$|\sphericalangle SPP'| = |\sphericalangle SP'T|$. Odtud plyne, že $3|\sphericalangle SPP'| = |\sphericalangle SP'Q|$. Ze souměrnosti sdružených úhlů konečně plyne $\varphi = |\sphericalangle SPQ'| = |\sphericalangle SP'Q|$, tedy $\alpha = \frac{1}{3}\varphi$.

Jak jsme dříve zdůvodnili, tato konstrukce nemůže být eukleidovská, je však dostatečně jednoduchá. K jejímu provedení stačí list papíru a překládání přehybů. Takže závěrem: kdyby měl Eukleides papír…

Literatura

[1] *Alperin, R. C.*: A mathematical theory of origami constructions and numbers. New York Journal Math. **6**, 2000.

[2] *Casselman B.*: If Eukleides had been Japanese. Notices American Mathematical Society, **54**, 2007).

[3] *Eukleides*: Základy. Vyd. OPS, Nymburk 2008.

[4] *Hull T.*: Project origami: Activities for exproring mathematics. A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.

[5] *Geretschläger R.*: Geometrie origami. Arbelos, Shipley 2008.

Úlohy s dopravní tematikou

PAVLA PAVLÍKOVÁ – JARMILA ROBOVÁ – ANTONÍN SLAVÍK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Tento článek[1] volně navazuje na předchozí představení vznikající sbírky aplikačních úloh[2] a je zaměřen na úlohy související s různými situacemi s dopravní tematikou. Uvedené příklady z matematického hlediska procvičují lineární, kvadratickou a lineární lomenou funkci, řešení jednoduchých rovnic a nerovnic, práci s grafem a vážený průměr.

---

[1] Článek vznikl s podporou rozvojového projektu MŠMT č. 14/38 (Podpora informačních center a spolupráce se středními školami a veřejností).

[2] Pavlíková, P. – Robová, J. – Slavík, A.: *Fahrenheit, Celsius a americký cent*, MFI, roč. 20 (2010/2011), č. 7.

1. Benzin nebo nafta?

Paní Nováková uvažuje o koupi nového vozu. Rozhoduje se mezi variantou vozu s naftovým nebo benzinovým motorem. Auto, které si vybrala, stojí s naftovým motorem 311 000 Kč, cena téhož auta s benzinovým motorem je 246 900 Kč. Výrobcem udávaná kombinovaná spotřeba na 100 km je u naftového pohonu 4,8 litru, u benzinového 5,9 litru. Po ujetí kolika kilometrů by se vyplatila investice do dražší, tedy naftové verze, uvažujeme-li cenu benzinu 32,70 Kč za litr a cenu nafty 31,80 Kč za litr?[3]

Řešení. Daný problém představuje jednoduchou variantu rozhodovací úlohy, kdy hledáme pro nás optimální řešení. Ke správnému rozhodnutí můžeme využít schopnost pracovat s lineární nerovnicí.

Označíme-li si x počet najetých kilometrů, potom náklady N_1 spojené s koupí benzinového motoru jsou

$$N_1 = \left(246\,900 + x \cdot 32{,}70 \cdot \frac{5{,}9}{100}\right) \text{ Kč}$$

(celkové náklady jsou součtem kupní ceny vozu a částky, kterou zaplatíme v průměru po ujetí x kilometrů za pohonné látky). Pro variantu s naftovým motorem obdobně platí

$$N_2 = \left(311\,000 + x \cdot 31{,}80 \cdot \frac{4{,}8}{100}\right) \text{ Kč.}$$

Je zřejmé, že krátce po nákupu vozu bude $N_1 < N_2$. Naším úkolem je vypočítat hodnotu x, při které se začne vyplácet investice do dražšího motoru. Řešíme tedy nerovnici $N_1 \geq N_2$, tj.

$$246\,900 + x \cdot 32{,}70 \cdot \frac{5{,}9}{100} \geq 311\,000 + x \cdot 31{,}80 \cdot \frac{4{,}8}{100},$$

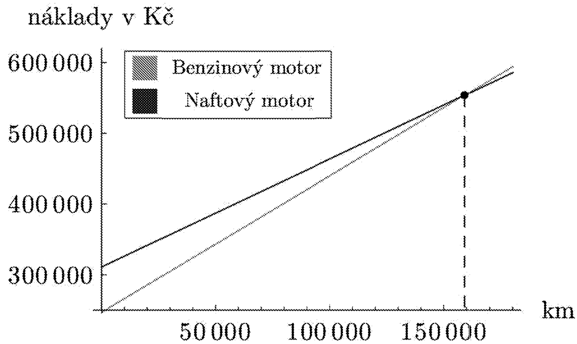
odkud vyplývá

$$x \geq 159\,097.$$

Pokud by se paní Nováková rozhodovala jen podle uvedených údajů (a nikoliv podle vlastností motoru atd.), vyplatil by se jí naftový pohon pouze v případě, kdyby s vozem plánovala ujet více než 160 tisíc kilometrů.

