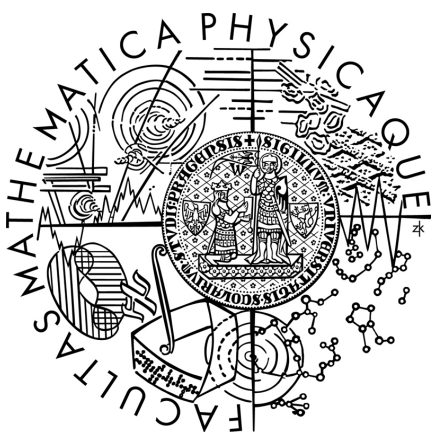


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
DIPLOMOVÁ PRÁCE



Václav Ibl

Taylorovy řady elementárních funkcí

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.**

Studijní program: *Matematika*

Studijní obor: *Učitelství matematiky v kombinaci s druhým aprobačním
předmětem pro střední školy*

2009

Děkuji vedoucímu diplomové práce RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za pomoc při sepisování této práce, jakož i za poskytnutí mnoha studijních materiálů a především za trpělivost během oněch let.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne

Václav Ibl

Obsah

1	Rozvoje elementárních funkcí	5
1.1	Úvod	5
1.2	Binomická řada	7
1.3	Rozvoje logaritmu a exponenciály	16
1.4	Rozvoje goniometrických funkcí	25
2	Taylorova řada	32
2.1	Interpolace polynomy	33
2.2	Objev Taylorovy řady	37
2.3	Zkoumání zbytku	43

Název práce: Taylorovy řady elementárních funkcí

Autor: Václav Ibl

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

E-mail vedoucího: Antonin.Slavik@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme historii rozvoje elementárních transcendentních funkcí do mocninných řad. Zaměřujeme se především na binomickou řadu, exponenciální řadu, logaritmickou řadu, řady funkcí sinus, kosinus a arkustangens v období od začátku 16. století do roku 1829. Zabýváme se též historií Taylorova rozvoje včetně Lagrangeova a Cauchyova tvaru zbytku. Časové vymezení je dáno pracemi indických matematiků Madhavy a Nílakanthy, kde nacházíme rozvoj funkcí arkustangens, sinus a kosinus, a Cauchyovou učebnicí kalkulu z roku 1829, která obsahuje odvození Taylorovy řady a také oba zmíněné tvary zbytku.

Klíčová slova: Historie matematiky, Taylorův rozvoj, elementární funkce, mocninné řady.

Title: Taylor's Series of Elementary Functions

Author: Václav Ibl

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Antonin.Slavik@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the history of power series of the elementary transcendental functions, namely the binomial series, the exponential series, the logarithmic series, sine and cosine series, and the inverse tangent series from early 16th century until 1829. We also describe the history of Taylor's expansion with Lagrange's and Cauchy's form of remainder. Our exposition starts with the works of the Indian mathematicians Madhava and Nilakantha concerning the series for inverse tangent, sine and cosine and proceeds until the publication of Cauchy's textbook, in which he derived and used Taylor's formula with both forms of remainders.

Keywords: History of mathematics, Taylor's expansion, elementary functions, power series.

1 Rozvoje elementárních funkcí

1.1 Úvod

Poměrně brzy se matematikové setkali s elementárními transcendentními funkcemi jako jsou sinus, kosinus, tangens, logaritmus. Algebraickými metodami lze určit hodnoty těchto funkcí ve vybraných bodech, bylo však nutné nalézat alespoň přibližné hodnoty těchto funkcí i pro ostatní argumenty. Ke konstrukci tabulek funkčních hodnot se využívaly interpolační metody. Prvním přiblížením byla lineární interpolace, která ovšem nedávala příliš přesné výsledky, později interpolace polynomy vyšších stupňů. V době vzniku infinitezimálního počtu bylo objeveno, že všechny běžně používané funkce lze rozložit do mocninné řady. Pro výpočet přibližné funkční hodnoty pak stačilo vzít konečný počet členů podle požadované přesnosti. Objev několika dílčích rozvojų motivoval matematiky k hledání obecného předpisu pro rozvoj funkcí do mocninných řad. V této práci budeme sledovat zejména binomickou řadu

$$(1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k \quad |x| < 1, \mu \in \mathbb{R} \quad (1)$$

rozvoj exponenciály

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R},$$

Mercatorovu řadu pro logaritmus

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad x \in (-1, 1],$$

rozvoje goniometrických funkcí

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad x \in \mathbb{R},$$

a rozvoj funkce arkustangens

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad |x| \leq 1.$$

Všechny tyto řady jsou speciálním případem tzv. Taylorova rozvoje, jehož historii se budeme věnovat ve druhé kapitole. Uvedeme zde ještě několik poznatků, které budeme potřebovat při zkoumání binomické řady.

Definice. Pro $k, n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ definujeme binomické koeficienty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Tuto definici lze zobecnit pro $\mu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{\mu}{k} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-k+1)}{k!}, \quad \binom{\mu}{0} = 1.$$

Povšimněme si také, že binomická věta

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$, je speciálním případem binomické řady (1). Je-li totiž $\mu \in \mathbb{N}_0$, jsou binomické koeficienty $\binom{\mu}{k}$ nulové pro $k > \mu$.

Věta. Necht' $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\binom{\mu + \mu'}{n} = \binom{\mu}{n} \binom{\mu'}{0} + \binom{\mu}{n-1} \binom{\mu'}{1} + \cdots + \binom{\mu}{1} \binom{\mu'}{n-1} + \binom{\mu}{0} \binom{\mu'}{n}. \quad (2)$$

Důkaz (viz [4, str. 169–170]). Je-li $\mu, \mu' \in \mathbb{N}$, můžeme větu dokázat kombinatoricky: Vybírejme n předmětů z μ rozlišitelných předmětů prvního druhu a μ' rozlišitelných předmětů druhého druhu. Počet kombinací, kde se vyskytuje právě i předmětů prvního druhu (a tedy $n-i$ předmětů druhého druhu) bude $\binom{\mu}{i} \cdot \binom{\mu'}{n-i}$. Sečteme-li tato čísla přes všechna $i \in \{0, \dots, n\}$, musíme dostat počet všech možných výběrů, tj. $\binom{\mu+\mu'}{n}$.

Zvolme pevně $\mu' \in \mathbb{N}$ a uvažujme $\mu \in \mathbb{R}$; levá i pravá strana rovnosti (2) jsou polynomy v proměnné μ , neboť

$$\binom{\mu}{k} = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!} \quad (\text{polynom stupně } k),$$

$$\binom{\mu + \mu'}{n} = \frac{(\mu + \mu')(\mu + \mu' - 1)\cdots(\mu + \mu' - n + 1)}{n!} \quad (\text{polynom stupně } n).$$

Tyto polynomy na levé a pravé straně se rovnají (pro každé $\mu \in \mathbb{N}$), z čehož vyplývá, že se rovnají všude a věta platí pro všechna $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu' \in \mathbb{N}$. Zafixujeme-li $\mu \in \mathbb{R}$, pak stejným argumentem lze dokázat, že rovnost platí pro každé $\mu' \in \mathbb{R}$.

1.2 Binomická řada

Binomická věta se v matematice objevuje od starověku. První stopy nacházíme u EUKLIDA (asi 340 - asi 280 př. Kr), který v podstatě uvádí vzorce $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ a $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$ [1]; podobné vztahy v té době chápali Řekové obvykle geometricky. Binomickou větu pro libovolný přirozený mocnitel pravděpodobně ovládal již UMAR CHAJJÁM, který žil okolo r. 1100 [5, str. 80]. První písemná zmínka o binomické řadě s racionálními exponenty pochází z roku 1670 od JAMESE GREGORYHO (1638–1675) [1]. Gregory uvažuje čísla b a d taková, že $\log b = e$, $\log(b + d) = e + c$, a hledá číslo, jehož logaritmus je $(e + a)$:

$$e + a = \underbrace{\log b}_e + \frac{a}{c} \left[\underbrace{\log(b + d)}_{e+c} - \underbrace{\log b}_e \right]$$

$$\log \left[b \left(1 + \frac{d}{b} \right)^{a/c} \right] = e + a. \quad (3)$$

Dále vezme dvě posloupnosti

$$b, d, \frac{d^2}{b}, \frac{d^3}{b^2}, \dots,$$

$$\frac{a}{c}, \frac{a-c}{2c}, \frac{a-2c}{3c}, \frac{a-3c}{4c}, \dots$$

a jejich členy vynásobí a sečte. Tvrdí, že platí

$$\log \left[b + \frac{a}{c}d + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{d^2}{b} + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{a-2c}{3c} \cdot \frac{d^3}{b^2} + \dots \right] = e + a,$$

což při porovnání se vztahem (3) dává

$$b + \frac{a}{c}d + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{d^2}{b} + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{a-2c}{3c} \cdot \frac{d^3}{b^2} + \dots = b \left(1 + \frac{d}{b} \right)^{a/c}.$$

Důkaz tohoto vzorce Gregory neuvádí. Je ovšem možné, že binomickou řadu odvodil užitím jisté interpolační formule, jak uvidíme později.

ISAAC NEWTON (1642–1727) dospěl k binomické řadě pro racionální exponenty již v roce 1665 při studiu díla *Arithmetica infinitorum*, které deset let předtím uveřejnil JOHN WALLIS (1616–1703). Newton tento objev nepublikoval, ale popsal jej ve dvou slavných dopisech z roku 1676, které poslal Henrymu Oldenburgovi, tajemníkovi londýnské Royal Society, pro přeposlání

Leibnizovi [3, str. 178]. V prvním dopise, *epistola prior* ze 3. června, se objevuje binomická řada v tomto tvaru:

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots \quad (4)$$

Každý ze symbolů $A, B, C, \dots$ označuje výraz, který se v součtu vyskytuje před ním, tedy $A = P^{m/n}$, $B = (m/n)AQ$, $C = ((m-n)/2n)BQ$ atd. Newton zde neuvádí žádný důkaz, pro ilustraci připojil devět příkladů rozvoju, které odvodil pomocí svého vzorce.

Zkusme nyní do (4) postupně dosazovat za písmena odpovídající výrazy. Po dosazení A a B máme

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}P^{m/n}Q + \underbrace{\frac{m-n}{2n}\frac{m}{n}P^{m/n}Q^2}_C + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots,$$

následně za C dosadíme výraz ve svorce. Výraz $P^{m/n}$ se vyskytuje v každém členu, můžeme jej tedy vytknout a dostaneme

$$\begin{aligned} P^{m/n} \left[1 + \frac{m}{n}Q + \frac{(m-n)m}{2n^2}Q^2 + \frac{(m-2n)(m-n)m}{3 \cdot 2 \cdot n^3}Q^3 + \dots \right] &= \\ = P^{m/n} \left[1 + \frac{\frac{m}{n}}{1}Q + \frac{(\frac{m}{n}-1)\frac{m}{n}}{2}Q^2 + \frac{(\frac{m}{n}-2)(\frac{m}{n}-1)\frac{m}{n}}{3 \cdot 2}Q^3 + \dots \right] &= \\ = P^{m/n} \left[\binom{m/n}{0}Q^0 + \binom{m/n}{1}Q + \binom{m/n}{2}Q^2 + \binom{m/n}{3}Q^3 + \dots \right], \end{aligned}$$

což dává binomickou řadu v obvyklejším zápisu

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m/n}{k} Q^k \right].$$

Abychom docenili Newtonův příspěvek, je třeba říci, že do té doby nebyly racionální exponenty používány. Wallis zaváděl tzv. „indexy“. Říkal, že posloupnost $\sqrt{1}, \sqrt{8}, \sqrt{27}, \dots$ má index $3/2$ a že posloupnost $1/\sqrt{1}, 1/\sqrt{4}, 1/\sqrt{9}, \dots$ má index $-1/2$. Neobvyklost vyjádření Newtonovy řady je také dána tím, že do té doby se binomické koeficienty vyjadřovaly především pomocí řádků Pascalova trojúhelníku. Binomická věta nebyla známa ve tvaru, kde by stačilo jednoduše zaměnit přirozené exponenty za racionální [3, str. 168].

