 420 km a spotřebovalo při tom 29 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Auto ujelo 200 km a spotřebovalo při tom 16 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

$$\frac{16}{\frac{200}{100}} = 8$$

Úloha č. 2

Auto ujelo 420 km a spotřebovalo při tom 29 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Auto ujelo 200 km a spotřebovalo při tom 16 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

$$\frac{16}{\frac{200}{100}} = 8 \qquad \frac{29}{\frac{420}{100}} \doteq 6,9$$

Úloha č. 2

Auto ujelo 420 km a spotřebovalo při tom 29 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Auto ujelo 200 km a spotřebovalo při tom 16 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

$$\frac{16}{\frac{200}{100}} = 8 \qquad \frac{29}{\frac{420}{100}} \doteq 6,9$$

Průměrná spotřeba auta na 100 km činí 6,9 litrů.

Úloha č. 3

Je dána pravidelný osmistěn a přímka p ležící vně osmistěnu. Určete rovinu, která prochází přímkou p a rozdělí daný osmistěn na dvě shodné části.

Úloha č. 3

Je dána pravidelný osmistěn a přímka p ležící vně osmistěnu. Určete rovinu, která prochází přímkou p a rozdělí daný osmistěn na dvě shodné části.

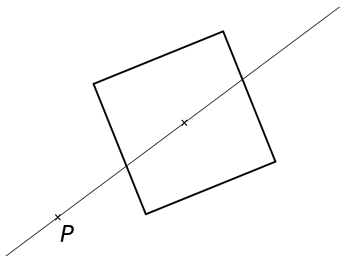
Je dán čtverec a bod P , který leží vně čtverce. Určete přímku, která prochází bodem P a rozdělí daný čtverec na dva shodné útvary.

Úloha č. 3

Je dán čtverec a bod P , který leží vně čtverce. Určete přímku, která prochází bodem P a rozdělí daný čtverec na dva shodné útvary.

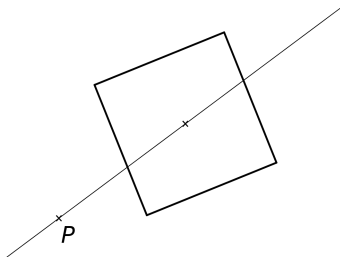
Úloha č. 3

Je dán čtverec a bod P , který leží vně čtverce. Určete přímku, která prochází bodem P a rozdělí daný čtverec na dva shodné útvary.



Úloha č. 3

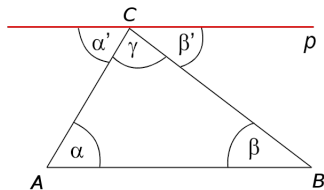
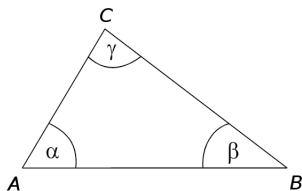
Je dán čtverec a bod P , který leží vně čtverce. Určete přímku, která prochází bodem P a rozdělí daný čtverec na dva shodné útvary.



Rovina musí vést středem pravidelného osmistěnu.

Zavedení pomocného prvku

Pomocný prvek – přímka



Pomocný prvek zavedený substitucí

$$x^4 - 5x + 6 = 0$$

Pomocný prvek zavedený substitucí

$$x^4 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 = y$$

Pomocný prvek zavedený substitucí

$$x^4 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 = y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = -1$$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 4$$

Pomocný prvek zavedený substitucí

$$x^4 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 = y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = -1$$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 4$$

$$u = \frac{1}{x} \quad v = \frac{1}{y}$$

Úloha č. 1

V množině reálných čísel vyřešte rovnici

$$\frac{x+3}{9} + \frac{x+5}{7} = \frac{x+10}{2} + \frac{x+8}{4}$$

Úloha č. 1

V množině reálných čísel vyřešte rovnici

$$\frac{x+3}{9} + \frac{x+5}{7} = \frac{x+10}{2} + \frac{x+8}{4}$$

Ke každé straně rovnice přičteme číslo 2.

Úloha č. 1

V množině reálných čísel vyřešte rovnici

$$\frac{x+3}{9} + \frac{x+5}{7} = \frac{x+10}{2} + \frac{x+8}{4}$$

Ke každé straně rovnice přičteme číslo 2.

$$\frac{x+3}{9} + 1 + \frac{x+5}{7} + 1 = \frac{x+10}{2} + 1 + \frac{x+8}{4} + 1$$

Úloha č. 1

V množině reálných čísel vyřešte rovnici

$$\frac{x+3}{9} + \frac{x+5}{7} = \frac{x+10}{2} + \frac{x+8}{4}$$

Ke každé straně rovnice přičteme číslo 2.

