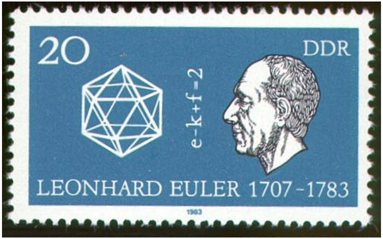
Netradiční důkaz Eulerovy věty o mnohostěnech

Antonín Slavík
Katedra didaktiky matematiky MFF UK

50. výročí KDM MFF UK
30. září 2015

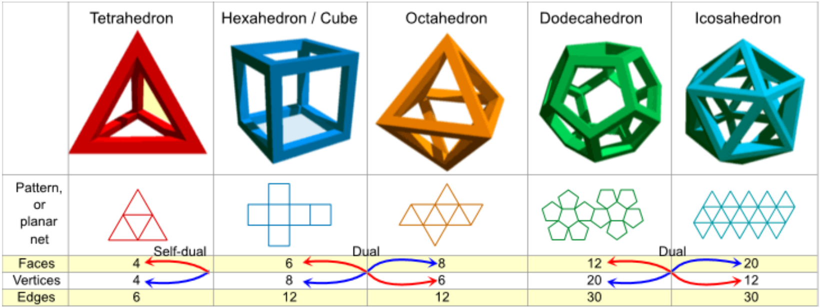
Eulerova věta o mnohostěnech



Pro každý konvexní mnohostěn platí:

$$\text{počet vrcholů} + \text{počet stěn} = \text{počet hran} + 2$$

Příklady



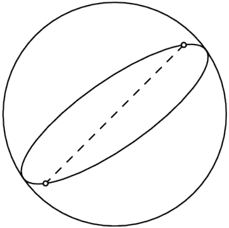
	Tetrahedron	Hexahedron / Cube	Octahedron	Dodecahedron	Icosahedron
Pattern, or planar net					
	Self-dual	Dual		Dual	
Faces	4	6	8	12	20
Vertices	4	8	6	20	12
Edges	6	12	12	30	30

Stručná historie Eulerovy věty

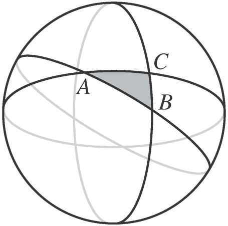
- kolem 1630: Descartesova věta o součtu hranových úhlů v mnohostěnu
- 1750: Euler v dopise Goldbachovi zmiňuje vzorec $H + S = A + 2$, neumí jej dokázat
- 1751: Eulerův kombinatorický induktivní důkaz (odřezávání čtyřstěnů) – nekorektní
- 1794: Legendre publikuje první správný důkaz
- 1813: Cauchy dokazuje Eulerovu větu pro rovinné grafy, věta o mnohostěnech je jednoduchým důsledkem

Hlavní kružnice a sférické mnohoúhelníky

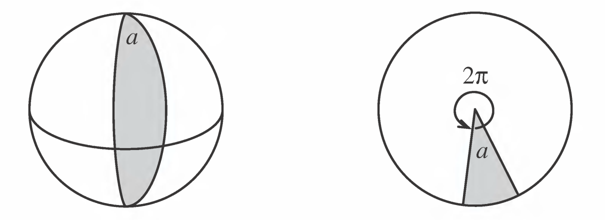
Hlavní kružnice na sféře = kružnice, která je průnikem sféry s rovinou procházející středem sféry



Sférický mnohoúhelník = útvar na sféře ohraničený oblouky hlavních kružnic



Sférický dvojúhelník = část sféry ohraničená dvěma hlavními polokružnicemi

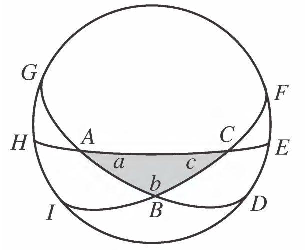


$$\frac{\text{obsah sférického dvojúhelníku}}{\text{obsah sféry}} = \frac{a}{2\pi}$$

