Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

# ZÁVĚREČNÁ PRÁCE

**Kurz Vyučování všeobecně vzdělávacího předmětu matematika**

Mgr. Kristýna Kuncová

# Hra Nim a její varianty

Konzultant závěrečné práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Praha 2014

Kurz je akreditován u MŠMT na základě § 25 a § 27 zákona č. 563/2004 Sb., o pedagogických pracovnících a o změně některých zákonů, a v souladu se zákonem č. 500/2004 Sb. Pod č. j. 27 655/2012 - 25 - 591.

Ráda bych touto cestou poděkovala svému vedoucímu RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za cenné připomínky a nakažlivý optimismus. Dále bych chtěla poděkovat obětavým kamarádům za pročtení celého textu a korektury.

Prohlašuji, že jsem tuto závěrečnou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ............. dne ............ Podpis autora

# Obsah

# Úvod

Cílem této práce je seznámit čtenáře s hrou Nim. Jedná se o hru pro dva hráče s jednoduchými pravidly založenými na odebírání hracích kamenů s cílem odebrat poslední kámen. Hra na první pohled nepůsobí složitě, výherní strategie byla popsána již v roce 1901 Ch. L. Boutonem ([6]), avšak je velmi mnohotvárná a lze na jejím příkladu elegantně demonstrovat různé obory matematiky, o což se pokusíme v následujících kapitolách.

V první části se budeme zabývat hrou Nim v základní verzi, zavedeme pojmy vítězné strategie a bezpečné pozice a na závěr, s malou odbočkou k binární soustavě, sestavíme vítěznou strategii právě pro Nim.

Kapitola druhá se zaměřuje na některé varianty Nimu s upravenými pravidly a zkoumá existenci strategie za takto upravených podmínek. V další části se podíváme na některé hry, které nemají s odebíráním kamenů nic společného a přesto je lze vyhrát stejnou strategií jako Nim.

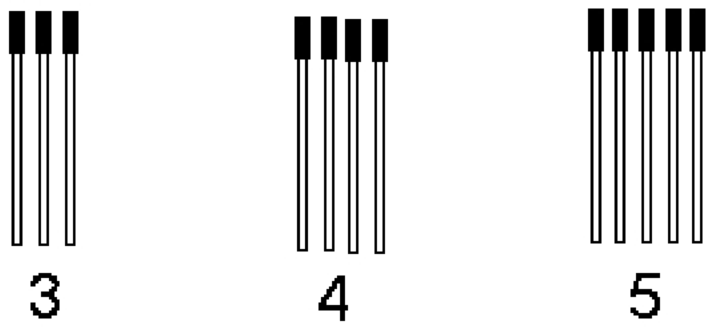
Poslední kapitola je výletem do země metrických prostorů a stromů, která nabízí silný aparát k práci s nekonečnými hrami. Ač je obecnější, na Nim lze tento aparát snadno aplikovat a čtenáři se tak ukáže partie matematiky, kterou s hrami obvykle nespojujeme.

# Kapitola 1

# Hra Nim

## 1.1 Pravidla

**Příklad 1.1.** Alice a Bob hrají následující hru. Před sebou mají tři hromádky po třech, čtyřech a pěti hracích kamenech. Alice začíná, poté se pravidelně střídají a odebírají kameny. Vždy si vyberou hromádku a z ní vezmou alespoň jeden kámen, nejvýše všechny. Ten z nich, který vezme poslední kámen, vyhrál. Jak je možné, že Alice pokaždé vyhraje?




Obr. 1.1: Nim $(5-4-3)$

Právě popsaná hra je jednou z variant hry Nim. Ta je hrou pro dva hráče, kteří postupně odebírají kameny z hromádek před sebou. Počet hromádek ani kamenů v nich není blíže určen, dokonce hromádky mohou mít různý počet kamenů jako v příkladu výše. Hráč, jenž je na tahu, může odebrat prakticky libovolné množství kamenů, ale musí vzít alespoň jeden a všechny kameny musí vzít pouze z jedné hromádky. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

**Příklad 1.2.** Podívejme se na příklady povolených tahů. Původní situaci, kdy máme v hromádkách 5, 4 a 3 kameny, budeme ve zkratce značit 5-4-3. Musíme vzít alespoň jeden kámen a vždy jen z jedné hromádky. Tedy když si vybereme první hromádku, můžeme vzít jeden, dva, tři, čtyři nebo pět kamenů. Výslednou situaci pak zapíšeme jako 4-4-3, 3-4-3, 2-4-3, 1-4-3 a 4-3.

**Cvičení 1.3.** Máme herní situaci 2-2-3. Určete, které z následujících tahů jsou povolené:

(1) 1-2-1

(2) 2-2

(3) 1-2-3

(4) 1-2-2

(5) 2-2-2

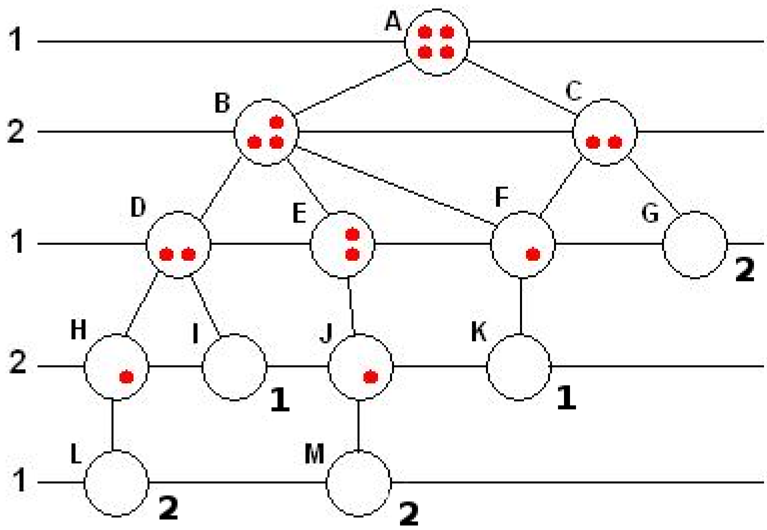
(6) 2-3

## 1.2 Výherní strategie

Hry, jako je Nim, se vyznačují existencí *vítězné strategie*. Tak nazýváme postup, který buď začínajícímu hráči nebo jeho protihráči zaručí vítězství nezávisle na tazích protihráče, pokud jej bude pečlivě dodržovat. Ukažme si další příklad:

**Příklad 1.4.** Alice a Bob hrají Nim 2-2, dvě hromádky o dvou kamenech. Bob začíná. Může Alice vyhrát, přestože nezačíná? A jak má hrát, aby vyhrála? Může naopak vyhrát Bob?

Výše uvedené otázky zodpovíme, pokud si nakreslíme strom této hry, jakýsi diagram, který ukazuje všechny možné tahy a situace/pozice, do nichž se hráči mohou v průběhu hry dostat. Tento strom vidíme na obrázku 3.5. Jen upozorníme, že situace $1-2$ a $2-1$ jsou symetrické a tedy není potřeba je rozebírat zvlášť, v obrázku jsou tedy zakresleny jen jednou (pozice [B]).




Obr. 1.2: Strom Nimu $(2-2)$

Rozeberme si jej z pozice Boba (hráče 1) a Alice (hráče 2). Červená kolečka ilustrují pozice, jeden řádek je jedna hromádka, černé čáry možné tahy. Na pozice budeme odkazovat velkými písmeny v hranatých závorkách.

Bob začíná se dvěma hromádkami po dvou kamenech [A]. Může vzít jeden kámen nebo celou jednu hromádku a Alice se tak ocitne v pozici 2-1 [B] nebo 2-0 [C]. V druhém případě může Alice vyhrát - stačí, když vezme zbylé kameny [G].

Co v prvním případě, kdy Alice čelí kombinaci 2-1? Může vzít hromádku o dvou kamenech, Bob tak bude moci vzít poslední kámen [F] a vyhrát. Může vzít i hromádku o jednom kameni [D]. Pak ale Bobovi stačí vzít zbylé dva kameny a vyhraje. Zbývá tedy poslední možnost, Alice vezme jeden kámen tak, aby hra byla ve stavu 1-1 [E]. Bobovi nezbude, než vzít jeden kámen a na Alici zbude poslední a vyhraje.

Jaký je závěr? Bob sice začínal, ale ať hrál jakkoli, tak pokud Alice neudělala chybu, vyhrála. Našli jsme tedy *vítěznou strategii* pro Alici - postup, který jí, bude-li dodržován, zajistí vítězství. Pro Boba naopak vítěznou strategii najít nelze a pokud se Alice bude držet postupu, Bob musí prohrát.

### 1.2.1 Pozice

Obdobný herní strom bychom mohli udělat pro všechny možné výchozí pozice hry a po jejich prozkoumání bychom zjistili, zda lze najít vítěznou strategii a zda pro začínajícího nebo pro druhého hráče. Jelikož výchozích pozic je nekonečné množství, musíme zvolit jiný postup.

Pojďme se podívat na jednotlivé pozice hráčů během hry. Bob nemohl vyhrát, byl tedy na začátku v *prohrávající* pozici 2-2. Stejně tak se v průběhu hry dostal do pozice, kterou nemohl zvrátit. Byla to pozice 1-1. Tedy, pozice 1-1 a 2-2 byly předem prohrané.

Naopak Alice, pokud nechybovala, se ocitala jen v pozicích *vyhrávajících.* Byly to 2-1, 2-0, 1-0.

Co mají společného pozice 1-1 a 2-2? Každá hromádka je tam „dvakrát“. Co třeba situace 3-3? Aniž bychom kreslili strom, je možno nahlédnout, že i tato situace je prohrávající. Stačí, když bude druhý hráč kopírovat tahy toho prvního. A stejné je to u všech symetrických pozic, např. 5-5, 1-1-2-2, 2-2-3-3-4-4 ...

Již se pomalu blížíme k obecné vítězné strategii pro libovolnou hru Nim. Než si ji však popíšeme, budeme muset zavést několik pojmů.

### 1.2.2 Dvojková soustava

Obvykle zapisujeme čísla pomocí desítkové soustavy. Běžně tak používáme mocniny desítky, asi aniž si to uvědomujeme. Číslo 256 pak vlastně znamená

$$2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1,$$

číslo 15027 zapíšeme jako

$$15027 = 1 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

nebo, zapsáno s mocninami desítky, máme 5248 jako

$$5284 = 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Chceme-li zapsat číslo ve dvojkové (binární) soustavě, postupujeme analogicky. Jen místo mocnin desítky užíváme mocniny dvojky a místo číslic $0 - 9$ užíváme číslice 0 a 1. Například:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 2^0, \\
2 &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0, \\
5 &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \\
33 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0
\end{aligned}$$

atd. Čísla ve dvojkové soustavě budeme zapisovat s 2 v dolním indexu, například 33 bude $100001_2$.