$$\frac{x+3}{9} + 1 + \frac{x+5}{7} + 1 = \frac{x+10}{2} + 1 + \frac{x+8}{4} + 1$$

$$\frac{x+12}{9} + \frac{x+12}{7} = \frac{x+12}{2} + \frac{x+12}{4}$$

Úloha č. 1

$$\frac{x+12}{9} + \frac{x+12}{7} - \frac{x+12}{2} - \frac{x+12}{4} = 0$$

Úloha č. 1

$$\frac{x+12}{9} + \frac{x+12}{7} - \frac{x+12}{2} - \frac{x+12}{4} = 0$$

$$(x+12) \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 0$$

Úloha č. 1

$$\frac{x+12}{9} + \frac{x+12}{7} - \frac{x+12}{2} - \frac{x+12}{4} = 0$$

$$(x+12) \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 0$$

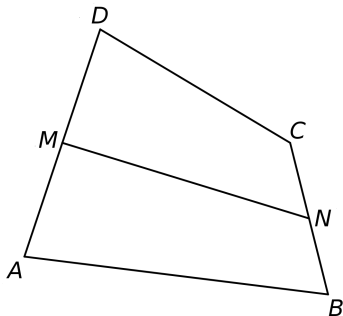
$$x = -12$$

Úloha č. 2

Je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Spojte středy M , N stran AD a BC . Zjistěte, jaký je vztah mezi $|MN|$ a $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.

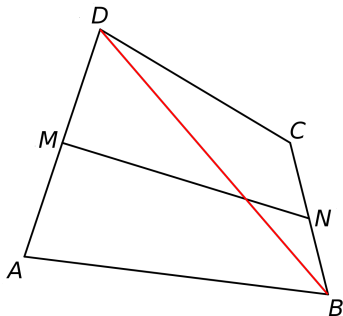
Úloha č. 2

Je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Spojte středy M , N stran AD a BC . Zjistěte, jaký je vztah mezi $|MN|$ a $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.

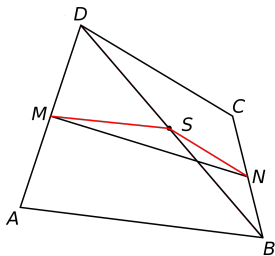


Úloha č. 2

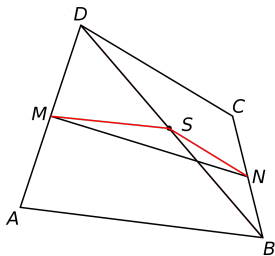
Je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Spojte středy M , N stran AD a BC . Zjistěte, jaký je vztah mezi $|MN|$ a $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.



Úloha č. 2

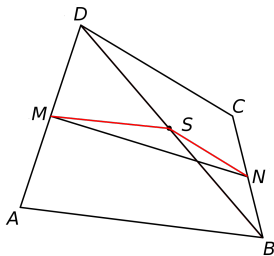


Úloha č. 2



$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|$$

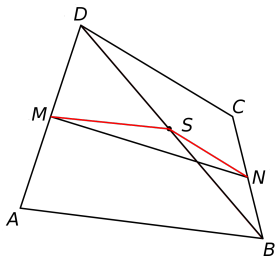
Úloha č. 2



$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|$$

$$|SN| = \frac{1}{2}|CD|$$

Úloha č. 2

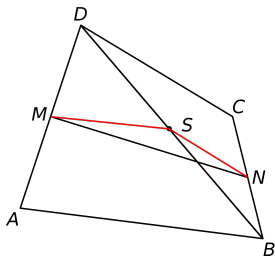


$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|$$

$$|SN| = \frac{1}{2}|CD|$$

$$|MN| < |MS| + |SN|$$

Úloha č. 2

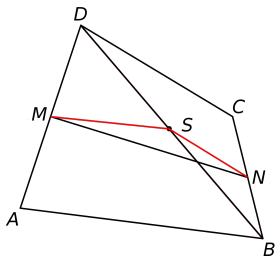


$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|$$

$$|SN| = \frac{1}{2}|CD|$$

$$|MN| < |MS| + |SN| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CD|$$

Úloha č. 2



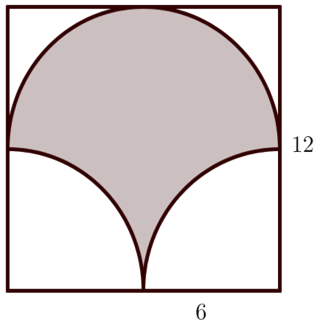
$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|$$

$$|SN| = \frac{1}{2}|CD|$$

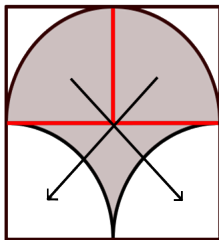
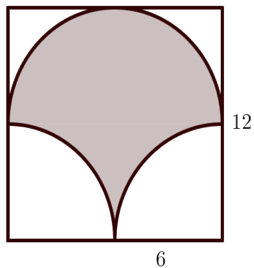
$$|MN| \leq |MS| + |SN| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CD|$$

