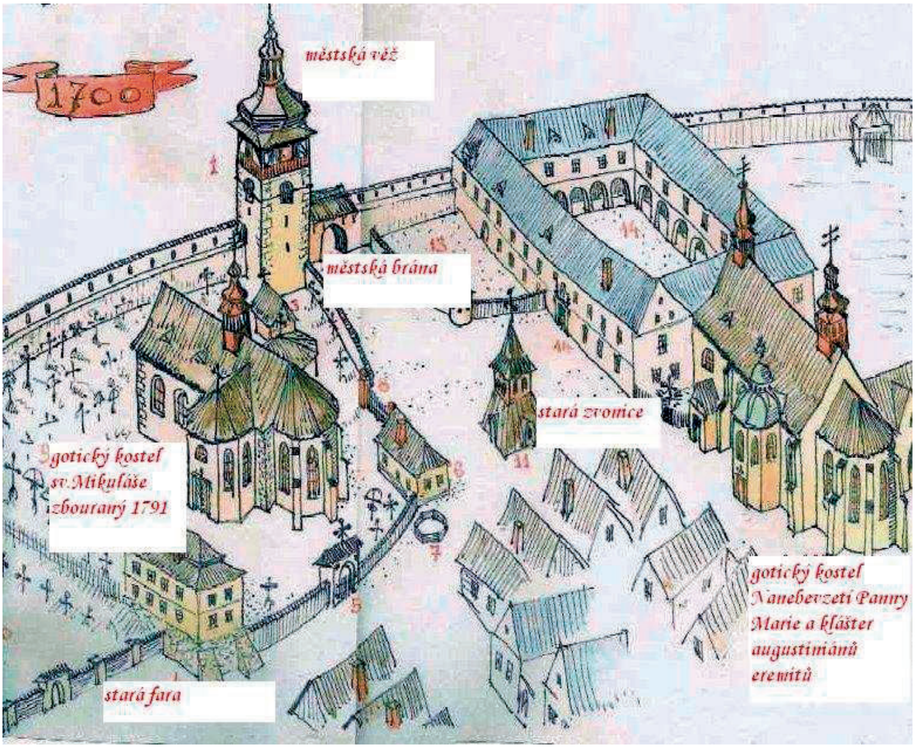
32. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Jevíčko, 26. 8. až 30. 8. 2011



Praha 2011

Recenzovali: J. Bečvář, M. Bečvářová, Z. Halas, M. Hykšová, A. Slavík, M. Štěpánová, D. Trkovská

Tato publikace byla vytištěna díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*.

ISBN 978-80-7378-172-9

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme vám sborník obsahující texty tří vyzvaných přednášek, texty delších a kratších sdělení, které byly přihlášeny na 32. mezinárodní konferenci *Historie matematiky*. Všechny příspěvky byly graficky a typograficky sjednoceny, některé byly upraveny i jazykově. Zařazen byl též program konference a seznam všech účastníků, kteří se přihlásili do 1. května 2011. Sborník vznikl díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*, finanční pomoci Katedry didaktiky matematiky MFF UK a Ústavu aplikované matematiky FD ČVUT.

V úvodu sborníku připomínáme Jaroslava Foltu (1933–2011), jednoho ze zakladatelů škol nazývaných *Světonázorová výchova v matematice*, z nichž postupem času vznikly *letní školy Historie matematiky*, které se proměnily v *mezinárodní konferenci Historie matematiky*.

V první části sborníku jsou otištěny texty hlavních přednášek, o něž byli požádáni zkušení přednášející, kteří se zabývají matematikou, její historií a vyučováním.

Ve druhé části sborníku jsou publikovány příspěvky jednotlivých účastníků. Konference není monotematicky zaměřena, snažili jsme se poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všem přihlášeným, tj. matematikům, historikům matematiky, učitelům vysokých i středních škol, doktorandům oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* i všem dalším zájemcům o matematiku a její historii.

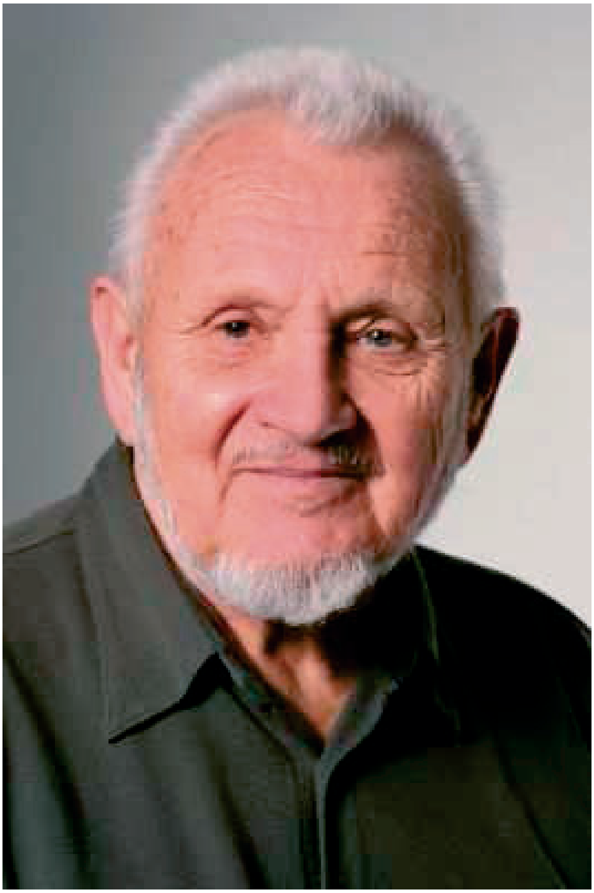
Program letošní konference je poměrně pestrý. Věříme, že každý najde témata, která ho zaujmou a potěší, že objeví nové kolegy, přátele a spolupracovníky, získá inspiraci, řadu podnětů, motivaci i povzbuzení ke své další odborné práci a ke svému studiu.

Podrobnější informace o letošní konferenci i o všech předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Martina Bečvářová, *Jindřich Bečvář*

V Praze, v červnu 2011



Jaroslav Folta (1933–2011)

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

- Bálintová Anna
- Bártlová Tereza
- Bečvář Jindřich
- Bečvářová Martina
- Benediktová Větrovcová Marie
- Ciesielska Danuta
- Čižmár Ján
- Domoradzki Stanisław
- Fiala Jiří
- Halas Zdeněk
- Holowatyj Andreana Natalie
- Hykš Oldřich
- Hykšová Magdalena
- Chocholová Michaela
- Klápová Martina
- Lengyelfalusy Tomáš
- Lengyelfalusyová Dana
- Lepka Karel
- Línek Vítězslav
- Melcer Martin
- Moravcová Vlasta
- Moravec Luboš
- Nedevová Tamara
- Netuka Ivan
- Otavová Miroslava
- Pazourek Karel
- Pogoda Zdzisław
- Pomp Marek
- Richter Jaroslav
- Sklenáriková Zita
- Slavík Antonín
- Slavík Jiří
- Surynková Petra
- Sýkorová Irena
- Štěpánová Martina
- Trkovská Dana
- Tůma Martin
- Ulrychová Eva
- Václavíková Zuzana
- Vízek Lukáš
- Vojkůvková Iva
- Więsław Witold
- Zahradník Jan