V tabulce na obr. 1.3 si můžeme prohlédnout dvojkové zápisy první stovky přirozených čísel.

| DEC | BIN | DEC | BIN | DEC | BIN | DEC | BIN | DEC | BIN |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 21 | 10101 | 41 | 101001 | 61 | 111101 | 81 | 1010001 |
| 2 | 10 | 22 | 10110 | 42 | 101010 | 62 | 111110 | 82 | 1010010 |
| 3 | 11 | 23 | 10111 | 43 | 101011 | 63 | 111111 | 83 | 1010011 |
| 4 | 100 | 24 | 11000 | 44 | 101100 | 64 | 1000000 | 84 | 1010100 |
| 5 | 101 | 25 | 11001 | 45 | 101101 | 65 | 1000001 | 85 | 1010101 |
| 6 | 110 | 26 | 11010 | 46 | 101110 | 66 | 1000010 | 86 | 1010110 |
| 7 | 111 | 27 | 11011 | 47 | 101111 | 67 | 1000011 | 87 | 1010111 |
| 8 | 1000 | 28 | 11100 | 48 | 110000 | 68 | 1000100 | 88 | 1011000 |
| 9 | 1001 | 29 | 11101 | 49 | 110001 | 69 | 1000101 | 89 | 1011001 |
| 10 | 1010 | 30 | 11110 | 50 | 110010 | 70 | 1000110 | 90 | 1011010 |
| 11 | 1011 | 31 | 11111 | 51 | 110011 | 71 | 1000111 | 91 | 1011011 |
| 12 | 1100 | 32 | 100000 | 52 | 110100 | 72 | 1001000 | 92 | 1011100 |
| 13 | 1101 | 33 | 100001 | 53 | 110101 | 73 | 1001001 | 93 | 1011101 |
| 14 | 1110 | 34 | 100010 | 54 | 110110 | 74 | 1001010 | 94 | 1011110 |
| 15 | 1111 | 35 | 100011 | 55 | 110111 | 75 | 1001011 | 95 | 1011111 |
| 16 | 10000 | 36 | 100100 | 56 | 111000 | 76 | 1001100 | 96 | 1100000 |
| 17 | 10001 | 37 | 100101 | 57 | 111001 | 77 | 1001101 | 97 | 1100001 |
| 18 | 10010 | 38 | 100110 | 58 | 111010 | 78 | 1001110 | 98 | 1100010 |
| 19 | 10011 | 39 | 100111 | 59 | 111011 | 79 | 1001111 | 99 | 1100011 |
| 20 | 10100 | 40 | 101000 | 60 | 111100 | 80 | 1010000 | 100 | 1100100 |

Obr. 1.3: Převod čísel do binární soustavy

V dalším textu se nám bude hodit i následující náhled. Binárním zápisem čísla $x$ budeme rozumět konečnou posloupnost $x_k, x_{k-1}, \dots x_1, x_0$, kde $x_i \in \{0,1\}$ pro $i = 0, \dots k$, takovou, že pro převod do desítkové soustavy platí:

$$x = x_k \cdot 2^k + x_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + x_1 \cdot 2 + x_0 \cdot 1.$$

Číslo $(x_k, x_{k-1}, \dots x_1, x_0)$ budeme někdy zapisovat bez závorek a s 2 v dolním indexu jako výše. Tedy (1011) bude totéž jako $1011_2$.

Všimněme si, že tato posloupnost není určena jednoznačně, protože $1001_2$ stejně jako $0001001_2$ je binární zápis čísla 9. Až na tyto 0 na začátku je takto zavedený binární rozvoj čísla ovšem již jednoznačný.

**Cvičení 1.5.** Nalezněte dvojkový zápis čísel 10, 17, 31 a 256.

**Cvičení 1.6.** Převeďte do desítkové soustavy čísla $1111_2$, $100001_2$ a $10101_2$.

### 1.2.3 Nim-součet hry

V dalších krocích budeme potřebovat součet dvou čísel zapsaných ve dvojkové soustavě bez přenosu cifry do vyššího řádu, takzvaný *Nim-součet* nebo také xor.

Ten funguje tak, že procházíme cifry na odpovídajících si pozicích; pokud jsou stejné, bude odpovídající cifrou ve výsledku jednička, jinak nula.

Například $011_2 \oplus 101_2 = 110_2$. Zápis čísel pod sebou bude ještě přehlednější, tedy pár příkladů:

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ \oplus 001_2 \\ \hline 110_2 \end{array}$$

Má-li jedno číslo méně cifer, doplníme jej na začátku nulami:

$$\begin{array}{r} 0110_2 \\ \oplus 1001_2 \\ \hline 1111_2 \end{array}$$

Pro více čísel je postup obdobný, sečteme všechny jedničky na dané pozici a je-li jich lichý počet, napíšeme 1, jinak píšeme 0.

$$
\begin{array}{r}
011_2 \\
\oplus 101_2 \\
\oplus 111_2 \\
\oplus 011_2 \\
\hline
010_2
\end{array}
$$

**Cvičení 1.7.** Najděte Nim-součet čísel:

(1) $110_2 \oplus 10000_2$

(2) $1100_2 \oplus 10101_2 \oplus 1_2$

(3) $3 \oplus 4 \oplus 5$

(4) $10 \oplus 12 \oplus 13$

**Poznámka 1.8.** Nim-součet je komutativní i asociativní a pro každé číslo $s$ navíc platí, že $s \oplus s = 0$.

### 1.2.4 Nalezení vítězné strategie

Nyní se již můžeme podívat, jak vyhrát Nim. Musíme zodpovědět následující otázky: Existuje taková strategie? Pro kterého hráče? A jak přesně vypadá?

Začněme definicí. Následně se za pomoci několika tvrzení dobereme k vítězné strategii. Budeme postupovat jako v článku[6].

**Definice 1.9.** *Bezpečnou pozicí* budeme nazývat takovou pozici, při níž Nim-součet počtu kamenů z jednotlivých hromádek je roven 0. V opačném případě bude pozice zvána *nebezpečná*.

Například pozice s hromádkami 1-4-5 je bezpečná, neboť

$$
\begin{array}{r}
1 \\
\oplus 100 \\
\oplus 101 \\
\hline
000
\end{array}
$$

Podobně jsou bezpečné pozice 1-2-3, 1-1-2-2, 3-5-6 nebo 5-8-13.

**Poznámka 1.10.** Všimněme si, že známe-li počty kamenů u dvou ze tří hromádek (nebo obecněji u všech hromádek kromě jedné), již můžeme jednoznačně dopočítat počet kamenů v poslední hromádce, aby Nim-součet byl nulový.

**Cvičení 1.11.** Určete počet kamenů v poslední hromádce, víte-li, že Nim-součet všech hromádek je nulový:

(1) $101_2$, $10_2$

(2) 10, 12, 14

**Tvrzení 1.12.** Jestliže Alice po svém tahu zanechá na stole bezpečnou pozici, Bob zanechá pozici nebezpečnou, a to ať bude táhnout jakkoli.

*Důkaz.* Na stole leží hromádky s nulovým Nim-součtem a Bob musí ubrat kameny právě z jedné z nich. Ať už ale vybere kteroukoli hromádku, ostatní zůstanou nezměněny. Soustřeďme se na ně. Tyto hromádky (v duchu poznámky 1.10) jednoznačně určují počet kamenů v hromádce poslední. A právě tento počet na stole zanechala Alice. Pakliže Bob tedy odebere byť jediný kámen, což podle pravidel udělat musí, zůstane na stole pozice nebezpečná.

Předchozí zdůvodnění bychom mohli zapsat poněkud formálněji, a to následujícím způsobem [1]. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_k$ velikosti hromádek po Alicině tahu a $y_1, y_2, \ldots, y_k$ analogické velikosti hromádek po tahu Boba. Dále označme Nim-součty $s = x_1 \oplus \cdots \oplus x_k$ a $t = y_1 \oplus \cdots \oplus y_k$. Předpokládejme, že Bob odebere kameny z $j$-té hromádky. Potom platí $x_i = y_i$ pro $i \neq j$ a $x_j > y_j$.

Udělejme nyní pomocný výpočet:

$$\begin{aligned}
t &= 0 \oplus t \\
&= s \oplus s \oplus t \\
&= s \oplus (x_1 \oplus \cdots \oplus x_j) \oplus (y_1 \oplus \cdots \oplus y_j) \\
&= s \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus \cdots \oplus (x_j \oplus y_j) \\
&= s \oplus 0 \oplus \cdots \oplus (x_j \oplus y_j) \oplus \cdots \oplus 0 \\
&= s \oplus x_j \oplus y_j
\end{aligned}$$

Tedy $t = s + x_j + y_j$.

Jelikož Alice zanechala bezpečnou pozici, znamená to, že $s = 0$ a tedy $t = x_j + y_j$. Ale ježto $x_j \neq y_j$, tak ani $t \neq 0$ a jsme hotovi. □

**Tvrzení 1.13.** Pokud Bob nechá na stole pozici nebezpečnou, Alice může svým tahem zanechat pozici opět bezpečnou.

*Důkaz. Idea* (podle [13]).

Na stole je nebezpečná pozice, což znamená, že Nim-součet hromádek je nenulový. Jinými slovy, když napíšeme počty kamenů v jednotlivých hromádkách pod sebe, v alespoň jednom sloupci bude lichý počet jedniček. Je- li takových sloupců víc, vybereme ten nejvíce vlevo (reprezentuje nejvyšší mocninu dvojky) a dále vybereme jednu hromádku, která má jedničku právě v tomto sloupci. Tím jsme našli hromádku, ze které budeme odebírat kameny.

Dále už je to jednoduché. Víme, že chceme skončit s nulovým Nim-součtem, s ostatními hromádkami nehýbeme, a zároveň víme, že ostatní hromádky jednoznačně určují kameny v hromádce zbylé.

Zbývá vyřešit otázku, zda bude takový tah přípustný, totiž zda z naší vybrané hromádky opravdu odebereme alespoň jeden kámen. To je ale pravda, protože jsme vybírali sloupec co nejvíce vlevo, kde jsme následně museli změnit 1 na 0, aby vyšel nulový Nim-součet. Tím jsme ale dané číslo určitě zmenšili a tah je přípustný.

Zapišme předchozí úvahy formálně. Analogicky jako v předchozím tvrzení, označme $x_1, x_2, \ldots x_k$ velikosti hromádek po Bobově tahu a $y_1, y_2, \ldots y_k$ velikosti hromádek po tahu Alice. Dále označme Nim-součty $s = x_1 \oplus \cdots \oplus x_k$ a $t = y_1 \oplus \cdots \oplus y_k$. Jelikož pozice není bezpečná, tak víme, že $s \neq 0$ a chceme najít tah, aby $t = 0$.

Vybereme hromádku podle postupu výše, tedy položíme $d := \max\{i, s_i = 1\}$, kde $s = s_m s_{m-1} \ldots s_0$, a zafixujeme $j$ tak, že $x_j^d = 1$, kde $x_j = x_j^m x_j^{m-1} \cdots x_j^0$.

Máme tedy nalezenou hromádku a musíme určit, kolik kamenů z ní odebereme. Položíme-li $y_j := x_j \oplus s$, pak $x_j - y_j$ je to správné číslo, protože $y_j < x_j$, tedy je to povolený tah a zároveň z výpočtu

$$\begin{aligned} t &= s \oplus x_j \oplus y_j \\ &= s \oplus x_j \oplus (s \oplus x_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

vidíme, že jsme získali bezpečnou pozici.