Úloha č. 3

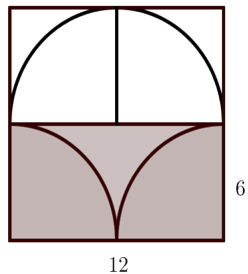
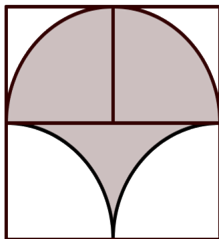
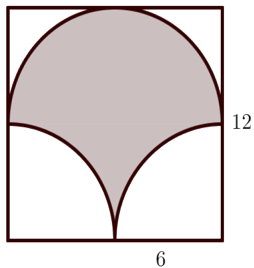
Vypočítejte obsah „kapky“, jestliže její obvod tvoří kružnicové oblouky. Údaje na obrázku jsou uvedeny v centimetrech.



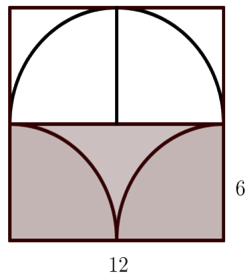
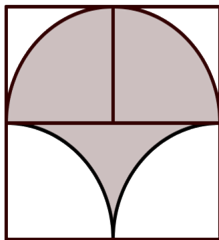
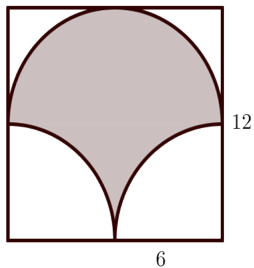
Úloha č. 3



Úloha č. 3



Úloha č. 3

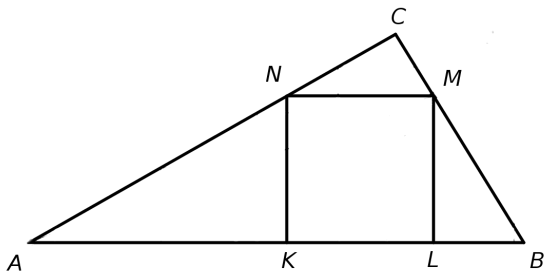


$$S = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

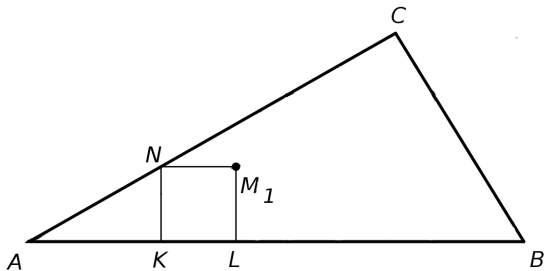
Vypuštění podmínky

Úloha č. 1

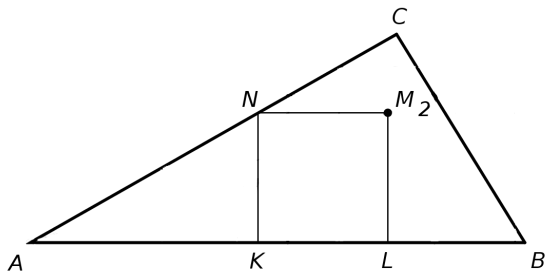
Je dán trojúhelník ABC . Vepište do tohoto trojúhelníku čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na straně AB , vrchol M na straně BC a vrchol N na straně AC .



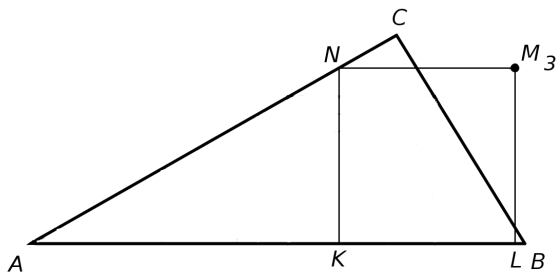
Úloha č. 1



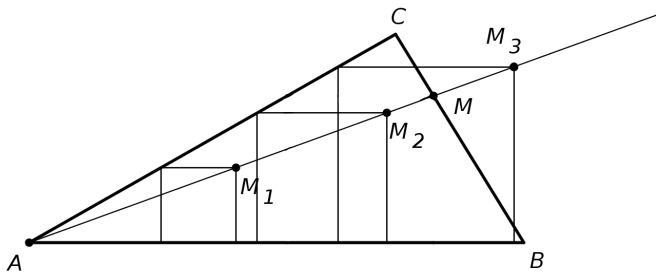
Úloha č. 1



Úloha č. 1



Úloha č. 1



Úloha č. 2

Část lístků do divadla stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

Úloha č. 2

Část lístků do divadla stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

$$11x + 8y = 965 \quad \rightarrow \quad y = \frac{965 - 11x}{8}$$

Úloha č. 2

Část lístků do divadla stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

$$11x + 8y = 965 \quad \rightarrow \quad y = \frac{965 - 11x}{8}$$

x	y	$x + y$
1	119,25	120,25
2	117,875	119,875
3	116,5	119,5
...
62	35,375	97,375
63	34	97

Úloha č. 2

Část lístků do divadla stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

$$11x + 8y = 965 \quad \rightarrow \quad y = \frac{965 - 11x}{8}$$

x	y	$x + y$
1	119,25	120,25
2	117,875	119,875
3	116,5	119,5
...
62	35,375	97,375
63	34	97

V divadle prodali 63 lístků po 11 Kč a 34 lístků po 8 Kč.

