Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

ZÁVĚREČNÁ PRÁCE

Kurz Vyučování všeobecně vzdělávacího předmětu matematika

Mgr. Vendula Honzlová Exnerová

Výpočet odmocnin od starověku po současnost

Konzultant práce: **Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.**

Praha 2014

Kurz je akreditován u MŠMT na základě § 25 a § 27 zákona č. 563/2004 Sb., o pedagogických pracovnících a o změně některých zákonů, a v souladu se zákonem č. 500/2004 Sb. pod č. j. 27 655/2012 − 25 − 591.

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za veškeré podněty a opravy a trpělivé, opakované čtení, svému muži za ochotnou pomoc, velkou podporu a korektury a Kristýně za rady s LaTeXem.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění.

V Praze dne 9. ledna 2014

Vendula Honzlová Exnerová

Název práce: **Výpočet odmocnin od starověku po současnost**

Autor: **Mgr. Vendula Honzlová Exnerová**

Konzultant práce: **Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.**, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Praha

Abstrakt: Práce pojednává o metodách výpočtu přibližných hodnot odmocnin. Úvodní kapitola se zabývá použitím odmocnin. Základem práce jsou kapitoly věnované výpočtům odmocnin v Babylónské říši, v antickém Řecku a ve středověké Evropě. Na závěr jsou pro úplnost uvedeny řetězové zlomky.

Klíčové pojmy: odmocnina, odhad hodnoty, řetězové zlomky.

Title: **Calculations of Square Roots from Antiquity up to the Present**

Author: **Mgr. Vendula Honzlová Exnerová**

Supervisor: **Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.**, Department of Mathematics Education MFF UK, Prague

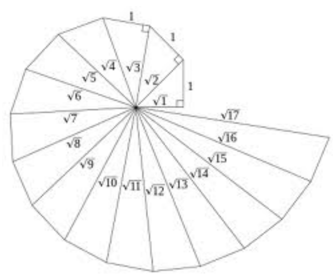
Abstract: The text is concerned in approximations of values of square roots. First, we refer about usages of square roots. The main topic are approximations of square roots in Babylonia, Ancient Greece and medieval Europe. For completeness, the text finishes with chapter about continued fractions.

Key words: square root, estimate of value, continued fractions.

Obsah

Úvod

Právě začínáte číst text zabývající se odmocninami, zejména jejich výpočty. Jelikož odmocniny z přirozených čísel zajímaly i národy již dávno zaniklé, je historie výpočtů odmocnin velmi pestrá. Díky tomu najdete níže mnohé zajímavé matematické myšlenky, postupy a postřehy.



Spirála odmocnin.[1]

V této práci se budeme věnovat pouze matematice v oblasti Blízkého Východu, Středomoří a v Evropě, situaci v Číně a Indii přenecháme jiným. Podobně jsme omezeni časově. To, že práce končí středověkem, samozřejmě neznamená, že se dále matematici již o odmocniny nezajímali, ale pouze to, že rozsah tohoto textu je omezený.

Práce je rozdělena do pěti hlavních kapitol. V první se dočtete o užitečnosti odmocniny, v následujících navštívíte Babylónii, antické Řecko a středověkou Evropu. Poslední kapitola o řetězových zlomcích zdánlivě odbíhá od základní linie textu. Řetězové zlomky zde uvádíme z několika důvodů; za prvé jsou řetězové zlomky poměrně opomíjeným tématem, za druhé v posloupnostech odpovídajících řetězovým zlomkům odmocnin nacházíme čísla známá z předchozích kapitol a za třetí je spojení řetězových zlomků a druhých odmocnin velmi zajímavé.

[1] Převzato z `http://en.wikipedia.org/`.

Předtím, než začnete číst následující kapitoly, je potřeba připomenout, že přestože je text napsán moderním matematickým jazykem, původní myšlenky takto zapsány nebyly. Dříve se matematika popisovala převážně slovně, žádné vzorce v dnešní symbolické podobě ve starověku ani středověku nenajdeme. Počátky matematického symbolického zápisu, na který jsme dnes zvyklí, nacházíme až v 15. století. Kdybychom se však drželi původních zápisů, byl by text dnešnímu čtenáři málo srozumitelný a jednotlivé matematické myšlenky těžko porovnatelné. Chtěli jsme také dát práci jednotný ráz, což by použití textů z různých období a z různých oblastí v jejich původní podobě neumožnilo.

Proč zrovna odmocnina?

Ve škole se často setkáváme s odmocňováním jako s čistě matematickou operací, s odmocninou jako s funkcí či nějakým formálním zápisem. Výpočet odmocniny je až na některé speciální případy přenechán kalkulačce, případně se odmocnina vůbec nevyčísluje (spokojíme se se zápisem $\sqrt{2}$ nebo $\sqrt[3]{5}$). Má tedy tato operace nějaké reálné opodstatnění? Jak je možné, že se výpočtům odmocnin věnovali lidé již před několika tisíci lety?

Leckdo se spokojí s odpovědí, že odmocňování je opačná operace k umocňování: když víme, jaké číslo získáme, vynásobíme-li číslo sebou samým, můžeme se také ptát, které číslo jsme museli umocnit na druhou, abychom získali nějakou konkrétní hodnotu. Taková odpověď však každému nepostačí.

Asi nejznámějším použitím druhé odmocniny je Pýthagorova věta. Vzorec o vztahu stran v pravoúhlém trojúhelníku

$$c^2 = a^2 + b^2$$

zná snad každý. Pomocí něj a odmocniny můžeme vypočítat délku plotu pozemku, který má tvar pravoúhlého trojúhelníka, nebo délku cesty vedoucí přes obdélníkový pozemek z jednoho rohu do protějšího. Kolik kroků ušetříme, pokud půjdeme po této cestě a ne podél hranic pozemku? Pýthagorovu větu využijí také zeměměřiči, pokud jim v měření vzdálenosti dvou bodů vadí nějaká překážka.

Z otázek v rovině však můžeme využít také vzorce pro obsah. Chceme například ve vstupní hale školy namalovat v rámci uměleckého vyžití na stěnu co největší barevný čtverec. Plechovka barvy, kterou je ředitel ochoten proplatit, vystačí na $10\,\mathrm{m}^2$ plochy. Jak dlouhou má mít náš čtverec stranu?

Dalšími známými vzorci využívajícími druhé odmocniny jsou vzorce pro kořeny kvadratických rovnic. Ty jsou ve škole zevrubně probírány, nebudeme se jimi tedy více zabývat.

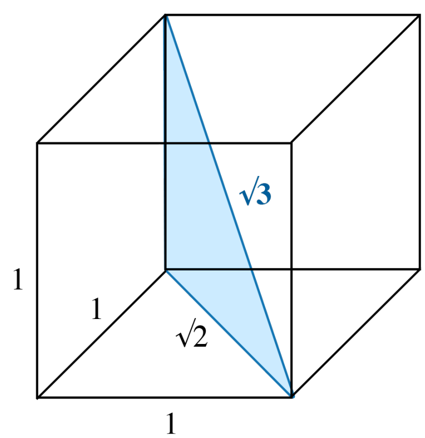
Na finanční burze se při sledování vývoje hodnoty cenných papírů používá geometrický průměr, ve kterém se bez odmocniny také neobejdeme. Pokud chceme odhadnout průměrný růst konkrétních akcií v rámci tří dnů a víme, že první den vzrostla jejich cena o $1,011\,\%$, druhý klesla o $0,798\,\%$ a třetí vzrostla o $0,010\,\%$, pomocí geometrického průměru spočítáme, že průměrně cena akcií rostla v těchto dnech o 0, 272 % , neboť

$$\sqrt[3]{1,01011 \cdot 0,99798 \cdot 1,0001} \doteq 1,00272.$$

Úlohy v prostoru obvykle vyžadují třetí odmocninu. Výrobce se může ptát, jak velký má vyrobit kanystr ve tvaru krychle, aby jeho celkový objem byl 3 litry. Dále se můžeme ptát, jak vysoký může být ocelový model Eiffelovy věže, který bude vážit maximálně 5 kg, pokud víme, že 300 m vysoká skutečná ocelová věž váží 8 000 tun. Opakované použití Pýthagorovy věty zase umožňuje spočítat tělesovou úhlopříčku (viz obrázek), která nám odpoví například na otázku, jaká nejdelší tužka se vejde do kvádrové krabice.

V biologii se uplatňuje Kleiberův zákon čtvrté odmocniny.[2] Ten říká, že čím větší je organismus, tím déle žije, a že délka života je přímo úměrná čtvrté odmocnině hmotnosti organismu. Uveďme si zjednodušený příklad: porovnáme slona a slepici. Slon africký váží v průměru 7 tun,[3] zatímco například zdrobnělá hempšírka váží 0, 9 kilogramu.[4] Slon tedy váží zhruba 7 778-krát více než slepice, podle Kleiberova zákona bude žít $\sqrt[4]{7\,778} \doteq 9$-krát déle než slepice.

Tyto příklady ukazují, že odmocnina není tolik odtržená od reálných problémů, jak by se mohlo na první pohled zdát.



$\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ v krychli.[5]

[2] [5].
[3] Převzato z http://en.wikipedia.org/.
[4] Převzato z http://http://www.cschzdounky.estranky.cz.
[5] Převzato z http://en.wikipedia.org/.

Je potřeba si uvědomit, že v běžném životě používáme pouze přibližné hodnoty odmocnin. Běžné kalkulačky počítají s přesností nejvýše na 12 platných míst. Obvykle nám to nevadí, protože i naše vnímání a konání je omezené (nikdo z nás nepostaví plot s přesností $0,01$ mm; spleteme-li se však o $0,01$ km, soused to jistě pozná). Velmi často je však výhodné v rámci postupu používat pouze symboly zastupující jednotlivé odmocniny a celkovou hodnotu vyčíslit až v posledním kroku. Díky tomu můžeme ve výpočtech dosáhnout větší přesnosti.

