Jednoduché ekonomické a biologické modely v řeči diferenčních rovnic

Pavel Drábek

Katedra matematiky a Evropské centrum NTIS (Nové technologie pro informační společnost)
Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni

Konference "Matematika a reálný svět"
MFF UK Praha, 21. 9. 2012

G. FULFORD, P. FORRESTER, A. JONES :

MODELLING WITH DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

Cambridge University Press 1997

Chapter 7 : Difference Equations

Leonardo di Pisa (Fibonacci):

Liber abaci 1202

Kolik párů králíků se narodí během jednoho roku pokud

1. Na počátku máme jeden pár.
2. Každý pár vyprodukuje za měsíc jeden nový pár.
3. Nový pár je produktivní dva měsíce po narození.

Dílčí problém: Kolik párů máme na konci prvního, druhého, třetího a čtvrtého měsíce?

$y_k = \{$počet párů na konci k-tého měsíce$\}$, $k \geq 1$

Z obrázku $\Rightarrow$ $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 5$

Kdybychom malovali dále $\Rightarrow$

$y_5 = 8$, $y_6 = 13$, $y_7 = 21$, ... $y_{12} =$

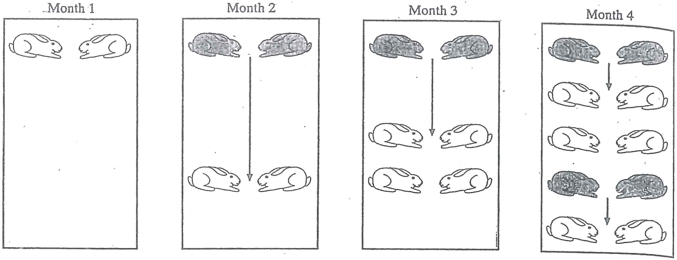


Fig. 7.1.1. A mature pair of rabbits (shaded grey) each month produce a new pair of rabbits (shaded white). The new rabbits mature after two months.

Dílčí problém: Nalézt vztah mezi počtem párů na konci daného měsíce v závislosti na jejich počtu na konci předcházejícího měsíce.

$$\left\{\begin{matrix}\text{počet tento}\\ \text{měsíc}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{počet minulý}\\ \text{měsíc}\end{matrix}\right\} + \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{počet narozených}\\ \text{tento měsíc}\end{matrix}\right\}}_{= \left\{\begin{matrix}\text{počet před}\\ \text{dvěma měsíci}\end{matrix}\right\}}$$

$k \geq 3$: $$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

(Fibonacciova rovnice, poprvé explicitně zformulovaná Keplerem!)

Postupným dosazováním (iterováním) získáme řešení původního problému

$$y_{12} = 233.$$

Diferenční rovnice vznikají formulací podobných problémů, jejich řešením je posloupnost

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

Diferenční rovnice vyjadřuje zákonitost na základě které je člen y_k vyjádřen pomocí $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$ a případně i sebe sama (y_k).

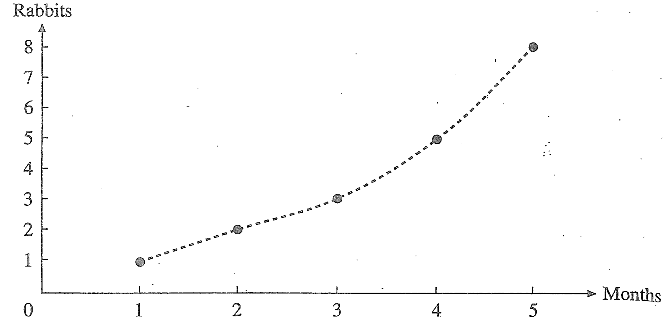


Fig. 7.1.2. Graph shows the total number of pairs of rabbits present each month. Because the time is *discrete* the graph consists of discrete points.