Systematické experimentování

Úloha č. 1

Máme připravit 50 kg bonbónové směsi v ceně 120 Kč za jeden kilogram. K dispozici máme dva druhy bonbónů, první v ceně 90 Kč za jeden kilogram, druhý v ceně 140 Kč za jeden kilogram. Kolik každého druhu je třeba smíchat?

Úloha č. 1

1. druh	2. druh	Cena za první	Cena za druhý	Celkem
0	50	0	7000	7000
1	49	90	6860	6950
2	48	180	6720	6900
...
19	31	1710	4340	6050
20	30	1800	4200	6000
21	29	1890	4060	5950
...
49	1	4410	140	4550
50	0	4500	0	4500

Úloha č. 1

1. druh	2. druh	Cena za první	Cena za druhý	Celkem
0	50	0	7000	7000
1	49	90	6860	6950
2	48	180	6720	6900
...
19	31	1710	4340	6050
20	30	1800	4200	6000
21	29	1890	4060	5950
...
49	1	4410	140	4550
50	0	4500	0	4500

K přípravě směsi je třeba smíchat 20 kg prvního druhu a 30 kg druhého druhu.

Úloha č. 2

Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?

Úloha č. 2

Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?

127721, 94749, 8338, 565, 44, 8

Úloha č. 2

Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?

127721, 94749, 8338, 565, 44, 8

6776, 1001, 2992

Úloha č. 2

Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?

127721, 94749, 8338, 565, 44, 8

6776, 1001, 2992

$$6776 = 11 \cdot 616$$

$$1001 = 11 \cdot 91$$

$$2992 = 11 \cdot 272$$

Úloha č. 2

a	b	$"=b^2"$	$"=a^2"$	$"=1000*A^2+100*B^2+10*C^2+1*D^2"$	$"=E2/11"$
1	0	0	1	1 001	91
1	1	1	1	1 111	101
...
1	9	9	1	1 991	181
2	0	0	2	2 002	182
2	1	1	2	2 112	192
...
2	9	9	2	2 992	272
3	0	0	3	3 003	273

Úloha č. 2

a	b	"=b2"	"=a2"	"=1000*A2+100*B2+10*C2+ 1*D2"	"=E2/1 1"
1	0	0	1	1001	91
1	1	1	1	1111	101
...
1	9	9	1	1991	181
2	0	0	2	2002	182
2	1	1	2	2112	192
...
2	9	9	2	2992	272
3	0	0	3	3003	273
3	1	1	3	3113	283
...
3	9	9	3	3993	363
4	0	0	4	4004	364
4	1	1	4	4114	374
...
4	9	9	4	4994	454
5	0	0	5	5005	455
5	1	1	5	5115	465
5	8	8	5	5885	535
5	9	9	5	5995	545
6	0	0	6	6006	546
6	1	1	6	6116	556
...
6	9	9	6	6996	636
7	0	0	7	7007	637
7	1	1	7	7117	647
...
7	9	9	7	7997	727
8	0	0	8	8008	728
8	1	1	8	8118	738
...
8	9	9	8	8998	818
9	0	0	9	9009	819
9	1	1	9	9119	829
...
9	9	9	9	9999	909

Úloha č. 3

Určete, zda je posloupnost $x_n = \frac{20^n}{n!}$ monotónní.

Úloha č. 3

Určete, zda je posloupnost $x_n = \frac{20^n}{n!}$ monotónní.

$$x_1 = 20$$

$$x_2 = 200$$

$$x_3 = 1333,3 \dots$$

$$x_4 = 6666,6 \dots$$

Úloha č. 3

n	x_n
1	20,0
2	200,0
3	1333,3
4	6666,7
5	26666,7
6	88888,9
7	253968,3
8	634920,6
9	1410934,7
10	2821869,5
11	5130671,8
12	8551119,7
13	13155568,7
14	18793669,6
15	25058226,1
16	31322782,6
17	36850332,5
18	40944813,9
19	43099804,1
20	43099804,1
21	41047432,5
22	37315847,7
23	32448563,2
24	27040469,4

Pokus – ověření – korekce

Úloha č. 1

Část lístků do divadla stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

Úloha č. 1

Část lístků do divadla stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

Počet lístků za cenu 11 Kč	Cena v Kč	Počet lístků za cenu 8 Kč	Cena v Kč	Celkem v Kč
96	1 056	1	8	1064
48	528	49	392	920
72	792	25	200	992
60	660	37	296	956
66	726	31	248	974
63	693	34	272	965

Úloha č. 2

Určete dvě po sobě následující lichá přirozená čísla tak, aby jejich součin byl 323.