$\square$

V tuto chvíli již máme vítěznou strategii. Začíná-li Alice hru s nenulovým Nim-součtem, stačí, když po každém svém tahu zanechá součet nulový. Jelikož v každém kole klesá počet kamenů na stole, dříve či později dojde k situaci 0-0-0… (povšimněme si, že je bezpečná) a Alice vyhraje. Pokud Alice začíná hru s nulovým součtem, zvítězí naopak Bob přesně stejným postupem.

**Příklad 1.14.** Seznam bezpečných pozic pro 3 hromádky o nejvýše 15 kamenech ([6]).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-2-3 | 2-4-6 | 3-4-7 | 4-8-12 | 5-8-13 | 6-8-14 | 7-8-15 |
| 1-4-5 | 2-5-7 | 3-5-6 | 4-9-13 | 5-9-12 | 6-9-15 | 7-9-14 |
| 1-6-7 | 2-8-10 | 3-8-11 | 4-10-14 | 5-10-15 | 6-10-12 | 7-10-13 |
| 1-8-9 | 2-9-11 | 3-9-10 | 4-11-15 | 5-11-14 | 6-11-13 | 7-11-12 |
| 1-10-11 | 2-12-14 | 3-12-15 | | | | |
| 1-12-13 | 2-13-15 | 3-13-14 | | | | |
| 1-14-15 | | | | | | |

# Kapitola 2

# Variace

Základní variantu hry Nim včetně vítězné strategie jsme již popsali. V této kapitole budeme pokračovat s jejími variacemi a navážeme s hrami, které jako Nim na první pohled nevypadají, ale při vhodném náhledu u nich lze použít stejnou vítěznou strategii jako u Nimu.

## 2.1 Varianty Nimu

Známe-li základní Nim a rozumíme-li vítězné strategii, začne se vkrádat otázka, zda lze pravidla Nimu nějak změnit a s jakými důsledky pro existenci vítězné strategie. Setkáváme se pak s tzv. betlovou hrou nebo s možností odebírat kameny z více hromádek zároveň. I u těchto her pak hledáme vítěznou strategii. Ta stejně jako u Nimu sestává z hledání bezpečných (výherních) pozic, omezíme se tedy v dalším textu na popis těchto pozic. Výherní strategie se pak konstruuje analogicky základní variantě.

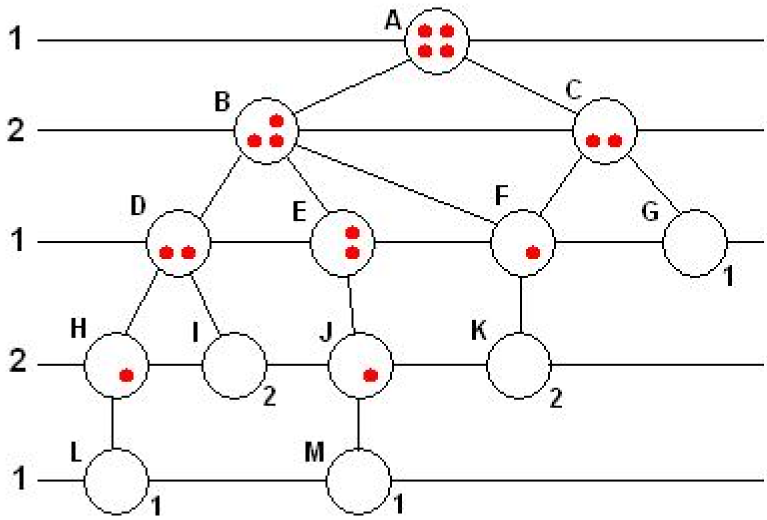
### 2.1.1 Misère Nim

Zatímco v originální hře Nim bylo cílem vzít poslední kámen, v tzv. betlové hře (známé též jako misère Nim) je cílem poslední kámen nevzít a donutit k tomu protihráče. Existuje vítězná strategie i tady?

Ano, existuje, v již citovaném článku [6] najdeme strategii nejen pro původní Nim, ale i pro betlovou variantu. Hrajeme stejně jako v základní variantě až do okamžiku, když zbývá pouze jedna hromádka s více než jedním kamenem (např. 2-1-1 nebo 14-1-1-1). V původní strategii bychom vzali buď všechny kameny z této hromádky (a nechali 0) nebo všechny až na jeden (nechali 1) tak, aby zbyl sudý počet hromádek (u příkladů výše tedy 1-1 nebo 1-1-1-1). U misère hry stačí zvolit opačně (0 místo 1 a naopak) a nechat lichý počet hromádek (tedy 1-1-1 a 1-1-1).

Z návodu výše tedy plyne, že i tady vítězná strategie existuje, a to pro stejného hráče jako u originální varianty. Čtenář si na základě tohoto návodu může zkusit rozmyslet, jak vypadá vítězná strategie pro misére Nim; podrobnosti lze najít v [6].

**Cvičení 2.1.** Projděte si znovu strom hry 2-2 na obr. 2.1 a vyzkoušejte si vítěznou strategii pro betlovou hru.




Obr. 2.1: Misère Nim

### 2.1.2 Mooreův Nim

Při Mooreově Nimu [7], zvaném také $\text{Nim}_k$, musí hráč ve svém tahu vzít alespoň jeden kámen. Pak už je omezen jediným pravidlem, smí odebírat kameny z maximálně $k$ hromádek. Zda bude brát ze všech hromádek stejně, z každé jinak nebo z některých vůbec, už je pak jen na něm. Vyhraje ten hráč, který vezme poslední kámen.

Je zjevné, že zbude-li $k$ nebo méně hromádek, jedná se o pozici výherní, stačí vzít všechny zbývající kameny. Abychom vyhráli, musíme najít bezpečné kombinace. Předpokládejme tedy, že máme $n$ hromádek o $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kamenech. Každou hromádku můžeme opět zapsat v binární soustavě, tedy

$$x_i = x_i^0 + x_i^1 \cdot 2^1 + x_i^2 \cdot 2^2 + x_i^3 \cdot 2^3 + \cdots$$

Když počty kamenů v dvojkové soustavě zapíšeme pod sebe, tak bezpečná pozice bude taková, která má v každém sloupečku počet jedniček dělitelný $k+1$, neboli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j \equiv 0 \mod (k+1), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Aplikujeme-li toto pravidlo na základní Nim - $\text{Nim}_1$, zjistíme, že odpovídá pravidlu, kdy počet jedniček ve sloupci musí být sudý.

**Cvičení 2.2.** Jak máme táhnout, abychom dosáhli bezpečné pozice ve hře $\text{Nim}_5$, jsme-li v situaci $15 - 8 - 3 - 1$?

### 2.1.3 Maticový Nim

Matrix Nim[10] nebo také $\text{Nim}^n$ spočívá v rozmístění hromádek do obdélníkového schématu o $m$ řádcích a $n$ sloupcích. Lze si jej představit jako rozmístění sloupečků s mincemi na šachovnici, která má $m$ řádků a $n$ sloupců. Hráč pak ve svém tahu smí vzít libovolné (nenulové) množství kamenů z libovolného počtu hromádek buď tak, že hromádky budou ve stejném řádku, nebo tak, že zůstane jeden sloupeček v obdélníku nedotčen.

Bezpečná pozice splňuje dvě podmínky. Zaprvé, pro každý sloupeček existuje jiný sloupeček, který má stejný počet kamenů. A zadruhé, vezmeme-li nejmenší hromádku z každého řádku, tak tyto hromádky dávají bezpečnou pozici v běžném Nimu.

Jen doplňme, že pro $\mathrm{Nim}^1$ získáme obvyklý Nim.

### 2.1.4 Shannonův Nim

Vraťme se k základní variantě Nimu. Smíme vzít libovolný počet kamenů z právě jedné hromádky. Přidáme-li navíc podmínku, že tento počet musí být prvočíslo nebo jednička, získáme Shannonův Nim[7].

Zatímco v běžném Nimu je bezpečná pozice taková, která má sudý počet jedniček v každém sloupci binárních rozvojů, u Shannonova Nimu jsou bezpečné ty pozice, které mají sudý počet jedniček v posledních dvou sloupcích. Například situace $11 - 13 - 14$ je bezpečná, ač v běžném Nimu tomu tak není, neboť

$$\begin{array}{r} 1011_2 \\ \oplus 1101_2 \\ \oplus 1110_2 \\ \hline 1000_2. \end{array}$$

### 2.1.5 Wythoffův Nim

V tomto Nimu začínáme se dvěma hromádkami[7]. Hráč odebírá kameny buď z jedné hromádky jako v klasickém Nimu, nebo z hromádek obou. V tom případě ale bere z obou stejné množství kamenů. Opět vítězí ten hráč, který odebere poslední kámen.

Bezpečné pozice jsou tzv. Wythoffovy dvojice: $(1;2)$, $(3;5)$, $(4;7)$, $(6;10)$, $(8;13)$, $(9;15)\ldots$ $n$-tá dvojice odpovídá vzorci

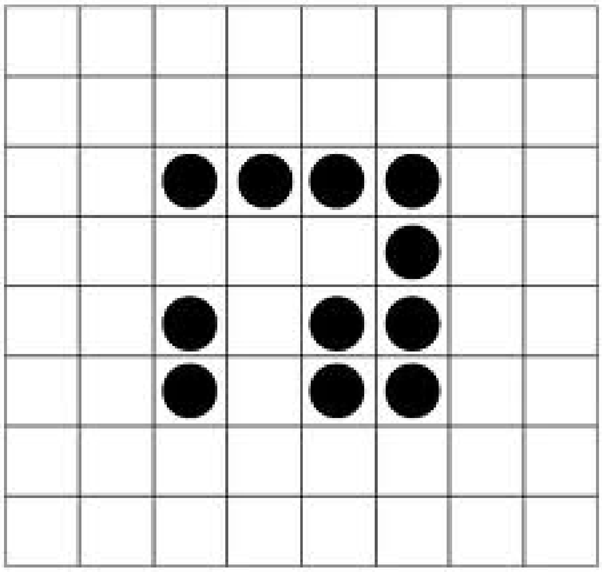
$$(\lfloor n\varphi \rfloor; \lfloor n\varphi^2 \rfloor),$$

kde $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ (což je mimochodem hodnota zlatého řezu) a kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla $x$.

### 2.1.6 Tac Tix

A na závěr uveďme jednu hru bez známé vítězné strategie. Tac Tix [9] je podobný maticovému Nimu. Také začínáme s polem $m \times n$ kamenů (na každém poli právě jeden kámen). Hráč si vybere buď řádek nebo sloupec, z něj pak odebere libovolné množství kamenů s podmínkou, že kameny budou sousedit.

Hra se hraje v betlové verzi, tedy ten z nich, který odebere poslední kámen, prohrál. Kdyby tomu bylo naopak, stačilo by opakovat tahy soupeře podle středové symetrie. Pokud by vzal celý horní řádek, vzali bychom spodní, pokud by vzal rohový kámen, vzali bychom roh naproti atd.



Obr. 2.2: Rozehraný Tac Tix

## 2.2 Hry převoditelné na Nim

Dosud jsme hledali vítěznou strategii her, které základní Nim mírně upravovaly. V následující části se budeme zabývat naopak hrami, které s Nimem nemají na první pohled nic společného. Naším cílem bude převést je na Nim, což nám zajistí existenci a přesný popis vítězné strategie. Její konkrétní aplikaci opět necháme na čtenáři.

