

# Zušľachťovanie ľudských predstáv už aj hlbavým vnímaním školskej matematiky

Dušan JEDINÁK

## Školská matematika ako súčasť kultúry

Asi nikto nepochybuje, že už pre štúdium školskej matematiky je nevyhnutné jasné a prehľadné uvažovanie so schopnosťou odhliadnuť od nepodstatných javov. *Matematika je veda o najzložitejších abstrakciách, k akým môže náš ľudský um dospieť* (A. N. Whitehead, 1861–1947). Abstrakcia je v matematických disciplínach zrejme nevyhnutná. *Uvažovanie matematikov sa točí predovšetkým okolo používania podobností, ktoré sú pravým kľúčom od brány ich vedy* (Ch. S. Peirce, 1839–1914). Ak odhaľujeme a zhŕňame všeobecné univerzálne myšlienkové metódy a idey, tak robíme matematiku. *Matematika je súčasťou všeobecnej kultúry. Ak sa snažíte iným ponúkať matematiku, treba im odovzdať porozumenie, motiváciu, myšlienky...* – to nám odkazuje M. Atiyah (\*1929), významný anglický matematik. Niet dôležitejšej pedagogickej podmienky pre vyučovanie matematiky ako vzbudenie záujmu, motivácia, odpoveď na otázku – prečo? Pre plnohodnotné štúdium matematiky je nenahraditeľné poznanie ako vzniká a sa upevňuje proces ľudského myslenia, riešenia rôznorodých problémov, orientácia v logických a kvantifikovaných situáciách. Každá matematická téma v štúdiu matematiky požaduje aj znalosti vývoja (ontogenézy i fylogenézy) spoznávaných myšlienok. Uznávaný didaktik matematiky G. Polya (1887–1985) odporúčal: *Motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra*. Vyučovanie matematiky v škole nesmie byť len systematické, ale aj psychologické, spojené s rozvojom celej osobnosti, intelektu, vôle i citu. *Ľudia si pamätajú, čo ich zaujíma, a chápu tie veci, ktorých pochopenie im robí radosť* (E. E. Moise; 1918–1998). Zhrnutím naznačených odkazov pre učiteľskú didakticko-odbornú prácu sú možno slová P. R. Halmosa (1916–2006): *Najlepší spôsob ako vyučovať druhých, je presvedčiť študentov, aby sa pýtali a tvorili. Nerobte im kážeň – povzbudte ich k činnosti*. Matematické postupy sú už na elementárnej úrovni nevyhnutným základom hlbšieho myšlienkového pochopenia pre skúmané javy v našom okolí.

## Nadšenie aj pre počty a merbu

*Dobre vyučovať matematiku môže iba človek, ktorý je sám ňou nadšený a chápe ju ako živú, rozvíjajúcu sa vedu*. Takto vystihol základné predpoklady pre šírenie matematickej kultúry známy ruský matematik A. N. Kolmogorov (1903–1987). Uznával, že iba myslením sa učíme myslieť. Vyučovacie procesy pri štúdiu školskej matematiky má byť kultiváciou myslenia, argumentácie, definovania, odvodzovania a dokazovania. Pedagogicky dobre prepracovaný didaktický systém otázok, úloh a problémov má naznačovať objavné myšlienkové postupy, ponúkať nové pohľady a smery riešenia. Pri tom je potrebné podnecovať individuálny štýl myslenia a jeho spontánnosť, kritickú argumentáciu, hĺbku osvojenia vedomostí. Činnosť s matematickým pojmovým materiálom môže poskytovať hlboký intelektuálny zážitok primeraný mentálnym schopnostiam a rozumovým skúsenostiam s ohľadom na vek i prostredie žiakov. Skvelý vysokoškolský učiteľ Richard P. Feynman (1918–1988), nositeľ Nobelovej ceny za fyziku, charakterizoval okolnosti konštrukcie základných vedomostí myšlienkou: *Problém výučby možno vyriešiť len vtedy, keď si uvedomíme, že najlepšie vyučovanie je také, v ktorom existuje priamy, osobný vzťah medzi študentom a dobrým učiteľom – vtedy študent posudzuje názory, rozmýšľa o veciach, diskutuje o problémoch*.