Na Leibnizův dotaz na odvození binomické řady vysvětluje Newton v *epistola posterior* z 24. října 1676 kroky, které jej dovedly k jeho objevu. Newtonova práce je založena na Wallisově postupu tabulkové interpolace. Jak popisuje Newton (viz [3, str. 179–180]):

At the beginning of my mathematical studies, when I had met with the works of our celebrated Wallis, on considering the series by the intercalation of which he himself exhibits the area of the circle and the hyperbola, the fact that, in the series of curves whose common base or axis is x and the ordinates $(1-x^2)^{0/2}$, $(1-x^2)^{1/2}$, $(1-x^2)^{2/2}$, $(1-x^2)^{3/2}$, $(1-x^2)^{4/2}$, $(1-x^2)^{5/2}$ etc., if the areas of every other of them, namely x , $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$, etc. could be interpolated, we should have the areas of the intermediate ones, of which the first $(1-x^2)^{1/2}$ is the circle: in order to interpolate these series I noted that in all of them the first term was x and the second terms $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, etc. were in arithmetical progression, and hence that two terms of the series to be intercalated ought to be

$$x - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} x^3 \right), \quad x - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} x^3 \right), \quad x - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} x^3 \right), \quad \text{etc.}$$

To intercalate the rest I began to reflect that the denominators 1, 3, 5, 7, etc. were in arithmetical progression, so that the numerical coefficients of the numerators only were still in need of investigation. But in the alternately given areas these were the figures [i.e., digits] of powers of the number 11, namely of these 11^0 , 11^1 , 11^2 , 11^3 , 11^3 , 11^4 , that is, first 1; then 1, 1; thirdly 1, 2, 1; fourthly 1, 3, 3, 1; fifthly 1, 4, 6, 4, 1; etc. And so I began to inquire how the remaining figures in these series could be derived from the first two given figures

Newton tedy uvažuje jistou posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{n}{2}} dt.$$

Jestliže n je sudé, f_n může být vyjádřena explicitně. Pomocí Wallisova výsledku

$$\int_0^a t^p dt = \frac{a^{p+1}}{p+1}, \quad p \in \mathbb{N},$$

stanoví Newton jednotlivé integrály, např.

$$f_4(x) = \int_0^x (1-t^2)^{4/2} dt = \int_0^x (1-2t^2+t^4) dt = x + \left(-\frac{2}{3}x^3\right) + \frac{1}{5}x^5.$$

Ještě vhodně uzavorkujme, abychom lépe viděli „mocniny jedenácti,“ o kterých mluví Newton.

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 1 \cdot x, \\
f_2(x) &= 1 \cdot x + 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3\right), \\
f_4(x) &= 1 \cdot x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{5}x^5\right), \\
f_6(x) &= 1 \cdot x + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}x^5\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{7}x^7\right).
\end{aligned}$$

Obecně pro n sudé platí

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \int_0^x (1-t^2)^{n/2} dt = \int_0^x \left(\sum_{m=0}^{n/2} \binom{n/2}{m} (-1)^m t^{2m} \right) dt = \\
&= \sum_{m=0}^{n/2} \binom{n/2}{m} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = \sum_{m=0}^{n/2} a_{m,n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1},
\end{aligned}$$

kde $a_{m,n} = \binom{n/2}{m}$. Newton předpokládá, že pro n liché platí

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1},$$

a hledá příslušné koeficienty $a_{m,n}$. Zapišme koeficienty $a_{m,n}$ do „nekonečné matice“

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & 1 & * & 1 & * & 1 & * & \cdots \\ 0 & * & 1 & * & 2 & * & 3 & * & \cdots \\ 0 & * & 0 & * & 1 & * & 3 & * & \cdots \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 1 & * & \cdots \\ \vdots & * & \vdots & * & \vdots & * & \vdots & * & \ddots \end{pmatrix}.$$

Symbol $*$ nahrazuje prázdné místo pro n liché, které budeme chtít doplnit.

Newton si nejprve všiml, jak je uvedeno výše v citaci, že pokud je n sudé, tak pro první dva koeficienty platí

$$a_{0,n} = 1 \quad \text{a} \quad a_{1,n} = \frac{n}{2},$$

a předpokládá, že to bude pravda i pro n liché. Nultý a první řádek tedy můžeme vyplnit.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} & \cdots \\ 0 & * & 0 & * & 1 & * & 3 & * & \cdots \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * & 1 & * & \cdots \\ \vdots & * & \vdots & * & \vdots & * & \vdots & * & \ddots \end{pmatrix}$$

Ve sloupcích, kde je n sudé, lze libovolně dopočítávat další prvky podle pravidla známého z Pascalova trojúhelníku; pro naši matici má tvar

$$a_{m,n+2} = a_{m-1,n} + a_{m,n}.$$

Vynecháme-li každý druhý sloupec matice A , dostaneme matici ve tvaru

$$B = \begin{pmatrix} a & a & a & a & a & \cdots \\ b & a+b & 2a+b & 3a+b & 4a+b & \cdots \\ c & b+c & a+2b+c & 3a+3b+c & 6a+4b+c & \cdots \\ d & c+d & b+2c+d & a+3b+3c+d & 4a+6b+4c+d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d, \dots$ jsou jisté konstanty a platí

$$b_{m,n+1} = b_{m-1,n} + b_{m,n}.$$

Newton podle Wallisova vzoru předpokládá, že řádky matice A jsou tvořeny stejným způsobem jako řádky matice B , ale že konstanty $a, b, c, d, \dots$ mohou být v každém řádku matice A jiné (viz [3, str. 181]). Například v řádku $m = 2$ je třeba určit a, b, c . Porovnáním matic A a B dostaneme tuto soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} 0 &= c \\ 0 &= a + 2b + c \\ 1 &= 6a + 4b + c \end{aligned}$$

Odtud je $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$, $c = 0$. Pak už můžeme určit např.

$$a_{2,1} = b + c = -\frac{1}{8}, \quad a_{2,3} = 3a + 3b + c = \frac{3}{8}, \quad a_{2,5} = 10a + 5b + c = \frac{15}{8} \text{ atd.}$$

Můžeme zkusit, zda následující prvek vyjde podle našeho očekávání:

$$a_{2,6} = 5a + b + 10a + 5b + c = \frac{9}{8} + \frac{15}{8} = \frac{24}{8} = 3 \quad (\text{viz matice } A).$$

Stejným způsobem budeme postupovat v následujícím řádku. Zde potřebujeme určit čtyři konstanty a, b, c, d , a tedy i čtyři rovnice. Pátý a šestý sloupec B mají tento tvar:

$$\begin{pmatrix} \cdots & a & a & \cdots \\ \cdots & 5a+b & 6a+b & \cdots \\ \cdots & 10a+5b+c & 15a+6b+c & \cdots \\ \cdots & 10a+10b+5c+d & 20a+15b+6c+d & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Vezmeme čtyři známé hodnoty ze třetího řádku matice A , tj. $a_{3,0} = a_{3,2} = a_{3,4} = 0$, $a_{3,6} = 1$, a vyřešíme následující soustavu:

$$\begin{aligned} 0 &= d \\ 0 &= b + 2c + d \\ 0 &= 4a + 6b + 4c + d \\ 1 &= 20a + 15b + 6c + d \end{aligned}$$

Dostaneme řešení $a = 1/8$, $b = -1/8$, $c = 1/16$, $d = 0$. Vypočítáme

$$a_{3,1} = c + d = \frac{1}{16}, \quad a_{3,3} = a + 3b + 3c + d = -\frac{1}{16}, \quad a_{3,5} = 10a + 10b + 5c + d = \frac{5}{16}$$

Newton ještě počítá $a_{4,1} = -5/128$, $a_{4,3} = 3/128$. Především se zajímal o případ $n = 1$, kde vycházejí koeficienty rozvoje funkce

$$f_1(x) = \int_0^x (1 - t^2)^{1/2} dt$$

do mocninné řady. Vypočítal stejným způsobem ještě $a_{5,1} = 7/256$ a $a_{6,1} = -21/1024$. Doplňme získané výsledky do matice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 1 & \frac{15}{8} & 3 & * & \cdots \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{5}{16} & 1 & * & \cdots \\ 0 & -\frac{5}{128} & 0 & \frac{3}{128} & 0 & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \frac{7}{256} & 0 & * & 0 & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & -\frac{21}{1024} & 0 & * & 0 & * & 0 & * & \cdots \end{pmatrix}$$

Čísla v prvním sloupci jsou koeficienty před závorkami v řadě

$$f_1(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x^5}{5}\right) + \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{x^7}{7}\right) - \frac{5}{128} \cdot \left(\frac{x^9}{9}\right) + \cdots$$

Newton zjistil, že tato čísla lze rozepsat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{2}, \\ \frac{1}{16} &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 2}{3}, \\ -\frac{5}{128} &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 3}{4}, \\ \frac{7}{256} &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 3}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - 4}{5}, \end{aligned}$$

atd. Dospěl tedy k výsledku

$$a_{k,1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} = \binom{n/2}{k}.$$

Uvědomuje si, že podobné pravidlo bude platit pro další sloupce matice A .
Poté, co našel rozvoj

$$f_n(x) = \int_0^x (1 - t^2)^{n/2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad (5)$$

obrací svou pozornost k rozvoji funkce $(1 - x^2)^{n/2}$ (viz [3, str. 183]).

When I had learnt this, I immediately began to consider that the terms $(1 - x^2)^{0/2}$, $(1 - x^2)^{2/2}$, $(1 - x^2)^{4/2}$, $(1 - x^2)^{6/2}$, etc. could be interpolated in the same way as the areas generated by them: and that nothing else was required for this purpose but to omit the denominators 1, 3, 5, 7, etc., which are in the terms expressing the areas; this means that the coefficients of the terms of the quantity to be intercalated $(1 - x^2)^{1/2}$, $(1 - x^2)^{3/2}$, or in general $(1 - x^2)^m$, arise by the continued multiplication of the terms of this series

$$m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \text{ etc.}$$

Derivací vztahu (5) obdržíme

$$(1 - x^2)^{n/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n/2}{k} x^{2k}.$$

Newton tvrdí, že obecněji platí

$$(1 - x^2)^m = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} x^{2k} \quad \text{kde } m \in \mathbb{Q}.$$

Jako příklad uvádí následující rozvoje:

$$(1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \dots,$$

$$(1 - x^2)^{3/2} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \dots,$$

$$(1 - x^2)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 + \dots$$

Zobecněním těchto výsledků je pak binomická řada (4), jak ji formuloval v *epistola prior*.

Newton se obával, že jeho interpolační procedura neobstojí jako důkaz. Výsledek si ověřil „umocněním na druhou“ rozvoje $(1 - x^2)^{1/2}$. Řadu umocňoval stejným způsobem jako polynom konečného stupně (viz [3, str. 183]).

Konvergenci nezkoumal, nicméně uvádí následující rozvoje funkce $y = 1/(1 + x^2)$

$$y = 1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots,$$

$$y = 1/(x^2 + 1) = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \dots,$$

ke kterým poznamenává, že „když je x dost malé, užije se první řada, ale když je x dost velké, je třeba užít druhý rozvoj“ (viz [9, str. 25–26]). Stejnou myšlenku můžeme nalézt i v následující ukázce z Wallisovy práce *De Algebra Tractatus, Historicus & Practicus*, resp. z Wallisova anglického překladu, kde v článku *The Doctrine of Infinite Series, further prosecuted by Mr. Newton* uvádí tehdy nepublikované Newtonovy výsledky [10, str. 222]:

Examp. II.

$$\sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} := c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4}, \frac{-2c^8xx + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25x^9} \&c.$$

As will be evident by substituting $1 = m$. $5 = n$. $c^5 = P$. and $c^5)c^4x - x^5(Q$. Or we might in like manner substitute $-x^5 = P$, and $-x^5)c^4x - c^5(Q$. And then

$$\sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} := -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx + 4c^9 + c^{10}}{25x^9} + \&c.$$

The former way is most eligible, if x be very small; the latter if x be very great.

Konvergenci Newtonovy binomické řady patrně jako první vyšetřoval JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783). Speciálně se zabýval případem

$$\left(1 + \frac{200}{199}\right)^{1/2}.$$

Vypočítal poměr a_{n+1}/a_n a ukázal že v absolutní hodnotě je tento poměr větší než 1, pro n větší než 300. Proto absolutní hodnoty členů od tohoto „zlomu“ začínají růst a nemohou tak konvergovat k nule; řada tedy diverguje [14, str. 90–91].

LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857) v *Cours d'analyse d'ecole polytechnique Royale* z roku 1821 zavádí binomickou řadu následujícím způsobem (viz. [3, str. 312]). Nejprve ukázal podílovým kritériem, že řada

$$(1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k \quad (6)$$

konverguje pro $|x| < 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{\mu}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\mu}{n} x^n} = \frac{\mu - n}{n+1} x$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\mu - k}{k+1} x \right| = |x|$$

Tedy řada (6) konverguje absolutně pro $|x| < 1$.

Pro x pevné (a $|x| < 1$) označil Cauchy součet řady (6) $\phi(\mu)$ a tvrdí, že ϕ je spojitá funkce proměnné μ ; vychází z předpokladu, že součtem řady spojitých funkcí je opět spojitá funkce (což ovšem neplatí vždy). Přímým výpočtem ukázal, že $\phi(\mu)\phi(\mu') = \phi(\mu + \mu')$. Při zachování výše uvedeného označení totiž platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu'}{k} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \binom{\mu}{0} \binom{\mu'}{n} + \binom{\mu}{1} \binom{\mu'}{n-1} + \cdots + \binom{\mu}{n} \binom{\mu'}{0} \right\} x^n$$

Využitím vzorce (2) dostaneme

$$\phi(\mu)\phi(\mu') = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu'}{k} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu + \mu'}{n} x^n = \phi(\mu + \mu').$$

V souladu s tímto výsledkem je $\phi(2) = \phi(1+1) = \phi(1)\phi(1) = [\phi(1)]^2$, indukci pak dostaneme

$$\phi(m) = \phi(\underbrace{1+1+\cdots+1}_m) = \phi(\underbrace{1)\phi(1)\cdots\phi(1)}_m) = [\phi(1)]^m$$

pro každé přirozené m . Podle toho je pro přirozené n

$$\phi(1) = \phi\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left[\phi\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n,$$

a tedy také

$$[\phi(1)]^{1/n} = \phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pro m a n přirozené je

$$\phi\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left[\phi\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = [\phi(1)]^{m/n}. \quad (7)$$

Vzorec (7) platí pro i pro záporná racionální čísla, neboť zřejmě $\phi(0) = 1$, a odtud plyne

$$1 = \phi(\mu - \mu) = \phi(\mu)\phi(-\mu) \text{ a tak } \phi(-\mu) = \frac{1}{\phi(\mu)}.$$

Funkce ϕ je součtem mocninné řady, ϕ je proto spojitá. Z funkčních hodnot spojitě funkce v racionálních bodech lze určit funkční hodnoty v ostatních bodech. Tedy je

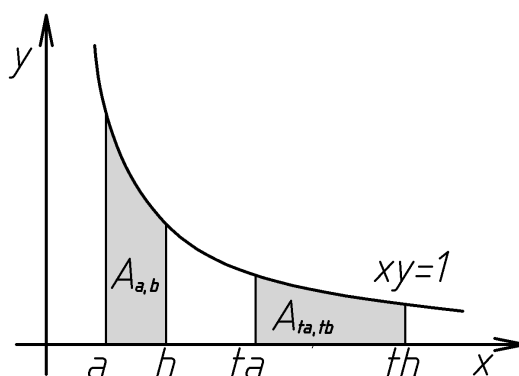
$$\phi(\mu) = [\phi(1)]^\mu$$

pro každé reálné μ . Ale podle (6) je $\phi(1) = 1 + x$, tedy $\phi(\mu) = (1 + x)^\mu$ pro $|x| < 1$ a μ libovolné, čímž je vzorec dokázán. Pomocí silnějšího kriteria (např. Raabeova) lze dokázat absolutní konvergenci řady pro $|x| \leq 1$ a $\mu > 1$.

Kompletní odvození binomické řady provedl NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) v roce 1826.

1.3 Rozvoje logaritmu a exponenciály

První logaritmické tabulky sestavil JOHN NAPIER (1550–1617). Tvorbě tabulek se také věnoval JOST BÜRGI (1616–1703). V roce 1624 zveřejnil HENRI BRIGGS (1616–1703) čtrnáctimístné tabulky dekadických logaritmů. Logaritmické tabulky posloužily ke zjednodušení numerických výpočtů. Belgický jezuita GREGORY SAINT VINCENT (1584–1667) poukázal v roce 1647 v díle *Opus incrementorum* na jistou vlastnost ploch omezených rovnoosou hyperbolou; viz následující ukázkou z [3, str. 154–156].



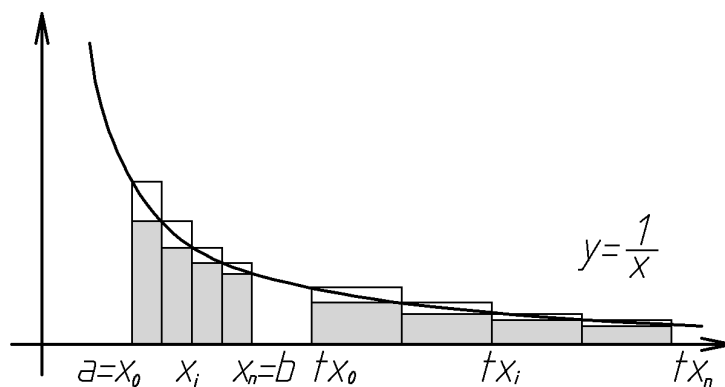
Jestliže $[a, b]$ je uzavřený interval na kladné části osy x , označme $A_{a,b}$ oblast, která leží na tomto intervalu mezi hyperbolou $xy = 1$ a osou x . Potom Gregoryho objev můžeme zapsat tímto způsobem. Pro $t > 0$ je

$$A_{a,b} = A_{ta,tb}. \quad (8)$$

Abychom tento vztah ověřili, rozdělme interval $[a, b]$ na n stejných částí:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Každý podinterval má délku $(b - a)/n$. Dále sestrojíme nad každým podintervalem $[x_{i-1}, x_i]$ obdélníky o výškách $1/x_i$, resp. $1/x_{i-1}$. Obsah jednoho obdélníku je $(b - a)/(nx_i)$, resp. $(b - a)/(nx_{i-1})$.



Pak můžeme odhadnout $A_{a,b}$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_i} \leq A_{a,b} \leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_{i-1}}. \quad (9)$$

Stejně pak rozdělme interval $[ta, tb]$

$$ta = tx_0 < tx_1 < \cdots < tx_{i-1} < tx_i < \cdots < tx_{n-1} < tx_n = tb$$

na podintervaly délky $t(b - a)/n$. Sestrojíme opsané a vepsané obdélníky o výškách $1/(tx_i)$ a $1/(tx_{i-1})$. Obsahy jednotlivých obdélníků jsou $t(b - a)/(tnx_i) = (b - a)/(nx_i)$, resp. $t(b - a)/(tnx_{i-1}) = (b - a)/(nx_{i-1})$. Nyní máme následující odhad pro $A_{ta,tb}$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_i} \leq A_{ta,tb} \leq \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_{i-1}}. \quad (10)$$

Pro obě plochy máme stejné odhady a mohli bychom říci, že $A_{a,b} = A_{ta,tb}$, zbývá ještě ukázat, že horní a dolní součty mají stejnou limitu. Obvyklým

způsobem v té době, jak odůvodnit (8) na základě odhadů (9) a (10), byla Archimedova „metoda komprese“ (viz [3, str. 54]). Vypočítal se rozdíl obou odhadů a ukázalo se principem dvojího sporu, že limita je nula. Pomocí dnešní symboliky můžeme psát

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_{i-1}} - \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{nx_i} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{(b-a)^2}{nab}, \end{aligned}$$

tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^2}{nab} = 0.$$

Tím je rovnost (8) dokázána.

Při pročitání Gregoryho práce *Opus incrementorum* poznamenal jeho přítel ALPHONSE ANTONIO DE SARASA (1618–1667), že z rovnosti (8) plyne pro jistou funkci $L(x)$ plochy pod hyperbolou $xy = 1$ charakteristická vlastnost logaritmů $L(xy) = L(x) + L(y)$, kde funkce $L(x)$ je definována takto (viz [3, str. 156]):

$$L(x) = \begin{cases} A_{1,x} & \text{pro } x \geq 1 \\ -A_{x,1} & \text{pro } 0 < x < 1 \end{cases}$$

(v dnešní notaci $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$). Pro x a y větší nebo rovné 1 je

$$L(xy) = A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y} = L(x) + L(y).$$

Pro x a y menší než 1 je $xy < 1$ a platí

$$L(xy) = -A_{xy,1} = -A_{x,1} - A_{xy,x} = -A_{x,1} - A_{y,1} = L(x) + L(y).$$

Konečně pro $x < 1$, $y \geq 1$ a $xy \geq 1$ je

$$L(xy) = A_{1,xy} = -A_{x,1} + A_{x,xy} = -A_{x,1} + A_{1,y} = L(x) + L(y),$$

resp. pro $xy \leq 1$ je

$$L(xy) = -A_{xy,1} = -A_{x,1} + A_{x,xy} = -A_{x,1} + A_{1,y} = L(x) + L(y).$$

Zřejmě $L(1) = A_{1,1} = 0$. Další vlastnosti logaritmů dostaneme snadno: $0 = L(1) = L(x/x) = L(x) + L(1/x)$ tedy $L(1/x) = -L(x)$. Pro $y = x$ je $2L(x) = L(x) + L(x) = L(x^2)$, zobecněním dostaneme

$$kL(x) = \underbrace{L(x) + \dots + L(x)}_{k \text{ krát}} = L(x^k).$$

V knize *Logarithmotechnia* z roku 1668 NIKOLAS KAUFMAN (MERCATOR) (1620–1687) popisuje kromě konstrukce logaritmických tabulek také řadu pro $\ln(1+x)$, která dnes nese jeho jméno. Nejprve formálním dělením obdržel geometrickou řadu

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad (11)$$

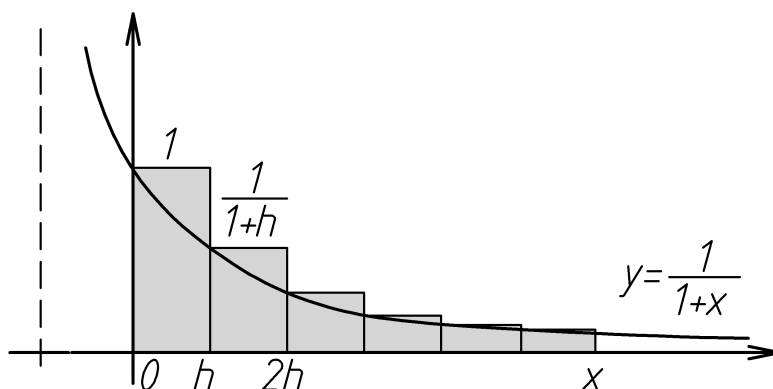
Řadu pro logaritmus

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad (12)$$

odvodil výpočtem založeným na Cavalieriho principu [3, str. 162]. Mercator zmiňuje označení „přirozený logaritmus“ pro logaritmy určené hyperbolic-kými oblastmi, a také našel koeficient 0,43429 ($=1/\ln 10$) pro převod přirozených logaritmů na dekadické (viz [3, str. 164]).