### 2.2.1 Mince na pásku

Na obrázku 2.3 je znázorněna hra s mincemi [7]. Leží na (konečném) pásku s políčky a naším cílem je dostat všechny mince doleva na začátek pásku, tedy v tomto případě na prvních devět políček. Hráč smí hýbat vždy jen s jednou mincí, smí ji posouvat vlevo o libovolný počet políček, ale nesmí mince přeskakovat, ani je stavět na sebe. Hráč, který svým tahem dosáhl cílové pozice, vyhrál.

Obr. 2.3: Mince na pásku

Hromádky Nimu jsou tu schovány v mezerách mezi mincemi. Začněme od první mince úplně vpravo, pak nás zajímá vzdálenost první a druhé, třetí a čtvrté, páté a šesté, sedmé a osmé mince. Je-li mincí lichý počet jako zde, ještě přidáme vzdálenost poslední mince a počátku pásku. Tyto vzdálenosti pak interpretujeme jako velikosti hromádek v Nimu. V tomto konkrétním případě jsme tedy získali Nim $3-4-2-0-1$. Cílová pozice odpovídá Nimu $0-0-0-0-0$.

Povšimněme si, že pohyby mincí mohou mezery (tedy hromádky) zmenšovat i zvětšovat, čímž se hra liší od Nimu. Protože nás ale zajímají jen liché mezery (mezi první a druhou, třetí a čtvrtou mincí atd.), tak lze každé takové zvětšení následně opět zmenšit. Kupříkladu, pokud by tedy soupeř táhl čtvrtou mincí zleva, zvětšil by mezeru ze 2 políček na 3, a získali bychom pozici $3-4-3-0-1$. Toto lze ale spravit, pokud bychom pak posunuli o jedno políčko doleva pátou minci zleva, získali bychom původní $3-4-2-0-1$. Zvětšování „hromádek“ lze navíc udělat pouze konečněkrát, čímž dříve či později dojdeme k běžnému Nimu.

### 2.2.2 Stepinova hra

Následující hra je podobná předchozí [7]. Opět máme pásek s mincemi, které posouváme doleva. Tentokrát je ale místo prvního políčka váček na mince, do nějž mince padají. Druhou změnou je, že nehrajeme jen s mincemi, ale navíc je mezi nimi jedna zlatá medaile. Ten hráč, který ji dostane do váčku, vyhrál.


Obr. 2.4: Stepinova hra

Nim budeme hledat analogicky jako výše, začneme od mince úplně vpravo a budeme zjišťovat vzdálenosti mezi páry mincí (opět první a druhá, třetí a čtvrtá atd.). Na medaili se budeme dívat stejně jako na minci. Máme-li lichý počet mincí a medaile tvoří „levou“ část páru, přidáme ještě jednu hromádku odpovídající počtu políček mezi mincí a sáčkem. V příkladu na obrázku 2.4 je tedy vlastně Nim $7-1-4-3$.

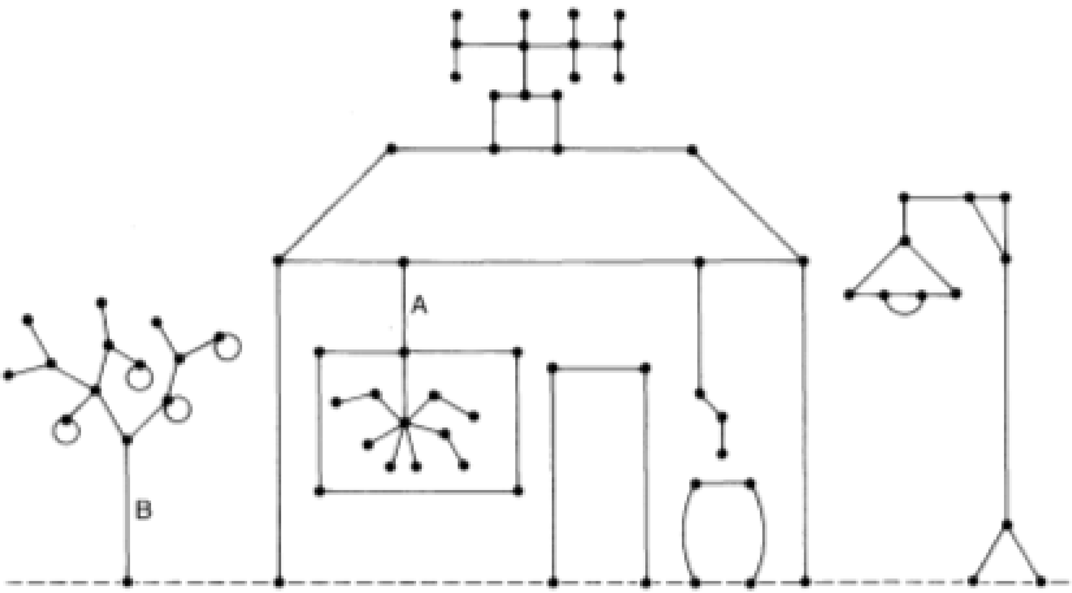
### 2.2.3 Zelený Hackenbush

Oproti předchozím hrám Hackenbush[8],[2] nepracuje s mincemi nebo kameny, ale s obrázky. Obrázky jsou to speciální, sestávájí z uzlů (černé tečky) a z hran, čar mezi nimi. Každá hrana musí spojovat 2 uzly nebo tvořit smyčku u jednoho uzlu (např. jablka na stromě na obrázku 2.5). Dva uzly mohou být spojeny i více hranami (lampa vpravo, tamtéž).

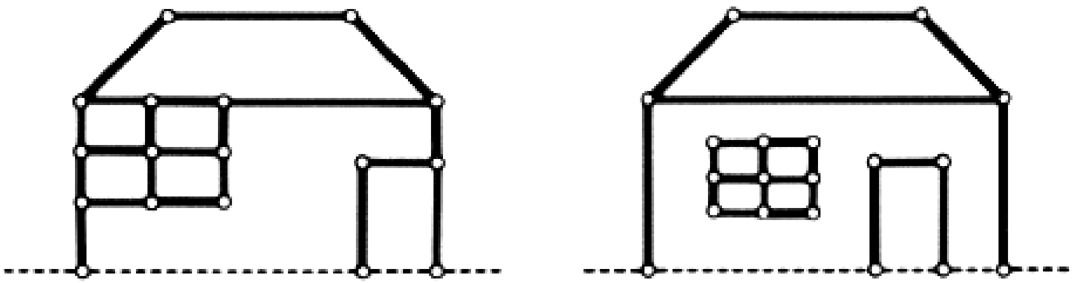
Podmínkou také je, že všechny uzly musí být pomocí hran spojeny se zemí. Rozdíl ilustruje obrázek 2.6. Domek vlevo splňuje podmínky, protože okno je připojeno k domečku, obrázek vpravo už nikoli. Toto pravidlo lze interpretovat i za pomoci gravitace, okno by prostě spadlo a rozbilo se (a zmizelo).

Hra je následně založena na střídavém odebírání hran z obrázku. Pokud se odebráním hrany poruší spojení nějaké části obrázku se zemí, zmizí spolu s hranou i tato část. Odebereme-li tedy hranu B z obrázku 2.5, zmizí i celá jabloň. Vítězí ten hráč, který takto odebere poslední hranu.

Podobnost s Nimem najdeme, nahradíme-li hrany kameny. Hromádky jsou pak tvořeny souvislými objekty. V našem případě tedy jedna hromádka odpovídá jabloni, druhá lampě, třetí dveřím, čtvrtá váze a pátá domku.



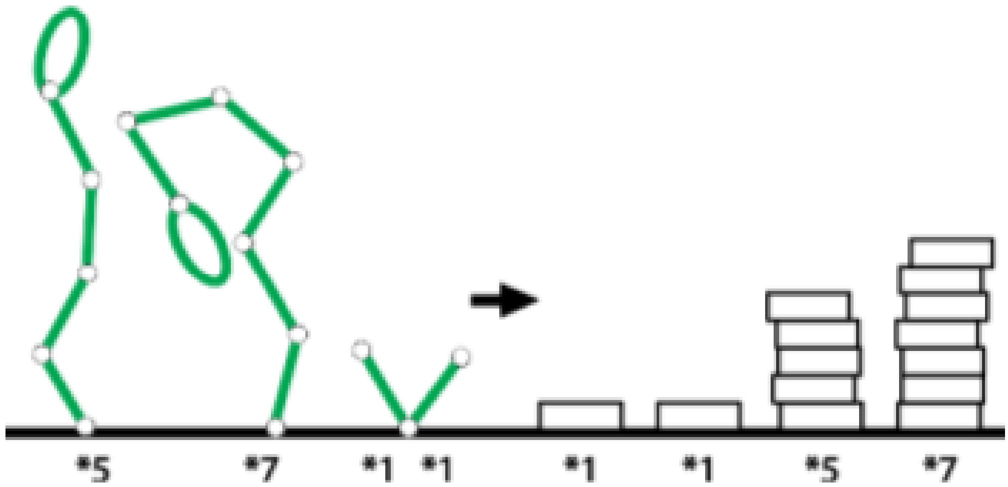

Obr. 2.5: Obrázek ke hře Hackenbush



Obr. 2.6: Vhodný (vlevo) a nevhodný (vpravo) obrázek ke hře Hackenbush

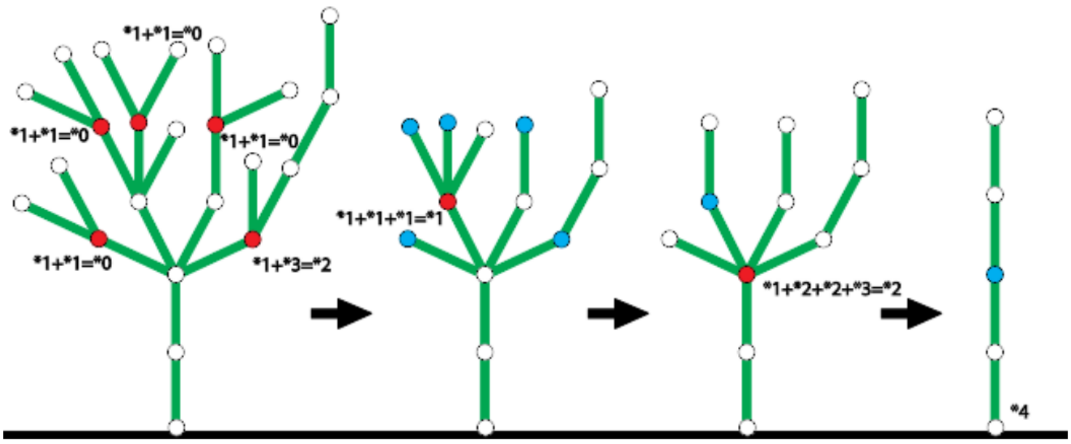
Bohužel nejde nahrazovat jednu hranu za jeden kámen, ale je třeba dodržovat jistá pravidla. Podívejme se na ně v několika krocích.

