O přesném vyjadřování, důležitosti a dokazování matematických vět

Emil Calda

Přesné vyjadřování je vyjadřování, které používáme, když chceme, aby nám nikdo nerozuměl.

O tom, že matematika se bez přesnosti neobejde, nikdo z nás nepochybuje, ale je otázka, do jaké míry ji máme od žáků vyžadovat. Domnívám se, že přílišné lpění na tom, aby se žáci vyjadřovali co nejpřesněji, může některé „otrávit“ a posílit je v přesvědčení, že matematika je nezáživná a nudná. Nicméně však připustit vyjadřování, které je ledabylé a povrchní, nelze. V dobách svého učitelského působení na střední škole jsem se nespokojoval s odpovědí, že například rovnice $x^2 - |x| = 0$ má v R tři kořeny, ale požadoval jsem, aby tento počet byl upřesněn slůvkem „právě“. Vysvětlí-li se žákům, že uvedená odpověď o počtu tří kořenů nevylučuje možnost, že tato rovnice má reálné kořeny čtyři, a že tedy neudává počet kořenů přesně, pochopí to a aspoň někteří to přestanou považovat za jeden z mnoha vašich vrtochů. Formulacím typu „Rovnice má řešení pro $x = 1$“ jsem svého času věnoval tak ostrou a sžíravou kritiku, že je po určité době přestali skoro všichni žáci používat. Podobně jsem požadoval, aby po vyřešení nerovnice $2x > 6$ žákovská odpověď nebyla, že „vyhovují x větší než tři“ ani že „vyhovují všechna x větší než tři“, ale že „vyhovují právě všechna x větší než tři“ anebo že „vyhovují všechna x větší než tři a žádná jiná“. I v tomto případě je samozřejmě nutné žákům vysvětlit, proč první dvě z uvedených možností jsou neúplné. Myslím si také, že je užitečné, aby se v písemných pracích vyžadovala slovně formulovaná odpověď; ta totiž často ukáže, zda žák porozuměl tomu, co vypočítal. A když už je řeč o vyjadřování, podotýkám, že jsem se nikdy nesmířil s tím, že někteří žáci dělili dvěmi a násobili třema! Kde jinde se mají učit mluvit spisovně, než ve škole? K jazykové výchově v hodinách matematiky můžete samozřejmě přispět i tím, že ve svém výkladu občas použijete přechodník; žákům se to určitě bude líbit, protože na používání těchto slovesných tvarů nejsou zvyklí, a kromě toho tím uděláte radost kolegyni, která je má na češtinu.

Přesnost je v matematice důležitá, ale jsem téměř přesvědčen o tom, že pro matematické vzdělávání žactva je důležitější pochopení a porozumění, při čemž významnou roli hraje i motivace. Někde jsem četl, že „pro mysl mladých lidí není sterilní přesnost o nic výživnější než díry v těstě koblihy“. Myslím si, že v hodinách matematiky by se mělo přesné vyjadřování používat v rozumné míře, čímž mám na mysli to, že by se mělo přizpůsobit věku žáků a také třídě, ve které učíme. Pochopí-li žák nějakou matematickou větu, je dost pravděpodobné, že ji dovede také více méně přesně formulovat a nebude plácat nesmysly. Jestliže na konkrétním příkladu vidíme, že Honzík Pythagorově větě rozumí, neměli bychom mu mít za zlé, když ve formulaci „pro každý pravoúhlý trojúhelník platí“ neuvede slůvko „každý“. Naproti tomu to, že Květa umí přesně odříkat Pythagorovu větu jako když bičem mrská, nezaručuje, že jí také rozumí a umí ji aplikovat.

Matematická věta je tvrzení vycházející z předpokladů, které v životě nikdy nenastanou.