Následujícím výpočtem odvozoval z řady (11) Mercatorovu řadu (12) John Wallis (viz [3, str. 163]). Rozdělme interval $[0, x]$ na n podintervalů, z nichž každý má délku $h = x/n$. Nad nimi postupně sestrojíme obdélníky o výškách

$$1, \frac{1}{1+h}, \frac{1}{1+2h}, \dots, \frac{1}{1+(n-1)h}$$



Rozvineme výšky do geometrických řad, pak hledaná plocha bude

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\approx h \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1+jh} \right) \\ &= h + h \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h^k \right) + h \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2h)^k \right) \\ &\quad + \dots + h \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k ((n-1)h)^k \right). \end{aligned}$$

Seskupením členů obsahujících stejnou mocninu h dostaneme

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\approx nh - h \sum_{i=0}^{n-1} ih + h \sum_{i=0}^{n-1} (ih)^2 + \cdots + (-1)^k h \sum_{i=0}^{n-1} (ih)^k \cdots \\ &= nh - h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + h^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \cdots + (-1)^k h^{k+1} \sum_{i=0}^{n-1} i^k \cdots,\end{aligned}$$

potom dosadíme $h = x/n$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\approx x - \frac{x^2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) + \frac{x^3}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) + \cdots \\ &\quad + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^k \right) + \cdots.\end{aligned}$$

Wallis dříve odvodil (neúplnou indukci a výpočtem pro $k \leq 10$), že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Použitím tohoto výsledku a limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ pak dostal Mercatorovu řadu (12). Wallis se domníval, že podmínka $x < 1$ je nutná pro konvergenci řady [3, str. 163].

Zdá se, že k řadě (12) dospěl dříve Newton v souvislosti s binomickým rozvojem [3, str. 186–187]. Jeho původní výpočet plochy pod hyperbolou $y = 1/(1+x)$ se opíral opět o metodu tabulkové interpolace. Newton věděl, že pro n přirozené platí

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \frac{x^m}{m},$$

kde $a_{m,n} = \binom{n}{m-1}$ (v dnešní notaci). Při tomto označení platí

$$a_{m-1,n} + a_{m,n} = a_{m,n+1}$$

pro $n \geq 0$. Newton předpokládal, že tento vzorec bude platit i pro $n = -1$ a že je $a_{1,-1} = 1$. Odtud dostaneme

$$\begin{array}{rclcl} a_{1,-1} & + & a_{2,-1} & = & a_{2,0} \\ 1 & + & a_{2,-1} & = & 0 \\ & & a_{2,-1} & = & -1. \end{array}$$

Stejným způsobem vyjde

$$\begin{array}{rcl} a_{2,-1} & + & a_{3,-1} = a_{3,0} \\ -1 & + & a_{3,-1} = 0 \\ & & a_{3,-1} = 1. \end{array}$$

Obecně bude $a_{m,-1} = (-1)^{m+1}$, tedy pro hledanou plochu pod hyperbolou platí

$$\ln(1+x) = \int_0^x (1+t)^{-1} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Newton již věděl, že tato plocha má charakteristickou vlastnost logaritmů. Pro ověření správnosti svých úvah si sestavil jakousi minitabulku logaritmů a dvěma způsoby vypočítal logaritmus jistého čísla na velký počet desetinných míst (viz [3, str. 160]).

Newton si všiml, že rozvoj do geometrické řady

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots (-1)^k x^k + \dots$$

lze jednodušeji získat tzv. „dlouhým dělením“. Operace, které jsou běžné pro práci s polynomy, začal Newton aplikovat i na nekonečné řady.

Newton dále našel postup (tzv. inverzi řady), kterým je možné z řady

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

získat řadu

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

tj. rozvoj inverzní funkce. Jeho metoda vychází ze způsobu přibližného řešení rovnic, dnes známého jako Newtonova metoda (viz [3, str. 201–203]). Následující výpočet podle [3, str. 204–205] a [2, kap. 1] ukazuje Newtonovu inverzi Mercatorovy řady $z = \ln(1+x)$: Z rozvoje

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

chceme vyjádřit x . Rovnost přepíšeme do tvaru

$$\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \right] - z = 0, \quad (13)$$

odkud zanedbáním všech nelineárních členů určíme první aproximaci $x \approx z$. Substitucí $x = z + p$ do (13) dostaneme

$$\left[(z + p) - \frac{(z + p)^2}{2} + \frac{(z + p)^3}{3} - \frac{(z + p)^4}{4} + \frac{(z + p)^5}{5} - \dots \right] - z = 0.$$

Uspořádáme výrazy podle mocnin p :

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots \right] + p \left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots \right] \\ & + p^2 \left[-\frac{1}{2} + z - \frac{3}{2}z^2 + 2z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \dots \right] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Zanedbáme členy obsahující druhé a vyšší mocniny p a odtud vyjádříme

$$p \approx \frac{\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{5}z^5 + \dots}{1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \dots} = \frac{1}{2}z^2 + \dots.$$

Druhá aproximace je tedy $x \approx z + z^2/2$. Vezmeme dále $p = z^2/2 + q$ a to dosadíme do (14):

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots \right] + \left(\frac{z^2}{2} + q \right) \left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots \right] \\ & + \left(\frac{z^2}{2} + q \right)^2 \left[-\frac{1}{2} + z - \frac{3}{2}z^2 + 2z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \dots \right] + \dots = 0 \end{aligned}$$

Uspořádáme podle mocnin q :

$$\left[-\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{20}z^5 + \dots \right] + q \left[1 - z + \frac{1}{2}z^2 + \dots \right] + \dots = 0$$

Odtud určíme

$$q \approx \frac{\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5 + \dots}{1 - z + \frac{1}{2}z^2 + \dots} = \frac{1}{6}z^3 + \dots,$$

třetí aproximací pak je $x \approx z + z^2/2 + z^3/6$.

Pokračováním podle tohoto postupu Newton vypočte

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \dots.$$

Protože $z = \ln(1 + x)$ je ekvivalentní se vztahem $x = e^z - 1$, Newton tak vlastně jako první odvodil řadu pro exponenciálu [3, str. 204]

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \dots.$$

Číslo e poprvé našel DANIEL BERNOULLI (1700–1782) v roce 1729 při vyšetřování maxima funkce $x^{1/x}$. Zapsal toto číslo ve tvaru $\left(\frac{A+1}{A}\right)^A$, kde $A = \infty$ a následně je vyjádřil pomocí řady [13, str. 124]:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Vztah mezi logaritmem a exponenciálou plně objasnil až LEONHARD EULER (1707–1783), ačkoli podobné myšlenky lze nalézt již u Wallise (viz [3, str. 164]). Od Eulera pochází dnes užívaná definice logaritmu, kterou zavedl v knize *Introductio in analysin infinitorum* z roku 1748 (viz [3, str. 272]): *Logarithmus x při základu a , $\log_a x$, je takový exponent y , pro který platí $a^y = x$.*

Euler počítal s nekonečně malým číslem ε a nekonečně velkým číslem N (označení viz [3, str. 272]). Následujícím způsobem odvodil rozvoj obecné exponenciály a^x (viz [3, str. 272–273]). Nejprve poznamenal, že $a^0 = 1$. Pro nekonečně malé číslo ε platí

$$a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon, \quad (15)$$

kde k je konstanta závisající na základu a . Je-li dáno konečné číslo x , pak Euler zavádí nekonečně velké číslo $N = x/\varepsilon$. Potom je

$$\begin{aligned} a^x &= a^{N\varepsilon} = (a^\varepsilon)^N \\ &= (1 + k\varepsilon)^N \\ &= \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N \\ &= 1 + N \left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!} \left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + kx + \frac{1}{2!} \frac{N(N-1)}{N^2} k^2 x^2 + \frac{1}{3!} \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} k^3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Protože N je nekonečně velké, Euler předpokládá, že

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \dots,$$

což bychom v dnešní symbolice interpretovali jako $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-l)/n = 1$, kde l je konečné číslo (viz [9, str. 36]). Odtud je

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!} + \dots$$

Substitucí $x = 1$ obdržel vztah mezi a a k :

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots + \frac{k^n}{n!} + \cdots \quad (16)$$

Euler nyní zavedl své slavné číslo e jako hodnotu základu a , pro kterou je $k = 1$ [3, str. 273].

$$e = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}$$

V tomto čísle rozpoznal základ přirozených logaritmů, a vypsál je s přesností na 23 desetinných míst:

$$e = 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,28$$

V dnešním zápisu dospěl Euler k rozvoji

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}. \quad (17)$$

V průběhu výpočtu se též objevuje vyjádření

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

z něhož dostaneme e jako limitu posloupnosti

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Nyní ještě ukážeme význam konstanty k z rovnosti (15). Ze vztahů (16) a (17) vidíme, že $a = e^k$. Je tedy $k = \ln a$.

Následně Euler odvodil rozvoj logaritmu (viz [3, str. 273–274]):

Nechť a, x, y jsou čísla splňující $a^x = 1 + y$. Pišme opět $x = N\varepsilon$, kde N je nekonečně velké a ε nekonečně malé, a použijeme vztah (15). Potom je

$$1 + y = a^x = a^{N\varepsilon} = (1 + k\varepsilon)^N,$$

a tedy $\log_a(1 + y) = N\varepsilon$. Platí také

$$1 + k\varepsilon = (1 + y)^{1/N},$$

$$\varepsilon = \frac{(1 + y)^{1/N} - 1}{k}$$

a odtud dostaneme

$$\log_a(1 + y) = N\varepsilon = \frac{N}{k} \left((1 + y)^{1/N} - 1 \right).$$

Pro $k = 1$, tedy pro $a = e$ máme

$$\ln(1 + y) = N \left((1 + y)^{1/N} - 1 \right). \quad (18)$$

Dnes bychom tento vztah vjádřili jako

$$\ln(1 + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left((1 + y)^{1/n} - 1 \right).$$

Výraz $(1 + y)^{1/N}$ rozvineme podle binomické poučky a dostaneme

$$\begin{aligned} \ln(1 + y) &= N \left(\frac{1}{N}y + \frac{\frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} - 1 \right)}{2!} y^2 + \frac{\frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} - 1 \right) \left(\frac{1}{N} - 2 \right)}{3!} y^3 + \dots \right) \\ &= y + \frac{1}{2!} \left(\frac{1 - N}{N} \right) y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1 - N}{N} \right) \left(\frac{1 - 2N}{N} \right) y^3 + \dots \end{aligned}$$

Dosazení

$$\frac{1 - N}{N} = -1, \quad \frac{1 - 2N}{N} = -2, \quad \text{atd.},$$

nám dá požadovaný rozvoj logaritmu:

$$\ln(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \dots$$

Euler ještě vypočetl rozvoje

$$\ln(1 - y) = -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \dots,$$

$$\ln \frac{1 + y}{1 - y} = 2 \left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \dots \right).$$

1.4 Rozvoje goniometrických funkcí

Binomická, exponenciální a logaritmická řada se objevují v pracích evropských matematiků od 17. století v souvislosti s interpolačními problémy a počátky integrování. Je pozoruhodné, že mocninné rozvoje goniometrických funkcí byly poprvé nalezeny v Indii a to dokonce ještě o téměř 200 let dříve, na konci 15. nebo na začátku 16. století.

Z té doby, tj. z let 1501–1502, pochází veršovaný spis *Tantra-sangraha* (Vědecký sborník) jihoindického učenice NÍLAKANTHY z KERALU [5], jinak též NÍLAKANTHA SOMAYAJI (1444–1544) viz [7]. V tomto díle nacházíme následující popis [5, str. 170]:

Vezmi takový oblouk kružnice, že jeho sinus je menší než kosinus (). Vynásob sinus oblouku poloměrem a děl kosinem. To dá první veličinu. Vynásob tuto veličinu čtvercem sinu a děl čtvercem kosinu, dostaneš druhou veličinu. Opakuj to, násobíš čtvercem sinu a dělíš čtvercem kosinu. Získané veličiny děl po pořádku lichými celými čísly 1, 3, 5, Jestliže získané veličiny začneš střídavě odečítat a přičítat k první, pak konec konců dostaneš oblouk kružnice*

Označíme-li poloměr kružnice r , pak délka oblouku kružnice o poloměru r bude $r\varphi$, kde φ je velikost úhlu v obloukové míře. Dále píšme $\text{Sin } \varphi = r \sin \varphi$ a $\text{Cos } \varphi = r \cos \varphi$ v souladu s označením v [5] pro tehdejší význam sinu a kosinu. Podle uvedeného návodu tedy platí

$$r\varphi = \frac{r \text{Sin } \varphi}{\text{Cos } \varphi} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r \text{Sin } \varphi}{\text{Cos } \varphi} \cdot \frac{\text{Sin}^2 \varphi}{\text{Cos}^2 \varphi} + \frac{1}{5} \cdot \frac{r \text{Sin } \varphi}{\text{Cos } \varphi} \cdot \frac{\text{Sin}^2 \varphi}{\text{Cos}^2 \varphi} \cdot \frac{\text{Sin}^2 \varphi}{\text{Cos}^2 \varphi} - \dots$$

Po úpravě dostaneme

$$r\varphi = r \left(\text{tg } \varphi - \frac{\text{tg}^3 \varphi}{3} + \frac{\text{tg}^5 \varphi}{5} - \dots \right).$$

Označíme-li $x = \text{tg } \varphi$, dostaneme po úpravě rozvoj funkce arkustangens:

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Z podmínky (*) lze usoudit, že Nílakantha již přemýšlel o konvergenci řady pro $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ a divergenci pro $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ (viz [12, str. 169]); v druhém případě doporučuje počítat oblouk $r \cdot (\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Volbou $r = 1$ a $\varphi = \pi/4$ obdržel řadu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + K_n,$$

kde K_n je opravný člen, který již pro malá n podstatně zlepšuje aproximaci [12, str. 169]. Kromě této řady jsou ve Vědeckém sborníku uvedeny jiné, rychleji konvergující, včetně několika vyjádření opravných členů K_n (viz [5, str. 171]).