Tento problém je způsoben tím, že odmocniny jsou často iracionální čísla, zatímco lidé a jejich stroje pracují pouze s racionálními čísly. Proto je potřeba používat přibližné hodnoty odmocnin, tedy odmocniny obdobně jako jiná iracionální čísla různě aproximovat.

Důležitost odmocnin podtrhuje i fakt, že ve slavné francouzské *Encyklopedii* je pojem aproximace vysvětlen právě na příkladu odmocniny (autorem příspěvku je matematik Jean-Baptiste le Rond d'Alembert).

O tom, jakými postupy lze aproximací dosáhnout a jak se tyto způsoby vyvíjely v průběhu času, pojednává tato práce.

Babylónská říše

Z Mezopotámie pochází jedny z nejstarších dochovaných písemných památek. Již staří Babylóňané (cca 2000 – 1700 př. n. l.), kteří psali klínovým písmem na hliněné tabulky, se zajímali i o matematiku (zejména z praktických důvodů). Dochovaly se nám díky tomu doklady o tom, jak lidé počítali již před čtyřmi tisíci lety.

Babylóňané, na rozdíl od nás, používali šedesátkovou soustavu. Pravděpodobný důvod k tomu byl jednoduchý – číslo 60 je beze zbytku dělitelné všemi čísly od dvou do šesti a dále deseti, dvanácti, patnácti, dvaceti, třiceti a šedesáti. Násobky a převrácené hodnoty těchto dělitelů lze v šedesátkové soustavě snadno přesně zapsat. Zároveň však je číslo 60 pro běžné počítání přiměřeně velké, proto se s ním v mnoha ohledech dobře počítá.

V Babylóně již byla matematika natolik pokročilá, že se nepoužívala jen přirozená čísla, ale také zlomky (to jest racionální čísla). Nutno podotknout, že záporná čísla se objevila až mnohem později a nula chápaná jako samostatné číslo je rovněž výdobytkem pozdější doby. V Evropě nulu začal prosazovat Leonardo Pisánský (viz níže), ovšem ještě René Descartes (1596 – 1650) ji jako číslo odmítal.[6]

V Babylónii se však ještě nepoužívala racionální čísla v plné obecnosti. Babylóňané používali poziční (šedesátkový) zápis, tedy nepracovali se zlomky jako my, ale pouze s jejich zápisem v šedesátkové soustavě. Používali pouze ta racionální čísla, která mají konečný zápis v šedesátkové soustavě. Zapsat například číslo $\frac{1}{7}$ bylo problematické, protože číslo 7 není dělitelem čísla 60. Babylóňané se této hodnotě (stejně jako dalším *nepohodlným* hodnotám) vyhýbali kvůli jejímu nekonečnému rozvoji; místo této hodnoty počítali s nějakou přibližnou hodnotou, jejíž šedesátkový rozvoj je konečný a nepříliš dlouhý.

Obvykle Babylóňané dělili jen čísly ve tvaru $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ a místo jiných zlomků používali racionální čísla s konečným rozvojem v šedesátkové soustavě dostatečně blízké hodnoty.

Stejně jako my, tak i Babylóňané si pro ulehčení výpočtů vytvářeli matematické tabulky – například násobilku, tabulku převrácených hodnot čísel nebo jejich aproximací a dokonce tabulky mocnin (používané při výpočtech, které bychom my dnes prováděli pomocí kvadratických rovnic) a některých odmocnin. Dále se do dnešní doby dochovaly

[6] Viz například [11].

i tabulky obsahující vztahy v trojúhelnících a v pravidelných n-úhelnících.

Tímto se dostáváme k tématu, které nás nejvíce zajímá: k odmocnině. Přestože víme, že Babylóňané uměli přibližnou hodnotu odmocniny vypočítat, nevíme jak. Žádné zápisy o postupech se nám z této doby nedochovaly (nebo dosud nebyly nalezeny). Z dochovaných hliněných tabulek je však jasné, že Babylóňané znali analogie (slovní popisy) dnešních známých matematických pravidel:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad \text{a} \qquad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Patrně z nich vycházely jejich výpočty odmocnin.

Pokus o rekonstrukci pravděpodobné metody babylónských výpočtů je následující:[7]

Chceme vypočítat přibližnou hodnotu odmocniny z přirozeného čísla A. Budeme předpokládat, že A není druhou mocninou přirozeného čísla, jinak bychom už byli hotovi.

Nejdříve vyjádříme A ve tvaru

$$A = a^2 + b, \tag{1}$$

kde $a, b \in \mathbb{N}$ a platí $a^2 < A < (a+1)^2$.

Odmocninu $\sqrt{A}$ lze odhadnout

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2+b} < \sqrt{a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}} = a + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2+b}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b}{a} + a\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right).$$

Nyní můžeme A napsat jako

$$A = c^2 - d,$$

kde $c, d \in \mathbb{N}$ a platí $(c-1)^2 < A < c^2$.

Obdobně odhadneme

$$\sqrt{A} = \sqrt{c^2-d} < \sqrt{c^2 - d + \frac{d^2}{4c^2}} = c - \frac{d}{2c} = \frac{2c^2-d}{2c} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2-d}{c} + c\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{c} + c\right).$$

Jak vidíme, dostali jsme se ke stejnému vzorci jako v předchozím případě. Označíme tedy

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right)$$

první odhad počítané odmocniny. Víme, že jsme získali horní odhad, to jest $a_1 > \sqrt{A}$. V dalším kroku toho využijeme. Budeme hledat přesnější odhad a_2 ve tvaru $a_2 = a_1 - x$, kde x je nějaké malé kladné číslo takové, aby platilo

$$a_2^2 = (a_1 - x)^2.$$

[7] [2], str. 230.

Pokud x^2 zanedbáme, dostaneme

$$a_1^2 - 2a_1 x = A.$$

Vyjádříme-li odtud x, zjistíme, že $x = \frac{a_1^2 - A}{2a_1}$, a tedy

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1^2 - A}{2a_1} = \frac{a_1^2 + A}{2a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_1} + a_1\right).$$

Zřejmě platí, že $\sqrt{A} < a_2 < a_1$.

Pro ještě přesnější aproximaci můžeme použít $a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_2} + a_2\right)$. Opět bychom mohli dokázat, že $\sqrt{A} < a_3 < a_2 < a_1$. Takto bychom mohli pokračovat libovolně dlouho pomocí vztahu $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_{n-1}} + a_{n-1}\right)$ a přibližovat se tím k hledané hodnotě libovolně blízko. Myšlenka konvergence posloupnosti však přišla až mnohem později. Ještě se k ní vrátíme. Dochované přibližné hodnoty odmocnin na babylónských tabulkách odpovídají nejvýše třem opakováním (to jest hodnotě a_3).

Přesto však již Babylóňany spočtené hodnoty byly velmi přesné. Členy posloupnosti k hledané hodnotě totiž konvergují velmi rychle. Vypočteme nyní, o kolik se liší hodnota prvního členu od skutečné hodnoty odmocniny.[8] Vyjdeme ze vztahu (1). Potom můžeme $\sqrt{A}$ zapsat jako $\sqrt{A} = a + p$, kde $0 < p < 1$. Je zřejmé, že

$$A = a^2 + b = a^2 + 2ap + p^2$$

a odtud

$$p = \frac{b}{2a + p}.$$

Položíme-li na pravé straně rovnosti ve jmenovateli za p krajní hodnoty, to jest $p = 0$ pro získání horní meze a $p = 1$ pro získání dolní meze, dostaneme odhad

$$\frac{b}{2a + 1} < p < \frac{b}{2a}.$$

V první aproximaci jsme za p dosadili $\frac{b}{2a}$. Chybu lze odhadnout shora výrazem

$$\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a + 1} = \frac{b}{2a(2a + 1)}, \tag{2}$$

[8] [3], str. 70.

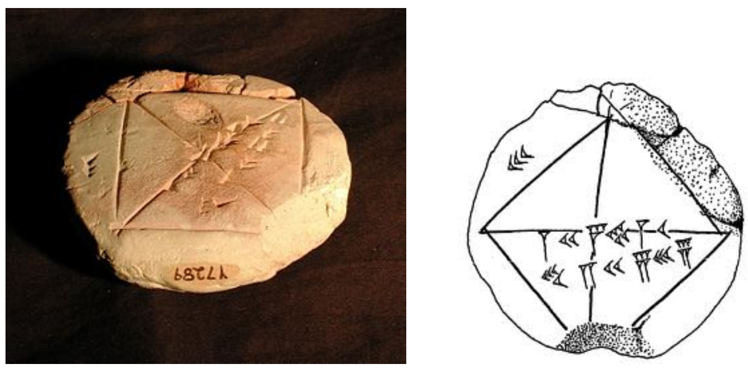
přičemž $b < (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$. Nahradíme-li b ve vzorci (2) tímto horním odhadem, zjistíme, že chyba první aproximace je menší než $\frac{1}{2a}$. Všimněme si zde, že k čím vyššímu číslu hledáme odmocninu, tím přesnější odhad dostaneme.

Příkladem dochované tabulky obsahujicící přibližnou hodnotu odmocniny je hliněná tabulka YBC7289 pocházející asi z 18. či 17. století před naším letopočtem uložená ve sbírce univerzity v Yale. Udává $\sqrt{2}$ v šedesátkové soustavě jako (1; 24, 51, 10). To můžeme přepsat následovně:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,\ 414\,212\,962\ldots$$

Přesná hodnota je $\sqrt{2} = 1,\ 414\,213\,562\ldots$, jedná se tedy o aproximaci, která se liší od skutečné hodnoty až na šestém desetinném místě.