## Už od základov – krása i úžitok

Dúfam, že skoro každý zodpovedný učiteľ matematiky vníma matematickú obratnosť ako podstatnú a nenahraditeľnú zložku všeobecnej kultúry, ako možnosť zušľachťovať myšlienkové procesy a duchovné hodnoty ľudských bytostí. Svojimi špecifickými prostriedkami môže matematika prispievať k rozvoju osobnosti každého človeka, ktorý chce užitočne uvažovať, logicky myslieť, úspešne tvoriť. Rozvíjanie zmyslu pre úplnú argumentáciu, zdôvodňovanie faktov, nápaditá činnosť pri definovaní nových pojmov, hľadanie účinných dôkazov, uplatnenie

vyváženého podielu intuície a dedukcie, obsažné a stručné, hospodárne a presné, jednoznačné a trvalé matematické úvahy a symbolika sú plnohodnotným argumentom pre každé plodné myslenie. Vznešene a filozoficky povedané: matematický rozum je prirodzeným putom medzi človekom a prírodou. Už R. Bacon (asi 1214–1294), anglický stredoveký učenec, vedel: *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten kto neovláda matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.* Chcem pripomenúť nielen učiteľom matematiky slová významného didaktika Hansa Freudenthala (1905–1990): *Ak neuspejeme o vyučovaní matematiky tak, aby bola užitočná, rozhodnú sa užívatelia matematiky, že matematika je príliš dôležitý vyučovací predmet, než aby mohla byť vyučovaná učiteľmi matematiky. To by bol však koniec matematického vyučovania.* Mnohé projekty, ktoré sú pred nami, sa nedajú uskutočniť bez moderných odborných matematických disciplín, informatiky a výpočtovej techniky. Matematický spôsob myslenia nekončí, ale začína. *Vzhl'adom k nesmiernosti svojej látky je matematika (i moderná matematika) vedou v plienkach. Ak sa civilizácia bude ďalej rozvíjať, potom v budúcnosti dvoch tisícročíach bude najväčšou novinkou v ľudskom myslení nadvláda matematického rozumu* (A. N. Whitehead).

## O povahe matematiky

K užitočným charakteristikám matematického prístupu k poznaniu patrí abstrakcia a idealizácia. Matematika sa nám vnucuje zo skúsenosti (elementárna geometria, aritmetika, kombinatorika, logika) až k neohraničenosti so slobodou zvoliť si axiómy. Matematika je ako úžasná metafora rozvíjajúca štrukturálne predstavy transformujúcich sa podobností. Možno sú nielen sympatické, ale aj užitočné pre motiváciu i vyjadrenia niektorých odborníkov:

- *Matematika je viac - menej systematický spôsob objavovania pravidiel a štruktúr, ktoré sa skrývajú za nejakým pozorovaným vzorom alebo pravidelnosťou, a následného vysvetlenia toho, čo sa deje, použitím týchto pravidiel a štruktúr* (I. Stewart, \*1945).
- *Matematika je spôsobom myslenia a vnímania, ktorý nám umožňuje prenikať ku koreňom sveta okolo nás... Matematika žije a dýcha v mysliach ako akási abstraktná symfónia* (K. Devlin, \*1947).
- *V budúcnosti bude v rôznych vedách potrebné ešte viac matematiky. Je to obrovská výzva vecí pochopiť, matematicky ich opísať a porozumieť ich podstate. Matematika sa pokúša zlúčiť spoločné javy odlišných vecí, aby nakoniec mohla povedať: jedná sa o taký jav a ten ponúka také variácie* (L. Caffarelli, \*1948).
- *Matematika popisuje najzákladnejšie postupy v oblastiach úplne oddelených od tých oblastí ľudskej skúsenosti, ktoré zohrali úlohu v našom vývoji, a to nás vedie k presvedčeniu, že matematika má skutočne nejaký skrytý význam* (J.D. Barrow, \*1952).

## Podpora premýšľania

Neformálne matematické porozumenie je vždy prejavom vytrvalej myšlienkovvej dôslednosti a ochoty prekonať prekážky v odhaľovaní súvislostí. Jednou z ciest, aby už vedomosti zo školskej matematiky neboli iba formálne, je uplatňovanie zásady: **vhľad – porozumenie – použitie**. Ak majú byť matematické vedomosti užitočnou súčasťou ľudskej kultúry, tak majú zvýrazniť a rozvíjať samostatné a kritické myslenie, využívať abstraktné prístupy pri rôznej reprezentácii a odhaľovať rôznorodé hierarchizované štruktúry pojmov aj nadväznosti medzi nimi. Matematický spôsob uvažovania rozvíja poznávacie schopnosti (analýza a porozumenie javov a vzťahov, abstrakcia, zovšeobecnenie, objavovanie súvislostí, rozvoj predstavivosti, tvorba pojmov, štruktúra poznatkov), vyhraňuje postoje a významy (formulácia myšlienok, príčinné vysvetľovanie, argumentácia, organizácia informácií, kritický prístup a poučenie sa aj z chýb), **zvýrazňuje komunikáciu** (nevyhnutnosť zdôvodňovania tvrdení, neverbálne a symbolické vyjadrovanie, logická argumentácia, diskusia a porovnávanie názorov).

