MATEMATIKA

Fahrenheit, Celsius a americký cent

PAVLA PAVLÍKOVÁ – JARMILA ROBOVÁ – ANTONÍN SLAVÍK

Matematicko-fyzikání fakulta UK, Praha

Cílem výuky matematiky na základních i středních školách je nejen rozvíjet a prohlubovat matematické vědomosti a dovednosti žáků, ale také jim přiblížit význam matematiky jako užitečného nástroje k řešení problémů z reálného světa. Tento aspekt matematického vzdělávání je ve školách realizován různými způsoby a metodami, nejčastěji bývá ilustrován prostřednictvím řešení aplikačních úloh. V různých učebnicích i sbírkách se však objevují příklady, které se jako aplikační tváří, ve skutečnosti jsou ale odtrženy od reality a obsahují fiktivní či zkreslené údaje. Vhodně zvolená aplikační úloha přitom může posloužit jako efektivní motivační nástroj, který u žáků vzbudí zájem o daný problém, a tedy i o matematiku.

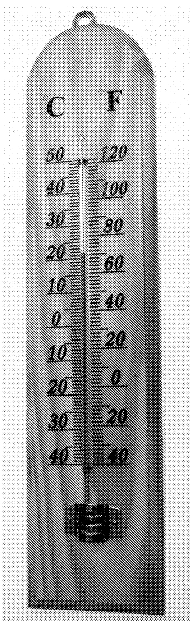
Se záměrem poskytnout učitelům a žákům středních škol reálné aplikační úlohy z různých oblastí matematiky vzniká na Katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze sbírka aplikačních úloh. Práce na sbírce je podporována rozvojovým projektem MŠMT[1] a na její tvorbě se podílejí Jana Hromadová, Magdalena Hykšová, Oldřich Odvárko, Pavla Pavlíková, Eliška Pecinová, Jarmila Robová a Antonín Slavík, (v abecedním pořadí). Na přípravě sbírky rovněž intenzivně pracoval Ivan Saxl (†2009). Sbírka by měla pokrývat nejdůležitější partie středoškolské matematiky, a to zejména

- základní pojmy (zvláště procenta a poměry),
- rovnice, nerovnice a jejich soustavy,
- funkce, jejich grafy a vlastnosti,
- goniometrie,

[1] Rozvojový projekt MŠMT č. 14/38 (Podpora informačních center a spolupráce se středními školami a veřejností na MFF UK).

- planimetrie a stereometrie,
- finanční matematika,
- diferenciální a integrální počet,
- kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.

Ke každému tématu jsou připravovány podrobně řešené vzorové příklady, za kterými následují neřešená cvičení obdobného charakteru; návody na jejich řešení včetně výsledků budou k dispozici v závěrečné části připravované sbírky. Před vzorovými příklady, jejichž řešení vyžaduje konkrétní znalosti z dalších oborů, jako je například fyzika, chemie či biologie, budou doplněny krátké úvody do dané problematiky, aby učitel a žáci nemuseli dohledávat potřebné informace v jiných zdrojích. Následující ukázky z připravované sbírky obsahují aplikační úlohy zaměřené na lineární funkce, rovnice a nerovnice[2].



1. Úlohy o měření teploty

Pro měření teploty se používají různé stupnice. U nás se používá Celsiova stupnice, v USA dávají přednost Fahrenheitově stupnici. Pro převod mezi oběma stupnicemi platí vztah

$$t_{\mathrm{F}} = \frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 32,$$

kde t_{F} je číselná hodnota teploty ve stupních Fahrenheita a t_{C} je číselná hodnota teploty ve stupních Celsia.

Souboj Celsius versus Fahrenheit

Pro rychlé převody mezi oběma stupnicemi se v běžném životě místo převodního vztahu

$$t_{\mathrm{F}} = \frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 32$$

používá jednoduchá aproximace

$$\overline{t_{\mathrm{F}}} = 2 \cdot t_{\mathrm{C}} + 30.$$

[2] Některé ukázky ze sbírky již byly prezentovány na Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v listopadu 2010, více viz Pavlíková P.: *Aplikační úlohy v matematice na střední škole.* In Lávička M., Bastl B. (ed.): Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2010, Vydavatelský servis, Plzeň, 2010, str. 203–205.