Obrázek naznačuje, že motivací k výpočtu $\sqrt{2}$ bylo zjištění délky uhlopříčky ve čtverci.



Hliněná tabulka s $\sqrt{2}$.[9]

Dosadíme-li do odvozených vzorců $A = 2$, získáme následující hodnoty:

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1} + 1\right) = \frac{3}{2} = 1,\ 5,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12} = 1,\ 41\bar{6}, \qquad a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{17} + \frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408} = 1,\ 4142156\ldots$$

Rozdíl v našem výsledku od výsledku tabulky je nejspíše způsoben tím, že Babylóňané použili při dělení číslem 17 pouze přibližnou převrácenou hodnotu tohoto čísla.

[9] Převzato z `http://cojs.org/cojswiki` a z `http://mathdl.maa.org/`.

Z Mezopotámie se nám dochovala také zadání a řešení úloh vedoucích (dnešními postupy řešení) na kvadratické rovnice. Některé byly dány potřebami ze života (například výkop stavby, kolik zrna potřebujeme na osetí pole ve tvaru trojúhelníku), některé se zdají být *jen* učebními příklady a matematickými hříčkami, což ukazuje na hlubší zájem o matematiku samotnou (ne jen řešení praktických otázek) a také na celkovou vyšší úroveň matematického myšlení. Již v této době zvládali počtáři například substituci a prokazovali schopnost použití složitějších postupů a opakovaného odmocňování.

Babylóňané nezapisovali matematiku pomocí vzorců, nýbrž slovně. Potřebovali proto proměnné pojmenovat. V úlohách se používají místo neznámé veličiny pojmy jako *délka*, *šířka*, *plocha*, ale i *dělenec* a *dělitel*, *násobenec* a *násobitel*. Vždy se pracuje s konkrétními čísly, nikdy s obecnými vzorci a parametry. Ovšem některé příklady mohou být chápány jako vzorové, používané při řešení podobných zadání. Babylóňané však na rozdíl od nás pracovali jen s kladnými čísly, což způsobilo, že z jejich pohledu byly řešitelné jen rovnice ve speciálním tvaru.

Nejjednodušším zadáním byla rovnice typu $x^2 = q$, kde q bylo přirozené číslo nebo racionální číslo s konečným rozvojem v šedesátkové soustavě. Pomocí této rovnice se procvičovala například Pýthagorova věta o vztahu stran v pravoúhlém trojúhelníku (více než tisíc let předtím, než Pýthagorás žil), kde pomocí znalosti dvou stran (a zda jsou to odvěsny či přepona) můžeme s využitím odmocňování vypočítat stranu třetí. Obvyklé zadání rovnice znělo „Co se má samo sebou násobit, aby to dalo …“[10]

Další typ úloh byl zadán jako soustava rovnic o dvou neznámých, typicky

$$\begin{aligned} x \pm y &= p, \\ x \cdot y &= q. \end{aligned}$$

K takovýmto zadáním se dochoval i postup řešení popsaný slovně. Najdeme i složitější zadání, včetně úloh obsahujících třetí mocniny či druhé mocniny dvou neznámých. Jedno zadání si pro představu uveďme (čísla jsou v šedesátkové soustavě):[11]

Délka, šířka. Délku a šířku jsem vynásobil a vznikla plocha. Dále to, oč je délka větší než šířka, jsem vynásobil součtem délky a šířky. K tomu přidal jsem plochu. Obdržel jsem (1, 13, 20). *Dále jsem sečetl délku a šířku. Dostal jsem* (1, 40).

Symbolicky lze úlohu přepsat na soustavu

$$\begin{aligned} x \cdot y + (x - y) \cdot (x + y) &= 4\,400, \\ x + y &= 100. \end{aligned}$$

A úryvek z řešení pro představu:

[10] Např. tabulka AO6484, [2], str. 266.
[11] [2], str. 277.

Ty svým způsobem:

(1, 40)*, součet délky a šířky, vynásob* (1, 40). (2, 46, 40)*. Od* (2, 46, 40) *odejmi* (1, 13, 20), *plocha. Zde jsi určil* (1, 33, 20)*. Polovinu součtu* (1, 40) *odlom.* (50) *krát* (50) *je* (41, 40). *K* (1, 13, 20) *přidej.* atd.

Ač se nám dnes zdá takovéto počítání nepřehledné a velice namáhavé, pokud ho máme sledovat, dokazuje, že již ve staré Babylónii, jedné z prvních písemných kultur, matematici pracovali se složitějšími nástroji než jen se základní aritmetikou a kladli si náročnější matematické otázky.

Rekurentní posloupnost

Zobecníme-li předchozí úvahy pro aproximaci druhé odmocniny z kladného čísla A, můžeme použít rekurentní posloupnost, která bude definována následovně:

$$a_0 = a, \quad \text{kde } (a-1)^2 < A < a^2, \quad a \in \mathbb{N},$$
$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{a_{n-1}} + a_{n-1} \right) \quad \text{pro každé } n > 0.$$

Pro tuto posloupnost platí, že $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > \cdots > \sqrt{A}$ a že limita této posloupnosti je $\sqrt{A}$. Tomuto způsobu aproximace se říká metoda průměru.

Postup lze poměrně jednoduše zobecnit, takže lze obdobnou posloupnost použít i pro aproximaci k-té odmocniny z kladného čísla A pro libovolné přirozené $k \geq 2$. Definujeme posloupnost adekvátní volbou b_0 (například nejbližší menší hodnotou, která je celočíselnou k-tou odmocninou přirozeného čísla) a rekurentním vztahem

$$b_{n+1} = \frac{k-1}{k} \cdot \left(b_n + \frac{A}{(k-1) \cdot b_n^{k-1}} \right) \quad \text{pro každé } n \geq 0.$$

Limita této posloupnosti je $\sqrt[k]{A}$. Předpis pro n-tý člen bychom opět získali pomocí vyjádření $A = a^k + b$, kde a je přirozené číslo splňující $a^k < A < (a+1)^k$, a nerovnosti

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{a^k + b} < \sqrt[k]{a^k + b + \cdots + \left(\frac{b}{ka^{k-1}} \right)^k} = \left(a + \frac{b}{ka^{k-1}} \right).$$

Odtud je $b_1 = \frac{1}{k} \left(kb_0 + \frac{b}{b_0^{k-1}} \right) = \frac{k-1}{k} \cdot \left(b_0 + \frac{A}{(k-1) \cdot b_0^{k-1}} \right)$.

Obě výše zmíněné rekuretní posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ mají tu dobrou vlastnost, že konvergují pro každé a_0 a b_0 kladné. Můžeme pro ně tedy zvolit libovolnou kladnou hodnotu, například $a_0 = 1$ nebo $a_0 = 42$. Posloupnost se tím sice změní, členy na začátku budou mnohem více vzdáleny od hledané hodnoty, ale její limita zůstane stejná.

Antické Řecko

V antickém Řecku najdeme mnoho známých jmen mužů, kteří zasvětili svůj život matematice a matematickému bádání. Řekové používali matematiku v praxi, ale také se jí již věnovali i z čistě teoretického hlediska. Uznávali vysokou hodnotu matematiky a zajímali se i o matematické a geometrické vztahy vzdálené základním počtům běžného života.

Řečtí matematici používali pro zapisování čísel běžnou řeckou abecedu (alfabétu). Používali jak desítkovou soustavu, tak i šedesátkovou (to odpovídá stupňům, minutám a vteřinám). Na rozdíl od Babylóňanů, Řekové již uměli zapisovat libovolné zlomky, i když způsobů pro zápis měli více. Umožňovalo to mnohem přesnější a efektivnější počty. Ovšem stejně jako Babylóňané, znali Řekové pouze kladná čísla.

Pozornosti řeckých matematiků neunikly samozřejmě ani odmocniny. V antických textech nalézáme více různých způsobů výpočtů a odvození přibližných hodnot a dolních i horních odhadů zejména druhých odmocnin. Všimněme si myšlenkového pokroku – matematik se už nesnaží najít jednu co nejbližší hodnotu, u které neuvažuje, zdali je větší či menší, ale vymezuje odmocninu dvěma různými hodnotami shora a zdola.

V každém případě si nejdříve počtář musel při hledání odmocniny uvědomit očekávaný řád výsledku. Pokud odmocňujeme číslo mezi 1 a 100, víme, že odmocnina leží mezi 1 a 10. Odmocňujeme-li číslo mezi 100 a 10 000, výsledek hledáme mezi hodnotami 10 a 100 atd.

Řekové již znali iracionální čísla, což je důležitý mezník ve zkoumání odmocnin. První iracionální čísla údajně objevil Pýthagorás (cca 570 – 495 př. n. l.).

Dokážeme zde nyní, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Použijeme důkaz sporem, to jest budeme naopak předpokládat, že je $\sqrt{2}$ číslo racionální, a odvodíme z toho spor. Nechť tedy $\sqrt{2}$ lze zapsat jako podíl dvou přirozených nesoudělných čísel (tedy alespoň jedno z těchto čísel musí být liché, jinak by byla soudělná), to jest předpokládáme, že

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{pro } p, q \in \mathbb{N}.$$

Umocníme-li tuto rovnost, dostaneme $2 = \frac{p^2}{q^2}$, a proto

$$2q^2 = p^2.$$

Jelikož levá strana rovnosti je dělitelná dvěma, musí být i číslo p^2 sudé a tudíž musí být sudé i číslo p. Označme $p = 2k$. Tím dostaneme, že

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2 \quad \text{a} \quad q^2 = 2k^2.$$

Odtud ale vyplývá, že q^2 je také sudé číslo a stejně tak je nutně sudé i q. To je ovšem spor s předpokladem, že p a q jsou nesoudělná. Celkem to znamená, že $\sqrt{2}$ nelze zapsat jako podíl dvou nesoudělných čísel a tudíž není číslem racionálním. Nutně musí být tedy $\sqrt{2}$ číslo iracionální.