Na jednotkové sféře:

$$\text{obsah sférického dvojúhelníku} = 2a$$

Obsah sférického trojúhelníku na jednotkové sféře



$$S(ADE) + S(AGH) = 2a$$
$$S(BFG) + S(BDI) = 2b$$
$$S(CHI) + S(CEF) = 2c$$

$$S(ADE)+S(AGH)+S(BFG)+S(BDI)+S(CHI)+S(CEF) = 2(a+b+c)$$

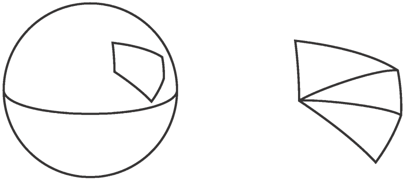
$$\text{obsah hemisféry} + 2S(ABC) = 2(a+b+c)$$

$$S(ABC) = a+b+c-\pi$$

Obsah sférického n-úhelníku (1)

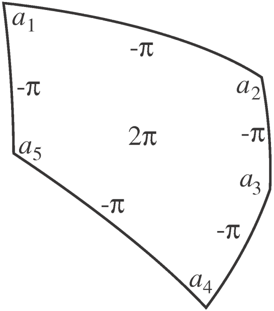
Obsah sférického n-úhelníku na jednotkové sféře, jehož vnitřní úhly mají velikosti $a_1, \dots, a_n$, je $a_1 + \cdots + a_n - (n-2)\pi$.

Důkaz rozdělením n-úhelníku na $n-2$ trojúhelníků:



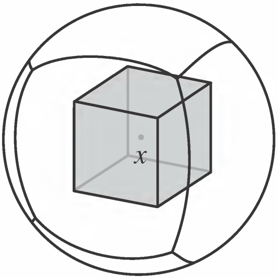
Obsah sférického n-úhelníku (2)

$$
\begin{aligned}
S &= a_1 + \cdots + a_n - (n-2)\pi \\
&= a_1 + \cdots + a_n - n\pi + 2\pi
\end{aligned}
$$

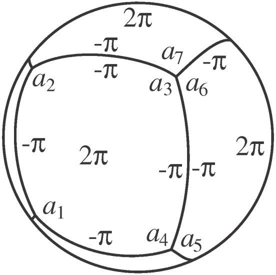


Důkaz Eulerovy věty (1)

- Dán konvexní mnohostěn; předpokládejme, že jej lze umístit do jednotkové sféry tak, aby střed sféry ležel uvnitř mnohostěnu.
- Středové promítání ze středu sféry: hrany přecházejí v oblouky hlavních kružnic, sféra rozdělena na sférické mnohoúhelníky.



obsah jednotkové sféry $=$ součet obsahů sférických mnohoúhelníků

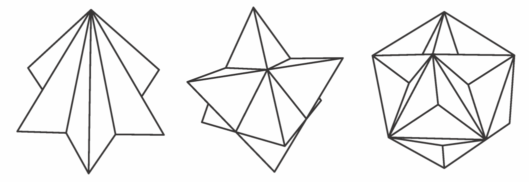


$4\pi = 2\pi \cdot$ počet stěn $- \pi \cdot 2 \cdot$ počet hran $+ 2\pi \cdot$ počet vrcholů

$2 =$ počet stěn $-$ počet hran $+$ počet vrcholů

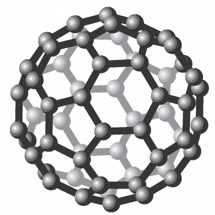
Hvězdicové konvexní mnohostěny

Pozorování (Louis Poinsot, 1809):
Konvexita není nezbytná, Legendreův důkaz funguje i pro hvězdicové konvexní mnohostěny.



Golf, chemie a fotbal

A golf ball composed of 220 hexagons and 12 pentagons.



Pětiúhelníků je vždy dvanáct

- Stěny mnohostěnu jsou pouze pětiúhelníkové nebo šestiúhelníkové.
- Každá hrana je společná pro dvě stěny.
- V každém vrcholu se stýkají tři stěny.

$$P = \text{počet pětiúhelníků}, \qquad H = \text{počet šestiúhelníků}$$

$$\begin{aligned} \text{počet stěn} &= P + H, \\ \text{počet hran} &= \frac{5P + 6H}{2}, \\ \text{počet vrcholů} &= \frac{5P + 6H}{3} \end{aligned}$$

Eulerova věta:

$$P + H + \frac{5P + 6H}{3} = \frac{5P + 6H}{2} + 2 \quad \Rightarrow \quad P = 12$$

Literatura

- David S. Richeson, *Euler's gem. The polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton University Press, 2008.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha, 2002.
- Stanislav Horák, *Mnohostěny*, Škola mladých matematiků 27, Mladá fronta, Praha, 1970.
  `http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403721`
- David Eppstein, *Twenty Proofs of Euler's Formula: $V - E + F = 2$.*
  `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`