V jiném indickém spisu, *Karana-paddhati*, (Technika početních operací), je uveden rozvoj funkce arkustangens v mocninou řadu, její použití pro výpočet π , a také rozvoje funkcí sinus a kosinus (viz [5, str. 175]).

Děl oblouk kružnice dvěma, třemi, atd. poloměry, potom vynásob oblouk prvním výsledkem, co získáš druhým atd. Napiš sudé veličiny pod oblouk a liché pod poloměr a odečti každou druhou. Dostane se sinus a kosinus oblouku.

Podle uvedeného návodu, kde označíme r poloměr a s oblouk odpovídající úhlu φ tj. $s = r\varphi$, sestojíme dvě posloupnosti

$$s, \frac{s^3}{2 \cdot 3 \cdot r^2}, \frac{s^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot r^4}, \dots$$

$$r, \frac{s^2}{2r}, \frac{s^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^3}, \dots$$

ze kterých utvoříme rozvoje sinu a kosinu v nekonečné řady:

$$\sin \varphi = r \sin \varphi = s - \frac{s^3}{3!r^2} + \frac{s^5}{5!r^4} - \dots$$

$$\cos \varphi = r \cos \varphi = r - \frac{s^2}{2!r} + \frac{s^4}{4!r^3} - \dots$$

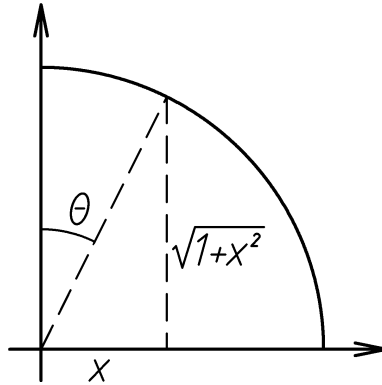
Oba výše zmíněné spisy jsou psány ve verších a obsahují pouze formulace pravidel bez důkazů. Odvození se objevuje až v prozaické práci *Iukti Bhásá* (*Yuktibhasa*) (Vysvětlující komentář), kterou napsal JYESTHADEVA (asi 1500 – asi 1575) (viz [7]). Nemáme žádné důvody, pro něž bychom se domnívali, že Nīlakantha a jeho neznámí předchůdci nebo současníci, zabývající se řadami, používali jiné metody než metody popsané ve Vysvětlujícím komentáři, píše Juškevič v [5]. Obecně se soudí, že výše uvedené výsledky nalezl MADHAVA ZE SANGAMAGRAMMU (1350–1425). Je možné, že autorem spisu *Karana Paddhati*, který byl napsán mezi lety 1375 a 1475, je právě Madhava, to je ovšem pouhá domněnka [8].

Práce indických matematiků zůstaly západním matematikům neznámé. Jako první v Evropě nalezl rozvoj sinu a kosinu ISAAC NEWTON (viz [3, str. 205–206]). Funkci $y = \sqrt{1 - x^2}$ rozvinul v řadu

$$(1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + \dots,$$

kterou integroval po členech

$$\int_0^x (1 - t^2)^{1/2} dt = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \dots$$



Označme θ délku oblouku polokružnice $y = \sqrt{1-x^2}$ nad intervalem $[0, x]$, potom je $\sin \theta = x$. Výše zmíněný integrál je pak roven součtu obsahu kruhové výseče příslušející oblouku θ a obsahu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami x a $\sqrt{1-x^2}$. Protože v jednotkové kružnici je velikost obsahu kruhové výseče rovna polovině velikosti příslušného oblouku, je délka oblouku rovna

$$\theta = 2 \int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt - x\sqrt{1-x^2}.$$

Rozvinutím do mocninných řad dostaneme

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \dots \right) - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + \dots \right) \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots, \end{aligned}$$

což je rozvoj funkce arkus sinus, $\theta = \arcsin x$ [3, str. 206]. Metodou inverze řady pak Newton vypočítal rozvoj sinu (viz [2, kap. 1]): Přepíšeme rovnost do tvaru

$$\left[x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots \right] - \theta = 0. \quad (19)$$

První aproximace je zřejmě $x \approx \theta$. Dosadíme $x = \theta + p$ do (19) a výsledek uspořádáme podle mocnin p :

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{6}\theta^3 + \frac{3}{40}\theta^5 + \frac{5}{112}\theta^7 + \dots \right] + p \left[1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{3}{8}\theta^4 + \frac{5}{16}\theta^6 + \dots \right] + \\ &+ p^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4}\theta^3 + \frac{15}{16}\theta^5 + \dots \right] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Zanedbáním výrazů s $p^2, p^3, \dots$ dostaneme

$$p \approx \frac{-\frac{1}{6}\theta^3 - \frac{3}{40}\theta^5 - \frac{5}{112}\theta^7 + \dots}{1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{3}{8}\theta^4 + \frac{5}{16}\theta^6 + \dots},$$

odkud vezmeme $p \approx -\theta^3/6$. Dále dosadíme $p = -\theta^3/6 + q$ do (20) a uspořádáme podle mocnin q :

$$\left[-\frac{1}{120}\theta^5 - \dots\right] + q \left[1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \dots\right] + \dots = 0$$

Odtud je $q \approx \theta^5/120$. Nyní máme

$$x = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5,$$

což jsou první tři členy rozvoje

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \dots$$

Rozvoj funkce kosinus mohl určit například takto (viz [3, str. 206]):

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 \theta - \frac{1}{8}\sin^4 \theta - \frac{1}{16}\sin^6 \theta + \dots \quad (\text{binomický rozvoj}) \\ &= 1 - \frac{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \dots\right)^2}{2} - \frac{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots\right)^4}{8} - \frac{\left(\theta - \dots\right)^6}{16} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)\theta^4 + \left(-\frac{1}{72} - \frac{1}{120} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right)\theta^6 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6 + \dots \end{aligned}$$

Newton nakonec zaznamenal obecné vyjádření koeficientů [3, str. 206]

$$\sin \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!}.$$

Rozvoj funkce arkustangens znovu našel v roce 1671 skotský matematik JAMES GREGORY (1638–1675) a nezávisle na něm v roce 1673 také GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716).

V *Introductio in analysin infinitorum* Leonhard Euler definoval funkce sinus a kosinus vzhledem k jednotkové kružnici (jejich hodnoty byly dosud závislé na poloměru kružnice). Euler pak popsal základní vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, součtové formule, periodicitu sinu a kosinu, a odvození jejich mocninných řad (viz [3, str. 276–275]). Euler počítal s komplexními čísly stejně přirozeně jako s reálnými, objevují se jako argumenty i jako hodnoty funkcí (viz [9, str. 41]). K odvození rozvoje využil Moivreovu větu

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz,$$

kde „i“ je imaginární jednotka a n přirozené číslo. Nechť ε je nekonečně malé číslo a N je nekonečně velké celé číslo [3, str. 275]. Dosazením těchto veličin do Moivreovy formule dostaneme

$$\begin{aligned}\cos N\varepsilon + i \sin N\varepsilon &= (\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N, \\ \cos N\varepsilon - i \sin N\varepsilon &= (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N.\end{aligned}$$

Sečtením, resp. odečtením těchto dvou rovnic dostaneme vyjádření sinu a kosinu v tomto tvaru:

$$\begin{aligned}\cos N\varepsilon &= \frac{1}{2} [(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N + (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N] \\ \sin N\varepsilon &= \frac{1}{2i} [(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N - (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N]\end{aligned}$$

Pravé strany rovnic rozvinul Euler pomocí binomické věty

$$\begin{aligned}\cos N\varepsilon &= \cos^N \varepsilon - \frac{N(N-1)}{2!} \cos^{N-2} \varepsilon \sin^2 \varepsilon + \\ &\quad + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!} \cos^{N-4} \varepsilon \sin^4 \varepsilon - \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin N\varepsilon &= N \cos^{N-1} \varepsilon \sin \varepsilon - \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \cos^{N-3} \varepsilon \sin^3 \varepsilon + \\ &\quad + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{5!} \cos^{N-5} \varepsilon \sin^5 \varepsilon - \dots.\end{aligned}$$

Nakonec dosazuje $N\varepsilon = x$, $\cos \varepsilon = 1$, $\sin \varepsilon = \varepsilon$, $N = N-1 = N-2 = \dots$, protože N je nekonečně velké a ε nekonečně malé, a dostává řady sinu a kosinu [3, str. 276]

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots.\end{aligned}$$

Dále zde odvodil vztah mezi goniometrickými funkcemi a exponenciálou: Do pravé strany rovnice

$$\cos N\varepsilon = \frac{1}{2} [(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N + (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N]$$

dosadil $\varepsilon = x/N$, $\cos \varepsilon = 1$ a $\sin \varepsilon = \varepsilon = x/N$. Potom je

$$\cos N\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{ix}{N} \right)^N + \left(1 - \frac{ix}{N} \right)^N \right],$$

podobně

$$\sin N\varepsilon = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + \frac{ix}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{ix}{N}\right)^N \right].$$

Využitím vztahu $e^x = (1 + x/N)^N$ dostaneme

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

$$\cos x \pm i \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \pm \frac{e^{i^2x} - e^{-i^2x}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix} \pm (-e^{ix} + e^{-ix})}{2} = e^{\pm ix}$$

Stejný výsledek lze dostat přímo z rozvoje $e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (ix)^k / k!$, kde se oddělí reálné a imaginární členy (viz [9, str. 38–39]).

Zhruba takto pak Euler odvodil rozvoj funkce arkustangens [3, str. 277]: Necht' $\varepsilon = z/N$, kde z je konečné číslo. Dosadíme ε do vzorce $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$:

$$\sin \varepsilon = \varepsilon = \frac{z}{N} = \frac{1}{2i} \left((e^{iz})^{\frac{1}{N}} - (e^{-iz})^{\frac{1}{N}} \right)$$

Ze vzorce (18)

$$\ln(1+x) = N \left((1+x)^{1/N} - 1 \right),$$

plyne po úpravě a substituci $1+x = e^{iz}$

$$(e^{iz})^{1/N} = 1 + \frac{1}{N} \ln e^{iz}.$$

Dosazením a dalšími úpravami postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{z}{N} &= \frac{1}{2i} \left[\left(1 + \frac{1}{N} \ln e^{iz}\right) - \left(1 + \frac{1}{N} \ln e^{-iz}\right) \right] \\ z &= \frac{1}{2i} \left[\ln(e^{iz}) - \ln(e^{-iz}) \right]. \end{aligned}$$

Dále nahradíme e^{iz} podle vzorce $e^{iz} = \cos z + i \sin z$:

$$z = \frac{1}{2i} \left[\ln(\cos z + i \sin z) - \ln(\cos z - i \sin z) \right] = \frac{1}{2i} \left[\ln \frac{1 + i \operatorname{tg} z}{1 - i \operatorname{tg} z} \right]$$

Využijeme řadu $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, kde za x dosadíme $i \operatorname{tg} z$:

$$z = \frac{1}{i} \left(i \operatorname{tg} z + \frac{i^3 \operatorname{tg}^3 z}{3} + \frac{i^5 \operatorname{tg}^5 z}{5} + \dots \right) = \operatorname{tg} z - \frac{\operatorname{tg}^3 z}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 z}{5} - \dots$$

Odtud pak substitucí $z = \operatorname{arctg} x$ dostaneme požadovaný rozvoj

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots.$$

2 Taylorova řada

Počátkem osmnáctého století matematikové objevili, že rozvoje rozličných elementárních funkcí do mocninných řad jsou speciálním případem obecného rozvoje, který dnes nazýváme Taylorovou řadou. Připomeňme si opět několik důležitých definic a vět (viz [15]).