Avšak $\sqrt{2}$ není jediná odmocnina, která je iracionálním číslem. Například v Platónově dialogu *Theaitétos* se dočteme, že Theodóros z Kyrény[12] (5. století př. n. l.) dokázal, že jsou iracionální také čísla $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ a podobně až do čísla $\sqrt{17}$.

Nejzákladnější odhady odmocnin vycházely v antice ze znalosti racionálních čísel. Podle jedné z hypotéz Pýthagorás[13]odhadoval odmocninu ze 2 tak, že si napsal dvojku jako zlomek $\frac{50}{25}$.

Potom nejspíše uvažoval následovně:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{25}} > \sqrt{\frac{50-1}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}.$$

Dále použil Pýthagorás známý vzorec

$$(a \pm x)^2 = a^2 \pm 2ax + x^2$$

a $\sqrt{50}$ odhadl hodnotou $7+\frac{1}{14}$, aby získal i odhad shora. Celkem tedy dospěl k nerovnostem

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{1}{5}\left(7 + \frac{1}{14}\right).$$

Podobně nejspíše odhadoval Theodóros hodnotu $\sqrt{3}$. Začal u rovnosti $3 = \frac{48}{16}$ a obdržel

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{48}{16}} < \sqrt{\frac{48+1}{16}} = \frac{7}{4}.$$

[12] [6], str. lxxvii.
[13] [6], str. lxxviii.

Pro přesnější odhad Theodórovi ze vzorce vyplynula nerovnost $\sqrt{48} = \sqrt{49-1} < 7 - \frac{1}{14}$

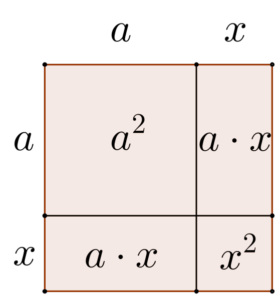
Dalším antickým matematikem, který se zajímal o výpočty odmocnin, byl Hérón z Alexandrie (cca 10 – 70 n. l.).[14] Je prvním ze zmíněných matematiků, jehož dílo se nám dochovalo do dnešní doby. Herón postupoval způsobem, který jsme již popsali na konci kapitoly o Babylónii. Vysvětluje ho ve svém díle pojmenovaném *Metrika* na příkladu výpočtu odmocniny z čísla $A = 720$. K nalezení hodnoty $\sqrt{A}$ používal dnešními slovy rekurentní posloupnost, kdy začal od nějakého přirozeného čísla a_0 takového, že a_0^2 bylo blízko A, a další členy definoval jako $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right)$. Hérón si byl vědom toho, že každým dalším krokem nalezenou hodnotu zpřesňuje a že opakováním lze získat odchylku od skutečné hodnoty libovolně malou.

Hérón odmocninu využíval pro výpočet obsahu trojúhleníku pomocí velikosti stran a, b, c. Označíme-li polovinu obvodu trojúhelníku s, to jest $s = \frac{a+b+c}{2}$, můžeme tento vztah vyjádřit vzorcem

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Třetí postup[15] výpočtu odmocniny z A, který si ukážeme, najdeme v komentářích díla Klaudia Ptolemaia (cca 90–168 n. l.), které sepsal Theón z Alexandrie (cca 335–405 n. l.). Základní myšlenka je ryze geometrická. Používá známý vztah

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$



Tento vztah říká, že obsah čtverce o straně $a+x$ je roven součtu obsahů čtverce o straně a, čtverce o straně x a dvou obdélníků o stranách a a x.

[14] [9], str. 202.
[15] [6], str. lxxv.

Pokud a již známe (například z nějakého odhadu $a^2 < A$), tak hledáme x takové, aby platilo $2ax + x^2 \leq A - a^2$. Potřebujeme právě tuto nerovnost, abychom mohli případně opakováním stejného kroku výpočet zpřesňovat (místo a pak vezmeme $a + x$).

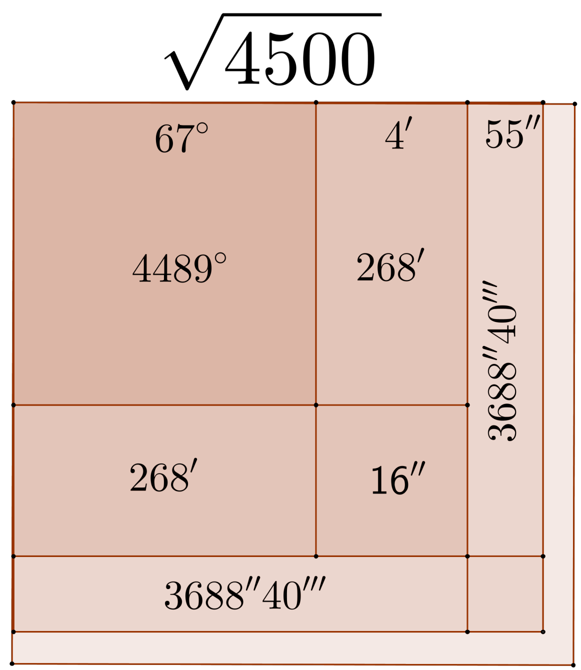
Postup pro větší přehlednost ukážeme na konkrétním případě výpočtu $\sqrt{4\,500}$. Theón počítal v šedesátkové soustavě. Není těžké odhadnout, že celá část odmocniny ze 4 500 je 67, neboť $67^2 = 4\,489$. Zbude tedy 11. Pokud chceme vyjádřit odmocninu tak, že zlomkovou část budeme hledat s přesností na dvě šedesátková místa,[16] dostaneme

$$\sqrt{4\,500} = \sqrt{67^2 + 11} = 67 + \frac{x}{60} + \frac{y}{60^2},$$

kde x a y jsou neznámá čísla, která musíme dopočítat. Hledané x musí být největší celé číslo takové, že

$$\frac{2 \cdot 67 \cdot x}{60} \leq 11.$$

Snadno spočteme, že $x \leq \frac{11 \cdot 60}{2 \cdot 67} = \frac{330}{67} = 4 + \frac{62}{67}$ a x je rovno 4.



[16] Theón obvykle používal přesnost na dvě šedesátková místa, což odpovídá dnešním minutám a vteřinám. Pro názornost a zjednodušení budeme v následujícím textu používat zápis pomocí minut a vteřin.

K výpočtu y použijeme rozdíl

$$4\,500 - \left(67 + \frac{4}{60}\right)^2 = 4\,500 - 4\,489 - \frac{2 \cdot 67 \cdot 4}{60} - \left(\frac{4}{60}\right)^2 = 11 - \frac{2 \cdot 67 \cdot 4}{60} - \left(\frac{4}{60}\right)^2 =$$
$$= \frac{11 \cdot 60^2 - 2 \cdot 67 \cdot 4 \cdot 60 - 16}{60^2} = \frac{7\,424}{60^2}.$$

Nyní předpokládáme, že $2\left(67 + \frac{4}{60}\right) \cdot \frac{y}{60^2}$ musí co nejlépe odpovídat zlomku $\frac{7\,424}{60^2}$. Tedy

$$y \leq \frac{7\,424}{60^2} \cdot \frac{60^2}{2\left(67 + \frac{4}{60}\right)} = \frac{7\,424}{60^2} \cdot \frac{60^2}{\frac{2 \cdot 4\,024}{60}} = \frac{7\,424 \cdot 60}{8\,048} = 55 + \frac{2\,800}{8\,048}.$$

Hledané y je rovno 55. Odmocnina z 4500 tedy odpovídá $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$ (lze zapsat jako $67°\,4'\,55''$). Chceme-li znát chybu odhadu, přímým výpočtem dostaneme, že

$$4\,500 - \left(67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}\right)^2 = \frac{164\,975}{60^4} \doteq 0,\,01273.$$

Stejným způsobem odhadl Theón i $\sqrt{3}$ hodnotou $1 + \frac{43}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}$. V tomto odhadu je spočteno přesně prvních 6 míst desetinného rozvoje odmocniny ze 3.

Další postup ukazuje možnost, jak získat přibližnou hodnotu $\sqrt{2}$ za použití speciálních posloupností.[17] Základem jsou *stranová* čísla (a_n) a *diagonální* čísla (d_n), která definoval Theón ze Smyrny (2. stol. n. l.) ve svém díle *O matematice užitečné pro pochopení Platóna*. První stranové i diagonální číslo je jednička ($a_1 = 1 = d_1$). Následující členy jsou definovány rekurentními vztahy

$$a_{n+1} = a_n + d_n \quad \text{a} \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n.$$

Obě posloupnosti jsou rostoucí a je možné dokázat, že platí

$$d_n^2 = 2a_n^2 + (-1)^n,$$

neboť

$$d_n^2 - 2a_n^2 = (2a_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(a_{n-1} + d_{n-1})^2 = -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2) =$$
$$= d_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2 = \cdots = (-1)^k(d_{n-k} - 2a_{n-k}).$$

a navíc $d_1 - 2a_1 = -1$.

[17] [6], str. xci.

Zřejmě se podíl $\frac{d_n^2}{a_n^2}$ přibližuje hodnotě 2 a odtud se nutně podíl $\frac{d_n}{a_n}$ přibližuje $\sqrt{2}$.

Pro názornost si ukážeme prvních několik členů posloupnosti $\frac{d_n}{a_n}$:

$$\frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{d_2}{a_2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{d_3}{a_3} = \frac{7}{5}, \quad \frac{d_4}{a_4} = \frac{17}{12}, \quad \frac{d_4}{a_4} = \frac{41}{29}, \ \ldots$$

Je zajímavé, že tato posloupnost čísel odpovídá posloupnosti řetězových zlomků (viz poslední kapitola).