(1) V případě, že obrázek neobsahuje cykly (které má kupříkladu komín na obrázku 2.5) ani větvení (jako má pavouk v okně), prostě spočítáme hrany. Smyčky na konci řetězce obsahovat může, ty prostě nahradíme jedinou větví (viz obrázek 2.7).




Obr. 2.7: Převod na Nim, obrázek bez cyklů a větvení

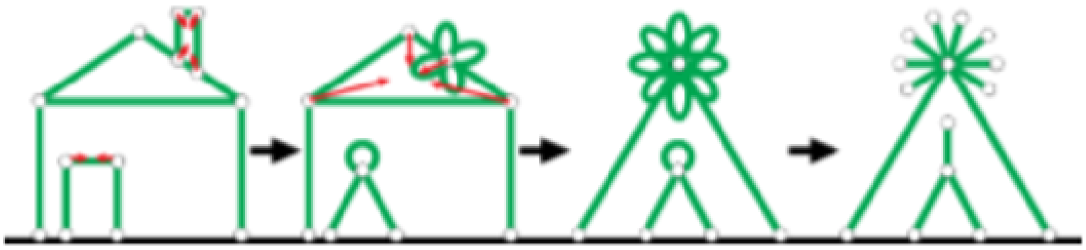
(2) Nyní se soustřeďme na větvení (stále ještě bez cyklů). Podívejme se na každý uzel, ve kterém dochází k větvení. Vezměme délku jednotlivých větví a udělejme jejich Nim-součet. Trs pak nahradíme jedinou větví o délce tohoto Nim-součtu. Příklad nabízí obrázek 2.8. Postup opakujeme, dokud nezískáme jedinou větev, kterou již na Nim převést umíme.




Obr. 2.8: Větvení

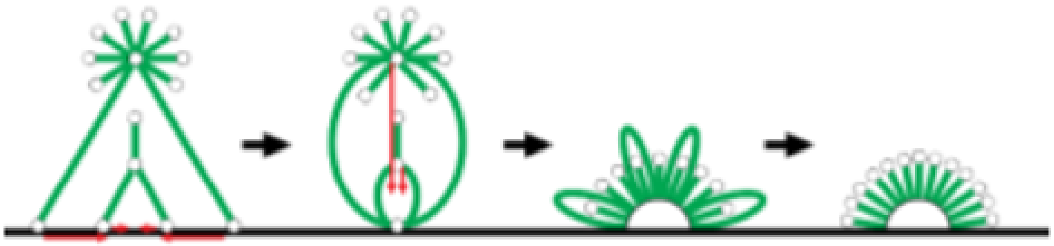
(3) Zbývá nám vypořádat se s cykly. Cykly upravíme na větve následovně. Uzly cyklu stáhneme do jediného uzlu. Z hran se tak stanou smyčky a obrázek bude připomínat kytičku s lístečky. Smyčky se následně stanou

hranami a z kytičky vznikne trs větví, který upravíme dle předchozího bodu (obrázek 2.9).



Obr. 2.9: Cykly

Posledním krokem je úprava obrázků, které se dotýkají země na více místech. V první fázi stáhneme tyto body do jednoho místa (Obr. 2.10). Tím získáme cykly, které převedeme na smyčky a ty na větve, čímž jsme hotovi. Tím, že jsme seskupili body na zemi do jednoho, jsme sice změnili obrázek, ale Nim-součet hry zůstane neovlivněn, tedy je tato úprava zcela korektní. Zároveň jsme tím popsali všechny možné případy a hra je převedena.



Obr. 2.10: Cykly pokračování

# Kapitola 3

# Hra jako metrický prostor

V první kapitole jsme popsali vítěznou strategii Nimu. Dokázat, že nějaká hra má vítěznou strategii, lze i nepřímo, aniž bychom tuto strategii zkonstruovali. Cílem této kapitoly bude ukázat, že Nim má vítěznou strategii, a to jinými prostředky než v kapitole první. Naším nástrojem bude Galeova-Stewartova věta. Abychom ji mohli zformulovat a dokázat, musíme zavést základy teorie metrických prostorů a jejich konkrétní aplikace na stromech.

## 3.1 Metrické prostory

Následující definice se snaží zobecnit pojem vzdálenosti. Jako příklad si představme všechna města a vesnice v České republice. Chtěli bychom umět určit, jak jsou od sebe daleko.

Nabízí se různé možnosti, některé z těchto „vzdáleností“ jsou ovšem vhodnější než jiné. Například cena vlakové jízdenky by selhala u vesnic, do kterých nevedou koleje. Doba jízdy na kole dá jiné výsledky pro cestu tam a pro cestu zpátky.

Na definici metrického prostoru klademe tedy jisté nároky. Vzdálenost, neboli metrika, musí být dobře definována pro všechny prvky (příklad s kolejemi), musí být symetrická (příklad s kolem), splňovat takzvanou trojúhelníkovou nerovnost (cesta by měla být kratší, když pojedeme přímo, než když se budeme stavovat u babičky). Dále požadujeme, aby vzdálenost z města $x$ do města $x$ byla 0. A aby to byla 0 právě jen tehdy. (Aby se nestalo, že se do některých měst lze teleportovat v nulovém čase.)

**Definice 3.1.** Nechť $X$ je množina a $\rho : X \times X \to [0; \infty)$ je funkce. Dvojici $(X, \rho)$ budeme nazýva *metrickým prostorem*, jestliže pro $\forall x, y, z \in X$ platí následující podmínky:

(1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. (Identita)

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. (Symetrie)

(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(x, z)$. (Trojúhelníková nerovnost)

Funkci $\rho$ budeme nazývat *metrikou*.

Několik příkladů metrických prostorů:

**Příklady 3.2.** (1) Množina všech vlakových nádraží v ČR, metrikou je vzdálenost „po kolejích“.

(2) Množina reálných čísel s metrikou danou absolutní hodnotou

$$\rho(x,y) = |x-y|.$$

(3) Jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$, tedy kružnice s poloměrem 1, metrikou je vzdálenost bodů „po kružnici“. Dva protilehlé body tedy mají vzdálenost $\pi$.

(4) Prostor $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, s metrikou definovanou jako

(a) $\rho_1(x,y) := |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \cdots + |x_n-y_n|$,
(b) $\rho_2(x,y) := \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2}$,
(c) $\rho_m(x,y) := \sqrt[m]{|x_1-y_1|^m + |x_2-y_2|^m + \cdots + |x_n-y_n|^m}$, $m \in \mathbb{N}$,
(d) $\rho_\infty(x,y) := \max_{i=1,\dots,n}\{|x_i-y_i|\}$.

(5) Takzvaná diskrétní metrika, definovaná na libovolné množině, kde všechny body jsou od sebe vzdáleny 1, jen vzdálenost bodu od sebe samého je 0, neboli $\rho(x,x) = 0$ a $\rho(x,y) = 1$, kde $x \neq y$.

**Cvičení 3.3.** Určete, zda jsou následující struktury metrickým prostorem.

(1) Prostor $\mathbb{R}^2$ s funkcí $\rho(x,y) = \rho_2(x,x_0) + \rho_2(x_0,y)$, kde $x_0$ značí počátek $(0,0)$. Jedná se tedy o strukturu, kde při měření vzdálenosti dvou bodů musíme vždy projít počátkem.

(2) Množina $X = \{x,y,z\}$ o třech prvcích se vzdáleností předepsanou funkcí $\rho(x,y) = 1$, $\rho(y,z) = 6$ a $\rho(z,x) = 20$.

(3) Množina $\mathbb{R}^3$ s funkcí $\rho(x,y) = |x_1-y_1|$.

(4) Libovolná množina $X$ s funkcí $\rho(x,y) = 0$.

(5) Množina $\mathbb{R}$ s funkcí $\rho(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

Pokud již máme metrický prostor, lze s metrikou dále pracovat a opět dostaneme metrický prostor:

**Cvičení 3.4.** Ukažte, že jsou-li $\rho$ a $\rho'$ metriky na množině $X$, tak i následující funkce $\sigma$ tvoří metriku na $X$:

(1) $\sigma(x,y) = \min\{1; \rho(x,y)\}$,

(2) $\sigma(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$,

(3) $\sigma(x,y) = \rho(x,y) + \rho'(x,y)$,

(4) $\sigma(x,y) = \max\{\rho(x,y); \rho'(x,y)\}$.

Když už máme vzdálenost, můžeme zobecnit i některé další pojmy. Například kruh v rovině je definován jako množina všech bodů, jejichž vzdálenost (metrika) od středu $S$ je menší nebo rovna poloměru $r > 0$. Analogicky je definována koule.

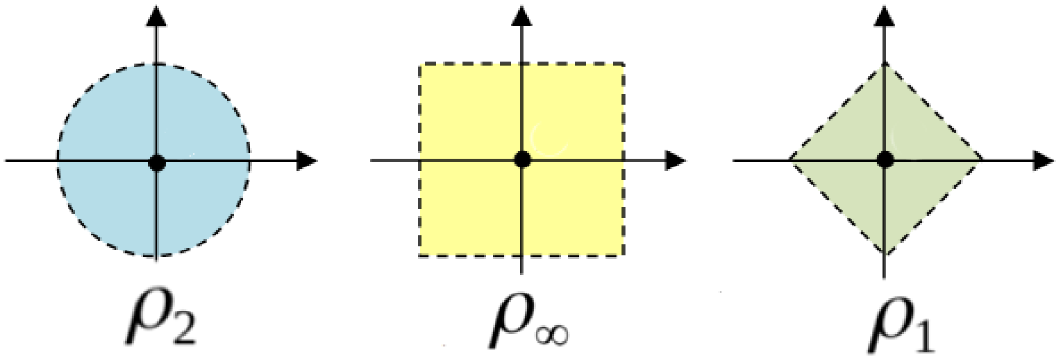
**Definice 3.5.** *Otevřenou koulí* se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ rozumíme množinu

$$B(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) < r\}.$$

**Příklady 3.6.** (1) V prostoru $\mathbb{R}^3$ s metrikou $\rho_2$, takzvanou eukleidovskou, vypadá koule $B(0,1)$ tak, jak jsme zvyklí.

(2) Na přímce, tedy v $\mathbb{R}^1$ s metrikou $\rho_1$, získáme otevřený interval $(-1,1)$.

(3) V prostoru $\mathbb{R}^2$ bude koule zajímavější. V metrice $\rho_2$ dostaneme kruh o středu 0 a poloměru 1. Ale s metrikou $\rho_\infty$ dostaneme čtverec a $\rho_1$ „čtverec postavený na špičku“. Ilustruje obrázek 3.1.




Obr. 3.1: Koule v $\mathbb{R}^2$ v metrikách $\rho_2$, $\rho_\infty$, $\rho_1$

(4) V diskrétní metrice závisí koule na poloměru. Je-li $r \leq 1$, splyne koule se svým středem: $B(x,r) = \{x\}$. Pro $r > 1$ se koule bude rovnat celému prostoru: $B(x,r) = X$.

Máme-li pojem (otevřené) koule, můžeme zavést koncept otevřených a uzavřených množin. Stejně jako koule zobecňuje pojem kruhu, tak otevřená (resp. uzavřená) množina nějakým způsobem zobecňuje pojem otevřeného (resp. uzavřeného) intervalu na reálné ose.