[3] Uvedené ceny pohonných hmot byly aktuální k 23. 11. 2010.

Danou úlohu můžeme rovněž řešit graficky. Do jednoho grafu vyneseme závislosti nákladů N_1, N_2 na počtu x ujetých kilometrů; hledanou hodnotu odečteme jako x-ovou souřadnici průsečíku obou přímek:



Se studenty dále můžeme diskutovat nad otázkou, jak by se změnil výsledek úlohy, pokud by například cena za litr benzinu vzrostla o 1,50 Kč a cena za litr nafty klesla o 0,20 Kč (v tom případě by se naftový pohon vyplatil po ujetí přibližně 128 tisíc kilometrů), resp. jak by výsledné rozhodnutí paní Novákové ovlivnila pobídka prodejce v podobě slevy 30 000 Kč při nákupu naftového motoru (hraniční hodnota by byla přibližně 85 tisíc kilometrů).

2. Červená na semaforu

Automobil jedoucí rychlostí $v_0 = 50\,\mathrm{km/h}$ se blíží ke světelné křižovatce. V okamžiku, kdy se po zeleném signálu rozsvítí žlutý[4] signál „Pozor!“, je auto 45 metrů před křižovatkou, a doba, po kterou svítí žlutý signál, je 3 sekundy. Jak by se měl řidič zachovat, jestliže se bojí ztráty bodů za projetí křižovatky na červenou? Má pokračovat v jízdě stálou rychlostí, nebo má začít brzdit, nebo má naopak zrychlit? Předpokládejme, že reakční doba řidiče je $t_\mathrm{R} = 1$ sekunda.

[4]Pokud by vás v této chvíli lákalo protestovat proti termínu *žlutý signál*, neboť světlo na semaforu se jeví oranžové, lze se odvolat na text Vyhlášky č. 30/2001 Sb., kterou se provádějí pravidla provozu na pozemních komunikacích a úprava a řízení provozu na pozemních komunikacích, ve znění vyhlášky č. 153/2003 Sb., vyhlášky č. 176/2004 Sb., vyhlášky č. 193/2006 Sb., vyhlášky č. 507/2006 Sb., vyhlášky č. 202/2008 Sb., vyhlášky č. 91/2009 Sb. a vyhlášky č. 247/2010 Sb. Pro matematickou podstatu úlohy naštěstí není barva signálu „Pozor!“ důležitá.

a) Úlohu řešte pro případ

(i) suché asfaltové vozovky (volte koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami vozidla $f = 0,8$),

(ii) namrzající asfaltové vozovky (volte koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami vozidla $f = 0,3$).

b) Jakou maximální rychlostí by mohl jet řidič v případě ii), aby dobrzdil ještě před semaforem?

Řešení. Při řešení této úlohy je nutné si uvědomit, že dráha potřebná pro zastavení vozidla je součtem tzv. reakční dráhy a vlastní brzdné dráhy.

Reakční dráha s_R je dráha, kterou řidič ujede od okamžiku, kdy rozpozná kritickou situaci, do okamžiku, kdy tuto informaci vyhodnotí a začne brzdit. Délka reakční doby řidiče závisí na jeho okamžitém zdravotním stavu, koncentraci a dalších okolnostech. Za průměrnou reakční dobu t_R bývá považována jedna sekunda. Pohybuje-li se vozidlo rychlostí v_0, potom pro reakční dráhu platí (jde o rovnoměrný pohyb)

$$s_\mathrm{R} = v_0 \cdot t_\mathrm{R}.$$

Při výpočtu vlastní brzdné dráhy můžeme využít zjednodušené verze zákona zachování energie.[5] Označme m hmotnost vozidla, f koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami vozidla, g tíhové zrychlení ($g \doteq 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$) a s_B brzdnou dráhu. Předpokládáme-li, že se kinetická energie vozidla $\frac{1}{2}m \cdot v^2$ při brzdění přemění v práci třecích sil $m \cdot f \cdot g \cdot s_\mathrm{B}$ působících mezi pneumatikami a vozovkou, platí přibližně