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

I. Vyzvané přednášky

Fiala J.: ***Papírová geometrie v devíti jednáních***
Netuka I.: ***Pojem kompaktnosti: původ, vývoj, význam***
Pogoda Z.: ***Stanisław Gołąb i geometria różniczkowa w Polsce***

II. Konferenční vystoupení (25 minut)

Bálintová A.: ***Izoperimetrický problém kráľovnej Didó***
Bečvář J.: ***Algebra na konci 19. a počátku 20. století***
Bečvářová M.: ***Václav Láska v Polsku***
Benediktová Větrovcová M.: ***Gaussova diferenciální geometrie – o čem si Gauss a Schumacher psali?***
Ciesielska D.: ***Sierpiński's and Pólya's Space-Filling Curves in Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie***
Čižmár J.: ***Kurzové prednášky Karla Pelza z deskriptívnej geometrie 1906/7***
Domoradzki S.: ***Rola Stanisława Zaremby (1863–1942) w kształtowaniu się nowoczesnego ośrodka matematycznego w Krakowie***
Halas Z., Holowatyj A. N.: ***Hilbert's Third Problem***
Hykšová M.: ***Počátky odborné kariéry Emanuela Czubera***
Klápová M.: ***Matematika a hudební ladění v historii***
Lepka K.: ***Alois Strnad***
Línek V.: ***Počátky moderní statistiky v pracích R. A. Fishera a W. S. Gossetta***
Moravcová V.: ***Vývoj deskriptivní geometrie od starověku do 20. století***
Moravec L.: ***Pedagogické práce Jakuba Filipa Kulika (1793–1863)***
Nedevová T.: ***Jakob Steiner a jeho přínos k poznatkům o kružnici***
Otavová M.: ***Barokní matematika a její podoby u Jana Caramuela z Lobkovic***
Pazourek K.: ***Dělitelnost v učebnicích z let 1948 až 1989***
Pomp M., Václavíková Z.: ***Historie kapesních výpočetních pomůcek***
Slavík A.: ***Z historie populační dynamiky***
Slavík J.: ***Životní příběh prof. Gustava Skřivana (1831–1866)***
Sýkorová I.: ***Pellova rovnice ve staré Indii***
Štěpánová M.: ***Nástupci Eduarda Weyra***
Tůma M.: ***Od problému momentů k moderním iteračním metodám***
Vízek L.: ***Josef Úlehla (1852–1933) a jeho Dějiny mathematiky***
Więsław W.: ***Matematyka na Uniwersytecie Wileńskim (1579–1832)***
Zahradník J.: ***Péče o finanční gramotnost v 19., 20. a na začátku 21. století***

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Pátek 26. 8. 2011

Dopolední program 10:00–12:00
Zahájení konference
Konferenční vystoupení:
Bečvář J.: *Algebra na konci 19. a počátku 20. století*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Moravcová V.: *Vývoj deskriptivní geometrie od starověku do 20. století*
Halas Z., Holowatyj A. N.: *Hilbert's Third Problem*
Línek V.: *Počátky moderní statistiky v pracích R. A. Fishera a W. S. Gossetta*

Odpolední program 16:00–18:00
Plenární přednáška:
Netuka I.: *Pojem kompaktnosti: původ, vývoj, význam*

Sobota 27. 8. 2011

Dopolední program 9:00–10:00
Plenární přednáška:
Pogoda Z.: *Stanisław Gołąb i geometria różniczkowa w Polsce*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
Bečvářová M.: *Václav Láska v Polsku*
Moravec L.: *Pedagogické práce Jakuba Filipa Kulika (1793–1863)*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Ciesielska D.: *Sierpiński's and Pólya's Space-Filling Curves in Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*
Benediktová Větrovcová M.: *Gaussova diferenciální geometrie – o čem si Gauss a Schumacher psali?*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Domoradzki S.: *Rola Stanisława Zaremby (1863–1942) w kształtowaniu się nowoczesnego ośrodka matematycznego w Krakowie*
Więsław W.: *Matematyka na Uniwersytecie Wileńskim (1579–1832)*
Pazourek K.: *Dělitelnost v učebnicích z let 1948 až 1989*

Neděle 28. 8. 2011

Dopolední program 9:00–10:00
Plenární přednáška:
Fiala J.: *Papírová geometrie v devíti jednáních*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
Sýkorová I.: *Pellova rovnice ve staré Indii*
Slavík J.: *Životní příběh prof. Gustava Skřivana (1831–1866)*

Večerní posezení 20:00

Pondělí 29. 8. 2011

Dopolední program 9:00–10:00
Konferenční vystoupení:
Pomp M., Václavíková Z.: *Historie kapesních výpočetních pomůcek*
Tůma M.: *Od problému momentů k moderním iteračním metodám*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
Zahradník J.: *Péče o finanční gramotnost v 19., 20. a na začátku 21. století*
Čižmár J.: *Kurzové prednášky Karla Pelza z deskriptívnej geometrie 1906/7*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
Lepka K.: *Alois Strnad*
Otavová M.: *Barokní matematika a její podoby u Jana Caramuela z Lobkovic*
Štěpánová M.: *Nástupci Eduarda Weyra*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
Klápová M.: *Matematika a hudební ladění v historii*
Bálintová A.: *Izoperimetrický problém kráľovnej Didó*
Krátká vystoupení nereferujících doktorandů a studentů

Úterý 30. 8. 2011

Dopolední program 9:00–10:00
Konferenční vystoupení:
Vízek L.: *Josef Úlehla (1852–1933) a jeho Dějiny mathematiky*
Hykšová M.: *Počátky odborné kariéry Emanuela Czubera*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
Nedevová T.: *Jakob Steiner a jeho přínos k poznatkům o kružnici*
Slavík A.: *Z historie populační dynamiky*

Závěrečná diskuse
Zakončení konference

VYZVANÉ PŘEDNÁŠKY

PAPÍROVÁ GEOMETRIE V DEVÍTI JEDNÁNÍCH

JIŘÍ FIALA

Abstract: Paper folding geometry in nine acts: 1) What can be done by paper folding? If one uses non-standard folding then even the trisection of an angle. 2) Standard paper-folding is equivalent to the geometry, in which we can join two given points by a straight line and move a given straight line („standard") to a given place. 3) Such geometry forms a model, which satisfies all the Hilbert axioms except the axiom of completeness. 4) What can be constructed in such geometry? Only totally real numbers (Hilbert's answer). 5) How it can be constructed: that is what Hilbert wanted to know, but was unable to do, so he made of it the famous 17th problem. 6) This problem was solved after some thirty years by E. Artin and O. Schreier (they created for this purpose the beautiful theory of real fields). 7) Unfortunately this solution is not constructive; some thirty years later a constructive solution was given by Abraham Robinson and Georg Kreisel. 8) Unfortunately corresponding algorithm has *exp exp* complexity, so it is in fact inapplicable. 9) So the final question is: when we can really (not by convention) say that a mathematical problem was definitely solved?