Pokud se v zákonitosti vyskytují pouze y_k a y_{k-1}, jde o rovnici prvního řádu:

Př: $y_k = k(y_{k-1})^2$, $k = 2, 3, \dots$, $\underbrace{y_1 = 1}_{\text{počáteční podmínka}}$

$\Rightarrow y_2 = 2y_1^2 = 2$, $y_3 = 3y_2^2 = 12$,

$\dots$

Pokud se v zákonitosti vyskytují pouze y_k, y_{k-1} a y_{k-2} jedná se o rovnici druhého řádu:

Př. $$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}, \quad \underbrace{y_1 = 1, \; y_2 = 1}_{\text{počáteční podmínky}}$$

$$\Rightarrow \; y_3 = 2, \; y_4 = 3, \; y_5 = 5, \; \dots$$

řešením je Fibonacciova posloupnost

Iterační metoda: vypočítáme y_k na základě $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_1$

Nevýhody: pro výpočet y_k musíme nejprve znát všechny předcházející členy posloupnosti

U některých typů rovnic to není třeba. Lze nalézt tzv. „uzavřenou formuli" (y_k jako funkci k).

Př: $y_k = 1 + y_{k-1} + 2\sqrt{1+y_{k-1}}$, $k = 2,3,\dots$; $y_1 = 0$

$y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 8$, $y_4 = 15$

1^2-1 $\quad 2^2-1$ $\quad 3^2-1$ $\quad 4^2-1$ $\quad \Rightarrow y_k = k^2 - 1$

Že $y_k = k^2 - 1$, $k = 1, 2, \dots$ je řešení dokážeme tím, že ověříme

1. počáteční podmínku : $k=1 \Rightarrow y_1 = 0$
2. rovnici :

$$P = 1 + y_{k-1} + 2\sqrt{1 + y_{k-1}} = (k-1)^2 + 2\sqrt{(k-1)^2}$$

$$= (k-1)^2 + 2(k-1) = k^2 - 1 = y_k = L$$

Ekonomické modely

jsou většinou formulovány ve tvaru

lineární rovnice :

$$y_{k+1} = a\, y_k + b \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dáno

lineární rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty

řešení je možné vždy nalézt v uzavřeném tvaru

homogenní rovnice : $x_{k+1} = a\, x_k$

Př. $y_{k+1} = 2y_k + 3$, $y_0 = 2$

1. krok: $x_{k+1} = 2x_k$

iterace $\Rightarrow$ $x_k = 2^k x_0$, x_0 je libovolné

ověříme, že jde o řešení

2. krok: nalezneme jedno (partikulární) řešení nehomogenní rovnice

konstantní řešení: $y_{k+1} = y_k$

$$y_k = 2y_k + 3$$

$$y_k = -3$$

3. krok: Součet konstantního řešení $y_k = -3$ a řešení homogenní rovnice $x_k = 2^k x_0$ je řešením nehomogenní rovnice.

(Ověříme princip superpozice.)

$$y_k = -3 + 2^k x_0 \,, \quad x_0 \text{ je libovolné}$$

4. krok: Určíme x_0 s pomocí počáteční podmínky:

$$2 = y_0 = -3 + 2^0 \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = 5 \quad \Rightarrow y_k = -3 + 5 \cdot 2^k$$

$k = 1, 2, \dots$

řešení počáteční úlohy

Obecně: $y_{k+1} = a y_k + b, \quad k = 0, 1, \dots$

1. $a = 1 \Rightarrow y_k = y_0 + kb, \quad k = 1, 2, \dots$

2. $a \neq 1 \Rightarrow$

$$y_k = a^k \underbrace{\left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)}_{x_0} + \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{\text{konstantní partikulární řešení}}$$

Jednoduché úrokování: jde o lineární rovnici prvního řádu: $a = 1$

$$\{\text{úrok}\} = \frac{p}{100} \times \{\text{základ}\}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{úspora po} \\ k+1 \text{ letech}\end{matrix}\right\}}_{S_{k+1}} = \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{úspora po} \\ k \text{ letech}\end{matrix}\right\}}_{S_k} + \frac{p}{100} \times \underbrace{\{\text{základ}\}}_{S_0}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{p}{100} S_0 \qquad \left(a = 1,\ b = \frac{p}{100} S_0\right)$$

řešení: $$S_k = \left(1 + \frac{kp}{100}\right) S_0$$

formule jednoduchého úrokování

Složené úrokování: jde o lineární rovnici prvního řádu s $a \neq 1$ a která je homogenní