Definice. *Nechť je $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ je funkce definovaná v okolí bodu x_0 . Předpokládejme, že $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní derivace do řádu n včetně. Potom polynom $T_n(x)$*

$$\begin{aligned} T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned} \quad (21)$$

nazýváme Taylorovým polynomem funkce $f(x)$ se středem x_0 stupně n .

Rozdíl mezi hodnotou funkce $f(x)$ a jejím Taylorovým polynomem stupně n nazýváme zbytkem po n -tém členu a označujeme jej $R_n(x)$. Vztah mezi $f(x)$, $T_n(x)$ a zbytkem $R_n(x)$ je běžně označován jako Taylorův vzorec:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (22)$$

Konkrétní vyjádření zbytku nám dá následující věta, někdy označovaná jako Taylorova věta:

Věta. *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ a $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v uzavřeném intervalu I o krajních bodech x_0, x derivaci až do řádu $(n + 1)$. Nechť $T_n(x)$ je určen vzorcem (21) a $R_n(x)$ vzorcem (22). Nechť $\varphi(t)$, $t \in [x_0, x]$ je funkce spojitá na I , která má v každém vnitřním bodě intervalu I derivaci $\varphi'(t) \neq 0$. Potom existuje vnitřní bod ξ intervalu I tak, že*

$$R_n(x) = \frac{(x - \xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi). \quad (23)$$

Volbou $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ v (23) dostaneme Lagrangeův tvar zbytku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

a volbou $\varphi(t) = t$ v (23) Cauchyův tvar zbytku

$$R_n(x) = \frac{(x - \xi)^n (x - x_0)}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Bod ξ , kde $\xi \in [x_0, x]$, můžeme vyjádřit také ve tvaru $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in [0, 1]$.

Definice. Necht' funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivace všech řádů. Potom se řada

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

nazývá Taylorova řada funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 .

Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje k funkci $f(x)$, právě když zbytek po n -tém členu $R_n(x)$ konverguje k nule. Funkce $f(x)$, kterou lze v okolí bodu x_0 rozvinout do konvergentní mocninné řady, se nazývá analytická funkce.

Objevení Taylorova rozvoje bylo úzce spojeno s některými poznatky o interpolaci, které si nyní stručně přiblížíme.

2.1 Interpolace polynomy

Při konstrukci tabulek elementárních funkcí nebylo možné z různých důvodů nalézt všechny požadované funkční hodnoty, ať již to bylo dáno zdlouhavostí či dokonce nemožností takového výpočtu. Vyvstala tedy otázka, jak nalézat přibližné funkční hodnoty uvnitř (resp. vně) nějakého intervalu, v jehož krajních bodech funkční hodnoty známe, tedy tzv. interpolace (resp. extrapolace). Prvním přiblížením je lineární interpolace, známá již od dob PTOLEMAIA (2. století n. l.). Mějme dvě funkční hodnoty $y_0 = f(x_0)$ a $y_1 = f(x_1)$, kde $x_1 - x_0 = \Delta x$. Označme první diferenci $\Delta y_0 = y_1 - y_0$. Lineární interpolace je určena vzorcem

$$f(x_0 + s\Delta x) \approx y_0 + s\Delta y_0, \quad s \in [0, 1].$$

Pro $s = 0$ a $s = 1$ dostaneme y_0 a y_1 . Volbou $s \in (0, 1)$ dostaneme přibližnou hodnotu $f(x)$ pro $x \in (x_0, x_1)$. V kartézské soustavě souřadnic je toto v podstatě vyjádření úsečky s koncovými body $A = [x_0; f(x_0)]$, $B = [x_1; f(x_1)]$.

Například pro výpočet logaritmů však tato metoda přestávala být dostatečující (viz [3, str. 282]). Henry Briggs okolo roku 1620 proto k doplňování logaritmických tabulek používal následující interpolaci. Máme-li tři funkční hodnoty $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$, kde $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \Delta x$, pak s využitím obou diferencí $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ zavedeme druhou diferenci $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$. Briggsova interpolace potom byla dána vzorcem

$$f(x_0 + s\Delta x) \approx y_0 + s\Delta y_0 + \frac{1}{2}s(s-1)\Delta^2 y_0.$$

Na pravé straně je polynom druhého stupně v proměnné s , který pro $s = 0, 1, 2$ nabývá předepsaných hodnot y_0, y_1, y_2 . Podobné vzorce znali na začátku 7. století LIOU ČUO, v 11. stol. AL-BÍRÚNÍ a ve 12. stol. BHÁSKARA [5, str. 91–92, 307].

Výše uvedené metody zobecnili Isaac Newton, když ve svých *Principiích* uvedl vzorec dnes známý jako *forward-difference formula* [3, str. 282], a James Gregory, který stejný vzorec (až na označení) poslal Johnu Collinsovi 23. listopadu 1670 (viz [3, str. 284–285]).

Zavedeme nejprve označení pro difference vyšších řádů:

$$\Delta^{k+1}y_j = \Delta(\Delta^k y_j) = \Delta^k y_{j+1} - \Delta^k y_j$$

Máme $\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$, a tedy pro třetí diferenci platí

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Obecný vzorec

$$\Delta^k y_j = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} y_{k-i+j},$$

dokážeme indukcí.

Pro $k = 1$ tvrzení platí, dostáváme vzorec pro první diferenci $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. Jestliže tvrzení platí pro k , pak

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} y_j &= \Delta(\Delta^k y_j) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} y_{k-i+j+1} - \sum_{i=0}^k (-1)^{i+1} \binom{k}{i} y_{k-i+j} \\ &= \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} y_{k-l+j+1} + \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l \binom{k}{l-1} y_{k-l+j+1} \\ &= \binom{k}{0} y_{k+j+1} + \sum_{l=1}^k (-1)^l \left[\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right] y_{k-l+j+1} + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} y_j \\ &= \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l \binom{k+1}{l} y_{k-l+j+1}. \end{aligned}$$

V daném označení pak vypadá Newtonova *forward-difference formula* pro interpolované hodnoty $f(x_0 + s\Delta x)$, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, kde $x_i = x_0 + i\Delta x$, $i \in 1, \dots, n$ takto:

$$\begin{aligned} f(x_0 + s\Delta x) &\approx y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \\ &\dots + \frac{s(s-1) \dots (s-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 = \sum_{i=0}^n \binom{s}{i} \Delta^i y_0 \end{aligned} \quad (24)$$

Základní myšlenkou Gregory–Newtonovy interpolace bylo určení polynomu ve tvaru

$$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ \cdots + A_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (25)$$

který prochází body $y_i = f(x_i)$, kde $x_i = x_0 + i\Delta x$, $i \in 1, \dots, n$. Jestliže $x - x_0 = s\Delta x$, potom

$$x - x_1 = x - x_0 + x_0 - x_1 = (s - 1)\Delta x, \\ x - x_2 = x - x_0 + x_0 - x_1 = (s - 2)\Delta x,$$

atd. Dosazením do vyjádření (25) dostaneme

$$p(x_0 + s\Delta x) = B_0 + B_1s + B_2s(s - 1) + \cdots + B_ns(s - 1) \cdots (s - n + 1),$$

kde $B_k = A_k(\Delta x)^k$. Abychom obdrželi Gregory–Newtonovu interpolační formuli stačí ukázat, že

$$B_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Chceme, aby polynom nabýval v bodech $x_k = x_0 + k\Delta x$ pro $k = 0, 1, \dots, n$ daných hodnot $f(x_k) = y_k$. Z podmínky $p(x_0 + k\Delta x) = y_k$ dostaneme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rclcl} y_0 & = & B_0 & & \\ y_1 & = & B_0 + & B_1 & \\ y_2 & = & B_0 + & 2B_1 & + & 2B_2 \\ y_3 & = & B_0 + & 3B_1 & + & 6B_2 & + & 6B_3 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \\ y_n & = & B_0 + & nB_1 & + & n(n-1)B_2 & + & n(n-1)(n-2)B_3 + \cdots + n!B_n \end{array}$$

Evidentně je $B_0 = y_0$ a $B_1 = y_1 - y_0 = \Delta y_0$. Dále použijeme následující vzorce

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = (1 + \Delta)y_0, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = (1 + \Delta)y_n,$$

kde 1 a Δ vystupují jako operátory. Indukcí podle n dokážeme, že $y_n = (1 + \Delta)^n y_0$. Pro $n = 1$ vzorec platí. Jestliže to je splněno pro n přirozené, potom platí

$$y_{n+1} = (1 + \Delta)^n y_1 = (1 + \Delta)^n (y_0 + \Delta y_0) = (1 + \Delta)^n ((1 + \Delta)y_0) = (1 + \Delta)^{n+1} y_0.$$

Právě dokázaný vzorec nám dá následující vyjádření:

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + n\Delta^{n-1}y_0 + \Delta^n y_0$$

Předpokládejme, že $B_k = \Delta^k y_0 / k!$ pro $k < n$. Dosazením do poslední rovnice soustavy dostaneme

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + n\Delta^{n-1}y_0 + n!B_n.$$

Porovnáním posledních dvou rovnic nám ukazuje, že $B_n = \Delta^n y_0 / n!$. Tím je odvození interpolační formule (24) dokončeno (viz [3, str. 286]).

Pomocí vzorce (24) pak Gregory nejspíše odvodil binomickou řadu. Jeho výpočet mohl vypadat takto (viz [3, str. 284–285]). Vezměme funkci $f(x) = (1+a)^x$ a položme $x_j = j$ pro $j \in \mathbb{N}_0$; pak platí $\Delta x = 1$ a $y_j = (1+a)^j$. Dále platí

$$\Delta^k y_j = a^k y_j \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0$$

což dokážeme indukcí:

Pro $k = 1$ dostaneme

$$\Delta y_j = (1+a)^{j+1} - (1+a)^j = (1+a)^j a = a y_j.$$

Předpokládejme, že vzorec platí pro k , potom je

$$\Delta^{k+1} y_j = \Delta^k y_{j+1} - \Delta^k y_j = a^k (1+a)^{j+1} - a^k (1+a)^j = a^k (1+a)^j a = a^{k+1} y_j.$$

Je zřejmě $y_0 = 1$ a $\Delta^k y_0 = a^k$. Dosazením do interpolační formule obdržíme

$$(1+a)^s \approx 1 + sa + \frac{s(s-1)}{2!}a^2 + \cdots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}a^n,$$

tj. prvních $n+1$ členů binomického rozvoje.

Na závěr poznamenejme, že interpolační polynom lze rovněž psát ve tvaru

$$\sum_{k=0}^n y_k \prod_{m \in \{0, \dots, n\} \setminus \{k\}} \frac{x - x_m}{x_k - x_m}.$$

Je vidět, že tento polynom v bodech $x_0, \dots, x_n$ nabývá hodnot $y_0, \dots, y_n$. Výhodou vzorce (24) je naopak to, že při zvětšování počtu interpolačních bodů nemusíme přepočítávat všechny koeficienty, přidáváme pouze další sčítance (viz [14, str. 18]).

2.2 Objev Taylorovy řady

V roce 1715 uvedl BROOK TAYLOR (1685–1731) v práci *Methodus incrementorum Directa et Inversa* obecný předpis pro rozvoj funkce v mocninnou řadu, který dodnes nese jeho jméno [6, str. 441]. Taylor vlastně hledal limitní verzi Newton-Gregoryho interpolační formule, jak ukazuje následující výpočet z [3, str. 287–289].