1 Co lze udělat skládáním papíru?

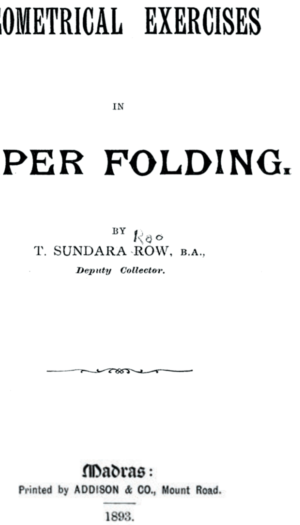
1.1 Jednoduché skládání

Asi každý si někdy v dětství složil z papíru vlaštovku, lodičku nebo čepici. Skládání papíru patří mezi velmi staré zábavy a zvláště v Japonsku dosáhlo mimořádného mistrovství. Z japonštiny také pochází rozšířené označení pro takovou činnost i její výsledky – *origami* (což znamená právě *skládání papíru*). Rozšířilo se to po celém světě a jsou mistři ve skládání hmyzu, ptáků, ryb, krabů i krabiček, kraviček i krahujců. Ale třeba i celých betlémů nebo orchestrů.

Asi každý potřeboval někdy složit z papíru čtverec, možná si vyzkoušel i pravoúhlý či rovnoramenný trojúhelník. Ale co třeba rovnostranný trojúhelník nebo pravidelný pětiúhelník? Jde to vůbec? Zvláštní je, že si patrně nikdo takové otázky nekladl systematicky až do konce devatenáctého století. V roce 1893 vyšla zřejmě první kniha o takové „origamové geometrii". A aby to bylo ještě záhadnější: nenapsal ji některý evropský matematik, ale indický výběrčí daní („deputy collector") T. (Tandalam) Sundara Row (dnes bychom asi jeho jméno transkribovali jako Rao). Jeho kniha *Geometrická cvičení ve skládání papíru* vyšla v Madrásu v roce 1893.[1]

[1] *Geometrical Exercises in Paper Folding*; viz [56]. S jinými obrázky (fotografiemi složených papírů) ji později do tisku připravili W. W. Beman, D. E. Smith; poprvé takto vyšla v roce 1901. Dočkala se mnoha přetisků a vydání (viz např. [57]), poslední, které jsem zachytil, je z března 2010 (Nabu Press). Kniha byla přeložena i do ruštiny a vyšla ve dvou vydáních ve slavném a krátce po revoluci zlikvidovaném nakladatelství Mathesis v Oděsse (viz [58]).

V úvodu píše, že na počátku byl dárek pro mateřské školky „Kindergarten Gift No. VIII. – Paper Folding“, sestávající z krabičky se 200 čtvercovými papíry, po jedné straně barevnými a lesklými, a návodem. Šlo zjevně o klasické origami. I Rowovu knihu doprovázela původně krabička se stovkou takových papírků. V knize jsou pak desítky geometrických konstrukcí, které lze uskutečnit přehýbáním papíru. Na obrázku níže je právě konstrukce pravidelného pětiúhelníku.



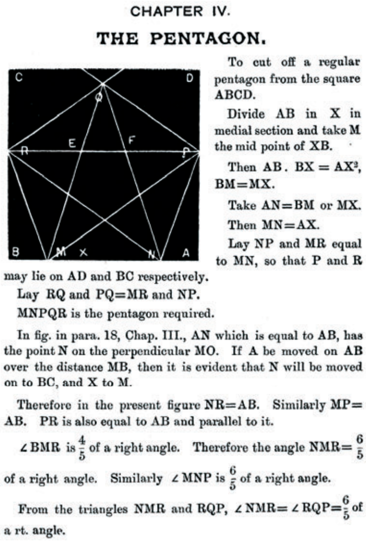
GEOMETRICAL EXERCISES

IN

PAPER FOLDING.

BY Rao
T. SUNDARA ROW, B.A.,
Deputy Collector.

Madras:
Printed by ADDISON & CO., Mount Road.
1893.



CHAPTER IV.

THE PENTAGON.

To cut off a regular pentagon from the square ABCD.

Divide AB in X in medial section and take M the mid point of XB.

Then AB . BX = AX², BM=MX.

Take AN=BM or MX.

Then MN=AX.

Lay NP and MR equal to MN, so that P and R may lie on AD and BC respectively.

Lay RQ and PQ=MR and NP.

MNPQR is the pentagon required.

In fig. in para. 18, Chap. III., AN which is equal to AB, has the point N on the perpendicular MO. If A be moved on AB over the distance MB, then it is evident that N will be moved on to BC, and X to M.

Therefore in the present figure NR=AB. Similarly MP=AB. PR is also equal to AB and parallel to it.

$\angle$BMR is $\frac{4}{5}$ of a right angle. Therefore the angle NMR= $\frac{6}{5}$ of a right angle. Similarly $\angle$MNP is $\frac{6}{5}$ of a right angle.

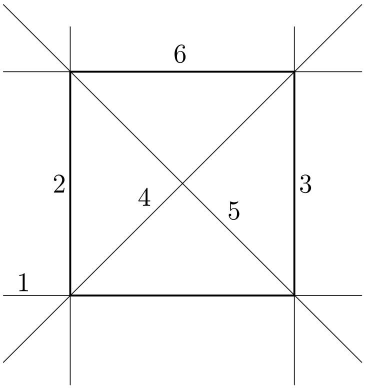
From the triangles NMR and RQP, $\angle$NMR= $\angle$RQP=$\frac{6}{5}$ of a rt. angle.

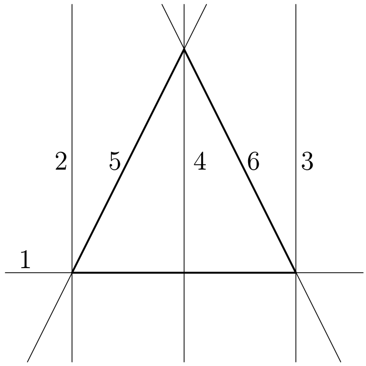
Pozoruhodné je, že Rowova (či Raova) práce neunikla pozornosti tehdejší vůdčí postavy geometrie Felixe Kleina, který se o ní zmiňuje ve svých přednáškách o vybraných otázkách elementární geometrie.[2]

Nebudeme zde sledovat, jak se dají řešit některé (byť zajímavé) geometrické problémy skládáním papíru. Je to jistě činnost zábavná i poučná a níže uvedu některou novější literaturu k tomuto tématu. Zde půjdeme jinou přímější cestou: pokusíme se vytušit, co se vůbec dá udělat skládáním papíru, vyjasnit si, o jakou část elementární geometrie jde, abychom pak později mohli položit otázku mnohem obtížnější: co *přesně* se dá takto udělat.