## Impulzy pre štúdium

Matematika ako impozantná stavba ľudského ducha a pyramída myšlienok poskytuje rozumu široký priestor pre rozlet logických úvah, cesty intuície až k tajomstvám nekonečna. Krása logickej

výstavby, hlboká nadväznosť a prehľadnosť postupov zanecháva pri štúdiu matematiky až umelecké zážitky. Matematici sa až prekvapivo často zhodujú aj v estetických hodnotách svojich postupov. Chápu svoju intelektuálnu schopnosť ako umelecký prejav. Ruský matematik P. S. Alexandrov (1896–1982) o tom napísal: *Každá vedecká tvorivá činnosť, vrátane matematickej, je spätá s estetickým citom. V matematike je poznávacie kritérium späté s nadšením nad náhle objavenou krásou konečne poznaných zákonitostí.* Radosť z poznania matematických štruktúr je možno najkrajší dar prírody pre ľudský intelekt. Matematika ako účinný spôsob štruktúrneho uvažovania nám umožňuje uspokojiť ľudskú túžbu odhaľovať neznáme v nepretržitom systematickom poznávaní.

## Užitočnosť matematického vzdelania

Zmysluplne rozvíjaná a používaná matematická kultúra umožňuje:

1. rozvoj abstraktného myslenia a praktických idealizácií, možnosť odhalenia všeobecných zákonov a hlbšej podstaty sveta;
2. návyk na presné formulovanie problémov, definovanie pojmov a spresňovanie významu slov i pre tvorivé využívanie ľudského intelektu všeobecne;
3. hospodárnosť úvah, logické zdôvodňovanie a argumentovanie (overovanie hypotéz, správnosť úsudkov, protipríklady);
4. odovzdávanie matematických postupov (jazyk, symbolika, štruktúry, deduktívna výstavba, algebraizácia, dôkazové metódy);
5. uplatnenie vhodných výpočtových algoritmov a počítačovej techniky, praktické aplikácie v technickej a technologickej praxi;
6. využitie kombinačných schopností a pravdepodobnostných i štatistických odhadov (združovanie a organizovanie údajov, predpovede, kontroly);
7. podnety pre analýzu i syntézu rôznorodých problémov a postupov ich riešenia, (matematizácia reálnych situácií, stratégia odhadov);
8. geometrickú predstavivosť, schopnosť znázorňovať a využívať zhodnosť a podobnosť;
9. možnosť predvídania pomocou formálnych kalkulov s dobrou mierou spoľahlivosti;
10. vyhľadávanie spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú, zjednodušujú a umožňujú pochopiteľnosť prírody i človeka v nej.

## Vzdelávať i vychovávať

Slová profesora M. Hejného (\*1936) – *Analýzou v histórii matematiky možno získať užitočné predstavy o genéze myslenia a tieto potom aplikovať pri vyučovaní, upozorňujú na povinnosť učiteľov pripravovať a ponúkať vo vyučovaní školskej matematiky zážitky matematickej kultúry, hlbšieho rozvoja myslenia, presvedčivej argumentácie a všeobecnej kultivovanosti človeka. Ak podporu ideovej a logickej dôslednosti matematických myšlienkových postupov ukotvíme aj mravnou zásadovosťou a príkladným osobným životom, naše výchovno-vzdelávacie pôsobenie sa asi bude limitne blížiť k pedagogickej dokonalosti. Koncentrovaným odkazom môžu byť slová G. Piraniana (1914–2009): *Ako učitelia máme mimoriadne dôležitú úlohu, aby sme mládeži odovzdávali niektoré z intelektuálnych hodnôt civilizovaného ľudstva. Našou úlohou je inšpirovať študentov, aby na základe svojich schopností dosiahli čo najvyššiu odbornú i ľudskú úroveň.* Dôsledným zmysluplným vyučovaním matematiky, už od prvých ročníkov základnej školy, môžeme trvalo prispievať k zušľacht'ovaniu ľudských predstáv matematickou kultúrou.*