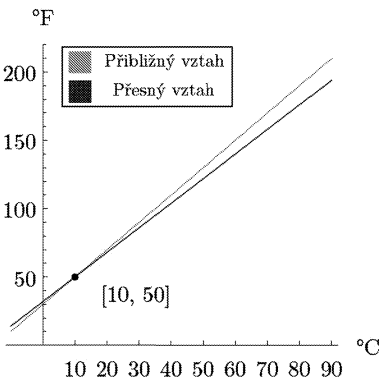
Dvě ženy převáděly naměřenou teplotu na venkovním teploměru ve stupních Celsia na stupně Fahrenheita tak, že jedna z nich použila převodní vztah a druhá aproximaci. Obě získaly stejný výsledek. Jak je to možné?

Řešení. Obě ženy postupovaly podle různých předpisů, ale získaly stejný výsledek – teplotu ve stupních Fahrenheita. Tedy platí

$$\frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 32 = 2 \cdot t_{\mathrm{C}} + 30,$$

odtud $t_{\mathrm{C}} = 10$.

Pro teplotu 10 °C, resp. 50 °F, dávají obě metody stejný výsledek. Řešení příkladu lze ilustrovat i graficky, jak ukazuje následující obrázek.



Přesně nebo přibližně?

Vypočítejte, v jakém rozsahu teplot ve stupních Celsia je *odchylka teplot* ve stupních Fahrenheita určených z *aproximačního vztahu* a z *převodního vztahu* mezi Fahrenheitovou a Celsiovou stupnicí

a) nejvýše 1 °F, b) nejvýše 2 °F, c) nejvýše 3 °F.

Řešení. Platí

$$t_{\mathrm{F}} = \frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 32, \quad \overline{t_{\mathrm{F}}} = 2 \cdot t_{\mathrm{C}} + 30,$$

kde t_{C} je číselná hodnota teploty ve stupních Celsia, t_{F} číselná hodnota teploty ve stupních Fahrenheita určená pomocí převodního vztahu a $\overline{t_{\mathrm{F}}}$ číselná hodnota teploty ve stupních Fahrenheita určená pomocí aproximačního vztahu.

a) Podle zadání má pro odchylku teplot t_{F} a $\overline{t_{\mathrm{F}}}$ platit

$$|t_{\mathrm{F}} - \overline{t_{\mathrm{F}}}| \leq 1.$$

Odstraněním absolutní hodnoty dospějeme k soustavě nerovnic

$$t_{\mathrm{F}} - 1 \leq \overline{t_{\mathrm{F}}} \leq 1 + t_{\mathrm{F}}.$$

Dosazením za t_{F} a $\overline{t_{\mathrm{F}}}$ pak získáme soustavu nerovnic s neznámou t_{C}:

$$\frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 31 \leq 2 \cdot t_{\mathrm{C}} + 30 \leq \frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 33$$

Úpravou nerovnic dostaneme

$$5 \leq t_{\mathrm{C}} \leq 15.$$

Pro teploty z intervalu $\langle 5\ °\mathrm{C}, 15\ °\mathrm{C}\rangle$ je tedy odchylka teplot ve stupních Fahrenheita určených z aproximačního a z převodního vztahu nejvýše 1 °F.

b) Postupujeme stejně jako v předchozím případě a zjistíme, že odchylka teplot je nejvýše 2 °F pro teploty z intervalu $\langle 0\ °\mathrm{C}, 20\ °\mathrm{C}\rangle$.

c) Odchylka teplot je nejvýše 3 °F pro teploty z intervalu $\langle -15\ °\mathrm{C}, 25\ °\mathrm{C}\rangle$.

Teplota, nebo horečka?

Normální teplota lidského těla měřená v podpažní jamce se pohybuje mezi 36 °C až 37 °C. Teplota kolísá během dne, nejnižší bývá časně ráno, nejvyšší naopak v podvečer.

Normální teplota: *36 °C – 37 °C*
Zvýšená teplota: *37 °C – 38 °C*
Horečka: *nad 38 °C*
Vysoká horečka: *nad 41 °C.*

Obecně se doporučuje snižovat teplotu, až když stoupne nad 38 °C, neboť zvýšená teplota je jedním z obranných mechanismů lidského těla. Při zvýšené teplotě se zastavuje množení bakterií a virů.

Paní Caroline Smith, která je na návštěvě u své neteře v Praze, onemocněla chřipkou. Neteř se domlouvá se svým praktickým lékařem dr. Topilem. – „A kolik má teplotu?“ – „Říká, že má na svém teploměru sto celých devět.“ – „Co je to za nesmysl?“ Je to opravdu nesmysl?

a) Vyjádřete číselnou hodnotu teploty t_{C} ve stupních Celsia pomocí t_{F}.

b) Jakou má paní Caroline teplotu ve stupních Celsia? Má horečku, nebo zvýšenou teplotu?