[2] *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, viz [36], str. 33. Klein nejprve zmiňuje Hermanna Wienera, který na mnichovské výstavě matematických modelů předvedl, jak se skládáním papíru dají získat sítě pro složení pravidelných mnohostěnů (je to v katalogu této výstavy [15], v dodatku na str. 52–54, bohužel ale bez obrázků). Pak píše, že indický matematik Sundara Row rozvinul dalekosáhle stejnou myšlenku a ukázal například, jak lze skládáním papíru získat libovolný počet bodů elipsy nebo cissoidy: „Eigentümlicher Weise hat zu derselben Zeit ein indischer Mathematiker, Sundara Row, in Madras, ein kleines Buch ‚On paper folding‘ erscheinen lassen, in welchem derselbe Gedanken noch weitergehend verfolgt wird, indem beispielsweise gezeigt wird, wie man durch Papierfalten beliebig viele Punkte krummer Linien (z. B. Ellipse, Cissoide) construiren kann.“

Začneme případy opravdu elementárními, totiž konstrukcí čtverce a rovnoramenného trojúhelníku. Půjde spíš o to, všimnout si, jaké základní operace při tom používáme. Stačí k tomu jen následující obrázky, číslice udávají pořadí operací:





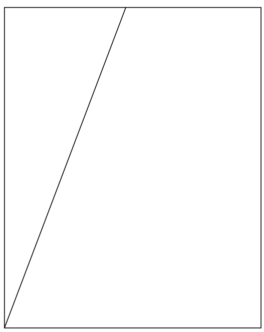
Pokud vám připadá, že jsme upadli do trivialit, zkuste si stejnou úlohu (třeba pro čtverec) s malým dodatkem v zadání: požaduje se, aby čtverec měl stranu, jejíž délka je dána nějakou úsečkou někde na papíře. Problém bude s přesunem a pootočením této úsečky.

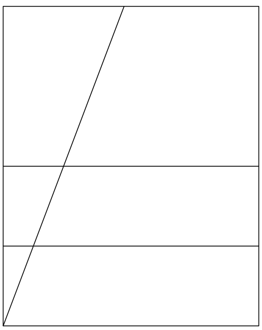
Všímat jsme si ale měli něčeho jiného, totiž jaké operace se zde použily: spojit dva body přímkou, vést *někde* kolmici k dané přímce, rozpůlit daný úhel. Mimochodem: opravdu stačily a postačí i pro přenesení dané úsečky? Vrátíme se k tomu za chvíli.

To byly operace, které nazveme *standardními*. Existují nějaké jiné? A co se s nimi dá udělat? Tato odbočka stojí za to.

1.2 Nadstandardní skládání

Vyjdeme z obdélníku (ten už umíme poskládat); můžeme ovšem použít už hotový obdélník – list papíru. Přehneme jej tak, jak je na obrázku vlevo (volba směru přehybu je na vás):

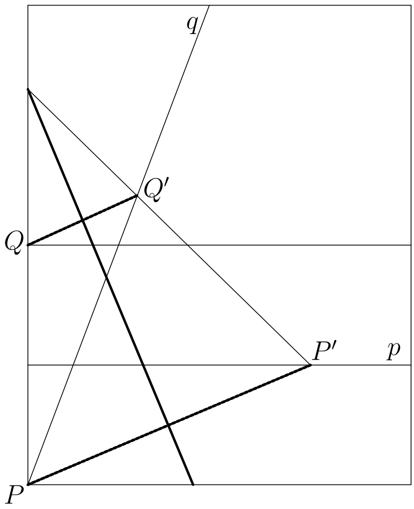


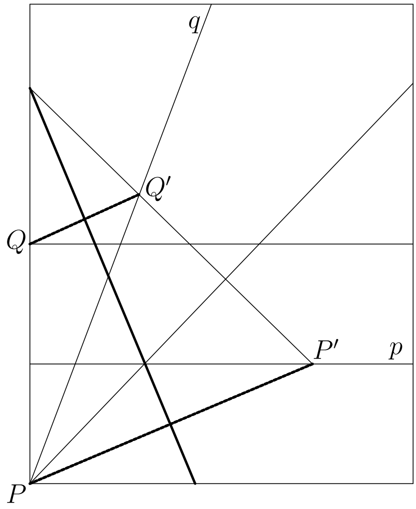


Nyní papír přehneme dvakrát tak, aby vzdálenost mezi rovnoběžkami byla stejná.

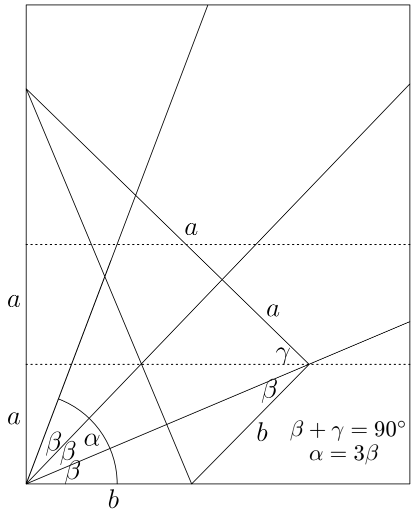
Nejjednodušší je papír přehnout v polovině a pak ještě jednou v dolní polovině (horní přímka nemusí však nutně být v polovině obdélníku):

Nyní přijde nejsložitější operace: musíme najít přímku („tučnou") takovou, že když podle ní přehneme papír, přejde bod P do bodu P' na přímce p a bod Q do bodu Q' na přímce q (obrázek vlevo):





Přímka přehybu se vyhledá jemným nastavováním okraje papíru, až dostaneme bod P na přímku p a současně bod Q na přímku q. Nyní zbývá ještě rozpůlit úsečku $P'Q'$ (nebo úhel $P'PQ'$). To můžeme udělat přeložením papíru tak, aby PP' přešla na PQ' (obrázek vpravo).



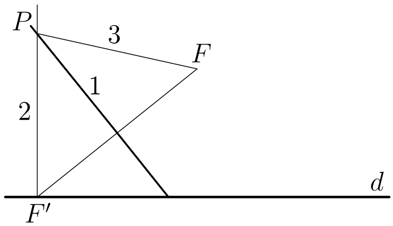
Prohlédnete-li si obrázek podrobně (návodem je značení úseček a úhlů), zjistíte, že jste provedli trisekci úhlu $\alpha = 3\beta$.

Je to konstrukce tak jednoduchá, že si vůbec nedovedu představit, jak se na ni může přijít. Připisována je Japonci Hishasi Abemu, který s ní přišel někdy v sedmdesátých letech. Zveřejnil ji v roce 1979 K. Husimi [33], jenže japonsky, a tak až v roce 1996 se o ní dozvěděla japonsky nemluvící část světa (Thomas Hull [32]).

Musíme vyjasnit, co jsme to vlastně při naší trisekci provedli: jak je možné, že jsme skládáním papíru toho dosáhli více, než se dá uskutečnit pravítkem a kružítkem?

1.3 Co jsme to provedli?

Podstatný bod naší trisekce úhlu: musel se najít takový přehyb papíru, aby se při něm dva dané body ocitly na dvou daných přímkách. Zkusme si to vyjasnit pro jeden bod a jednu přímku: daná přímka je d a bod mimo ni F: přehneme papír (jakkoli) tak, aby se bod F ocitl na přímce d. To lze udělat ovšem nekonečně mnoha způsoby, bod F se může ocitnout v kterémkoli bodě přímky d.