α zlomková část roku ($\alpha = \frac{1}{12}$ měsíc, $\alpha = \frac{1}{2}$ půlrok ...)

$$\{\text{úrok}\} = \frac{\alpha p}{100} \times \left\{\begin{matrix}\text{úspora na začátku}\\ \text{úrokovaného období}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{úspora po}\\ k+1 \text{ obdobích}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{úspora po}\\ k \text{ obdobích}\end{matrix}\right\} + \frac{\alpha p}{100} \times \left\{\begin{matrix}\text{úspora po}\\ k \text{ obdobích}\end{matrix}\right\}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{\alpha p}{100} S_k = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right) S_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Řešení:
$$S_k = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right)^k S_0$$

formule složeného úrokování

Modely růstu populace:

α koeficient „porodnosti"

β koeficient „úmrtnosti"

$r = \alpha - \beta$

$$N_{k+1} = N_k + \alpha N_k - \beta N_k$$

$$N_{k+1} = (1+r) N_k$$

$$N_k = (1+r)^k N_0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

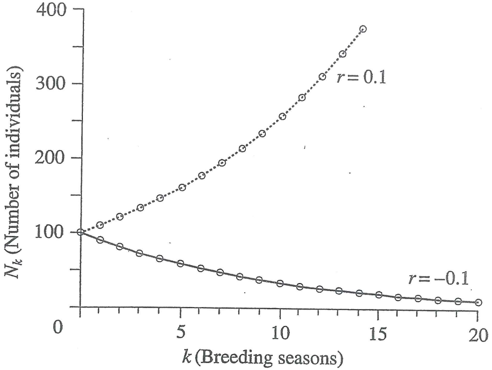


Fig. 9.1.1. Population growth as given by a linear difference equation with growth rate r.

Realističtější model : nelineární logistická rovnice

Experimentální (laboratorní) pozorování :

- vliv "přeplněnosti" prostředí
- vliv boje o potravu

  (když populace roste $\Rightarrow \alpha \downarrow$ a $\beta \nearrow$)

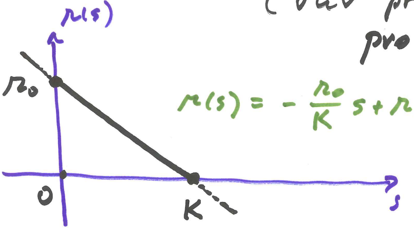
Místo : $N_{k+1} = N_k + r N_k$ máme

$$N_{k+1} = N_k + \underbrace{r(N_k)}_{\text{nelinearita}} . N_k$$

$r = r(s)$ je závislé na "množství" s :

- $r \searrow$ když $s \nearrow$
- $\exists K > 0 \; : \; r(K) = 0$ (stav "nasycenosti")
- $\lim\limits_{s \to 0+} r(s) = r_0 > 0$ $\big(r(0) = r_0 > 0 \big)$

(vliv "přeplněnosti" vymizí pro $s \ll 1$)



$r(s) = -\frac{r_0}{K} s + r_0$

$$N_{k+1} = N_k + \underbrace{\left(-\frac{r_0}{K} N_k - r_0\right)}_{r(N_k)} N_k$$

Diskrétní logistická rovnice:

$$N_{k+1} = N_k + r_0 N_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right)$$

Zajímavost: řešení v uzavřeném tvaru není známo (možná existuje)

Didaktická výhoda: možnost jednoduchých numerických iterací pro různé volby parametrů r_0, K, N_0

Ustálený stav (ekvilibrium):

$$N_{k+1} = N_k = s \quad :$$

$$s = s + r_0 s \left(1 - \frac{s}{K}\right)$$

$$s\left(1 - \frac{s}{K}\right) = 0$$

$s = 0$

$s = K$

kritická kapacita prostředí

Pokud $N_0 = K \implies N_k = K \quad \forall k = 1, 2, \dots$

Růst versus Pokles:

$$N_{k+1} - N_k = r_0 N_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right)$$

1. $N_k < K \implies N_{k+1} - N_k > 0$ růst
2. $N_k > K \implies \qquad\qquad < 0$ pokles

vždy $N_{k+1} - N_k$ je proporcionální r_0

V závislosti na r_0 lze provést diskusi chování iterací:

1. $r_0 \ll 1$, $N_0 < K$ $\Rightarrow$ $N_k \nearrow K$

2. r_0 větší, $r_0 < 3$ $\Rightarrow$ N_k "osciluje" okolo K

3. $r_0 > 3$ $\Rightarrow$ $\exists k : N_k < 0$ $\lightning$ model nefunguje!