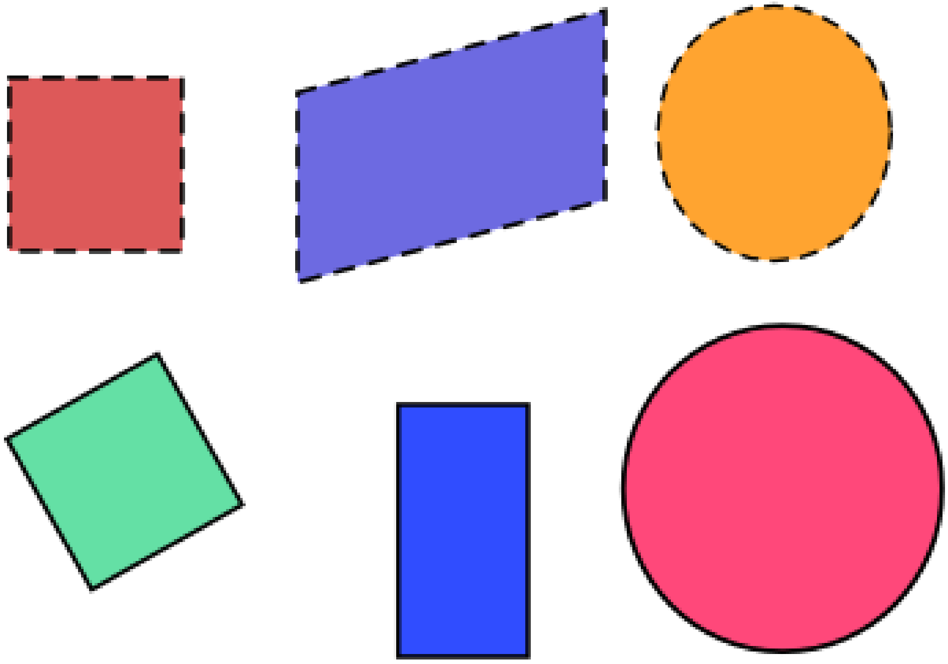
**Definice 3.7.** Řekneme, že podmnožina $G$ metrického prostoru $X$ je *otevřená*, jestliže pro každé $x \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x,\varepsilon) \subset G$.

Dále řekneme, že podmnožina $F$ metrického prostoru $X$ je *uzavřená*, jestliže $X \setminus F$ je otevřená.

**Příklady 3.8.** (1) V každém metrickém prostoru $(X,\rho)$ platí, že celý prostor $X$ a prázdná množina $\emptyset$ jsou uzavřené i otevřené zároveň.

(2) V metrickém prostoru $(\mathbb{R},\rho_1)$, tedy na reálné ose s absolutní hodnotou, je uzavřenou množinou třeba bod $\{2\}$, uzavřený interval $[-3;1]$ ale také interval $[11;\infty)$. Otevřenou množinou pak je otevřený interval $(-5;-3)$, $(-\infty,e)$ nebo sjednocení intervalů $(2;\pi) \cup (11;18,7)$.

(3) V rovině, tedy v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$ je otevřená množina například kruh o středu $[0,0]$ a poloměru 2, ovšem bez hraniční kružnice. Kruh s hraniční kružnicí je množina uzavřená. Stejně tak běžné geometrické objekty (čtverec, lichoběžník, deltoid) bez hranice jsou otevřené a s hranicí uzavřené.



Obr. 3.2: Otevřené (horní řádek) a uzavřené (dolní řádek) množiny v $\mathbb{R}^2$

(4) V diskrétním metrickém prostoru je otevřená i uzavřená každá jeho podmnožina.

(5) V metrickém prostoru $X = (0,1] \cup [2,3)$ s metrikou $\rho_1$ je množina $(0,1]$ otevřená i uzavřená zároveň. Množina $[2,3)$ zrovna tak.

Povšimněme si, že definice otevřené i uzavřené množiny závisí na metrickém prostoru, ve kterém se pohybujeme.

**Cvičení 3.9.** Určete, zda je interval $(0,1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru $(X,\rho)$, jestliže

(1) $X = (0,1)$, $\rho = \rho_1$,

(2) $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,

(3) $X = [0,1]$ s diskrétní metrikou,

(4) $X = (0,1) \cup (3,4)$, $\rho = 3\rho_1$.

Uzavřenou množinu lze charakterizovat i za pomoci kovnergence posloupnosti [14].

**Definice 3.10.** Nechť $x$ je prvkem metrického prostoru $X$. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ *konverguje k* $x$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Značíme $x_n \to x$.

**Věta 3.11.** V metrickém prostoru pak platí, že podmnožina $F$ metrického prostoru je uzavřená právě tehdy, jestliže pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, $x_n \to x$, platí $x \in F$.

**Příklady 3.12.** (1) V metrickém prostoru $[0,1]$ není množina $\{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ otevřená ani uzavřená.

(2) Racionální čísla $\mathbb{Q}$ nejsou v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$ otevřená ani uzavřená množina. Tedy ani iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nejsou ani otevřená ani uzavřená.

**Cvičení 3.13.** Určete, zda jsou dané množiny otevřené či uzavřené v daném metrickém prostoru.

(1) Množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel v $(\mathbb{R}, \rho_1)$.

(2) Množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$ v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$.

(3) Osa $x$ v prostoru $(\mathbb{R}^3, \rho_2)$.

(4) Množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y = 1/x\}$ v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$.

(5) Množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2/4 = 1\}$ v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$.

Než přikročíme k další části, uveďme ještě jednu poznámku. Máme-li metrický prostor, lze se na jeho podmnožiny dívat také jako na metrické (pod)prostory. Kupříkladu jsou-li metrickým prostorem obce ČR s metrikou danou vzdáleností vzdušnou čarou, budou metrickým prostorem i města a vesnice na Moravě s toutéž vzdáleností.

Jen je nutné dát pozor na otevřené a uzavřené množiny, které je pak potřeba vztahovat k novému podprostoru.

**Příklad 3.14.** V metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$ není interval $I := [0, 1)$ ani uzavřená ani otevřená množina. V podprostoru $(I, \rho_1)$ už je ale $I$ i uzavřený i otevřený (celý prostor je vždy takový).

## 3.2 Stromy

Ukažme si, že i hry lze chápat jako metrické prostory. Metrický prostor lze vybudovat na libovolné množině, třeba s diskrétní metrikou, musíme si tedy vybrat nějakou strukturu, která bude vhodná pro naše účely. Ukazuje se, že takovou strukturou jsou stromy. (Připomeňme, že již v první kapitole jsme používali jako pomůcku strom hry. Nyní to bude podobné.) V této i následující sekci budeme vycházet z knihy A. Kechrise o deskriptivní teorii množin [11] a z přednášky Deskriptivní teorie množin doc. Zeleného [15].

Abychom ale mohli definovat stromy, potřebujeme několik pomocných pojmů. Začneme posloupnostmi. Motivací je nám fakt, že na hru se dá dívat jako na posloupnost tahů.

**Značení 3.15.** Nechť $X$ je neprázdná množina a $n \in \mathbb{N}$. Symbolem $X^n$ budeme značit všechny posloupnosti $p = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ délky $n$, kde $x_0, \ldots x_{n-1} \in X$. Délku $n$ této posloupnosti, tedy počet jejích členů, budeme značit $|p|$.

Množinu všech posloupností z $X$ libovolné délky označme

$$X^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$$

a množinu všech nekonečných posloupností označme $X^{\mathbb{N}}$.

*Spojením* dvou posloupností $s = (s_0, s_1, \ldots s_j) \in X^{<\mathbb{N}}$ a $t = (t_0, t_1, \ldots) \in X^{<\mathbb{N}} \cup X^{\mathbb{N}}$ rozumíme posloupnost $s + t = (s_0, s_1, \ldots, s_j, t_0, t_1 \ldots)$.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. *Restrikcí* posloupnosti $p$ na prvních $k$ členů, kde $|p| \geq k$, rozumíme posloupnost $p|k := (p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$.

Posloupnost $t \in X^{<\mathbb{N}} \cup X^{\mathbb{N}}$ pak *prodlužuje* posloupnost $s \in X^{<\mathbb{N}}$, jestliže $s = t|k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Značíme $s \prec t$.

Nové pojmy ilustrujme na příkladu.

**Příklad 3.16.** Nechť $X$ značí všechna malá česká písmena, tedy

$$X = \{a, á, b, c, č, \dots, w, x, y, ý, z, ž\}.$$

Pak $X^1$ bude množina posloupností o jednom prvku, tedy jednopísmenná „slova“ (včetně nesmyslných), např. *a*, *i*, *ů*. $X^2$ budou dvoupísmenná slova, např. *až*, *bé*, *že*, *fň*, $X^3$ třípísmenná, *aby*, *zlo*, *rok*, *fxř*, atd.

$X^{<\mathbb{N}}$ pak bude značit všechna libovolně dlouhá, ale konečná „slova“, například *drak*, *královna*, *sedmtrpaslíků*, *hrdinůsmečemjsouplnéhřbitovy* ale i *fnixlwsúliv*. $X^{\mathbb{N}}$ pak označuje posloupnosti nekonečné, např. *abaabaaabaaaabaaaaaba...*.

Spojením posloupností *šéf* a *inspektor* bude posloupnost *šéfinspektor*. A posloupnost *koloběžka* bude prodlužovat posloupnost *kolo*.

Soustředíme-li se na množinu posloupností, zavedeme metriku následovně: Na množině $X^{\mathbb{N}}$, tedy množině nekonečných posloupností z $X$, definujeme metriku $\rho(x, y) = 2^{-n}$, kde $n$ je nejmenší číslo takové, že $x_n \neq y_n$, pro $x \neq y$ (indexováno od 0). Tato metrika se dá navíc aplikovat i na posloupnosti konečné $X^{<\mathbb{N}}$. Stačí si představit každou posloupnost prodlouženou „prázdným znakem“.

**Příklad 3.17.** Je-li $X = \mathbb{N}$, bude vzdálenost posloupností $x = (1, 2, 3, 4, \dots)$ a $y = (1, 2, 4, 8 \dots)$ rovna $2^{-2} = 1/4$, neboť $x_2 = 3 \neq 4 = y_2$.

Vzdálenost konečných posloupností $a = (2, 5)$, $b = (2, 5, 8)$ a $c = (2, 4)$ bude $\rho(a, b) = 2^{-2} = 1/4$, $\rho(a, c) = 2^{-1} = 1/2$ a $\rho(b, c) = 2^{-1} = 1/2$.

**Cvičení 3.18.** Určete vzdálenost posloupností v prostoru z Příkladu 3.16.

(1) *šéf* a *šéfinspektor*,

(2) *kolo* a *koloběžka*,

(3) *aby* a *abba*,

(4) *abaabaaabaaaa...* a *abacadaea...*.