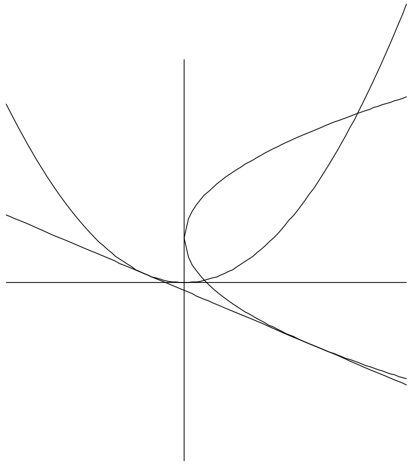
Na obrázku jsme papír přehnuli podle přímky 1, přičemž bod F přešel do bodu F'. V bodě F' jsme vztyčili kolmici, která proťala přímku 1 v bodě P. Vzdálenost P od bodů F a F' je tedy stejná. Otázka nyní zní: budeme-li měnit přehyby papíru, tj. polohu bodu F', jak bude vypadat „geometrické místo“ odpovídajících bodů P? Jakou křivku tyto body opíší? Odpověď patří do elementární matematiky: je to *parabola* a její rovnice je $y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}$, v níž p je vzdálenost ohniska F od řídicí přímky d. A stejně elementární je, že přehyb papíru (přímka 1 na obrázku výše) je *tečna* k této parabole.

Teď už známe odpověď na naši poslední otázku: při trisekci úhlu jsme hledali takový přehyb (přímku), aby *současně* přešly dva body na dvě přímky, tedy hledali jsme *společnou tečnu* ke dvěma parabolám. Umíme-li nalézt takovou společnou tečnu, pak umíme vyřešit rovnice třetího stupně, tudíž i uskutečnit trisekci úhlu. Dokázat to je sice snadné, ale přece jen to chce trochu obratnosti.

Máme dvě paraboly

$$y = \tfrac{1}{2}x^2, \qquad (y - \tfrac{1}{2}a)^2 = 2bx$$

a hledáme jejich společnou tečnu.



Vypočtěme rovnici této společné tečny: $y = \mu x + \sigma$. Zde využijeme pro stručnost velmi jednoduché prostředky diferenciálního počtu. K tomu, aby byla tečnou v nějakém bodě (x_1, y_1) k první parabole, je nutné, aby

$$x_1 = \mu,\ y_1 = \tfrac{1}{2}\mu^2\ [y' = x],\ \sigma = -\tfrac{1}{2}\mu^2.$$

Pro druhou parabolu tečna v bodě (x_2, y_2) dá:

$$x_2 = \tfrac{b}{2\mu^2},\ y_2 = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{b}{\mu}\ \left[y' = \pm\tfrac{\sqrt{2b}}{2\sqrt{x}}\right].$$

Dosadíme do rovnice pro tečnu (s už známým σ):

$$\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{b}{\mu} = \mu\tfrac{b}{2\mu^2} - \tfrac{1}{2}\mu^2$$

a upravíme (stačí vzít jen znaménko +):

$$\mu^3 + a\mu + b = 0\,.$$

Úvahu o společné tečně dvou parabol jsem s malými úpravami a opravami převzal od Rogera C. Alperina [5].

Lze si představit, že by mohla existovat nějaká další nadstandardní operace, která by dovolila řešit ty úlohy, které vyžadují algebraické křivky (a rovnice) 4. stupně. A možná i pro vyšší stupně. (Kdybych to uměl, tak bych to napsal.)

Opustíme všechny nadstandardy a vrátíme se pokorně k obyčejnému, standardnímu skládání papíru. Všechno, co jím dokážeme udělat, dokážeme i pravítkem a kružítkem. A co obráceně? Je papírová geometrie opravdu slabší? A co je to vlastně za geometrii?

2 Co je to za geometrii?

Připouštíme tedy jen standardní operace skládání papíru:

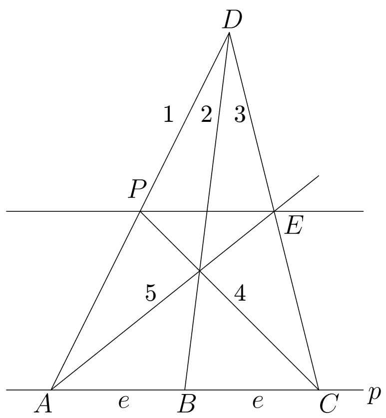
1. Spojit dva body přímkou.
2. K dané přímce vést *někde* kolmici.
3. Rozpůlit daný úhel.

Tyto jednoduché operace stačily na všechny dosud zmíněné úlohy (kromě trisekce úhlu), dokonce jsme pomocí nich dokázali nacházet body paraboly a tečny v těchto bodech. Potřebovali jsme také nalézt rovnoběžku nacházející se uprostřed mezi danými dvěma rovnoběžkami. Je to jednoduché a nechám to na čtenáři.

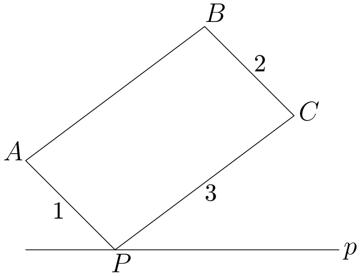
Následující úloha vypadá zpočátku také jednoduše: dána je přímka p a bod P mimo ni. Vést rovnoběžku k p bodem P. Stojí za to přijít na to dříve, než si přečtete následující výklad.

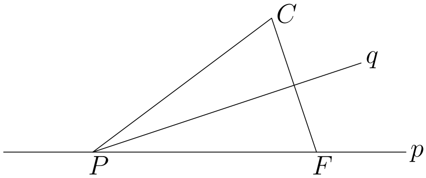
Napřed někde (kdekoli) vedeme kolmici k přímce p (pata je A), a ještě někde jinde (pata je C). Obě kolmice jsou rovnoběžné, a tak můžeme vést rovnoběžku uprostřed mezi nimi (pata B). Vše jsme udělali jen proto, abychom dostali na přímce p vedle sebe dvě stejně dlouhé (e) úsečky.

Body A a P spojíme přímkou (1), na ní zvolíme libovolně bod D. A další postup je patrný z následujícího obrázku, kde je pořadí vedení přímek opět vyznačeno číslicemi. Hledaná rovnoběžka je pak PE. Teď už je také jasné, jak se zkonstruuje kolmice k dané přímce v daném bodě (na přímce či mimo ni): sestrojí se podle operace 2 kolmice kdekoli a daným bodem se pak vede rovnoběžka s touto kolmicí.