Všimněme si ještě, že posloupnosti a_n a d_n odpovídají celočíselným řešením rovnic

$$2x^2 - y^2 = 1 \quad \text{a} \quad y^2 - 2x^2 = 1.$$

Pokud bychom chtěli obdobným způsobem získat odhad $\sqrt{3}$, hledali bychom celočíselná řešení rovnic

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad \text{a} \quad 3y^2 - x^2 = 2.$$

Dalším antickým matematikem, v jehož spisech nacházíme odhady odmocnin, je Archimédés ze Syrákús (3. stol. př. n. l.). Ve svém spisu *Měření kruhu*, kde mimo jiné dokázal vzorec pro obsah kruhu a odhadl hodnotu π, používá několik odhadů odmocnin různých čísel. Většina těchto odhadů pochází pravděpodobně z jednoduchých úvah, v té době běžných. Čím dnešní matematiky udivil asi nejvíce, jsou velmi přesné odhady $\sqrt{3}$, konkrétně

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780}.$$

Nikde však nezapsal, jak tyto nerovnosti získal, přestože jeho současníci používali mnohem hrubší odhady. Existuje mnoho teorií, jak k nim dospěl a některé si zde ukážeme.

První hypotézu Archimédova výpočtu vytvořil Friedrich Hultsch (19. stol.).[18] Budeme postupovat retrospektivně. Nejdříve si oba jmenovatele rozdělíme na součiny:

$$\begin{aligned} 153 &= 3 \cdot 3 \cdot 17 = 3 \cdot 51, \\ 780 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 3 \cdot 5 \cdot 52. \end{aligned}$$

Nyní můžeme zlomky porovnat

$$\frac{265}{153} = \frac{1\,325}{15 \cdot 51} \quad \text{a} \quad \frac{1\,351}{780} = \frac{1\,351}{15 \cdot 52}$$

[18] [6], str. lxxx.

a Archimédovu nerovnost přepsat jako

$$26-\frac{1}{51}=\frac{1\,325}{51}<15\sqrt{3}<\frac{1\,351}{52}=26-\frac{1}{52}.$$

Dále si uvědomme, že

$$26-\frac{1}{52}=\sqrt{26^2-1+\left(\frac{1}{52}\right)^2}>\sqrt{26^2-1}.$$

Pokud vydělíme tuto nerovnost 15, dostaneme

$$\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right)>\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}=\sqrt{\frac{676-1}{225}}=\sqrt{\frac{675}{225}}=\sqrt{3},$$

což je první požadovaná nerovnost. Druhou nerovnost získáme analogickým postupem.

Friedrich Hultsch se domníval, že Archimédés znal a používal pro odhady odmocnin nerovnosti

$$a\pm\frac{b}{2a\pm1}<\sqrt{a^2\pm b}<a\pm\frac{b}{2a}. \tag{3}$$

Horní odhad pravděpodobně používal pro určení přibližné hodnoty odmocniny již Hérón. Odpovídají tomu jím používané odhady, například $\sqrt{50}\sim 7+\frac{1}{14}$, $\sqrt{63}\sim 8-\frac{1}{16}$ a $\sqrt{75}\sim 8+\frac{11}{16}$.

Na tyto aproximace navazuje druhá možná hypotéza, která předpokládá postupné odhady $\sqrt{3}$. První odhad můžeme dostat, pokud $\sqrt{3}$ chápeme jako výšku v rovnostranném trojúhelníku o straně 2.

$$\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1}<2-\frac{1}{4}.$$

Pomocí vzorce (3) odtud získáme i nerovnost

$$\sqrt{3}>2-\frac{1}{4-1}=\frac{5}{3}.$$

Porovnáme-li hodnotu $\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$ a hodnotu $3=\frac{27}{9}=\frac{25+2}{9}$, můžeme odhadnout

$$\sqrt{3}<\frac{1}{3}\left(5+\frac{1}{5}\right)=\frac{26}{15}.$$

Aplikujeme-li stejnou myšlenku na $\frac{26}{15}$, porovnáváme $\left(\frac{26}{15}\right)^2=\frac{676}{225}$ a $3=\frac{675}{225}=\frac{676-1}{225}$. Následně dostaneme

$$\sqrt{3}<\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right)=\frac{1\,351}{780}.$$

Poté použijeme tento odhad a vzorec (3) a snadno získáme i dolní odhad

$$\sqrt{3} > \frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52-1}\right) = \frac{1\,326-1}{15\cdot 51} = \frac{265}{153}.$$

Archimédés pravděpodobně v odhadech nepokračoval z důvodu, že čísla v dalších zlomcích by byla již příliš vysoká a špatně by se s nimi při dalším použití pracovalo.

Třetí hypotéza je nejmladší a pochází od Jindřicha Bečváře.[19] Začneme hrubým odhadem, který jsme již odvodili výše:

$$\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}.$$

Nejprve zpřesníme dolní odhad. Hledejme číslo x takové, že $\left(\frac{5}{3}+x\right)^2 = 3$, tedy

$$\frac{10}{3}x + x^2 = \frac{2}{9}.$$

Zanedbáme-li v této rovnici x^2, dostaneme přibližnou hodnotu x_1 čísla x: $x_1 = \frac{1}{15}$. Zjevně je $x_1 > x$. Nyní místo x^2 napíšeme $x_1 \cdot x$ a vypočítáme x_2, kde $x_2 < x$, z rovnice

$$\frac{10}{3}x + \frac{1}{15}x = \frac{2}{9}.$$

Hodnota x_2 je tedy $\frac{10}{153}$ a dolní odhad $\sqrt{3}$ jsme zpřesnili na $\frac{5}{3} + \frac{10}{153} = \frac{265}{153}$, což je Archimédův výsledek.

Pro zpřesnění horního odhadu budeme hledat y takové, že $\left(\frac{7}{4}-y\right)^2 = 3$, to jest y splňující rovnici

$$\frac{1}{16} + y^2 = \frac{7}{2}y.$$

Zanedbáním y^2 opět dostaneme přibližnou hodnotu $y_1 = \frac{1}{56}$, která je nyní menší než hledaná hodnota y. Hodnotou y_1 znovu nahradíme jedno y ve výrazu y^2 a vypočítáme y_2 z rovnice

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{56}y = \frac{7}{2}y.$$

Snadno spočteme, že $y_2 = \frac{14}{780}$. Toto y_2 je opět menší než y. Hrubý horní odhad jsme tedy zlepšili na hodnotu $\frac{7}{4} - \frac{14}{780} = \frac{1\,351}{780}$.

Celkem jsme došli k Archimédovým nerovnostem

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780}.$$

Stejným postupem bychom mohli naše odhady nadále zpřesňovat.

Existují i jiné hypotézy týkající Archimédových výpočtů. Sigmund Günter[20] v roce 1882 rozdělil hypotézy získání těchto odhadů do tří skupin. První z nich byla skupina hypotéz pomocí horního a dolního odhadu, který opakovaně zpřesňujeme. Do této skupiny patří hypotézy, které jsme ukázali výše.

Druhá skupina využívá posloupnost zlomků ve tvaru $a+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\frac{1}{q_1q_2q_3}+\dots$ (postup založený na této myšlence nalezneme již ve starých indických textech,[21] například odhady $\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$ a $\sqrt{3}\approx 2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 5\cdot 52}$).

Postup těchto odhadů je takřka stejný, jako jsme již viděli. Pokud chceme získat výše zmíněný odhad pro $\sqrt{2}$,[22] vyjdeme z dolního odhadu $\frac{4}{3}$. Přepíšeme jej do rovnice

$$\left(\frac{4}{3}+x\right)^2=2.$$

Zanedbáním x^2 přejdeme k rovnici

$$\frac{8}{3}x_1=\frac{2}{9}.$$

Snadno dostaneme, že $x_1=\frac{1}{12}$ a že $x_1>x$. Přesnější rovnice je ve tvaru

$$\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{12}-y\right)^2=2$$

a zanedbáním y^2 řešíme rovnici

$$\frac{34}{12}y_1=\frac{1}{144},$$

[19] [7], str. 103.
[20] [6], str. xc.
[21] [7], str. 109.
[22] [7], str. 109.

jejímž řešením je $y_1 = \frac{1}{12 \cdot 34}$, pro které platí $y_1 < y$. Celkem jsme tedy získali odhad

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Třetí skupina hypotéz používá metodu řetězových zlomků, ke které se ještě později vrátíme.

Středověká Evropa

Ve středověku se v Evropě poprvé objevuje algoritmus postupného výpočtu a zápisu výpočtu odmocniny, který se vyučoval ve školách ještě ve 20. století. Vzdáleně připomíná postup, jakým dnes dělíme. Tento algoritmus odmocňování najdeme popsaný již mnohem dříve v Číně a v Indii, do Evropy se dostal až díky Arabům. Středověké texty se obvykle odkazují na pojednání *Soubor aritmetických operací*, které napsal arabský matematik Ibn al-Bannā (1256 – 1321).[23]

Algoritmus budeme demonstrovat na výpočtu odmocniny z čísla 189 574. Začneme tím, že si číslice „napárujeme“ zprava doleva, to jest představíme si dané číslo jako 18 95 74. Je zřejmé, že celá část hledané odmocniny je trojmístná.