Úloha č. 2

Určete dvě po sobě následující lichá přirozená čísla tak, aby jejich součin byl 323.

První liché číslo	Druhé liché číslo	Součin čísel	Je to číslo 323?
1	3	3	Není. To je (hodně) málo.
11	13	143	Není. To je málo.
21	23	483	Není. To je moc.
19	21	399	Není. To je moc.
17	19	323	Ano. To je ono.

Užití falešného předpokladu

Úloha č. 1

Třetina neznámého celého čísla zmenšená o 20 % je číslo 32. O jaké číslo se jedná?

Úloha č. 1

Třetina neznámého celého čísla zmenšená o 20 % je číslo 32. O jaké číslo se jedná?

60

Úloha č. 1

Třetina neznámého celého čísla zmenšená o 20 % je číslo 32. O jaké číslo se jedná?

60

$$\frac{1}{3} \cdot 60 - 0,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 = 16$$

Úloha č. 1

Třetina neznámého celého čísla zmenšená o 20 % je číslo 32. O jaké číslo se jedná?

60

$$\frac{1}{3} \cdot 60 - 0,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 = 16$$

$$60 \cdot 2 = 120$$

Úloha č. 1

Třetina neznámého celého čísla zmenšená o 20 % je číslo 32. O jaké číslo se jedná?

60

$$\frac{1}{3} \cdot 60 - 0,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 = 16$$

$$60 \cdot 2 = 120$$

Hledaným číslem je číslo 120.

Úloha č. 2

Knižní novinka byla zlevněna nejprve o deset procent, o měsíc později o dalších padesát procent z nové ceny. Nyní kniha stojí 270 Kč. Kolik korun stála kniha původně?

Úloha č. 2

Knižní novinka byla zlevněna nejprve o deset procent, o měsíc později o dalších padesát procent z nové ceny. Nyní kniha stojí 270 Kč. Kolik korun stála kniha původně?

300 Kč

Úloha č. 2

Knižní novinka byla zlevněna nejprve o deset procent, o měsíc později o dalších padesát procent z nové ceny. Nyní kniha stojí 270 Kč. Kolik korun stála kniha původně?

300 Kč

$$300 - 30 = 270$$

$$270 : 2 = 135$$

Úloha č. 2

Knižní novinka byla zlevněna nejprve o deset procent, o měsíc později o dalších padesát procent z nové ceny. Nyní kniha stojí 270 Kč. Kolik korun stála kniha původně?

300 Kč

$$300 - 30 = 270$$

$$270 : 2 = 135$$

$$300 \cdot 2 = 600$$

Úloha č. 2

Knižní novinka byla zlevněna nejprve o deset procent, o měsíc později o dalších padesát procent z nové ceny. Nyní kniha stojí 270 Kč. Kolik korun stála kniha původně?

300 Kč

$$300 - 30 = 270$$

$$270 : 2 = 135$$

$$300 \cdot 2 = 600$$

Původně kniha stála 600 Kč.

Úloha č. 3

Adam říká: „Nejprve jsem prohrál čtvrtinu svých skleněnek a pak ještě čtvrtinu toho, co mi zbylo, takže teď mám jen 18 skleněnek.“ Kolik skleněných kuliček měl Adam původně?

Úloha č. 3

Adam říká: „Nejprve jsem prohrál čtvrtinu svých skleněnek a pak ještě čtvrtinu toho, co mi zbylo, takže teď mám jen 18 skleněnek.“ Kolik skleněných kuliček měl Adam původně?

80

Úloha č. 3

Adam říká: „Nejprve jsem prohrál čtvrtinu svých skleněnek a pak ještě čtvrtinu toho, co mi zbylo, takže teď mám jen 18 skleněnek.“ Kolik skleněných kuliček měl Adam původně?

80

$$80 - 20 = 60$$

$$60 - 15 = 45$$

Úloha č. 3

Adam říká: „Nejprve jsem prohrál čtvrtinu svých skleněnek a pak ještě čtvrtinu toho, co mi zbylo, takže teď mám jen 18 skleněnek.“ Kolik skleněných kuliček měl Adam původně?

80

$$80 - 20 = 60$$

$$60 - 15 = 45$$

$$80 \cdot \frac{18}{45} = 32$$

Úloha č. 3

Adam říká: „Nejprve jsem prohrál čtvrtinu svých skleněnek a pak ještě čtvrtinu toho, co mi zbylo, takže teď mám jen 18 skleněnek.“ Kolik skleněných kuliček měl Adam původně?

80

$$80 - 20 = 60$$

$$60 - 15 = 45$$

$$80 \cdot \frac{18}{45} = 32$$

Adam měl původně 32 kuliček.