Další důležitou úlohou je přenos dané úsečky na dané místo a do daného směru. Máme tedy přenést danou úsečku na přímku p od bodu P. První krok: úsečku přeneseme tak, aby začínala v bodě P. K tomu stačí umět vést rovnoběžky daným bodem (obrázek níže vlevo):



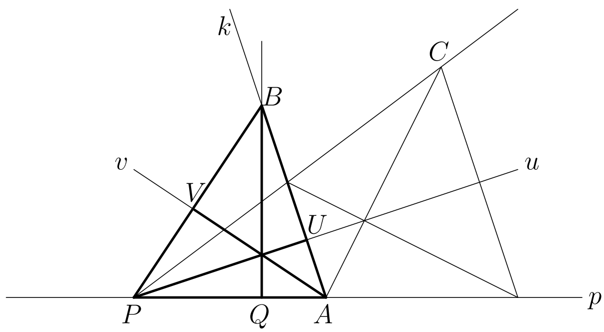


Druhý krok spočívá ve „sklopení“ úsečky PC na přímku p (obrázek vpravo). Napřed vedeme přímku q, která půlí úhel, který svírá přímka PC s přímkou p, a pak spustíme na přímku q kolmici z bodu C, průsečík této kolmice s p je F: $AB = PC = PF$. Shrňme dosavadní výsledky. Skládáním papíru dokážeme vést přímky danými body, půlit úhly, vést kolmici daným bodem a přenášet úsečky.

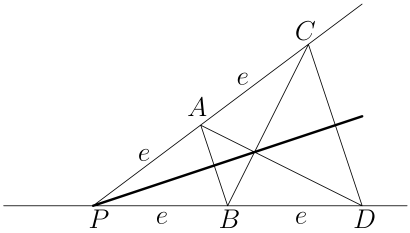
Tady bude v našem příběhu bod obratu. Ocitneme se v jiné oblasti geometrie. Zkusme tedy vše začít v opačném pořadí: připustíme jen vedení přímky danými dvěma body (tj. „pravítko“) a přenos úsečky na dané místo a v daném směru. Dokážeme pak uskutečnit všechny ty konstrukce, které umíme udělat skládáním papíru? Projděme všechny čtyři operace:

1. Vést rovnoběžku daným bodem: na přímce zvolíme libovolnou úsečku e a přeneseme ji vedle. Ostatní jako výše.

2. Vést někde kolmici k dané přímce p. Kupodivu je to dosti komplikovaná úloha. Na přímce p zvolíme libovolně bod P a vedeme jím libovolně přímku PC (C neleží na p). Předcházející konstrukcí rozpůlíme úhel, který svírá tato přímka s p: dostaneme přímku u a *kolmici* k na ni. Tato kolmice protne p v bodě A. Bodem A vedeme opět libovolnou přímku a stejnou konstrukcí rozpůlíme odpovídající úhel a dostaneme osu v a kolmici na ni; tato kolmice protne k v bodě B. Tak dostaneme trojúhelník PAB a dvě jeho *výšky*. Třetí výška (spojnice vrcholu B a průsečíku obou výšek) je třetí výška, která je *kolmá* na přímku p.



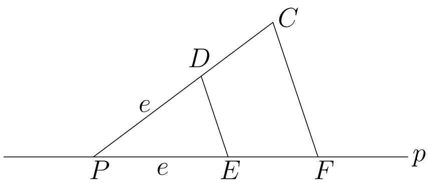
3. Rozpůlit úhel. Průsečík přímek je P. Na obě přímky naneseme dvakrát za sebou úsečku e (viz obrázek). Spojíme AB a CD přímkami: přímka spojující bod P s průsečíkem těchto přímek je hledaná osa úhlu.



A máme tady výsledek: *Jednoduchým skládáním papíru lze udělat přesně totéž, jako pravítkem a přenášením úseček.*

Když si to ale všechno projdete znovu, zjistíte, že stačí umět přenášet jen jednu danou úsečku, *etalon* (to byla úsečka e).[3] K tomu je třeba ovšem ještě doplnit důkaz, že pomocí pravítka a etalonu lze přenést jakoukoli úsečku; stačí jen ukázat, že lze jakoukoli úsečku *sklopit*. Kürschákovo řešení:

Úsečku PC potřebujeme „sklopit“ na přímku p. Od bodu P naneseme na obě přímky etalon e, odpovídající body D a E spojíme přímkou. K této přímce vedeme rovnoběžku bodem C, průsečík s přímkou p je F. Platí $AB = PC = PF$:



Takže výsledek tohoto druhého dějství zní: *Standardním skládáním papíru lze udělat přesně totéž, jako pravítkem a etalonem.*

Zde opustíme skládání papíru, protože na otázky, co se jím dá přesně udělat a jak, budeme odpovídat v geometrii pravítka a etalonu. Než tak ale učiníme, dodejme tři krátké poznámky k papírové geometrii.

1) S papírem jde dělat další matematické divy, skoro v každé populární knize o matematice se najdou všelijaká kouzla s proužky papíru nebo rozmanité papírové modely. Novější a vážnější knihy napsali například Hilton a Pedersen [31], Demaine a O'Rourke [13], Haga [18], Olson [47] a za prohlédnutí stojí také Lang [43].

2) I klasické origami mohou být zajímavé matematicky, například jak navrhovat sítě, podle nichž se bude skládat (a ovšem také pořadí). Tady se dostáváme do oblastí počítačové a diskrétní geometrie, možná i geometrické algebry. Mistrem ve skládání složitých origami je Robert J. Lang, který napsal i knihu o matematických metodách pro jejich navrhování [42].

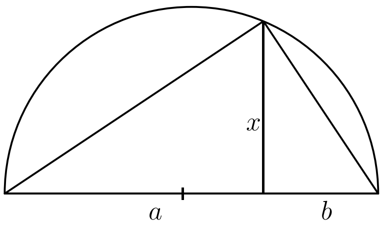
3) Když skládáme dopisní papír na třetiny, aby se vešel do podlouhlé obálky, děláme to zkusmo. Není problém nalézt přesné řešení této „trisekce“ skládáním papíru. Když ale toto řešení použijeme na skutečný papír, bude výsledek tak zmačkaný, že se prostě poslat nedá. Říká se tomu „nežádoucí vedlejší účinky“ a zdá se, že to platí pro všechny problémy: vždycky se někde něco jiného „zmačká“.

[3] Zvláštní je, že tato drobnost unikla i velkému matematikovi Davidu Hilbertovi. Upozornil na ni maďarský matematik Josef Kürschák v kratičkém článku v roce 1902 [40] a Hilbert to začlenil do druhého vydání svých *Základů geometrie* [26].

3 Co se dá a nedá udělat pravítkem a etalonem?

3.1 Algebraizace geometrie

Algebraizaci geometrie provedl René Descartes, který začal počítat s úsečkami jakožto veličinami.[4] Geometrické problémy pak mají vždy tento tvar: dány jsou nějaké úsečky (Descartes je označí malými písmeny ze začátku abecedy: a, b, c, ...) a máme najít nějaké úsečky neznámé (ty Descartes označí malými písmeny z konce abecedy: x, y, z). Udělá se to tak, že se najde dostatečný počet vztahů (poměrů) mezi známými a neznámými úsečkami, s těmito vztahy se pak počítá algebraicky tak dlouho, až se dostanou *algebraické* rovnice pro neznámé veličiny a řešení těchto rovnic je pak řešením dané geometrické úlohy. Podívejme se na něco jednoduchého, co se nám ještě bude hodit: Máme dány úsečky a a b a máme najít úsečku $x = \sqrt{ab}$. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme $a : x = x : b$, a tedy $x^2 = ab$. Zde nám k řešení úlohy stačilo pravítko a kružítko.