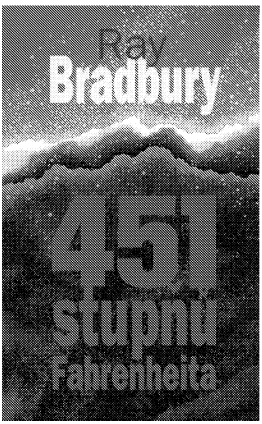
Řešení. Není to nesmysl, paní Caroline si na svém teploměru měřila teplotu ve stupních Fahrenheita.

a) Z rovnosti $t_{\mathrm{F}} = \frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 32$ vyjádříme t_{C} a získáme vztah

$$t_{\mathrm{C}} = \frac{5}{9} \cdot (t_{\mathrm{F}} - 32).$$

b) Dosadíme-li do posledního vztahu $t_{\mathrm{F}} = 100{,}9$, zjistíme, že teplota paní Caroline je přibližně 38,3 °C, tj. překročila mez 38 °C. Paní Caroline má tedy horečku.

451 stupňů Fahrenheita



Román 451 stupňů Fahrenheita je jedním z nejznámějších děl amerického spisovatele Raye Bradburyho. Děj se odehrává v daleké budoucnosti, kdy společnost ovládají masová média, knihovny a knihy jsou zakázány a páleny požárníky. Ti mají ve znaku číslo 451, neboť při teplotě 451 °F se papír vznítí a hoří[3]*...*

Určete, jak by zněl název románu Raye Bradburyho ve stupních Celsia. Zaokrouhlete na celé stupně.

Řešení. Z převodního vztahu $t_{\mathrm{F}} = \frac{9}{5} \cdot t_{\mathrm{C}} + 32$ vyjádříme $t_{\mathrm{C}} = \frac{5}{9} \cdot (t_{\mathrm{F}} - 32)$. Po dosazení $t_{\mathrm{F}} = 451$ a zaokrouhlení t_{C} na celé číslo získáme výsledek. Název románu by zněl 233 stupňů Celsia.

2. Úlohy o americkém centu

Americký cent, tj. jedna setina dolaru, se od ostatních amerických mincí odlišuje svou typickou měděnou barvou; ve skutečnosti se jedná o slitinu

[3]Teplota vznícení papíru záleží na různých faktorech, zejména na jeho kvalitě. Obvykle se udává, že tato teplota začíná od 185 °C.

mědi a zinku. Mince má průměr 19 mm a tloušťku 1,25 mm. Až do roku 1982 byla hmotnost centu tvořena z 95 procent mědí a z 5 procent zinkem. Ceny mědi na světových trzích však rostly a hrozilo nebezpečí, že výrobní hodnota centu přesáhne jeho nominální hodnotu. Proto se v roce 1982 změnilo složení centu a nyní obsahuje pouze 2,5 procenta mědi a 97,5 procenta zinku (jádro mince je zinkové a plášť měděný, takže vnější vzhled je stejný jako u staré mince).

Kolik váží cent?

Jakou hmotnost měl cent před rokem 1982 a jakou hmotnost má nyní? Hustota mědi je 8 920 kg/m^3, hustota zinku je 7 140 kg/m^3.

Řešení. Nechť ρ_{Cu}, ρ_{Zn} značí hustoty mědi a zinku, d je průměr mince a t její tloušťka. Vypočítáme objem mince pomocí vzorce pro objem válce:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot t \doteq 354\ \mathrm{mm}^3$$

Nechť a značí procentuální hmotnostní podíl mědi v minci vyjádřený desetinným číslem z intervalu $\langle 0, 1\rangle$; hmotnostní podíl zinku je pak $1 - a$. Celkový objem je součtem objemů měděné a zinkové složky, tj.

$$V = \frac{a \cdot m}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \frac{(1-a) \cdot m}{\rho_{\mathrm{Zn}}},$$

odkud vyjádříme hmotnost mince

$$m = \frac{V}{\dfrac{a}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \dfrac{(1-a)}{\rho_{\mathrm{Zn}}}}. \tag{1}$$

Dosazením $a = 0{,}95$ vypočteme původní hmotnost mince $m_1 \doteq 3{,}1$ gramu, zatímco $a = 0{,}025$ dá hmotnost nové mince $m_2 \doteq 2{,}5$ gramu.