Jak ale vypadají otevřené a uzavřené množiny v $X^{\mathbb{N}}$? Uveďme jeden příklad takových množin. Zafixujme posloupnost $s \in X^{<\mathbb{N}}$ a podívejme se na množinu všech jejích prodlužujících posloupností, označme ji $\mathcal{N}(s)$. Tedy

$$\mathcal{N}(s) = \{t \in X^{\mathbb{N}}; s \prec t\}.$$

Tato množina je otevřená i uzavřená, což plyne z faktu, že

$$X^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{N}(s) = \bigcup \{\mathcal{N}(t); t \in X^{<\mathbb{N}}, |t| = |s|, t \neq s\}.$$

Sekci zakončíme definicí stromu. Ta odpovídá přirozené představě stromu nebo keře, který začíná u kořene a postupně se větví. Prořezaný strom pak neobsahuje slepé větve.

**Definice 3.19.** Množina $\sigma \subset X^{<\mathbb{N}}$ je *strom*, jestliže s každou (konečnou) posloupností obsahuje i všechny její restrikce, tj.

$$\forall s, t \in X^{<\mathbb{N}}, s \prec t : t \in \sigma \Rightarrow s \in \sigma.$$

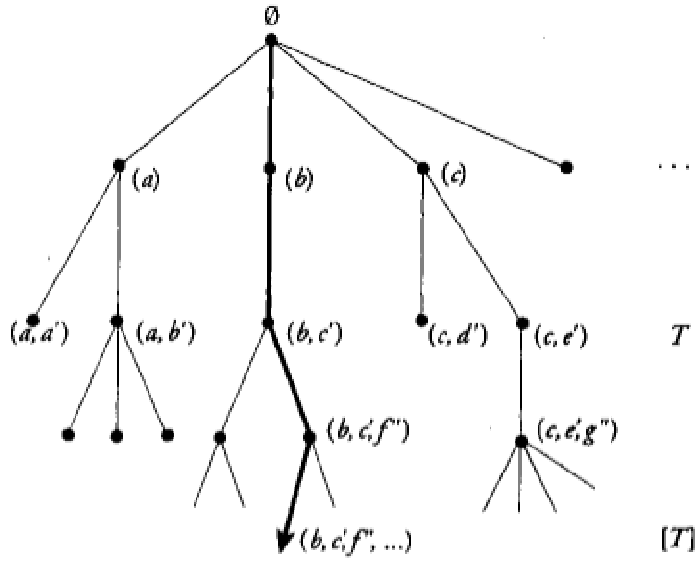
Dále řekneme, že strom je *prořezaný*, jestliže s každou posloupností obsahuje i nějaké její prodloužení, tedy

$$\forall s \in \sigma \exists x \in X : s + x \in \sigma.$$

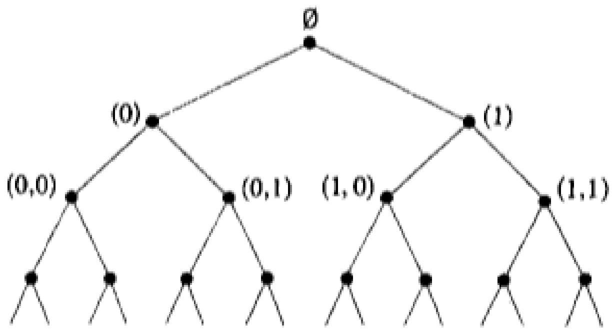
Symbolem $[\sigma]$ budeme značit všechny nekonečné posloupnosti, jejichž restrikce se vyskytují ve stromě $\sigma$, neboli

$$[\sigma] = \{x \in X^{\mathbb{N}}; x|n \in \sigma \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definici stromu ilustrují obrázky 3.3 a 3.4.



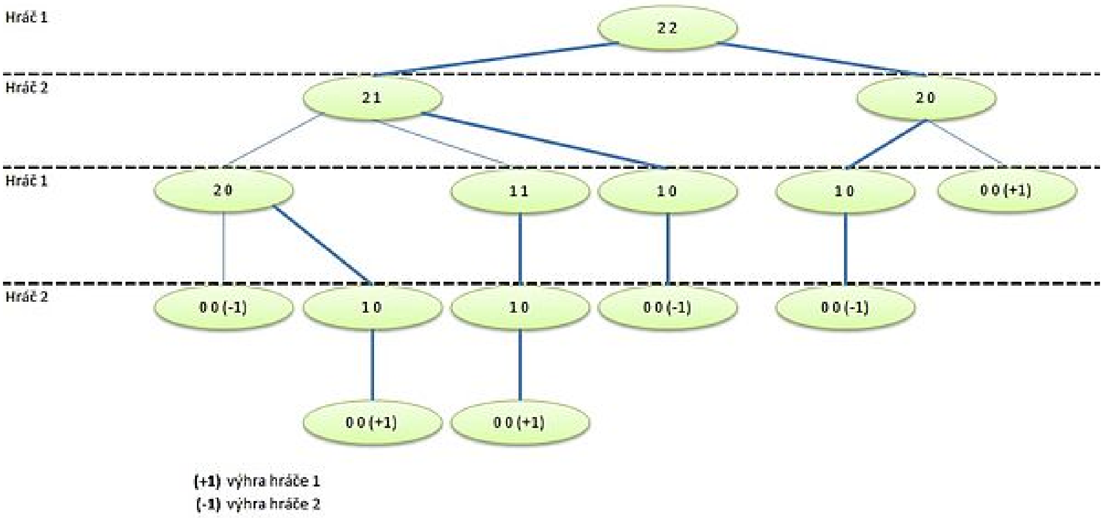

Obr. 3.3: Strom




Obr. 3.4: Prořezaný strom, $[\sigma]$ je zde rovno všem nekonečným posloupnostem 0 a 1

**Příklad 3.20.** Vrátíme-li se k příkladu s českými písmeny a slovy, tak strom můžeme definovat jako systém všech smysluplných českých slov a jejich částí. Nebude ovšem prořezaný.

**Příklad 3.21.** Stromem je i strom hry Nim na obr. 3.5. Posloupnosti jsou zde tvořeny dvojicemi čísel, které odpovídají počtu kamenů v hromádkách.




Obr. 3.5: Strom Nimu $2-2$

Protože (prořezaný) strom $\sigma$ je podmnožina prostoru všech posloupností, tak zdědí metriku popsanou výše. Tedy bude platit, že množina $\mathcal{N}(s) = \{t \in X^{\mathbb{N}}; s \prec t, t \subset [\sigma]\}$, kde $s \in \sigma$, je otevřená i uzavřená v $[\sigma]$.

## 3.3 Teorie her

Nyní máme všechny potřebné ingredience, abychom ukázali, kdy obecně mají hry vítěznou strategii. Celou teorii vyslovíme pro hry nekonečné, protože hry konečné (jako Nim nebo šachy) na ně lze snadno převést, jak uvidíme níže. Začněme definicí hry.

**Definice 3.22.** Nechť $X$ je neprázdná množina, $T \subset X^{<\mathbb{N}}$ prořezaný strom a $V \subset [T]$. *Hra s pravidly* $G(T, V)$ pak funguje následovně:

- Hráči A a B (Alice a Bob) se pravidelně střídají ve výběru prvků z množiny $X$. Jejich tahy značíme $x_i$, $i \in \mathbb{N}$, a požadujeme, aby $(x_0, x_1, \dots x_n) \in T$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

- Tímto procesem vzniká (nekonečná) posloupnost $x = (x_0, x_1, x_2 \dots)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $x_0$ | | $x_2$ | | $\dots$ | | |
| B | | $x_1$ | | $x_3$ | | $\dots$ | |

- Hráč A vyhraje, jestliže $x \in V$, jinak vyhraje hráč B.

Z tohoto pohledu je hra stromem, který představuje všechny možné sehrané partie hry, všechny možné tahy obou hráčů. Konkrétní partie pak spočívá ve výběru jedné větve.

Ukažme si příklady matematických her (vítěznou strategii nalezne čtenář v [3] a [4]):

**Příklady 3.23.** (1) Alice a Bob hrají hru na intervalu $[0, 1]$ a s množinou $S \subset [0, 1]$. Alice vybere číslo $x_0 \in [0, 1]$. Následně Bob vybere číslo $x_1$ ležící striktně mezi $x_0$ a 1. Pak Alice zvolí číslo $x_2$ mezi $x_0$ a $x_1$ atd. Jestliže limita posloupnosti $x_n$ bude ležet v $S$, vyhrála Alice. Jinak vyhrál Bob.

(2) Alice a Bob hrají na metrickém prostoru $(X, \rho)$. Alice zvolí (neprázdnou) množinu $A_0$. Bob pak vybere množinu $A_1 \subset A_0$. Alice zvolí $A_2 \subset A_1$ atd. Alice vyhraje, jestliže $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ bude prázdná množina, jinak vyhraje Bob.

Ježto je naším cílem ukázat existenci vítězné strategie pro Nim, je třeba jej popsat v řeči Definice 3.22. V podstatě to znamená popsat obrázek stromu matematickým jazykem. K tomu potřebujeme najít množiny $X$, $T$ a $V$.

**Příklad 3.24.** Zvolme jako příklad úvodní hru 5-4-3. Množinou $X$ pak budou uspořádané trojice nezáporých čísel $x - y - z$, kde $x \leq 5$, $y \leq 4$, $z \leq 3$. Tahem hráče pak nebudeme rozumět, kolik kamenů kde odebral, ale do jaké pozice se dostal. Tedy $x_0$ může být $5 - 4 - 2$, $0 - 4 - 3$ nebo třeba $5 - 1 - 3$.

Tímto postupem bychom ale získali i nedovolené tahy, kupříkladu $x_0 = 5 - 2 - 2$. Tomu zabráníme vhodnou volbou $T$, stačí jej definovat jako povolené pozice. Tím sice získáme strom, ale nebude prořezaný. Budeme muset každou větev prodloužit a to samými prvky $0 - 0 - 0$. Náš strom tedy bude sestávat ze všech možných povolených tahů a jakmile se dostaneme do pozice $0 - 0 - 0$, už v ní setrváme. Takovou větví může být například $(5 - 4 - 0, 0 - 4 - 0, 0 - 0 - 0, 0 - 0 - 0, 0 - 0 - 0, \ldots)$. Ale hra Nim je konečná, do stavu $0 - 0 - 0$ se dostane nejpozději po 12 krocích, každá větev je tedy nejpozději ve 13. prvku pozicemi $0 - 0 - 0$.

Zbývá najít množinu $V \subset [T]$. Položme si tedy otázku, kdy vyhrává Alice. Je to tehdy, když vezme poslední kámen a dostane se do pozice 0-0-0. Jinými slovy, pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je $x_{2n} = 0 - 0 - 0$ a přitom $x_i \neq 0 - 0 - 0$ pro všechna $i < 2n$. (Naopak Bob by vyhrál, kdyby tato situace nastala pro nějaké $x_{2n+1}$, kde $n \in \mathbb{N}$).

Hra Nim jako taková v tu chvíli končí, ale i $V$ musíme dodefinovat na nekonečnou stukturu. $V$ bude tedy množina posloupností, které od jistého sudého tahu už nabývají jen nulových pozic, neboli

$$V = \{a \in T, \exists n \in \mathbb{N}, x_i = 0 - 0 - 0 \Leftrightarrow i \geq 2n\}.$$

**Cvičení 3.25.** Popište jako strom hru Nim (2-2) ve verzi Misère.

Definovali jsme hru. Naším konečným cílem je nalezení strategie, což je vlastně návod, který říká, jak hrát v jakém okamžiku. I strategii musíme definovat a ukazuje se jako vhodné použít strom.