Složitější úlohy mohou vést k rovnicím vyšších stupňů a otázka zní: jaké prostředky potřebujeme pro (geometrické) řešení dané rovnice? Ve většině případů nebude stačit pravítko a kružítko; tyto nástroje totiž dokážou vyřešit jen kvadratické rovnice a rovnice, které se na rovnice kvadratické dají převést (rozložit). Můžeme však použít nějaká složitější geometrická zařízení. Řešení takových rovnic jsou průsečíky *algebraických křivek*, tj. křivek, které jsou popsány polynomy (dvou a více proměnných). Všimněme si ještě koeficientů, které se vyskytují v našich polynomech: jsou to opět polynomy v daných úsečkách a, b, ... s *racionálními* koeficienty (a koeficienty z nich vypočtenými níže uvedenými operacemi).

Připustíme-li konstrukce pouze *pomocí pravítka a etalonu*, můžeme úsečky sečítat, odečítat, násobit, dělit a dále můžeme pro dané úsečky a a b zkonstruovat úsečku $\sqrt{a^2 + b^2}$ (k tomu stačí úsečky jen přenášet a v posledním případě udělat z úseček a a b odvěsny pravoúhlého trojúhelníku – jeho přepona pak bude právě ona odmocnina).

Teď to otočíme a položíme naši hlavní otázku: jaké konstrukce lze těmito prostředky provádět a jaké ne. Tuto otázku jsme ale už převedli na otázku algebraickou.

Začneme jednou danou úsečkou, kterou prohlásíme za úsečku jednotkovou. Zvolíme dvě souřadnicové osy, přeneseme na ně tuto jednotkovou úsečku a začneme zjišťovat, jaké body můžeme vypočítat pomocí zmíněných operací: sečítání, odečítání, násobení, dělení a odmocňování součtu dvou druhých mocnin. Jde tedy o to,

[4] Nikoli aritmetizaci, jak se stále opakuje, podobně jako se stále tvrdí, že zavedl „kartézské“ souřadnice a vytvořil analytickou geometrii. Descartova geometrie je geometrie *algebraická*.

co můžeme dostat z čísla 1 postupným sečítáním, odečítáním, násobením, dělením – zatím je to jasné: to jsou přece zlomky, tedy racionální čísla. My ale můžeme počítat $\sqrt{a^2+b^2}$, kde a, b jsou už vypočtená racionální čísla, výsledek přidat a zase sečítat, dělit, odmocňovat atd. A tak do nekonečna.

Řekněme to teď jinak: množina těch bodů, které můžeme vypočítat (tedy zkonstruovat pomocí pravítka a etalonu), sestává z těch bodů, jejichž souřadnice patří do nejmenší množiny, která obsahuje 1 a je *uzavřená* vůči sečítání, odečítání, násobení, dělení a výpočtu druhé odmocniny součtu dvou čtverců. Uzavřeností se zde rozumí, že obsahuje-li tato množina čísla a a b, pak obsahuje i $a+b$, $a-b$, ab, a/b, $\sqrt{a^2+b^2}$. Poznamenejme zde ještě, že tam patří například i $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, protože tato odmocnina se rovná $\sqrt{a^2+\left(\sqrt{b^2+c^2}\,\right)^2}$.

Takto vypočteme (a tedy zkonstruujeme) nekonečně mnoho bodů roviny, zdaleka ne ovšem všechny. Množství všech vypočtených bodů je *spočetné*, zatímco všech bodů v rovině je *nespočetně* mnoho. Přesto je tato „prořídlá“ rovina zajímavá.

3.2 Hilbertovy axiomy

V roce 1899 vyšlo poprvé „paradigmatické“ dílo Davida Hilberta *Základy geometrie.* Paradigmatické bylo proto, že se stalo vzorem (paradigmatem) dokonalých axiomatických systémů a pozvedlo matematiku na novou a vyšší úroveň dokonalosti. Hilbert pojal geometrii jako formální systém, v němž jsou pojmy jako „bod“ nebo „přímka“ vymezeny implicitně, tj. definovány vztahy, které musí splňovat. Nemá pak smysl klást otázky jako „co je to bod?“. Pozdější terminologií řečeno to byl čistě strukturalistický přístup: nezajímáme se o prvky samotné, nýbrž jen o vztahy mezi nimi. Tento „strukturalistický“ přístup je přítomen už u Eukleida; přihlouplé definice bodu a přímky byly do Eukleidových *Základů* dodány později nějakým „metodikem“. Jako důkaz může postačit to, že Eukleidés tyto definice nikde nepoužil a ani nepotřeboval.

Pro formální systémy či struktury můžeme ovšem konstruovat *modely* a tak jim dodat „tělo“. V nejznámějším modelu elementární geometrie (v rovině) je bodem dvojice reálných čísel („souřadnic“ tohoto bodu), přímky jsou reprezentovány lineárními rovnicemi atd. Všechny axiomy jsou splněny, a tak tento model může posloužit i jako důkaz *bezespornosti* daného axiomatického formálního systému (za předpokladu bezespornosti systému reálných čísel – dnes bychom dodali atd. do nekonečna).

Hilbertovy axiomy jsou rozděleny do pěti skupin: první se týká incidencí (bod leží na přímce, dvě přímky se protínají v bodě atd.), druhá uspořádání (daný bod leží mezi jinými danými body atd.), třetí kongruence čili shody (kdy jsou dvě úsečky nebo dva úhly shodné), čtvrtá skupina obsahuje axiom o rovnoběžkách (bodem mimo danou přímku lze vést *jedinou* rovnoběžku). Pátá skupina sestává ze dvou axiomů (nazývaných axiomy spojitosti): jedním je *archimedovský* axiom, který zaručuje možnost měření, a druhým je axiom, který má povahu zcela odlišnou od axiomů předcházejících: požaduje, aby to, co bude splňovat všechny předcházející axiomy, bylo „úplné“ v tom smyslu, že se to už nedá rozšířit na něco bohatšího. Teprve tento trochu podivný axiom zaručuje, že bodů v rovině bude „dostatek“, dokonce, že jich bude „právě tolik, kolik jich má být“.

A teď možná překvapení: ta „řídká“ geometrie, v níž body jsou jen to, co se dá získat sečítáním, odečítáním, násobením, dělením a odmocňováním součtu čtverců (tedy to, co se dá udělat obyčejným skládáním papíru nebo pravítkem a etalonem), splňuje všechny Hilbertovy axiomy s výjimkou posledního (úplnosti). Hilbert tak v *Základech* dokázal, že poslední axiom je *nezávislý* na ostatních axiomech, tedy, že z nich nemůže být odvozen. Udělal to tedy tak, že zkonstruoval *model*, v němž platí všechny axiomy kromě axiomu posledního.