Konkretizace a zobecnění

Úloha č. 1

Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

Úloha č. 1

Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

56 Kč

Úloha č. 1

Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

56 Kč

koupil za 8 Kč

prodal za 21 Kč

Úloha č. 1

Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

56 Kč

koupil za 8 Kč

prodal za 21 Kč

$$21 - 8 = 13$$

Úloha č. 1

Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

56 Kč

koupil za 8 Kč prodal za 21 Kč

$$21 - 8 = 13$$

$$\frac{13}{8} \cdot 100 = 162,5$$

Úloha č. 1

Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

56 Kč

koupil za 8 Kč

prodal za 21 Kč

$$21 - 8 = 13$$

$$\frac{13}{8} \cdot 100 = 162,5$$

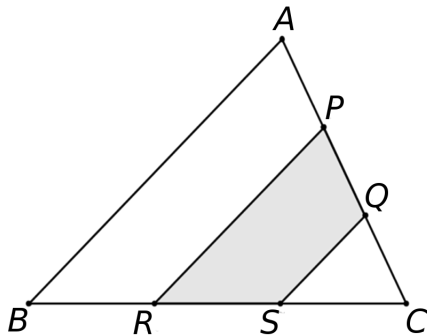
Obchodníkův zisk je 162,5 %.

Úloha č. 2

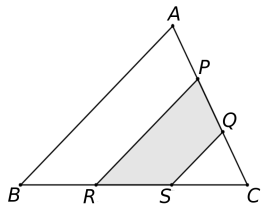
Mějme dán libovolný trojúhelník ABC . Body P , Q , R a S dělí strany AC a BC na tři shodné části. Jaký je poměr obsahů $PQSR$ a ABC ?

Úloha č. 2

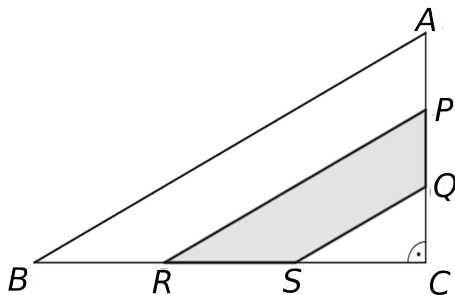
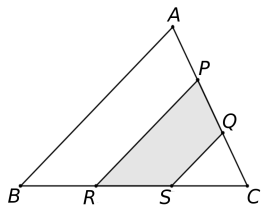
Mějme dán libovolný trojúhelník ABC . Body P , Q , R a S dělí strany AC a BC na tři shodné části. Jaký je poměr obsahů $PQSR$ a ABC ?



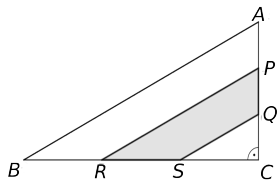
Úloha č. 2



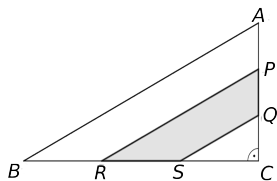
Úloha č. 2



Úloha č. 2

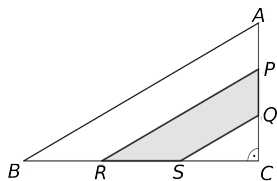


Úloha č. 2



$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v}{2}$$

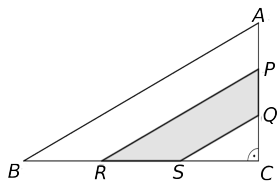
Úloha č. 2



$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$S_{QSC} = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}v}{2}$$

Úloha č. 2

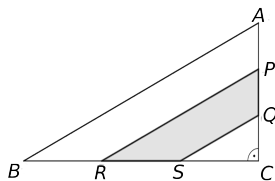


$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$S_{QSC} = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}v}{2}$$

$$S_{PRC} = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3}v}{2}$$

Úloha č. 2



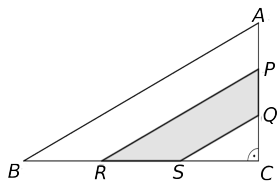
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$S_{QSC} = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{3}v}{2}$$

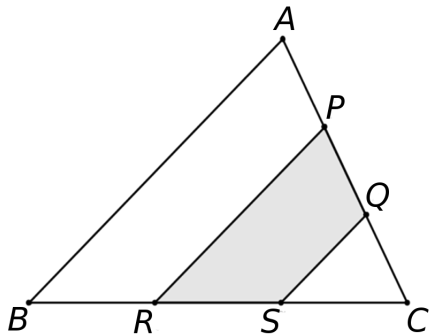
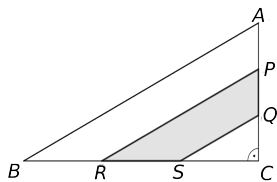
$$S_{PRC} = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3}v}{2}$$

$$S_{PQSR} = \frac{4}{9} \cdot \frac{av}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{av}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{av}{2}$$

