Důkazy!

Jindřich Bečvář

Katedra didaktiky matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Praha, 30. září 2015

becvar@karlin.mff.cuni.cz
www.karlin.mff.cuni.cz/∼becvar
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm

Osnova

Úvod

- *Marně by nám Eukleides předkládal nejkrásnější geometrické pravdy, kdyby nebyl dodal důkazy potřebné k tomu, aby nás přesvědčil. Na jeho pouhé slovo bychom mu ony pravdy nikdy neuvěřili.*

Leonhard Euler (1707–1783)

Úvod

- *Marně by nám Eukleides předkládal nejkrásnější geometrické pravdy, kdyby nebyl dodal důkazy potřebné k tomu, aby nás přesvědčil. Na jeho pouhé slovo bychom mu ony pravdy nikdy neuvěřili.*

  Leonhard Euler (1707–1783)

- **Jestliže likvidujeme důkazy ve školské matematice, pak likvidujeme matematiku.**

Úvod

- *Marně by nám Eukleides předkládal nejkrásnější geometrické pravdy, kdyby nebyl dodal důkazy potřebné k tomu, aby nás přesvědčil. Na jeho pouhé slovo bychom mu ony pravdy nikdy neuvěřili.*

  Leonhard Euler (1707–1783)

- **Jestliže likvidujeme důkazy ve školské matematice, pak likvidujeme matematiku.**

  Přestane být chápána příčinnost, neotřesitelnost matematických pravd. Ztrácíme mnoho možností pro vzbuzení zájmu o matematiku.

- Právě důkazy nás fascinovaly.
  Z nich plynoucí nezpochybnitelnost matematických pravd, jejich nezávislost na okamžité politické situaci.
  (O Gödelovi jsme nevěděli.)

- Porozumění napomáhá pochopení i zapamatování.

Důkazy ve škole

- Jaké důkazy by mohly / měly být ve školské matematice, tj. na základní a střední škole.

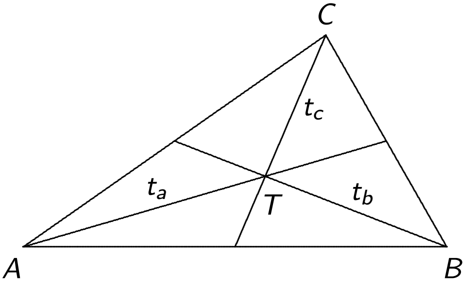
  Často ve formě jakéhosi „zdůvodnění“, položení před oči, ...
  Ukázat, proč to platí!

  - Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě.
    – *střed kružnice opsané*
  - Osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě.
    – *střed kružnice vepsané*

  Tyto dvě elementární úvahy jsou velice cenné pro rozvoj chápání příčinnosti.

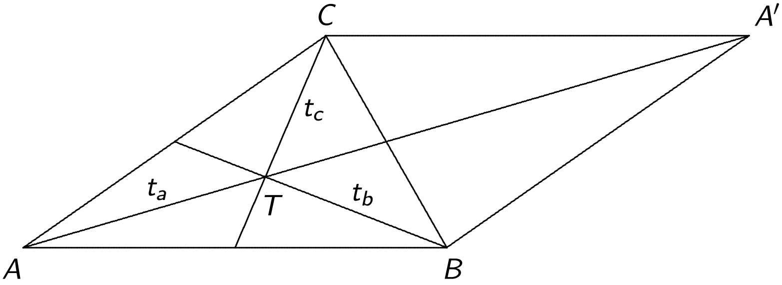
- Těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (*těžiště*).

- Těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (*těžiště*).



Řešení: Vlasta Dlab: *Každý trojúhelník má bratříčka!*

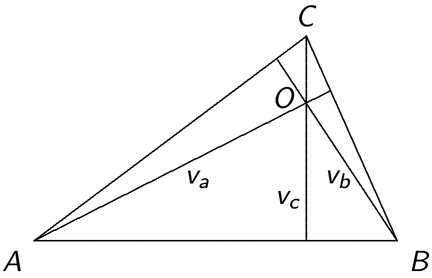
Řešení: Vlasta Dlab: *Každý trojúhelník má bratříčka!*



- Výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (*ortocentrum*).

- Výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (*ortocentrum*).

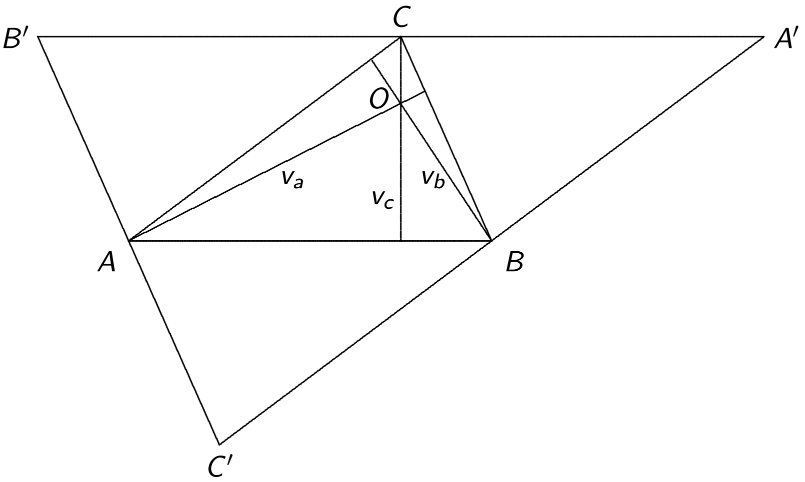
Návod: Přemýšlej!



- Výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (*ortocentrum*).

- Výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (*ortocentrum*).

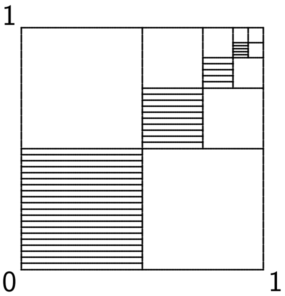
Návod: Dívej se! – Tři bratříčkové, resp. veliký bratr!



Inspirace

- Důkazy beze slov.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\cdots=\frac{1}{3}$$



Nadstavba

- Lemma: *Pro celá čísla a, b a prvočíslo p je*

$$(a+b)^p = a^p + b^p \pmod{p}.$$

Důkaz. Pro $0 < k < p$ je číslo $\binom{p}{k}$ násobkem prvočísla p.

- Malá Fermatova věta. *Pro celé číslo a a prvočíslo p je*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Důkaz indukcí. Pro $a = 1$ platí.

Nechť platí pro a; dokážeme, že platí pro $a+1$.

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a+1 \pmod{p}.$$

- Malá Fermatova věta. *Pro celé číslo a, které je nesoudělné s prvočíslem p je*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

- Důsledek. *Množina $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ se sčítáním a násobením modulo p je pole.*

  Důkaz. K nenulovému prvku $a \in \mathbb{Z}_p$ je inverzním prvkem prvek a^{p-2}, neboť podle MFV je

$$a \cdot a^{p-2} = 1.$$

- Prvočísel je nekonečně mnoho.

  Důkaz by se mohl na střední škole objevit.

- Lichá prvočísla jsou buď tvaru $4k+1$ nebo tvaru $4k+3$.

- Prvočísel tvaru $4k+3$ je nekonečně mnoho.

  Důkaz.

  Každé číslo tvaru $4k+3$ je dělitelné prvočíslem tohoto typu.

  Prvočísla 3, 7 jsou tohoto typu.

  Nechť $p > 3$ je libovolné prvočíslo tohoto typu.

  Číslo $p! - 1$ je tohoto typu a není dělitelné prvočísly $3, \dots, p$.

  Musí být dělitelné prvočíslem tohoto typu, které je větší než p.

  Ke každému prvočíslu p tohoto typu tedy existuje větší prvočíslo tohoto typu.

- Prvočísel tvaru $4k + 1$ je nekonečně mnoho.

  Důkaz.