Diskuze pro $r_0 \in (0, 3)$, $N_0 = 100$, $K = 1000$

(Robert May 1975, 1976)

Stabilní růst : $0 < r_0 \leq 2$

$0 < r_0 < 1$ monotonní přibližování k hodnotě $K = 1000$

$1 < r_0 \leq 2$ překmitnutí, ale později stabilizace a přiblížení k hodnotě $K = 1000$

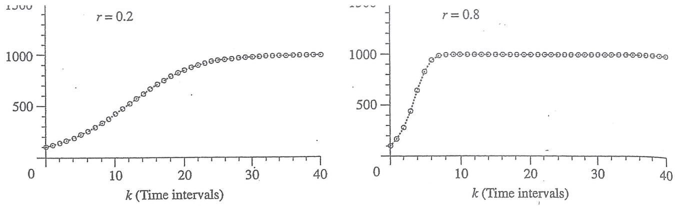


Fig. 9.3.1. Discrete logistic equation for $r = 0.2$ and $r = 0.8$. The population increases then levels out to an equilibrium value.

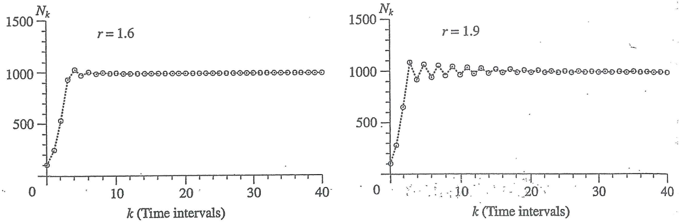


Fig. 9.3.2. Discrete logistic equation with $r = 1.6$ and $r = 1.9$. Damped oscillations.

"Periodický" růst : $2 < r_0 < 2{,}57$

$2 < r_0 < 2{,}5$ dvojcykly
amplituda roste

$r_0 > 2{,}5$ čtyrcykly, osmicykly, ...
(zdvojování periody)

Chaotický růst : $2{,}57 < r_0 \leq 3$

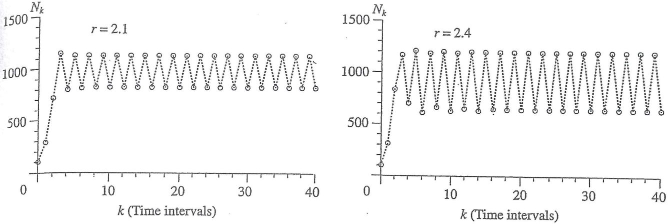


Fig. 9.3.3. Discrete logistic equation with $r = 2.1$ and $r = 2.4$. Each case demonstrates a 2-cycle.

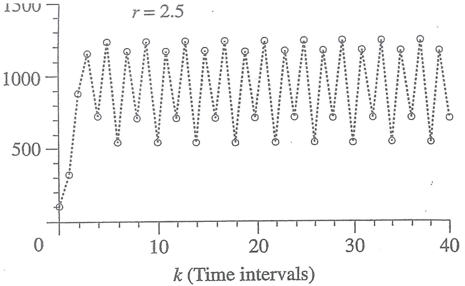
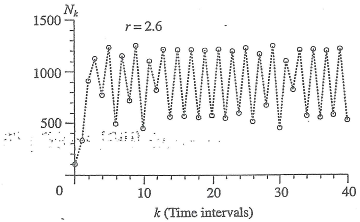
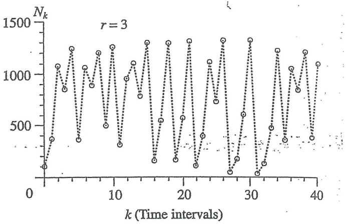


Fig. 9.3.4. Discrete logistic equation with $r = 2.5$: a 4-cycle.





Chaotic growth with $r = 2.6$ and $r = 3$.

Děkuji za pozornost!

Děkuji za pozornost!