Kolik stojí cent?

Jaké jsou skutečné hodnoty starého centu a nového centu? Cena mědi je v současné době 6,77 dolaru za kilogram a cena zinku je 2,15 dolaru za kilogram. Předpokládejte, že ostatní výrobní náklady jsou zanedbatelné.

Řešení. Nechť c_{Cu} a c_{Zn} jsou ceny mědi a zinku v dolarech za kilogram. Skutečnou hodnotu mince c dostaneme sečtením ceny měděné složky a zinkové složky, tj.

$$c = a \cdot m \cdot c_{\mathrm{Cu}} + (1-a) \cdot m \cdot c_{\mathrm{Zn}}. \tag{2}$$

Dosazením $a = 0{,}95$ vypočteme cenu staré mince $c_1 \doteq 0{,}02$ dolaru, zatímco $a = 0{,}025$ dá cenu nové mince $c_2 \doteq 0{,}006$ dolaru.

Podíl mědi v centu

Jaký by mohl být maximální procentuální podíl mědi, aby při současných cenách kovů nepřekročila skutečná hodnota mince její nominální hodnotu, tj. 0,01 dolaru?

Řešení. Nechť $H = 0{,}01$ dolaru. Stačí najít hodnotu $a \in \langle 0; 1\rangle$, pro kterou je cena mince c rovna H. Použijeme vztah (2) a řešíme rovnici

$$a \cdot m \cdot c_{\mathrm{Cu}} + (1-a) \cdot m \cdot c_{\mathrm{Zn}} = H.$$

Hmotnost m dosadíme ze vztahu (1):

$$\frac{a \cdot V \cdot c_{\mathrm{Cu}}}{\dfrac{a}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \dfrac{(1-a)}{\rho_{\mathrm{Zn}}}} + \frac{(1-a) \cdot V \cdot c_{\mathrm{Zn}}}{\dfrac{a}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \dfrac{(1-a)}{\rho_{\mathrm{Zn}}}} = H$$

Po vynásobení jmenovatelem zlomků na levé straně dostaneme lineární rovnici

$$a \cdot V \cdot c_{\mathrm{Cu}} + (1-a) \cdot V \cdot c_{\mathrm{Zn}} = H \left(\frac{a}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \frac{(1-a)}{\rho_{\mathrm{Zn}}} \right),$$

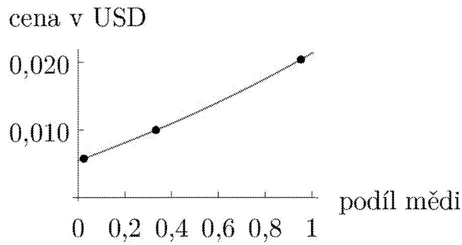
odkud vypočteme

$$a \cdot V \cdot c_{\mathrm{Cu}} - a \cdot V \cdot c_{\mathrm{Zn}} - H \cdot \frac{a}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + H \cdot \frac{a}{\rho_{\mathrm{Zn}}} = \frac{H}{\rho_{\mathrm{Zn}}} - V \cdot c_{\mathrm{Zn}},$$

$$a = \frac{\frac{H}{\rho_{\mathrm{Zn}}} - V \cdot c_{\mathrm{Zn}}}{V \cdot c_{\mathrm{Cu}} - V \cdot c_{\mathrm{Zn}} - \frac{H}{\rho_{\mathrm{Cu}}} + \frac{H}{\rho_{\mathrm{Zn}}}} \doteq 0{,}33.$$

Maximální přípustný podíl mědi je přibližně 33 procent.

Závislost ceny mince na obsahu mědi ukazuje následující obrázek.



Závěr

Uvedené úlohy ilustrují koncepci chystané sbírky i charakter úloh, které jsou do sbírky postupně zařazovány. S dalšími úlohami se můžete seznámit ve volně navazujícím připravovaném článku, který bude zaměřen na problémy s dopravní tematikou.

Keltské uzly a dělitelnost

KAREL PAZOUREK

Gymnázium Praha 10, Přípotoční

V předchozím článku [1] jsme ukázali souvislost keltských uzlů speciálního pravoúhelníkového tvaru, osové souměrnosti a dělitelnosti přirozených čísel. Zavedli jsme značení a pojmy jako cesta, cyklus nebo roh uzlu. Jako matematický model nám posloužilo schéma vzniklé z úhlopříček čtverců sítě vepsané do pravoúhelníku, jak je naznačeno na obr. 1.