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = m \cdot f \cdot g \cdot s_\mathrm{B},$$

odkud pro výpočet brzdné dráhy s_B získáme přibližný vztah

$$s_\mathrm{B} = \frac{v_0^2}{2f \cdot g}$$

a pro celkovou dráhu s potřebnou pro zastavení vozidla dostaneme

$$s = s_\mathrm{R} + s_\mathrm{B} = v_0 \cdot t_\mathrm{R} + \frac{v_0^2}{2f \cdot g}.$$

[5] Ačkoliv se jedná o zjednodušení celého problému (nezabýváme se kvalitou brzdového systému daného vozu, hloubkou vzorku na pneumatikách atd.), analogický přibližný vztah najdeme mimo jiné i v normě ČSN 73 6101 Projektování silnic a dálnic v příloze B pro výpočet délky rozhledu pro zastavení.

a) V případě i) získáme po dosazení $f = 0,8$ hodnotu

$$s = \left(\frac{50}{3{,}6} \cdot 1 + \frac{50^2}{3{,}6^2 \cdot 2 \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}81}\right) \text{ m} \doteq 26 \text{ m}.$$

Řidič rozhodně stihne zabrzdit ještě dříve, než se na semaforu rozsvítí červená.

V případě ii) platí pro $f = 0,3$

$$s = \left(\frac{50}{3{,}6} \cdot 1 + \frac{50^2}{3{,}6^2 \cdot 2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}81}\right) \text{ m} \doteq 47 \text{ m}.$$

Na namrzlé vozovce tedy řidič nestihne dobrzdit ještě před semaforem. Pokud by vůbec brzdit nezačal a pokračoval v jízdě rychlostí v_0, potom by za 3 sekundy ujel 41,7 metru. Nestihl by proto projet, dokud svítí žluté světlo, a do křižovatky by vjel na červenou, čímž by riskoval pět trestných bodů do své karty řidiče. Jeho jedinou možností je proto v situaci ii) přiměřeně zrychlit.[6]

b) Hledáme-li maximální číselnou hodnotu $v_{\max}$ počáteční rychlosti, při níž by řidič dobrzdil v situaci ii) ještě před semaforem, řešíme kvadratickou nerovnici

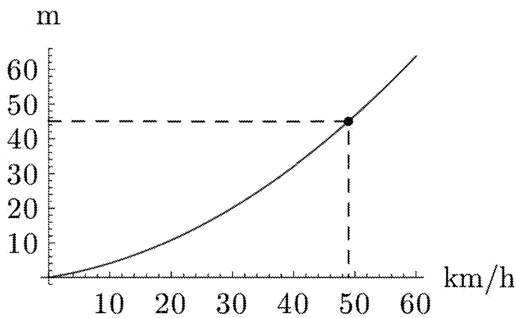
$$45 \geq \frac{v_{\max}}{3{,}6} \cdot 1 + \frac{v_{\max}^2}{3{,}6^2 \cdot 2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}81},$$

tedy

$$0 \geq v_{\max}^2 + 21{,}19 \cdot v_{\max} - 3432{,}72.$$

Jejím řešením zjistíme, že počáteční rychlost nesmí překročit 48,95 km/h. Řešení ilustruje následující obrázek (dráha s potřebná k zastavení je kvadratickou funkcí počáteční rychlosti v_0):

[6] Riziko bodového postihu za překročení maximální povolené rychlosti v obci o méně než 20 km/h je nižší (2 body) než v případě jízdy na červenou.



3. Kombinovaná spotřeba

Pan Bezradný si zakoupil nový automobil. Při jeho koupi mu prodávající sdělil následující údaje týkající se spotřeby daného modelu: kombinovaná spotřeba 6,9 l/100 km, spotřeba mimo město 4,9 l/100 km (spotřebou v městském provozu se takticky nechlubil). Kupující tedy očekával, že spotřeba ve městě se bude pohybovat kolem 9 l/100 km.[7] Pan Bezradný však jezdil převážně v městském provozu. Ke svému zděšení brzy zjistil, že i po tzv. záběhu nového motoru dosahuje průměrné spotřeby nad 10 l/100 km, přestože si zakládá na tom, že má „velmi lehkou nohu na plynu". Vypravil se tedy ke svému prodejci tento fakt reklamovat. Byla jeho stížnost oprávněná?