**Definice 3.26.** *Strategie pro A* je strom $\sigma$, který je prořezaný a splňuje:

(1) jestliže $(x_0, x_1, \dots x_{2n}) \in \sigma$, pak pro každé $x_{2n+1}$ také $(x_0, x_1, \dots x_{2n}, x_{2n+1}) \in \sigma$

(2) jestliže $(x_0, x_1, \dots x_{2n-1}) \in \sigma$, pak existuje právě jedno $x_{2n}$ takové, že $(x_0, x_1, \dots x_{2n-1}, x_{2n}) \in \sigma$.

Strategie je tedy výběr „podstromu" ze stromu hry tak, aby říkala hráči A jak hrát (druhá podmínka), ať už Bob bude hrát jakkoli (první podmínka).

Pak stejně jako v první kapitole řekneme, že strategie pro A je *vítězná*, jestliže s ní A vyhraje, ať už B bude hrát libovolným způsobem. V řeči stromů to znamená, že posloupnosti stromu vzniklého všemi možnými aplikacemi strategie $\sigma$ budou v množině $V$, neboli $\sigma \subset V$.

Dále, pozici $p = (x_0, x_1, \dots, x_{2n-1})$ nazveme *vyhrávající* pro A (který je na tahu), jestliže B nemá vítěznou strategii ve hře s tímto počátkem, neboli B nemá vítěznou strategii ve hře $G(T_p, V_p)$, kde $T_p = \{s : p{+}s \in T\}$ a $V_p = \{v : p{+}v \in V\}$.

Nyní máme definovánu hru i vítěznou strategii. Zbývá dokázat, že hry jako Nim vítěznou strategii mají. Tuto problematiku řeší následující věta. Než ji vyslovíme, ještě připomeňme, že na strom se díváme jako na metrický prostor, tedy v něm lze hovořit o uzavřených množinách.

**Věta 3.27** (Gale-Stewart)**.** Nechť $V$ je uzavřená. Potom ve hře $G(T, V)$ existuje vítězná strategie buď pro A, nebo pro B.

*Důkaz.* V případě, že by Bob měl vítěznou strategii, je důkaz hotov. Předpokládejme tedy, že Bob vítěznou strategii nemá. Budeme chtít ukázat, že ji má Alice.

Nejprve pár pozorování. Ježto jsme předpokládali, že Bob nemá vítěznou strategii, tak úvodní pozice $\emptyset$ je vyhrávající pro Alici.

Dále, je-li pozice $p = (x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}) \in T$ vyhrávající pro Alici, pak existuje $x_{2n}$ takové, že pro libovolné $x_{2n+1}$ je pozice $p = (x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}, x_{2n+1}) \in T$ opět vyhrávající pro Alici.

Nyní můžeme Alici sestrojit vítěznou strategii. Začněme volbou takového $x_0$, že $(x_0) \in T$ a pro každé $x_1$ takové, že $(x_0, x_1) \in T$, je pozice $(x_0, x_1)$ vyhrávající pro Alici. Dále pokračujeme analogicky, Alice zvolí $x_2$ tak, aby pro libovolné $x_3$, které zvolí Bob byla pozice $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in T$ vyhrávající pro Alici atd.

Získaná strategie už je vítězná pro Alici. Kdyby nebyla, tak bude existovat partie sehraná dle této strategie taková, že vzniklá posloupnost $(x_0, x_1, x_2, \dots) \notin V$. Množina $[T] \setminus V$ je ale otevřená v $[T]$ a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathcal{N}(x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}) \cap [T] \subset [T] \setminus V$. To je ale spor, protože pak by pozice $(x_0, x_1, \dots, x_{2n-1})$ nebyla vyhrávající pro Alici a Bob může hrát libovolně a vyhraje. □

**Poznámka 3.28.** Právě jsme ukázali, že je-li $V$ uzavřená množina, existuje vítězná strategie. Vkrádá se otázka, zda obdobné věty neplatí i pro nějaké další typy množin. Odpověď je kladná. Věta se dá dokázat i za podmínky, že $V$ je otevřená, a lze zformulovat analogické věty i pro složitější systémy množin, jako jsou například nekonečné průniky otevřených množin či sjednocení uzavřených množin.

Vše je již připraveno, abychom ukázali, že Nim má vítěznou strategii (aniž bychom ji zkonstruovali), stačí aplikovat Větu 3.27. Ukažme si to na hře z příkladu 3.24.

**Příklad 3.29.** Musíme ukázat, že $V$ je uzavřená v metrickém prostoru daném stromem $T$. To dokážeme z Věty 3.11. Zvolme tedy posloupnost $(x_k) \subset V$, $x_k \to x$, $k \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i $x \in V$.

Jak vypadá posloupnost $(x_k)$? Její samotné prvky $x_k$ jsou vlastně posloupnostmi uspořádaných trojic, které vznikly přípustnými tahy a které se „vynulovaly" v sudém prvku, tedy např.

$$\begin{aligned} x_1 = (&5-4-2, 0-4-2, 0-2-2, 0-1-2, 0-0-2, 0-0-1, 0-0-0,\\ &0-0-0, \ldots),\\ x_2 = (&5-3-3, 5-0-3, 0-0-3, 0-0-2, 0-0-0, 0-0-0, 0-0-0,\\ &0-0-0, \ldots),\\ x_3 = (&3-4-3, 3-4-2, 3-2-2, 0-2-2, 0-1-2, 0-1-0, 0-0-0,\\ &0-0-0, \ldots). \end{aligned}$$

Zároveň tato posloupnost posloupností konverguje k nějakému $x$. Jinými slovy to znamená, že prvky $x_k$ jsou od jistého $k$ „blízko" k $x$. V řeči naší metriky tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k_0$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ máme $\rho(x_k, x) < \varepsilon$. Aby toto ale platilo v metrice definované na posloupnostech, tak pro $\varepsilon < \frac{1}{2^{14}}$ už se musí všechny členy $x_k$ a $x$ rovnat (Nezapomeňte, že všechny posloupnosti v $T$ jsou nejpozději od 13. prvku nulové). Tedy existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq k_0$ je $x_i = x_j = x$ a posloupnost je od určitého členu konstantní (a tedy vynulovaná v sudém kroku). Odtud ale triviálně plyne, že i limita $x \in V$, což jsme chtěli.

Máme nyní tedy vše, abychom mohli aplikovat Galeovu-Stewartovu větu, z níž už plyne, že hra Nim $5-4-3$ má vítěznou strategii.

Úvahy popsané v předchozím příkladě lze samozřejmě aplikovat i na hry s jinou výchozí situací než $5-4-3$, čímž lze snadno ukázat, že hra Nim má vítěznou strategii i v řeči stromů a metrických prostorů, což jsme chtěli.

Na závěr poznámku k hrám obecně. Při aplikaci Galeovy-Stewartovy věty jsme využili faktu, že hra Nim je od jistého tahu prodloužena samými nulami, díky čemuž jsme snadno ukázali, že $V$ je uzavřená. Tento postup lze ale snadno zopakovat i u jiných konečných her, např. u Misère Nimu, Tac Tix nebo (ošetříme-li patové situace) u šachů. Všechny tyto hry tedy mají vítěznou strategii, přestože nemusíme vědět, jak přesně vypadá.

Použití této věty na hru Nim bylo tak trochu použitím kanónu na vrabce. Vyložená teorie přesto není zbytečná, její síla spočívá právě v nekonečných hrách, kterým se existence vítězné strategie dokazuje obtížněji. Pokud si uvědomíme, že některé matematické věty lze na teorii her převést, jeví se tato teorie jako velmi užitečná.

# Závěr

Hry jsou vděčné matematické téma a hra Nim není v tomto směru výjimkou. Její vítězná strategie přímo založená na binárních číslech a součtu xor je prvním krokem do říše informatiky, strom hry je ochutnávka teorie grafů. Při hledání strategie jsme navíc konfrontováni s potřebou důkazů a jejich různých typů. Přesto nebylo cílem zahltit čtenáře přemírou definic a vyděsit jej přemírou matematického jazyka.

Původním záměrem navíc bylo dovést čtenáře, aby strategii odvodil a pochopil sám. Toto bohužel nebylo naplněno, neb ač je strategie jednoduchá a snadno aplikovatelná, málokdo by hledal v odebírání kamenů dvojkovou soustavu. V určité chvíli tedy bylo třeba ustoupit a strategii čtenáři věnovat.

Ve druhé kapitole jsme si ukázali varianty hry Nim a její skryté verze. Kapitola by se dala rozšiřovat prakticky do nekonečna, úprav hry je známo skutečně mnoho, některé mají a některé nemají známou vítěznou strategii, což se projevilo i ve výběru her. V druhé části byla zvláštní pozornost věnována hře Hackenbush, která má stejně jako Nim mnoho variant, které už nebylo možno zahrnout kvůli plánovanému rozsahu práce. Odkazujeme proto čtenáře k dalšímu studiu.

Třetí kapitola představuje úvod do teorie metrických prostorů. Zavedli jsme abstraktní strukturu prostoru a metriky a úspěšně ji aplikovali na stromy. Tento příklad se snad neuvádí v základních kurzech matematiky, přesto jsme v teorii her docenili jeho užitečnost, když jsme sestavovali strom hry Nim a pomocí hlubokých vět dokazovali existenci vítězné strategie.

Cíl definovaný v úvodu práce je možno označit za splněný, čtenář se seznámil s hrou a na jejím základě s různými partiemi matematiky.

# Literatura

[1] Nim. `http://en.wikipedia.org/wiki/Nim`, July 2014.

[2] M. Antol. Combinatorial games. Bachelor's thesis, Masaryk University, 2011.

[3] M. Baker. Real numbers and infinite games, part i. `http://mattbakerblog.wordpress.com/2014/07/01/real-numbers-and-infinite-games-part-i/`, July 2014.

[4] M. Baker. Real numbers and infinite games, part ii. `http://mattbakerblog.wordpress.com/2014/07/07/real-numbers-and-infinite-games-part-ii/`, July 2014.

[5] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning ways for your mathematical plays. Vol. 1.* A K Peters, Ltd., Natick, MA, second edition, 2001.

[6] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Ann. of Math. (2)*, 3(1-4):35–39, 1901/02.

[7] R. A. Epstein. *The theory of gambling and statistical logic.* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2009.

[8] M. Gardner. *Wheels, life and other mathematical amusements.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1983.

[9] M. Gardner. *Hexaflexagons and other mathematical diversions.* The University of Chicago Press, Ltd., London, 1988.

[10] J. C. Holladay. Matrix Nim. *Amer. Math. Monthly*, 65:107–109, 1958.

[11] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[12] R. J. Nowakowski, editor. *Games of no chance*, volume 29 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Papers from the Combinatorial Games Workshop held in Berkeley, CA, July 11–21, 1994.

[13] A. Skálová. Teorie her pro nadané žáky středních škol. Master's thesis, Univerzita Karlova v Praze, 2014.

[14] L. Zajíček. *Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník.* Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, 2003.

[15] M. Zelený. Deskriptivní teorie množin i. http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/DST.php, July 2014.

# Seznam obrázků