Kromě toho, že někdy klademe přehnaný důraz na přesnost, „dopouštíme se“ často také toho, že matematické věty a poznatky nerozlišujeme podle důležitosti; ze všech „děláme vědu“ neberouce (!) ohled na konkrétní třídu. Jistě, matematické poznatky jsou důležité skoro všechny – ale stejně? A vzhledem k čemu?? Některé jsou důležité kvůli tomu, že je někteří budou potřebovat ve své budoucí praxi, jiné kvůli tomu, že jejich znalost bude nutná při studiu na střední či vysoké škole, některé kvůli tomu, že dotyčný nechce propadnout; na základní a střední škole jsou většinou důležité kvůli tomu, že na ně navazuje další učivo. Jsou ovšem poznatky, které mají význam hlubší, které přesahují rámec matematiky a mají význam všeobecně kulturní; na škole základní k nim nejspíše patří věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku a také věta Pythagorova. Zdá se mi, že při jejich výkladu bychom také mohli pohovořit o tom, že tyto výsledky nejsou samozřejmé a že jsou svým způsobem dokonce podivuhodné. „Není, milí žáci, pozoruhodné, že svět, v němž žijeme, je takový, že v něm neexistuje pravoúhlý trojúhelník, ve kterém součet obsahů čtverců nad odvěsnami je různý od obsahu čtverce nad přeponou?“ Myslím si, že není na škodu občas žákům ukázat, že existují věci, které tak úplně samozřejmé nejsou a které jsou dokonce hodné podivu. A když přitom zabrousíte do historie a řeknete jim něco o Pythagorovi, Euklidovi a Archimedovi, budou aspoň chvíli dávat pozor a předstírat, že je to zajímá; někteří si to dokonce zapamatují.

Důkazové úlohy jsou úlohy, kterými chceme něco dokázat
aspoň v matematice, když se nám to nepovedlo v životě.

Od matematických vět a poznatků se dostáváme k jejich důkazům. To, že matematika své výsledky dokazuje, bychom neměli před žáky skrývat, je ale nutno uvážit „matematický stav“ třídy, ve které učíme. Domnívám se, že na základní škole je možné u některých vět se spokojit s názorným vysvětlením, ale přimlouvám se za to, aby u těch, jejichž důkaz není komplikovaný, byl s podrobným vysvětlením jednotlivých kroků proveden. Mezi důkazy, které by žáci středních (a možná i základních) škol měli znát, je důkaz vět výše zmíněných, tj. věty Pythagorovy a věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku. Ani na základní škole by však žádný poznatek neměl spadnout z nebe a být pouze předložen k věření.

Žáci by se měli občas potkat i s důkazovými úlohami, které nejsou z matematické oblasti. Příkladem takové úlohy je úloha požadující dokázat, že šachovnici 8x8, z níž jsou odstřižena dvě protější rohová políčka, není možné pokrýt jedenatřiceti obdélníky 2x1. Důkaz je jednoduchý a o tom, že jde o důkaz sporem vůbec nemusíme mluvit. Z předpokladu, že šachovnice s odstřiženými políčky je těmito obdélníky pokryta, totiž plyne, že každý zakrývá jedno bílé a jedno černé políčko, což znamená, že bílých i černých je stejný počet. To však není možné, protože odstřižená rohová políčka byla stejné barvy, takže na ní zůstalo nikoli 31 bílých a 31 černých, ale 30 jedněch a 32 druhých. Řadu podobných příkladů může zájemce najít v [1], zejména v kapitole „Příklady, ve kterých vzorečky nepomohou“; řešení některých z nich (příklad 1.8 a 4.3) jsem ukázal ve svém vystoupení přímo na konferenci.

Na závěr si dovoluji požádat čtenáře, aby mi sdělili – pokud to uznají za vhodné – své zkušenosti a svůj názor na uvedenou problematiku. Všem, kteří tak učiní, děkuji.

Literatura

[1] Calda, E., Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem, Prometheus, Praha, 2006
[2] Calda, E., K vyučování matematice na střední škole, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 34/1989, str. 178 – 180
[3] Calda, E., Pedagogické zásady a termíny ve výuce M&F, Prometheus, Praha, 2005