Určíme nejprve nejvyšší druhou mocninu celého čísla obsaženou v čísle 18, tedy $4^2 = 16$. Nad 18 napíšeme 4, první číslici výsledku. Číslo 18 nahradíme číslem $18 - 16 = 2$. Poté vynásobíme číslo 4 dvěma a výslednou 8 napíšeme pod první číslici následujícího dvojčíslí.

$$\begin{array}{ccc} 4 & & \\ 18 & 95 & 74 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 4 & & \\ 2 & 95 & 74 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 4 & & \\ 2 & 95 & 74 \\ & 8 & \end{array} .$$

Poslední zápis bychom měli číst jako 80 pod 295, proto dále hledáme nejvyšší celé číslo n takové, že $(80 + n)n < 295$. To splňuje $n = 3$, číslo 3 tedy napíšeme nad dvojčíslí 95 a číslo 295 nahradíme $295 - 83 \cdot 3 = 46$. Vynásobíme-li mezivýsledek 43 v horním řádku dvěma, dostaneme hodnotu 86 a tu napíšeme opět do třetího řádku.

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & \\ 2 & 95 & 74 \\ & 8 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 4 & 3 & \\ & 46 & 74 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 4 & 3 & \\ & 46 & 74 \\ & 8 & 6 \end{array} .$$

Poslední výraz opět čteme jako 860 pod 4 674, a tak hledáme největší celé n takové, že $(860 + n)n < 4\,674$. Zjistíme, že $n = 5$ a napíšeme jej do prvního řádku nad dvojčíslí

[23] [9], str. 206.

74. Číslo $4\,674$ nahradíme hodnotou $4\,674 - 865 \cdot 5 = 4\,674 - 4\,325 = 349$, abychom získali zbytek:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ & 46 & 74 \\ & 8 & 6 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ & 3 & 49 \end{array}.$$

Popsaným postupem jsme vypočítali, že celá část z $\sqrt{189\,574}$ je 435.

Nyní si vysvětlíme, jak tento algoritmus funguje z matematického hlediska. Rozdělení do dvojic odpovídá tomu, že si číslo A, jehož odmocninu chceme najít, přepíšeme jako

$$A = Q \cdot 10^{2k} + R, \qquad \text{kde } Q < 100 \text{ a } R < 10^{2k},$$

kde $2k + 1$, respektive $2k + 2$, je počet číslic odmocňovaného čísla.

Celá část čísla $a = \sqrt{A}$ musí nutně mít $k + 1$ číslic a můžeme ji přepsat jako

$$a = q \cdot 10^k + r, \qquad \text{kde } q^2 < Q \text{ a } r < 10^k.$$

Rekurentní postup si můžeme rozdělit do dvou kroků. Nechť zbývá spočítat posledních h číslic z čísla a. To jest $a = c \cdot 10^h + d$, kde $d < 10^h$ a c jsme již spočítali.

Číslo A můžeme psát jako $A = C \cdot 10^{2h} + D$, kde $D < 10^{2h}$. Jelikož $a^2 = A$, musí d splňovat rovnost

$$(c \cdot 10^h + d)^2 = C \cdot 10^{2h} + D.$$

Po úpravě dostaneme

$$(2c \cdot 10^h + d)d = (C - c^2) \cdot 10^{2h} + D.$$

Označme e první číslici čísla d a E číslo dané prvními dvěma číslicemi D. Potom e je nejvyšší možné celé číslo takové, že platí

$$(2c \cdot 10^h + e \cdot 10^{h-1}) \cdot e \cdot 10^{h-1} < (C - c^2) \cdot 10^{2h} + E \cdot 10^{2h-2},$$

to jest

$$(20c + e) \cdot e < 100(C - c^2) + E.$$

Odpovídající e je tedy další číslicí výsledku.

Podobný postup se používal i pro numerický výpočet řešení kvadratických a kubických rovnic (například al-Tūsī, 13. stol.).

Takřka stejný algoritmus výpočtu a zápisu výpočtu odmocnin najdeme i v Čechách. Křišťan z Prachatic (cca 1366 – 1439) popsal latinsky ve svém díle *Algorismus prosaycus* stejný postup výpočtu odmocniny, ovšem s tím rozdílem, že se čísla nepřepisovala, ale psala se pod sebe (zápis měl obvykle více řádků než jen tři) a škrtala. Bylo náročnější udržet v patrnosti, se kterým číslem aktuálně pracujeme, ovšem odpovídá to psaní na pergamen či papír. Rozdíl v Křišťanově algoritmu je ten, že zanedbává při hledání další cifry hodnotu této cifry na druhou. Toto zanedbání sice zjednoduší hledání další cifry, může však způsobit, že nalezneme cifru o jednotku vyšší a musíme se v algoritmu o krok vrátit. Křišťanova úprava vyžaduje větší soustředěnost počtáře.

Přesuňme se do středověké Itálie. Leonardo Pisánský (cca 1170 – 1250), zvaný Fibonacci, sepsal několik spisů o matematice a je často považován za nejvýznamnějšího matematika středověku. Tyto spisy spojovaly již známou matematiku (z Řecka, Byzance, od Arabů…) a Fibonacciho výsledky. Byly přitom psány pro širokou veřejnost. Základním odmocninám, ale i kvadratickým rovnicím, se věnoval ve svých spisech *Kniha o abaku* (v originále *Liber abaci*) a *O praktické geometrii* (v originále *De practica geometrie*).[24]

Fibonacci.[25]

Pro odhad druhé odmocniny používal Fibonacci stejnou úvahu, kterou jsme rozvedli již v kapitole o Babylónii. Číslo A zapíšeme jako $A = a^2 + r$, kde a^2 je nejbližší menší druhá mocnina přirozeného čísla a odtud $\sqrt{A} = a + p$, kde $0 < p < 1$. Za přibližnou hodnotu p Fibonacci volí $\frac{r}{2a}$ a pro přesnější odhad počítá odhad odchylky x od přesné hodnoty z výrazu $\left(a + \frac{r}{2a} - x\right)^2 = A$. Tento postup demonstruje Fibonacci například na odhadu hodnoty $\sqrt{10}$.

V práci *O praktické geometrii*[26] najdeme také pečlivě popsané postupy, jak odmocňovat čísla, která mají tři až osm číslic, pomocí podobného zápisu, jaký jsme popsali na začátku této kapitoly. Dále zde najdeme i odmocniny čísel v jednotkách délkových (odkazujících na geometrii) a úhlových (odkazujících na astronomii), například $\sqrt{67 \text{ čtverečních sáhů}} =$

[24] [1], str. 265 – 340.
[25] Převzato z `http://cs.wikipedia.org`.
[26] [8]

8 sáhů, 1 stopa a $2+\frac{1}{4}$ unce. Těchto jednotek využívá zejména tehdy, pokud chce vypočítat i „desetinná“ místa odmocnin, ne jen celou část.

Fibonacci však uvádí i jiný postup pro odhad odmocniny, konkrétně pro číslo $\sqrt{7\,234}$. Postupuje takto:

$$\sqrt{7\,234} = \frac{1}{100}\sqrt{72\,340\,000} \approx \frac{1}{100}\left(8\,505 + \frac{4\,975}{2\cdot 8\,505}\right) \approx 85 + \frac{1}{20} + \frac{1}{400}.$$

V prvním kroku tedy Fibonacci dané číslo vhodně rozšíří, poté použije výše popsaný postup na rozšířené číslo a nakonec ho upraví. Tímto způsobem sice Fibonacci získal méně přesný odhad, než kdyby použil svůj první postup, domníváme se ovšem, že v tomto příkladu mu šlo především o ukázku jiné možné cesty k výsledku.

Obdobně počítá Fibonacci odhady odmocnin zlomků:[27]

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{60}{60}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{60}\sqrt{\frac{2\cdot 60^2}{3}} = \frac{1}{60}\sqrt{40\cdot 60} = \frac{1}{60}\sqrt{2\,400} \approx \frac{1}{60}\cdot 49 \doteq 0,816667.$$

Zkoušku správnosti výpočtu odmocniny můžeme podle Fibonacciho provést dvěma způsoby. První je jasný: vynásobit odmocninu samu sebou a přičíst zbytek. Druhý způsob využívá dělení se zbytkem, přesněji počítání modulo 7. V případě odmocniny čísla 12 345 a výsledku 111 se zbytkem 24 postupujeme následovně:[28] 111 : 7 dává zbytek 6, toto číslo umocníme, dostaneme 36, které modulo 7 dává 1. K tomuto mezivýsledku přičteme 24 modulo 7, to jest 3, a získáme 4. Číslo 12 345 modulo 7 dává také 4. Pokud by nevyšel stejný zbytek, věděli bychom, že jsme ve výpočtu udělali chybu.

Fibonacciho výpočet třetí odmocniny je analogický jeho prvnímu algoritmu. Fibonacci ho vydává za svůj, ovšem objevuje se již dříve v arabských pracích. Opět si číslo A, ze kterého chceme vypočítat třetí odmocninu, napíšeme jako $A = a^3 + r$, kde a^3 je nejbližší menší třetí mocnina přirozeného čísla a. Nyní je $\sqrt[3]{A} = a + p$, kde $0 < p < 1$. Číslo p je potřeba odhadnout. Snadno dostaneme, že

$$A = a^3 + r = a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$$

a odtud

$$p = \frac{r}{3a^2 + 3ap + p^2}.$$

Položíme-li nyní na pravé straně ve jmenovateli $p = 0$ a $p = 1$, získáme odhad

$$\frac{r}{(a-1)^3 - a^3} = \frac{r}{3a^2 + 3a + 1} < p < \frac{r}{3a^2}.$$

[27] [8], str. 37.
[28] [8], str. 36.

Proto Fibonacci odhaduje

$$\sqrt[3]{A} \approx a + \frac{r}{(a-1)^3 - a^3}.$$

Poté ovšem obvykle zlomek $\frac{r}{(a-1)^3-a^3}$ nahradí nějakým přibližným jednodušším zlomkem (označme jej h), například v odhadu $\sqrt[3]{47}$ použije místo $\frac{20}{37}$ hodnotu $\frac{1}{2}$, a opět počítá druhou aproximaci ve tvaru

$$A = (a + h + x)^3 \approx a^3 + 3a^2 x.$$

Při výpočtu x tedy opět zanedbává vyšší mocniny této proměnné (x^2 a x^3).