Řešení. Kupující doplatil na to, že si nezjistil všechny informace. Na základě směrnice č. 70/220/EHS (ve znění pozdějších novel, zejména směrnice č. 91/441/EHS) se v současné době kombinovaná spotřeba S osobních vozidel určuje jako *vážený průměr* spotřeby při jízdě městem M a při jízdě mimo město V podle vzorce

$$S = \frac{4 \cdot M + 7 \cdot V}{11}.$$

Pro spotřebu v městském provozu v případě pana Bezradného vychází

$$M = \frac{11 \cdot S - 7 \cdot V}{4},$$

[7] Naivní zákazník při svém odhadu vycházel ze zkušenosti se svým předchozím vozem z roku 1990, u nějž byly v technickém průkazu uvedeny spotřeby v režimech *město/90 km/120 km* (podle směrnice č. 80/1268/EHS) a kombinovaná spotřeba se počítala jako aritmetický průměr těchto hodnot.

tedy

$$M = \frac{11 \cdot 6{,}9 - 7 \cdot 4{,}9}{4} \text{ l/100 km} = 10{,}4 \text{ l/100 km}.$$

Stížnost pana Bezradného nebyla oprávněná.

4. Předjíždění na dálnici

Na dálnici jel v pomalém jízdním pruhu kamion dlouhý 12 m rychlostí $v_0 = 80$ km/h. Když se k němu zezadu na 100 m přiblížil další kamion jedoucí rychlostí 90 km/h, vybočil tento druhý kamion do rychlého jízdního pruhu a pustil se do předjíždění. Když byl 100 m před předjížděným kamionem, vrátil se zpět do pomalého jízdního pruhu a pokračoval v jízdě. Pro zjednodušení předpokládejme, že oba řidiči měli nastavený tempomat, takže udržovali po celou dobu manévru konstantní rychlost.

a) Jak dlouho při celém předjíždění blokoval kamion rychlý pruh dálnice?
b) Odvoďte obecný vztah pro dobu předjíždění t při rychlosti předjíždějícího kamionu v. Sestrojte graf závislosti doby předjíždění t v sekundách na rychlosti předjíždějícího kamionu v pro $v \in \langle 81 \text{ km/h}; 100 \text{ km/h} \rangle$.
c) Vypočtěte, jakou rychlostí by musel kamion předjíždět, aby rychlý pruh blokoval maximálně po dobu jedné minuty.

Řešení.

a) Během předjíždění musel druhý kamion ujet o $(100 + 12 + 100)$ metrů více než kamion, který byl předjížděn. Druhý kamion se vzhledem k prvnímu pohyboval rychlostí o 10 km/h $= (10 : 3{,}6)$ m/s větší. Celý předjížděcí manévr mu proto trval dobu

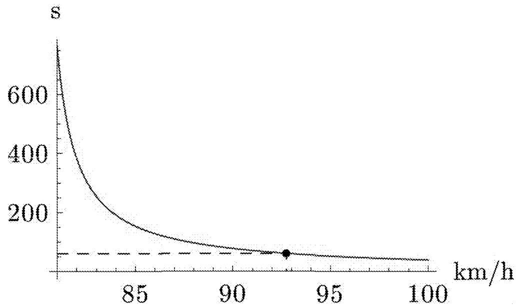
$$t = \frac{100 + 12 + 100}{10 : 3{,}6} \text{ s} \doteq 76 \text{ s}.$$

Rychlý pruh dálnice byl blokován po dobu 76 s, tedy déle než jednu minutu. Nelze se proto divit, že na mnoha úsecích našich silnic je jízda kamionů v rychlém pruhu zakázána.

b) Pro čas t vyjádřený v sekundách lze odvodit vztah

$$t = \frac{(100 + 12 + 100) \cdot 3{,}6}{v - 80} \text{ s} = \frac{763{,}2}{v - 80} \text{ s},$$

kde v je rychlost předjíždějícího kamionu v km/h. Čas t je lineární lomenou funkcí rychlosti v. Pro hodnoty $v \in \langle 81 \text{ km/h}; 100 \text{ km/h} \rangle$ dostaneme část větve hyperboly:



c) Zajímá nás, pro jakou číselnou hodnotu rychlosti $v_{\min}$ bude $t \leq 60$ s. Řešíme proto nerovnici

$$\frac{(100 + 12 + 100) \cdot 3{,}6}{v_{\min} - 80} \leq 60.$$

Odtud plyne, že předjíždějící kamion by se musel po silnici pohybovat rychlostí alespoň 92,72 km/h.

Závěr

Uvedené úlohy byly věnovány různým situacím v dopravě. S dalšími aplikačními úlohami, které vytváří kolektiv autorů z Matematicko-fyzikální fakulty UK, se můžete v blízké době seznámit na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Na adrese

`www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/aplikace`

budou zveřejněny některé nové úlohy z připravované sbírky.