Pro $x = x_0 + n\Delta x$, kde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ a $y = f(x) = f(x_0 + n\Delta x)$ má interpolační formule tento tvar:

$$y = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots$$

Taylor v podstatě hledal limitu pro $\Delta x \rightarrow 0$ a $n \rightarrow \infty$ pro pevně zvolené x_0 a x . Z předpokladu stejnoměrně rozmístěných bodů je $x = x_i + n\Delta x - i\Delta x$, Taylor dosazuje

$$n = \frac{x - x_0}{\Delta x}, \quad n - 1 = \frac{x - x_1}{\Delta x}, \quad n - 2 = \frac{x - x_2}{\Delta x}, \quad \text{atd.}$$

a dostane

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_0}{(\Delta x)^3} + \dots$$

Taylor nahradil přírůstky *fluxemi*, což odůvodňuje takto:

Budiž x a y funkce proměnné t , kde x roste lineárně, tedy $x(0) = x_0$, $x(h) = x_1$, $x(2h) = x_2$, atd. Jestliže je h velmi malé ($\Delta x \rightarrow 0$), potom

$$\Delta x = x_1 - x_0 = x(h) - x(0) = \dot{x}_0 h,$$

kde $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ je *fluxe* (derivace podle času t) funkce x v bodě $t = 0$, podobně

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = y(h) - y(0) \approx \dot{y}_0 h,$$

kde $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ je *fluxe* y pro $t = 0$. Pro difference vyšších řádů dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \approx \dot{y}(h)h - \dot{y}_0 h \approx \ddot{y}_0 h^2 \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \approx \ddot{y}(h)h - \ddot{y}_0 h \approx \dddot{y}_0 h^3. \end{aligned}$$

Podíl diferencí pak bude odpovídat podílu fluxí:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \approx \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}} \quad \frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} \approx \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x})^2} \quad \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x} \approx \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x})^3}.$$

Dále z předpokladu $\Delta x \rightarrow 0$ vyplývá, že $x_i \rightarrow x_0$ pro všechna i , a tedy $(x - x_i) \rightarrow (x - x_0)$. Odtud dostáváme Taylorovu řadu

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^2} + \frac{(x - x_0)^3}{2!} \frac{\ddot{\dot{y}}_0}{(\dot{x}_0)^3} + \dots \quad (26)$$

Taylor se nezabýval otázkou konvergence [6, str. 133]. Svoji řadu použil k integraci některých diferenciálních rovnic [11, str. 134].

Taylorův rozvoj znal možná již v roce 1670 Gregory, o něco později jej také nezávisle na něm našel Leibniz, avšak ani jeden tento výsledek nepublikoval [6, str. 441]. Gregory patrně dospěl k Taylorově řadě pomocí konečných diferencí [14, str. 205]. Zveřejnil pouze několik rozvoji, ovšem dosti složitých funkcí. Kromě rozvoje arkus tangens, který se dnes někdy označuje jako Gregoryho řada, uvedl rozvoje funkcí $\operatorname{tg} x$, $\ln \sec x$, $\sec^{-1}(\sqrt{2}e^x)$, $\ln \operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)$, $2 \operatorname{arctg}(\operatorname{tgh}(x/2))$ (viz [3, str. 289]). Význam Jamese Gregoryho nejlépe dokládá následující citát z Edwardsovy knihy [3, str. 289]:

If Gregory's isolation and premature death had not prevented the full development and publication of his research, we might well speak today of the calculus of Newton, Leibniz, and Gregory.

Podobný rozvoj publikoval ve spisu *Acta Eruditorum* z roku 1694 JOHANN BERNOULLI (1667–1748) [6, str. 442]. Formálním rozepsáním pravé strany rovnosti $n \, dz = n \, dz$ a přezávorkováním postupně dostal (viz [3, str. 290])

$$\begin{aligned} n \, dz &= n \, dz + \underbrace{\left(z \, dn - z \frac{dn}{dz} dz \right)}_{=0} - \underbrace{\left(\frac{z^2}{2!} \frac{d^2 n}{dz^2} dz - \frac{z^2}{2!} \frac{d^2 n}{dz^2} dz \right)}_{=0} + \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{z^3}{3!} \frac{d^3 n}{dz^3} dz - \frac{z^3}{3!} \frac{d^3 n}{dz^3} dz \right)}_{=0} - \dots \\ &= (n \, dz + z \, dn) - \left(z \frac{dn}{dz} + \frac{z^2}{2!} \frac{d^2 n}{dz^2} \right) dz + \left(\frac{z^2}{2!} \frac{d^2 n}{dz^2} + \frac{z^3}{3!} \frac{d^3 n}{dz^3} \right) dz - \dots \\ n \, dz &= d(nz) - d\left(\frac{z^2}{2!} \frac{dn}{dz} \right) + d\left(\frac{z^3}{3!} \frac{dn}{dz} \right) - \dots \end{aligned}$$

Integrací člen po členu dostaneme Bernoulliovu řadu

$$\int_0^z n \, dz = nz - \frac{z^2}{2!} \frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{3!} \frac{dn}{dz} - \dots \quad (27)$$

Bernoulliovu řadu lze také odvodit opakovaným použitím metody integrace per partes

$$\int uv' dz = uv - \int u'v dz,$$

kde za „ u “ volíme postupně $n, n', n'', \dots$ a za „ v' “ mocniny z :

$$\begin{aligned} \int \underbrace{n}_u \underbrace{dz}_{v'} &= nz - \int \underbrace{\frac{dn}{dz}}_{u'} \underbrace{z^2}_v dz = nz - \left(\frac{dn}{dz} \frac{z^2}{2!} - \int \frac{d^2n}{dz^2} \frac{z^2}{2!} dz \right) \\ &= nz - \frac{dn}{dz} \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \frac{d^2n}{dz^2} - \dots \end{aligned}$$

Taylorovou řadu lze získat pomocí Bernoulliovy řady, jak ukazuje následující výpočet podle [3, str. 290–291]. Postupným dosazením $n = f'(z)$, $n = f''(z)$, $n = f'''(z)$, $n = f^{(4)}(z), \dots$ do vzorce (27) získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= f'(z)z - \frac{f''(z)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z)}{3!}z^3 - \frac{f^{(4)}(z)}{4!}z^4 + \dots \\ f'(z) - f'(0) &= f''(z)z - \frac{f'''(z)}{2!}z^2 + \frac{f^{(4)}(z)}{3!}z^3 - \dots \\ f''(z) - f''(0) &= f'''(z)z - \frac{f^{(4)}(z)}{2!}z^2 + \dots \\ f'''(z) - f'''(0) &= f^{(4)}(z) - \dots \\ f^{(4)}(z) - f^{(4)}(0) &= \dots \end{aligned}$$

Abychom postupně eliminovali $f'(z), f''(z), \dots$, sečteme první rovnici soustavy se z -násobkem druhé rovnice

$$f(z) - f(0) - f'(0)z = \frac{f''(z)}{2!}z^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} \right) f'''(z)z^3 - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} \right) f^{(4)}(z)z^4 + \dots,$$

a výsledek pak sečteme se $z^2/2!$ násobkem třetí rovnice

$$f(z) - f(0) - f'(0)z - \frac{f''(0)}{2!}z^2 = \frac{f'''(z)}{3!}z^3 - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!2!} \right) f^{(4)}(z)z^4 + \dots,$$

a toto pak se $z^3/3!$ násobkem čtvrté rovnice

$$f(z) - f(0) - f'(0)z - \frac{f''(0)}{2!}z^2 - \frac{f'''(0)}{3!}z^3 = -\frac{1}{4!} \underbrace{(1 - 4 + 6 - 4)}_{-1} f^{(4)}(z)z^4 + \dots$$

Vidíme, že na pravé straně nám vzniká speciální případ řady (26) pro $x_0 = 0$

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}z^4 + \dots$$

Také Newton našel mezi lety 1691–1692 Taylorovu řadu. Tento výsledek se objevuje v roce 1704 jako dodatek *Optiky* (Corollary 3) (viz [3, str. 289]):

Hence, indeed, if the series [for y in terms of z] proves to be of this form

$$y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \dots \quad (28)$$

(where any of the terms $az, bz^2, cz^3, dz^4, \dots$, can either be lacking or be negative), the fluxions of y , when z vanishes, are had by setting $\dot{y}/\dot{z} = a$, $\ddot{y}/\dot{z}^2 = 2b$, $\ddot{\dot{y}}/\dot{z}^3 = 6c$, $\ddot{\ddot{y}}/\dot{z}^4 = 24d$, $\ddot{\ddot{\dot{y}}}/\dot{z}^5 = 120e, \dots$

Není zde uveden žádný důkaz, nicméně vyplývá odtud, že Newton obdržel koeficienty $a, b, c, d, \dots$ postupným derivováním rovnice (28):

$$\dot{y} = a\dot{z} + 2bz\dot{z} + 3cz^2\dot{z} + 4dz^3\dot{z} + \dots \quad (29)$$

Dosazením $z = 0$ dostaneme $a = \dot{y}_0/\dot{z}_0$. Newton předpokládá, že „ z flows uniformly“, tj. že z je lineární funkce času. Potom však $\dot{z}$ je konstanta a dalším derivováním (29) dostaneme

$$\ddot{y} = 2b\dot{z}^2 + 6cz\dot{z}^2 + 12dz^2\dot{z} + \dots$$

Odtud pak dosazením $z = 0$ vypočítáme $2b = \ddot{y}_0/\dot{z}_0$. Stejným způsobem by se dopočítávaly ostatní koeficienty. Doplníme-li y_0 , které Newton volil nulové, vidíme, že zde odvodil rozvoj

$$y = y_0 + \frac{\dot{y}_0}{\dot{z}_0}z + \frac{1}{2!} \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{z}_0)^2}z^2 + \frac{1}{3!} \frac{\ddot{\dot{y}}_0}{(\dot{z}_0)^3}z^3 + \frac{1}{4!} \frac{\ddot{\ddot{y}}_0}{(\dot{z}_0)^4}z^4 + \dots, \quad (30)$$

tedy speciální případ (26) pro $x_0 = 0$. Obecné vyjádření nacházíme v následujícím dodatku (Corollary 4) [16, str. 99]:

And hence if in the equation to be resolved there be written $w + x$ for z as in Case 3 and by resolving the equation there should result the series $(y =)ex + fx^2 + gx^3 + hx^4 + \dots$, the fluxions of y for any assumed magnitude of z whatever will be obtained in finite equation by setting $x = 0$ and so $z = w$.

Řada (30) je dnes nazývána Maclaurinovou řadou, neboť ji COLIN MACLAURIN (1698–1746) používal ve svém *Treatise of Fluxions* z roku 1742, kde se odkazuje na Taylorovy výsledky (viz [6, str. 442]). Maclaurin odvozuje Taylorovu řadu podobně jako Newton. V moderním označení by Maclaurinovy úvahy vypadaly takto (viz [15, str. 211]):

Pro funkci $y = f(x)$ a daný bod x_0 hledáme řadu (nebo polynom)

$$p(x) = p_0 + (x - x_0)q_0 + (x - x_0)^2 r_0 + (x - x_0)^3 s_0 + \dots \quad (*)$$

pro kterou

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots \quad (**)$$

tj. obě funkce mají stejné derivace až do jistého řádu v bodě x_0 . Položíme-li $x = x_0$ v rovnosti (*), dostaneme ze vztahu (**) rovnosti $p_0 = p(x_0) = f(x_0)$. Derivujeme-li (*) a opět položíme $x = x_0$, dostaneme $q_0 = p'(x_0) = f'(x_0)$. Další derivování dává $2!r_0 = f''(x_0)$, $3!s_0 = f'''(x_0)$, atd. Proto řada (*) je tvaru

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots$$

a její částečné součty se nazývají Taylorovy polynomy.

Maclaurin pomocí mocninných řad zkoumal lokální extrémy funkcí (viz [3, str. 291–292]).

JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813) se pokusil odstranit z matematické analýzy úvahy o nekonečně malých číslech, limitách a diferenciálech, které byly dříve často kritizovány. V práci *Théorie des fonctions analytiques* z roku 1797 zavádí Taylorovu řadu takto (viz [3, str. 296–297]): Předpokládá, že každou funkci $f(x)$ lze rozvinout v mocninnou řadu. Nahrazením x výrazem $x + i$ (i není imaginární jednotka), pak dostává, jak říká Lagrange, „podle teorie řad“

$$f(x + i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots,$$

kde koeficienty $p, q, r, \dots$ jsou funkce proměnné x odvozené od původní funkce $f(x)$, tj.

$$f(x + i) = f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots \quad (31)$$

Funkci $p(x)$ označil $f'(x)$ a nazývá ji první odvozená „dérivé“ funkce od $f(x)$. Zde je zřejmě původ slova derivace a zápisu $f'(x)$ pro derivaci funkce $f(x)$ [3, str. 296]. Aby určil koeficienty $p(x), q(x), r(x) \dots$ nahradil i výrazem $i + o$:

$$f(x + i + o) = f(x) + p(x)(i + o) + q(x)(i + o)^2 + r(x)(i + o)^3 + \dots \\ = f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots \\ + p(x)o + 2q(x)io + 3r(x)i^2o + \dots \quad (32)$$

V rovnici (31) nahradil x výrazem $x + o$:

$$f(x + i + o) = f(x + o) + p(x + o)i + q(x + o)i^2 + r(x + o)i^3 + \dots$$

Výrazy v závorkách Lagrange rozvinul podle (31) a dosadil odvozené funkce

$$\begin{aligned} f(x + i + o) = & \left[f(x) + f'(x)o + \dots \right] + \left[p(x) + p'(x)o + \dots \right]i + \\ & + \left[q(x) + q'(x)o + \dots \right]i^2 + \dots \end{aligned}$$

Prerovnáním dostal

$$\begin{aligned} f(x + i + o) = & f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots \\ & f'(x)o + p'(x)io + q'(x)i^2o + r'(x)i^3o + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Porovnáním koeficientů v (32) a (33) našel Lagrange vyjádření

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2}p'(x) = \frac{1}{2}f''(x) \\ r(x) &= \frac{1}{3}q'(x) = \frac{1}{6}p''(x) = \frac{1}{6}f'''(x), \end{aligned}$$

kde $f''(x)$ je první odvozená funkce z f' , atd. Dosadíme-li do (31) dostaneme vzorec

$$f(x + i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)i^2}{2} + \frac{f'''(x)i^3}{6} + \dots \quad (34)$$

Nakonec ještě Lagrange poznamenal, že jen drobná znalost diferenciálního počtu umožní rozpoznat v odvozených funkcích $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ postupné derivace původní funkce x (viz [3, str. 297]). Derivace (31) podle i je

$$f'(x + i) = p(x) + 2q(x)i + 3r(x)i^2 + \dots,$$

a dosazením $i = 0$ dostaneme $f'(x) = p(x)$, ze druhé a třetí derivace máme

$$\begin{aligned} f''(x + i) &= 2q(x) + 6r(x)i + \dots; & i = 0 &\Rightarrow f''(x) = 2q(x), \\ f'''(x + i) &= 6r(x) + \dots; & i = 0 &\Rightarrow f'''(x) = 6r(x), \end{aligned}$$

ovšem za předpokladu, že lze vztah (31) derivovat podle i po členech [3, str. 297]. Lagrangeův přístup shrnuje Schwabik v článku [9, str. 45]:

Lagrangeův pokus vytěsnit všechny infinitezimální a limitní úvahy z analýzy nebyl úspěšný. Byl to projev jistého purismu, na který dnes musíme hledět tak, že základní problém obešel jenom formálně. Infinitezimální a limitní úvahy jsou přítomné, zůstávají ovšem nevysloveny v pozadí.

2.3 Zkoumání zbytku

Významným Lagrangeovým výsledkem bylo nalezení zbytku po n -tém členu v Taylorově rozvoji. Lagrange si uvědomoval, že Taylorova řada by neměla být používána, aniž by se vyšetřoval zbytek po n -tém členu [6, str. 465]. Domníval se ovšem, že stačí vzít konečný počet členů řady, aby byl zbytek dostatečně malý. Lagrangeovo odvození zbytku v *Théorie des fonctions analytiques* je podobné těm, která se dodnes objevují v některých současných učebnicích kalkulu [3, str. 297–298]. Lagrange nahradil v (34) x výrazem $x - i$:

$$f(x) = f(x - i) + if'(x - i) + \frac{i^2}{2!}f''(x - i) + \dots$$

Nyní položil $i = xz$ a dostal

$$\begin{aligned} f(x) = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2!}f''(x - xz) + \dots \\ + \frac{x^nz^n}{n!}f^{(n)}(x - xz) + \underbrace{\frac{x^{n+1}z^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x - xz) + \dots}_{x^{n+1}R(x,z)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Snadno se přesvědčíme, že $R(x, 0) = 0$. Lagrange derivoval podle z rovnici (35) a dostal

$$\begin{aligned} 0 = -xf'(x - xz) + xf'(x - xz) - x^2zf''(x - xz) + x^2zf''(x - xz) - \\ - \frac{x^3z^2}{2!}f'''(x - xz) + \dots - \frac{x^{n+1}z^n}{n!}f^{(n+1)}(x - xz) + x^{n+1}\frac{\partial R}{\partial z}(x, z). \end{aligned}$$

Sousední členy až na poslední se odečtou, dostáváme tak

$$\frac{\partial R}{\partial z}(x, z) = \frac{z^n}{n!}f^{(n+1)}(x - xz).$$

Nechť je dále M minimum a N maximum funkce $f^{(n+1)}(x - xz)$ pro $z \in [0, 1]$. Potom platí

$$\frac{Mz^n}{n!} \leq \frac{\partial R}{\partial z}(x, z) \leq \frac{Nz^n}{n!},$$

odkud integrací podle z na intervalu $[0, 1]$ (s využitím $R(x, 0) = 0$) dostaneme

$$\frac{Mz^{n+1}}{(n+1)!} \leq R(x, z) \leq \frac{Nz^{n+1}}{(n+1)!},$$

pro $z \in [0, 1]$. Volbou $z = 1$ máme odhad

$$\frac{M}{(n+1)!} \leq R(x, 1) \leq \frac{N}{(n+1)!}.$$

Zde Lagrange předpokládá to, co dnes nazýváme větou o střední hodnotě, k odůvodnění, že pro jisté $\bar{z} \in [0, 1]$ je

$$R(x, 1) = \frac{f^{(n+1)}(x - x\bar{z})}{(n+1)!}.$$

Dosazením tohoto výrazu spolu s $z = 1$ do (35) dostaneme

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kde $u = x - x\bar{z}$, tj. $u \in [0, x]$.

LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857) jako první vyslovil tvrzení, že pokud má Taylorova řada funkce konvergovat, musí zbytek po n -tém členu v Taylorově vzorci konvergovat k nule [6, str. 465]. V roce 1822 uvedl $e^{(-1/x)}$ jako příklad funkce, jejíž Maclaurinův rozvoj konverguje k funkci, která se shoduje s původní funkcí v jediném bodě (viz [14, str. 203]). Cauchy odvodil Taylorův rozvoj i se zbytkem v Lagrangeově tvaru. V osmé lekci *Leçons sur le calcul différentiel* z roku (1829) takto odvodil další vyjádření zbytku (viz [3, str. 316–317]). Nahlížíme-li na x jako na konstantu a na a jako na proměnnou, pak můžeme definovat funkci $\Phi(a)$ podle této rovnice:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \Phi(a)$$

Zřejmě je $\Phi(x) = 0$. Derivací podle a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= f'(a) - f'(a) + f''(a)(x-a) - f''(a)(x-a) + f'''(a)(x-a)^2 - \cdots \\ &\quad \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \Phi'(a). \end{aligned}$$

Odtud je

$$\Phi'(a) = -\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne existence $\theta \in [0, 1]$ tak, že platí

$$\Phi(x) - \Phi(a) = (x-a)\Phi'(a + \theta(x-a)),$$

odtud dostaneme vyjádření zbytku

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \Phi(x) - (x-a)\Phi'(a + \theta(x-a)) = \\ &= \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{(n-1)!}f^{(n)}(a + \theta(x-a)) \end{aligned}$$

ve formě, kterou dnes nazýváme Cauchyovým tvarem zbytku. Dnes obvykle použitím Cauchyovy věty o střední hodnotě odvozujeme obecnější formuli (23), jejímž důsledkem je Lagrangeovo i Cauchyovo vyjádření zbytku. Cauchy v dalších lekcích aplikací Taylorova vzorce se zbytkem ukazuje konvergenci mocninných řad elementárních funkcí, např. e^x a $\sin x$ (viz [3, str. 317]).

Zde končí náš stručný pohled do historie mocninných řad. Viděli jsme, že mocninné řady elementárních funkcí prošly vcelku složitým a dlouhým vývojem. Nejprve indiští matematikové na přelomu 15. a 16. století našli rozvoje funkcí arkustangens, sinus a kosinus. V Evropě v šedesátých letech 17. století se nejprve objevila binomická a logaritmická řada, o něco později rozvoje dalších elementárních funkcí. Z konce 17. století pocházejí první speciální nebo ekvivalentní vyjádření Taylorova rozvoje, úvahy o zbytku se objevují o sto let později, a tím byla nalezena jedna z cest ke korektnímu zavedení mocninných řad příslušných funkcí. V současných kurzech matematické analýzy přistupujeme k mocninným řadám elementárních funkcí právě jako k důsledkům Taylorova rozvoje s Lagrangeovým nebo Cauchyovým tvarem zbytku, pokud pomocí řad příslušné elementární funkce přímo nedefinujeme. Historické postupy, jakkoli se nám mohou z dnešního hlediska jevit jako nepřesné nebo zdlouhavé, jsou cenným zdrojem poznání. Můžeme na nich obdivovat dokonalé využití tehdy známých výsledků a často také geometrickou názornost, která dnešním logicky přesným odvozením obvykle chybí.

Obrazová příloha



Úvodní strana Eulerova *Introductio in analysin infinitorum*.

Z článku Alexanderson G. L.: *About the cover: Euler's Introductio in Analysin Infinitorum*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society Vol. 44, No. 4, Oct. 2007.



Saint-Vincent



Wallis



Gregory



Newton



Johann Bernoulli



Taylor



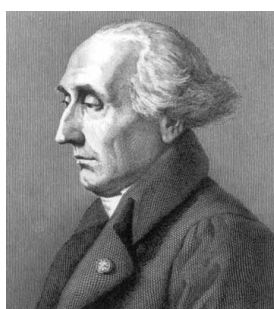
Maclaurin



Euler



d'Alembert



Lagrange



Cauchy



Abel

Portréty převzaty z The MacTutor History of Mathematics archive
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>.

Použité zdroje

- [1] Coolidge J.L.: *The Story of the Binomial Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 56, No. 3. (Mar., 1949), pp. 147-157.
- [2] Dunham W.: *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Le-sbeque*. Princeton University Press, 2004.
- [3] Edwards C.H.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [4] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O.: *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1990.
- [5] Juškevič A.P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha, 1978.
- [6] Kline M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Time*. Oxford University Press, 1990.
- [7] O'Connor J.J., Robertson E.F.: *Nilakantha Somayaji*.
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Nilakantha.html>
- [8] Pearce I.: *Madhava of Sangamagramma*.
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Projects/Pearce/Chapters/Ch9_3.html
- [9] Schwabik Š.: *Druhá krize matematiky aneb potíže růstu*. In Bečvář J., Fuchs E. (eds.): *Matematika v proměnách věků I*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 11, Prometheus, Praha, 1998.
- [10] Smith D.E.: *A Source Book in Mathematics*. Dover publications, 1959.
- [11] Struik D.J.: *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha, 1963.
- [12] Trojovský P.: *Kořeny a vývoj pojmu konvergentní řada*. In Bečvář J., Fuchs E. (eds.): *Člověk, umění, matematika*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 4, Prometheus, Praha, 1996.
- [13] Trojovský P.: *Číselné řady u Bernoulliů*. In Bečvář J., Fuchs E. (eds.): *Matematika v proměnách věků I*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 11, Prometheus, Praha, 1998.
- [14] Veselý J.: *Matematická analýza pro učitele*. Matfyzpress, Praha, 2001.

- [15] Veselý J.: *Základy matematické analýzy*. Matfyzpress, Praha, 2004.
- [16] Whiteside D.T.: *Mathematical papers of Isaac Newton, Vol.7*. Cambridge University Press, 1967.