Fibonacci ukazuje tento postup výpočtu třetí odmocniny na čísle 47.[29] Přepíšeme postup v dnešní symbolice, přestože Fibonacci ji samozřejmě ještě nepoužíval. V prvním kroku vypočítá

$$\sqrt[3]{47} \approx 3 + \frac{20}{37} \approx 3 + \frac{1}{2}.$$

Poté vypočítá chybu svého mezivýsledku:

$$47 - \left(3 + \frac{1}{2}\right)^3 = 47 - \left(42 + \frac{7}{8}\right) = 4 + \frac{1}{8}.$$

Dále uvažuje následovně:

$$\left(3 + \frac{1}{2} + x\right)^3 \approx 42 + \frac{7}{8} + 3 \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot x.$$

Všimněme si, že Fibonacci zde nahradil jednu hodnotu $3 + \frac{1}{2}$ hodnotou 4 a že zanedbal členy s x^2 a x^3. Z této rovnice vypočítá, že $x \approx \frac{1}{10}$ a třetí odmocninu odhadne

$$\sqrt[3]{47} \approx 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 3 + \frac{3}{5}.$$

Pro kontrolu ještě vypočte

$$\left(3 + \frac{3}{5}\right)^3 = 47 - \frac{43}{125}.$$

I u třetí odmocniny Fibonacci uvádí popis postupu výpočtu a zápisu jako u druhé odmocniny, podobný tomu arabskému. Počtář si musí pamatovat třetí mocniny čísel od jedné do deseti. Poté Fibonacci na příkladech ukazuje tento postup pro čísla se třemi až sedmi číslicemi.

[29] [1], str. 281.

Fibonacci také ve svém spise *O praktické geometrii* uvádí slovní popisy některých vztahů počítání s odmocninami (na konkrétních příkladech). Všechny tyto rovnosti dokazuje pomocí geometrických vztahů, zejména pomocí podobnosti trojúhelníků. Uveďme zde pro představu nějaké rovnosti:

$$\sqrt{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}} = \sqrt{\sqrt{20\cdot 100}}, \qquad \sqrt[3]{40}\cdot\sqrt[3]{60} = \sqrt[3]{2\,400}$$
$$\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{\frac{1}{20}}, \qquad \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}.$$

Pro sčítání a odčítání odmocnin ve tvaru $\sqrt{a^2b}\pm\sqrt{c^2b}$ uvádí Fibonacci dokonce tři různé myšlenkové postupy. Ukážeme je na součtu dvou mocnin. Prvním je spočtení jednotlivých odmocnin a následný součet. Druhá možnost je pomocí vytýkání:

$$\sqrt{a^2b} + \sqrt{c^2b} = a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b} = \sqrt{(a+c)^2b}.$$

Třetí postup využívá vzorce $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Fibonacci nejdříve oba členy sečte (a^2b+c^2b), potom oba členy vynásobí $(a^2b\cdot c^2b)$ a odmocní a vynásobí dvěma $(2\sqrt{a^2b\cdot c^2b} = 2abc)$. Odmocnina součtu těchto dvou čísel je hledaný výsledek: $\sqrt{(a^2b+c^2b)+2abc}$.

Dále pracuje Fibonacci s odmocninami i geometricky, zejména v případě, kdy se jedná o iracionální čísla. Druhé odmocniny znázorňuje pomocí Eukleidovy věty o výšce (například $\sqrt{10} = \sqrt{2\cdot 5}$ získá jako výšku pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 7 a úseky přepony přilehlými k jednotlivým odvěsnám délek 2 a 5). Geometricky znázorňoval Fibonacci i třetí odmocniny. Ovšem jelikož konstrukce úsečky o délce třetí odmocniny z čísla pouze pomocí eukleidovských prostředků není možná, používal Fibonacci ke konstrukci i pohyb. Tyto poměrně složité postupy popisuje ve spisu *O praktické geometrii*.

Fibonacci se také podrobně věnoval kvadratickým rovnicím a v pozdějším spise *Flos* nalézáme i kubické rovnice. Navázal tím pravděpodobně na práce arabských matematiků. Pomocí kvadratických rovnic řeší mimo jiné úlohy o poměrech dvou a více čísel. K řešení používá doplnění na čtverec, ale i známý vzorec (přesněji jeho slovní popis) pro výpočet kořenů kvadratické rovnice. Záporné kořeny však obvykle Fibonacci neuvažuje (jako řešení) a nulové řešení uvažuje jen tehdy, pokud druhý kořen není kladný. Je to pravděpodobně dáno i charakterem samotných úloh, neboť obvykle se setkáváme jen s poměry kladnými a mnoho zadání z běžného života záporné hodnoty nepřipouští.

I v novověku nalézáme výpočty odmocnin, obvykle však jako prostředek k řešení složitějších rovnic. To je případ například Françoise Vièta (1540 – 1603), který v první části svého díla *Umění analýzy* (vydáno 1603) popisuje výpočet n-té odmocniny, kde $n \leq 6$. V dalších částech toto dílo pojednává o řešení rovnic obsahujících x^n, kde $n \leq 6$.

Řetězové zlomky

Jednou z možností, jak vyjádřit odmocniny, jsou nekonečné řetězové zlomky. Proto je zde nyní postupně zavedeme.

Konečným řetězovým zlomkem řádu n rozumíme zlomek ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

kde a_0 je libovolné celé číslo a a_i jsou přirozená čísla pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Konečný konečný zlomek zapisujeme také jako

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n].$$

Uvědomme si, že každý konečný řetězový zlomek lze převést na jednoduchý zlomek v základním tvaru. Konečné řetězové zlomky tedy odpovídají racionálním číslům. Vyloučíme-li konečné řetězové zlomky končící číslem jedna,[30] dokonce platí i obrácená implikace: každému racionálnímu číslu odpovídá právě jeden konečný řetězový zlomek řádu n takový, že pro $n > 0$ je $a_n \neq 1$.[31]

Zvolme posloupnost $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, která splňuje podmínky, že a_0 je celé číslo a a_i jsou čísla přirozená pro $i \geq 1$.

[30] Všimněme si například, že $\frac{1}{3} = \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}$, neboli $[0; 3] = [0; 2, 1]$.

[31] [10], str. 19.

Potom nekonečným řetězovým zlomkem rozumíme výraz ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \tag{4}$$

nebo ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Hodnotou nekonečného řetězového zlomku rozumíme limitu posloupnosti odpovídajících konečných řetězových zlomků $c_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.[32] Symbolicky to lze zapsat následovně:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a \in \mathbb{R}.$$

Je možné dokázat, že nekonečné řetězové zlomky jednoznačně odpovídají iracionálním číslům (a opět ke každému iracionální číslu najdeme právě jeden nekonečný řetězový zlomek se stejnou hodnotou).[33] Hodnota nekonečného řetězového zlomku je tedy vždy iracionální.

V dalším textu budeme slovo „nekonečný“ na místech, kde to nepovede k nejasnostem, vynechávat.

Řetězové zlomky nejsou vymožeností matematiky 20. století. Nenajdeme je sice ani v jednom z období, o kterých jsme hovořili v předchozích kapitolách, ale již francouzský matematik Joseph-Louis Lagrange $(1736 - 1813)$ používal řetězové zlomky k řešení rovnic typu

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \cdots + a_0 = 0.$$

Nejzajímavější jsou z hlediska odmocnin periodické řetězové zlomky. To jsou takové řetězové zlomky, pro které existují přirozené číslo h (perioda) a celé nezáporné číslo k_0 (místo, odkud je zlomek periodický) taková, že

$$a_i = a_{i+h} \text{ pro každé } i \geq k_0.$$

[32] Lze dokázat, že pokud jsou a_i přirozená čísla pro $i \geq 1$, potom výše definovaná posloupnost konečných řetězových zlomků vždy konverguje. Podrobnosti lze nalézt v [10], str. 14. Obecná posloupnost konečných řetězových zlomků samozřejmě konvergovat nemusí.

[33] [10], str. 19.

Periodické řetězové zlomky jsou úzce svázané s druhými odmocninami. Nechť číslo a je iracionálním řešením rovnice ve tvaru

$$x^2 + bx + c = 0, \tag{5}$$

kde b, c jsou nějaká racionální čísla. Potom a je možné vyjádřit jako periodický řetězový zlomek.

Platí i opačné tvrzení: každý periodický řetězový zlomek je řešením rovnice ve tvaru (5) pro nějaká racionální čísla b, c.[34]

Uvědomme si, že rovnice

$$x^2 - A = 0,$$

kde A je nějaké kladné racionální číslo, je speciálním případem rovnice (5). Tudíž odmocniny racionálních čísel, které jsou iracionální, jsou vlastně reprezentovány periodickými řetězovými zlomky.

Tedy každé iracionální číslo, které je druhou odmocninou nějakého racionálního čísla, lze zapsat jako periodický řetězový zlomek (toto iracionální číslo je jeho hodnotou). A každý periodický řetězový zlomek je řešením nějaké kvadratické rovnice s racionálními koeficienty.

Nabízí se přirozená otázka na spojení řetězových zlomků a odmocnin vyšších řádů. Pro odmocniny vyšších řádů než dva zatím nejsou žádné hlubší vztahy s řetězovými zlomky známy. Dokonce nejsou známy ani rozklady pro konkrétní hodnoty vyšších odmocnin (například pro číslo $\sqrt[3]{2}$).[35]

Nyní na ukázku vypočítáme řetězový zlomek $\sqrt{3}$ ve tvaru $[p_0; p_1, p_2, \ldots]$. Ukážeme si dva možné způsoby výpočtu.