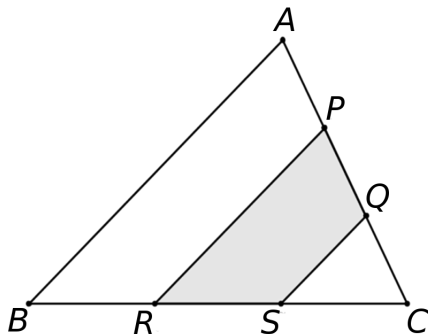
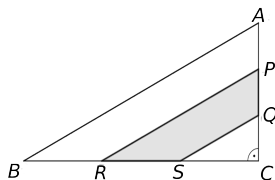
Úloha č. 2



Úloha č. 2



Úloha č. 2



Plocha čtyřúhelníku je jedna třetina plochy trojúhelníku.

Přeformulování problému

Úloha č. 1

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$?

Úloha č. 1

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$?

Mějme dvě stejné pizzy (shodné kruhy). První z nich rozdělíme na 125 shodných dílů, druhou rozdělíme na 126 shodných dílů. Z každé pizzy odeberme jeden díl. Ve které pizze toho zůstane více?

Úloha č. 1

Rozhodněte: Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$?

Mějme dvě stejné pizzy (shodné kruhy). První z nich rozdělíme na 125 shodných dílů, druhou rozdělíme na 126 shodných dílů. Z každé pizzy odeberme jeden díl. Ve které pizze toho zůstane více?

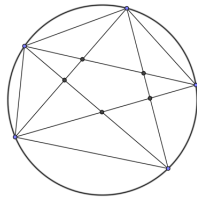
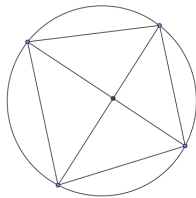
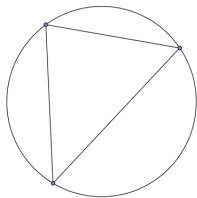
$$\frac{125}{126} > \frac{124}{125}$$

Úloha č. 2

Na kružnici je vyznačených n bodů a každé dva jsou spojené tětivou. Předpokládejme, že žádné tři tětivy se uvnitř kruhu neprotínají v jednom bodě. Kolik průsečíků uvnitř kruhu existuje?

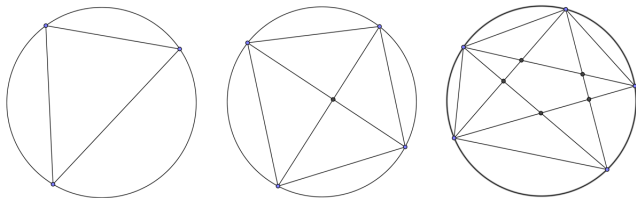
Úloha č. 2

Na kružnici je vyznačených n bodů a každé dva jsou spojené tětivou. Předpokládejme, že žádné tři tětivy se uvnitř kruhu neprotínají v jednom bodě. Kolik průsečíků uvnitř kruhu existuje?



Úloha č. 2

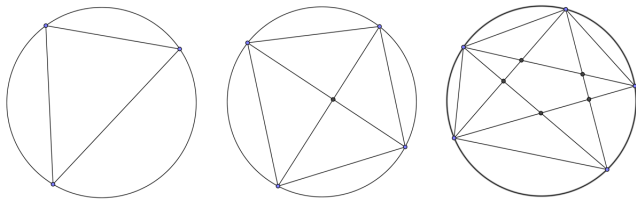
Na kružnici je vyznačených n bodů a každé dva jsou spojené tětivou. Předpokládejme, že žádné tři tětivy se uvnitř kruhu neprotínají v jednom bodě. Kolik průsečíků uvnitř kruhu existuje?



Kolik čtyřprvkových podmnožin má n prvková množina?

Úloha č. 2

Na kružnici je vyznačených n bodů a každé dva jsou spojené tětivou. Předpokládejme, že žádné tři tětivy se uvnitř kruhu neprotínají v jednom bodě. Kolik průsečíků uvnitř kruhu existuje?



Kolik čtyřprvkových podmnožin má n prvková množina?

$$\binom{n}{4}$$

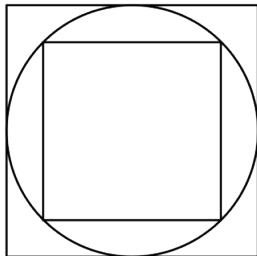
Řešitelský obrázek

Úloha č. 1

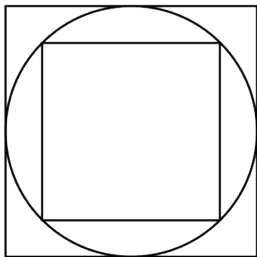
Mějme čtverec vepsaný do kruhu, přičemž tento kruh je vepsán do čtverce. Určete, jakou část obsahu většího čtverce zaujímá menší čtverec.

