

Americký cent

Americký cent, tj. jedna setina dolaru, se od ostatních amerických mincí odlišuje svou typickou měděnou barvou; ve skutečnosti se jedná o slitinu mědi a zinku. Mince má průměr 19 mm a tloušťku 1,25 mm. Až do roku 1982 byla hmotnost centu tvořena z 95 procent mědi a z 5 procent zinkem. Ceny mědi na světových trzích však rostly a hrozilo nebezpečí, že výrobní hodnota centu přesáhne jeho nominální hodnotu. Proto se v roce 1982 změnilo složení centu a nyní obsahuje pouze 2,5 procenta mědi a 97,5 procenta zinku (jádro mince je zinkové a plášť měděný, takže vnější vzhled je stejný jako u staré mince).



Pokuste se odpovědět na následující otázky:

- Jakou hmotnost měl cent před rokem 1982 a jakou hmotnost má nyní? Hustota mědi je 8920 kg/m^3 , hustota zinku je 7140 kg/m^3 .
- Jaké jsou výrobní hodnoty starého centu a nového centu? Cena mědi je v současné době 6,77 dolaru za kilogram a cena zinku je 2,15 dolaru za kilogram. Předpokládejte, že ostatní výrobní náklady jsou zanedbatelné.
- Jaký by mohl být maximální procentuální podíl mědi, aby při současných cenách kovů nepřekročila výrobní hodnota mince její nominální hodnotu, tj. 0,01 dolaru?

Řešení

- Nechť ρ_{Cu} , ρ_{Zn} značí hustoty mědi a zinku, d je průměr mince a t její tloušťka. Vypočítáme objem mince pomocí vzorce pro objem válce:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot t \doteq 354 \text{ mm}^3$$

Označme m hmotnost mince a dále necht' a je procentuální hmotnostní podíl mědi v minci vyjádřený desetinným číslem z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$; hmotnostní podíl zinku je pak $1 - a$. Celkový objem je součtem objemů měděné a zinkové složky, tj.

$$V = \frac{a \cdot m}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{(1 - a) \cdot m}{\rho_{\text{Zn}}},$$

odkud vyjádříme hmotnost mince

$$m = \frac{V}{\frac{a}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{(1-a)}{\rho_{\text{Zn}}}}. \quad (1)$$

Dosazením $a = 0,95$ vypočteme původní hmotnost mince $m_1 \doteq 3,1$ gramu, zatímco $a = 0,025$ dá hmotnost nové mince $m_2 \doteq 2,5$ gramu.

- b) Nechť c_{Cu} a c_{Zn} jsou ceny mědi a zinku v dolarech za kilogram. Výrobní hodnotu mince c dostaneme sečtením cen měděné a zinkové složky, tj.

$$c = a \cdot m \cdot c_{\text{Cu}} + (1 - a) \cdot m \cdot c_{\text{Zn}}. \quad (2)$$

Dosazením $a = 0,95$ vypočteme výrobní hodnotu staré mince $c_1 \doteq 0,02$ dolaru, zatímco $a = 0,025$ dá výrobní hodnotu nové mince $c_2 \doteq 0,006$ dolaru.

- c) Označme $H = 0,01$ dolaru. Stačí najít hodnotu $a \in \langle 0,1 \rangle$, pro kterou je cena c mince rovna H . Použijeme vztah (2) a řešíme rovnici

$$a \cdot m \cdot c_{\text{Cu}} + (1 - a) \cdot m \cdot c_{\text{Zn}} = H.$$

Hmotnost m dosadíme ze vztahu (1):

$$\frac{a \cdot V \cdot c_{\text{Cu}}}{\frac{a}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{(1-a)}{\rho_{\text{Zn}}}} + \frac{(1-a) \cdot V \cdot c_{\text{Zn}}}{\frac{a}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{(1-a)}{\rho_{\text{Zn}}}} = H$$

Po vynásobení jmenovatelem zlomků na levé straně dostaneme lineární rovnici

$$a \cdot V \cdot c_{\text{Cu}} + (1 - a) \cdot V \cdot c_{\text{Zn}} = H \left(\frac{a}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{(1-a)}{\rho_{\text{Zn}}} \right),$$

odkud vypočteme

$$a \cdot V \cdot c_{\text{Cu}} - a \cdot V \cdot c_{\text{Zn}} - H \cdot \frac{a}{\rho_{\text{Cu}}} + H \cdot \frac{a}{\rho_{\text{Zn}}} = \frac{H}{\rho_{\text{Zn}}} - V \cdot c_{\text{Zn}},$$

$$a = \frac{\frac{H}{\rho_{\text{Zn}}} - V \cdot c_{\text{Zn}}}{V \cdot c_{\text{Cu}} - V \cdot c_{\text{Zn}} - \frac{H}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{H}{\rho_{\text{Zn}}}} \doteq 0,33.$$

Maximální přípustný podíl mědi v minci je přibližně 33 procent.

Závislost výrobní hodnoty mince na obsahu mědi ukazuje následující obrázek.