První z postupů využívá znalost řešení kvadratických rovnic. Označíme-li hledaný řetězový zlomek x, musí splňovat kvadratickou rovnici

$$x^2 - 3 = 0. \tag{6}$$

Pro výpočet celé části zlomku označíme $x = p_0 + \frac{1}{y}$, kde $p_0 \in \mathbb{N}$ a $0 < \frac{1}{y} < 1$ a tedy $y > 1$. Snadno zjistíme, že $p_0 = 1$, neboť $1 < \sqrt{3} < 2$, a $x = 1 + \frac{1}{y}$. Tuto hodnotu dosadíme do rovnice (6):

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 - 3 = \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} - 2 = 0.$$

Tato rovnice je ekvivalentní rovnici

$$2y^2 - 2y - 1 = 0. \tag{7}$$

[34] [10], str. 45.
[35] [10], str. 46.

Nyní opět přepíšeme y jako $y = p_1 + \frac{1}{z}$, kde $p_1 \in \mathbb{N}$ a $0 < \frac{1}{z} < 1$. Opět snadno pomocí rovnice (7) zjistíme, že $p_1 = 1$ a $y = 1 + \frac{1}{z}$ (a tedy $x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{z}}$). Dosazením do rovnice (7) získáme rovnici

$$2\left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{z}\right) - 1 = \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} - 1 = 0,$$

která je ekvivalentní rovnici

$$z^2 - 2z - 2 = 0. \tag{8}$$

Přepíšeme-li $z = p_2 + \frac{1}{v}$, $p_2 \in \mathbb{N}$ a $0 < \frac{1}{v} < 1$, zjistíme, že $p_2 = 2$. Dosadíme-li do rovnice (8), dostaneme

$$\left(2 + \frac{1}{v}\right)^2 - 2\left(2 + \frac{1}{v}\right) - 2 = \frac{1}{v^2} + \frac{2}{v} - 2 = 0.$$

Tato rovnice je však ekvivalentní rovnici (7) a tudíž dále počítat nemusíme, řešení již známe a dále se postup opakuje (rovnice (7) vede na rovnici (8) a ta vede zpět na rovnici (7), tedy $p_{2k-1} = 1$ a $p_{2k} = 2$ pro $k \in \mathbb{N}$).

Hodnota $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$, to jest

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Pokud bychom stejným způsobem počítali $\sqrt{2}$, vyšli bychom z rovnice $x^2 - 2 = 0$. Celá část je opět 1 a pro všechny další kroky bychom dostali rovnici $y^2 - 2y - 1 = 0$. Zjistili bychom, že $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \dots]$.

Druhý postup využívá možnosti rozšiřování zlomků. Prvně si musíme uvědomit, že hodnota čísla $\sqrt{3}$ leží mezi čísly 1 a 2, přesněji že splňuje nerovnost $1 < \sqrt{3} < 2$.

V každém kroku nejdříve rozdělíme výraz, se kterým pracujeme, na jeho celou část a zbytek. Celá část získaná v n-tém kroku je hledaným $(n-1)$-ním koeficientem. Zbytek zapíšeme do zlomku, který má v čitateli jedničku a ve jmenovateli převrácenou hodnotu zbytku. Pomocí rozšíření zlomku čitatel upravíme. S tímto novým čitatelem postupujeme opět podle algoritmu.

Pro $\sqrt{3}$ vypadá postup následovně:[36]

$$\sqrt{3} \overset{(1)}{=} 1 + (\sqrt{3} - 1) \overset{(2)}{=} 1 + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \overset{(3)}{=} 1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1} \overset{(4)}{=} 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} =$$

$$\overset{(5)}{=} 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}} \overset{(6)}{=} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} \overset{(7)}{=} 1 + \frac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}}} =$$

$$\overset{(8)}{=} 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{\sqrt{3}+1}}} \overset{(9)}{=} 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}} = \ldots =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Podívejme se ještě na posloupnost konečných řetězových zlomků konvergujících k $\sqrt{3}$. Jedná se o hodnoty $1, 1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \ldots$, tedy

$$1,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ \frac{265}{153},\ \frac{362}{209},\ \frac{989}{571},\ \frac{1\,351}{780},\ \ldots$$

Mnohé z těchto čísel jsme již jako odhady viděli dříve.

Obdobně pro $\sqrt{2}$ získáme pomocí konečných řetězových zlomků posloupnost

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots$$

[36] Zde je ještě slovní vysvětlení jednotlivých rovností. Rovnost (1) odpovídá rozložení na celou a desetinnou část. Rovnost (2) využívá možnosti rozšíření a převádí tím číslo $(\sqrt{3}-1)$ na zlomek. K rovnosti (3) jsme došli pomocí známého vzorce $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$. Rovnost (4) odpovídá zlomku s převrácenou hodnotou ve jmenovateli. V rovnosti (5) jsme opět rozšířili zlomek a v rovnosti (6) ho upravili podle vzorce. V rovnosti (7) jsme opět rozdělili číslo $(\sqrt{3}+1)$ na celou a desetinnou část a rozšířili zlomek. V rovnosti (8) jsme znovu zlomek upravili. Rovnost (9) jsme získali převrácením posledního zlomku. Zde si můžeme všimnout, že nyní máme rozkládat zlomek, který jsme již rozložili v rovnosti (5). Dále je již tedy rozvoj periodický.

Můžeme si povšimnout, že se členy těchto posloupností přibližují k hledaným hodnotám pomaleji než v mnohých postupech, které jsme již viděli dříve.

Řetězové zlomky lze počítat také rychleji pomocí rekurentních vzorců (výpočet například konečného řetězového zlomku řádu 10 vyžaduje provedení mnoha matematických operací). Díky tomu lze také mimo jiné získat odhady pro $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, které využívají posloupnosti zlomků ve tvaru $\frac{a_k}{b_k}$, kde a_k, b_k jsou dány rekurentními vzorci. Některé myšlenky těchto postupů jsme zde již uvedli (například u Théona za Smyrny na straně 17), nebudeme je proto opakovat. Pro podrobnosti doporučujeme nastudovat [4] a [7] (str. 113–115).

Ukažme si ještě na příkladu opačný postup, tedy jak převést periodický řetězový zlomek na iracionální číslo.[37]

Zvolme číslo $a = [\overline{2;3}] = [2;3,2,3,2,\ldots]$. Je zřejmé, že toto číslo a je kladné. Víme, že

$$a = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{a}} = 2 + \frac{a}{3a+1} = \frac{7a+2}{3a+1}.$$

Tedy a je kořen kvadratické rovnice

$$x(3x+1) = 7x+2, \text{ to jest } 3x^2 - 6x - 2 = 0.$$

Použijeme-li známé vzorce, zjistíme, že kořeny této kvadratické rovnice jsou

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{15}.$$

Jelikož pouze jeden z těchto kořenů je kladný, dostáváme, že

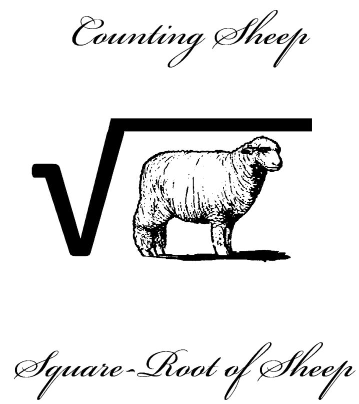
$$[\overline{2;3}] = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{15}.$$

Tímto jsme vyčerpali téma základních výpočtů řetězových zlomků z hlediska odmocnin. Teorie řetězových zlomků je mnohem rozsáhlejší než to, co jsme zde nastínili, přesahuje rámec této práce. Pro zájemce doporučujeme další literaturu, například [10] a [12].

[37] [10], str. 93.

Závěr

Přestože zde práce končí, téma odmocniny zdaleka nebylo vyčerpáno. Doufáme však, že četba těchto kapitol čtenáři nastínila rozsáhlé možnosti matematiky za použití jednoduchých nástrojů, představila mu odmocninu z pohledů, které dosud neznal, ukázala mu, jak uvažovali naši předkové, a snad ho i inspirovala k vlastnímu zamyšlení.



Ovečka pro trpělivého čtenáře.[38]

[38] Převzato z
`http://darksabre76.deviantart.com/art/Counting-Sheep-Square-Root-of-Sheep-323444851`.

Literatura

[1] Bečvář J. (ed.): *Matematika ve středověké Evropě*. Prometheus, Praha, 2001.

[2] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, Praha, 2003.

[3] Bečvář J., Dlab V.: *Babylonský výpočet čísla* $\sqrt{2}$. Učitel matematiky 19(2011), 66–71.

[4] Bečvář J., Dlab V.: *Ještě k číslu* $\sqrt{2}$*: Babylon a řetězové zlomky*. Učitel matematiky 20(2011), 26–29.

[5] Boháček I.: *Fyzikové vysvětlují biologii*. Vesmír 78(1999/8), 473.

[6] Heath T. L. (ed.): *The Works of Archimedes*. Dover Publications, InC., Mineola, New York, 2002.

[7] Halas Z. (ed.): *Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla*. Matfyzpress, Praha, 2012.

[8] Huges B. (ed.): *Fibonacci's De Practica Geometrie*. Springer, 2008.

[9] Chabert J.-L. (ed.): *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*. Springer, 1999.

[10] Chinčin A. J.: *Řetězové zlomky*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[11] Šustková Z.: *Historie nuly*. Seminární práce, PřF MU, Brno, 2008, http://www.math.muni.cz/∼xsustkov/nula.pdf.

[12] Vít P.: *Škola mladých matematiků* 49*. Řetězové zlomky*. Mladá fronta, Praha, 1982.