Úloha č. 1

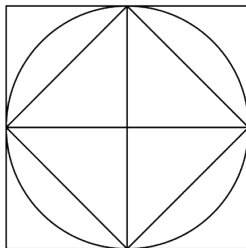
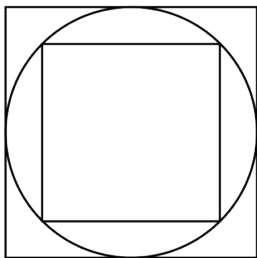
Mějme čtverec vepsaný do kruhu, přičemž tento kruh je vepsán do čtverce. Určete, jakou část obsahu většího čtverce zaujímá menší čtverec.



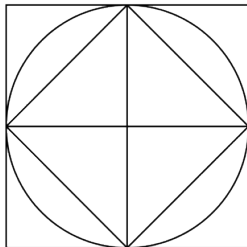
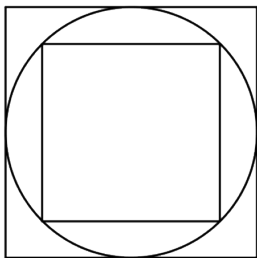
Úloha č. 1



Úloha č. 1



Úloha č. 1



Menší čtverec zaujímá polovinu obsahu většího čtverce.

Vyhodnocení experimentu

Úspěšnost řešení, použití heuristických strategií

Úspěšnost řešení, použití heuristických strategií

- Pokus – ověření – korekce
- Systematické experimentování
- Řešitelský obrázek

Úspěšnost řešení, použití heuristických strategií

- Pokus – ověření – korekce
- Systematické experimentování
- Řešitelský obrázek

- Zavedení pomocného prvku
- Analogie

Úspěšnost řešení, použití heuristických strategií

- Pokus – ověření – korekce
- Systematické experimentování
- Řešitelský obrázek

- Zavedení pomocného prvku
- Analogie

- Konkretizace a zobecnění
- Přeformulování problému

Kultura řešení problému žákem

Kultura řešení problému žákem

1 Inteligence

Kultura řešení problému žákem

- 1 Inteligence
- 2 Tvořivost

Kultura řešení problému žákem

- 1 Inteligence
- 2 Tvořivost
- 3 Schopnost číst s porozuměním text

Kultura řešení problému žákem

- 1 Inteligence
- 2 Tvořivost
- 3 Schopnost číst s porozuměním text
- 4 Schopnost využít stávajících znalostí v matematice

Změny u žáků

Změny u žáků

- zvyšuje se míra experimentování

Změny u žáků

- zvyšuje se míra experimentování
- zlepšuje se jejich vztah k matematice

Změny u žáků

- zvyšuje se míra experimentování
- zlepšuje se jejich vztah k matematice
- zvyšuje se míra úspěšnosti v řešení úloh

Změny u žáků

- zvyšuje se míra experimentování
- zlepšuje se jejich vztah k matematice
- zvyšuje se míra úspěšnosti v řešení úloh
- více se zabývají zpětnou vazbou (kontrola výsledku)

Změny u žáků

- zvyšuje se míra experimentování
- zlepšuje se jejich vztah k matematice
- zvyšuje se míra úspěšnosti v řešení úloh
- více se zabývají zpětnou vazbou (kontrola výsledku)
- více jsou schopni komunikovat s ostatními, obhájit a vysvětlit svoje řešení, reagovat na argumenty oponenta

Změny u žáků

- zvyšuje se míra experimentování
- zlepšuje se jejich vztah k matematice
- zvyšuje se míra úspěšnosti v řešení úloh
- více se zabývají zpětnou vazbou (kontrola výsledku)
- více jsou schopni komunikovat s ostatními, obhájit a vysvětlit svoje řešení, reagovat na argumenty oponenta
- častěji jsou schopni svá řešení zapsat

Změny u učitelů

Změny u učitelů

- prokazují větší toleranci vůči různorodosti žákovských řešení

Změny u učitelů

- prokazují větší toleranci vůči různorodosti žákovských řešení
- více zajímají o myšlenkové pochody žáků při řešení úloh

Změny u učitelů

- prokazují větší toleranci vůči různorodosti žákovských řešení
- více zajímají o myšlenkové pochody žáků při řešení úloh
- více přemýšlejí o tom, jak odstranit pocit neúspěchu u žáků

Změny u učitelů

- prokazují větší toleranci vůči různorodosti žákovských řešení
- více zajímají o myšlenkové pochody žáků při řešení úloh
- více přemýšlejí o tom, jak odstranit pocit neúspěchu u žáků
- došlo k ústupu nároků na přesnost a korektnost ve vyjadřování a zápisech žáků ve prospěch porozumění postupů řešení úloh

Kde najdete strategie?

trilian.ujep.cz/~pribylk/ddsdm