4 Totálně reálná čísla

Stále však nemáme pořádnou odpověď na výchozí otázku: co lze a co nelze zkonstruovat pravítkem a etalonem. Co je to za čísla, která dostaneme uvedenými algebraickými operacemi? Jak se liší od těch čísel, která lze zkonstruovat pravítkem a kružítkem – a liší se vůbec? To, co lze zkonstruovat pravítkem a kružítkem se dostane podobně: základními algebraickými operacemi a *neomezeným* odmocňováním: výpočtem druhých odmocnin i z jiných výrazů než jen součtu čtverců, například $\sqrt{a^2 - b^2}$. To totiž pak dovolí řešení *kvadratických* rovnic, což stačí k výpočtu průsečíků přímky a kružnice nebo dvou kružnic (nic složitějšího při konstrukcích pravítkem a kružítkem nepotřebujeme).

Takže: co je to za čísla? Odpověď na tuto otázku dal rovněž David Hilbert v citované knize. Rozhodně jsou to čísla *algebraická*, tj. jsou to kořeny algebraických rovnic s racionálními koeficienty. Algebraická čísla jsou kořeny nějakého polynomu s *racionálními* koeficienty. Takových polynomů je ovšem nekonečně mnoho. Zvolíme ten, který je nejjednodušší, minimální, tj. takový, který už nelze rozložit na polynomy jednodušší (říká se mu „ireducibilní“). Tento polynom má ovšem ještě další kořeny (zvané konjugované). Pokud jsou všechny tyto kořeny *reálné*, nazývá se výchozí algebraické číslo *totálně reálné*. Dá se dokázat, že *pokud jsou (algebraická) čísla a, b totálně reálná, jsou totálně reálná i čísla $a + b$, $a - b$, ab, a/b, $\sqrt{a^2 + b^2}$*.[5] Racionální čísla jsou samozřejmě totálně reálná (pro racionální číslo r je odpovídající ireducibilní rovnice prostě $x - r = 0$).

Všechna čísla, která můžeme zkonstruovat (pravítkem a etalonem) jsou tedy totálně reálná. To Hilbertovi stačilo k tomu, aby předvedl *příklad konstrukce, kterou lze uskutečnit pravítkem a kružítkem, nikoli ale pravítkem a etalonem*: Má se sestrojit trojúhelník, je-li dána přepona c a jedna odvěsna a. Jde tedy o výpočet (konstrukci) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Pravítkem a kružítkem se to udělá snadno (viz obrázek výše s polokružnicí). Pravítkem a etalonem to nejde. Například (Hilbert), když $c = 1$, $a = |\sqrt{2}| - 1$, pak $b = \sqrt{1^2 - (|\sqrt{2}| - 1)^2} = \sqrt{2|\sqrt{2}| - 2}$. Jenže b není totálně reálné číslo. Lze se o tom přesvědčit tak, že nalezneme nejjednodušší rovnici (s racionálními koeficienty!), kterou toto číslo splňuje: $x^4 + 4x^2 - 4 = 0$, takže $x^2 = -2 \pm 2|\sqrt{2}|$ a dva kořeny jsou imaginární (protože na pravé straně může být záporné číslo).

Platí ale i obrácení uvedené věty: *Dostanou se takto všechna totálně reálná čísla* (z těch, která se dají dostat pravítkem a kružítkem). Tedy: každá úsečka, které odpovídá totálně reálné číslo, může být sestrojena pomocí pravítka a etalonu. Hilbert

[5] Elementární důkaz lze nalézt například v Auckly a Cleveland [9].

pak uvádí větu (věta 65 v 7. vydání *Základů geometrie*; ve 2. vydání je to věta 44), která představuje kritérium, zda nějaká úloha, která je řešitelná pravítkem a kružítkem, je řešitelná i pravítkem a etalonem:

Máme úlohu na geometrickou konstrukci takovou, že při jejím analytickém řešení mohou být souřadnice hledaných bodů získány ze souřadnic zadaných bodů pomocí racionálních operací a druhých odmocnin. Nechť n je nejmenší počet kvadratických odmocnin, který dostačuje pro výpočet souřadnic bodů. K tomu, aby bylo možné tuto úlohu řešit jen pomocí vedení přímek a přesouvání úseček, je nutné a dostačující, aby tato geometrická úloha měla přesně 2^n řešení, a to pro všechny *polohy zadaných bodů, to jest pro* všechny *hodnoty libovolných parametrů, které se vyskytují v souřadnicích zadaných bodů.*[6]

K důkazu dostatečnosti tohoto kritéria se potřebuje následující věta:[7]

Nechť funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se dostane z parametrů pomocí racionálních operací a druhých odmocnin. Jestliže hodnota této funkce je pro každou *reálnou sadu hodnot parametrů* totálně reálné *číslo, pak je tato funkce prvkem tělesa, které se dostane z $x_1, x_2, \dots x_n$ pomocí čtyř aritmetických operací a druhých odmocnin* součtu čtverců dvou čísel.

K tomu potřebuje Hilbert následující větu:[8]

Každá pozitivně definitní (která tedy pro žádné reálné hodnoty proměnných nenabývá záporné hodnoty) racionální funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s racionálními koeficienty, může být vyjádřena ve tvaru součtu čtverců racionálních funkcí proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ s racionálními koeficienty.

Tuto větu se však Hilbertovi nepodařilo dokázat v obecnosti.

5 Hilbertův 17. problém

Hilbert dokázal tuto větu pro případ funkcí jedné proměnné, a to způsobem hodně komplikovaným, v roce 1888 ([20]). V roce 1902 tento důkaz zjednodušil Edmund Landau [41].[9]

Jednoduché je to pro *polynomy* jedné proměnné:

Každý pozitivně definitní polynom jedné proměnné je součtem čtverců polynomů. Je-li $p(x)$ daný polynom, pro nějž platí $p(x) \geq 0$, má tento polynom minimum a můžeme předpokládat, že toto minimum je 0 (pokud je kladné, je tento polynom součtem jiného polynomu s nulovým minimem a kladného čísla, které je ovšem

[6] Rád bych se zde odvolal na nějaký podrobnější a explicitnější výklad, než je Hilbertův, jenže nic takového se mi nepodařilo nalézt. Nejlepší asi je komentář v druhém ruském překladu (1948 [28], první a jiný ruský překlad jiného vydání je z roku 1923). V jubilejním roce 1999 vyšlo nejúplnější komentované německé vydání [27], existuje také komentovaný moderní francouzský překlad z roku 1971 [29]. Podivné je, že zjevně existuje anglický překlad jen 1. vydání, který je dodnes přetiskován. Samozřejmě není komentovaný a jeho zvláštností je, že na titulu přeložili i Hilbertův titul: „David Hilbert, PH. D.“. Přes to všechno si myslím, že tak základní a krásné dílo by si zasloužilo daleko podrobnější a zasvěcenější komentáře.

[7] Věta 66 v 7. vydání.

[8] Věta 67 v 7. vydání; ve 3. vydání je uvedena jen nepřímo.

[9] Toto zjednodušení má dvanáct stránek landauovského stylu!

čtvercem). Nabývá-li minima v bodě a a tedy je-li tam osa x jeho tečnou, pak $p(x) = (x-a)^2 q(x)$, $q(x)$ je pozitivně definitní a důkaz dokončíme indukcí.

Pro polynomy dvou proměnných to neplatí. Příklad: polynom $x^4y^2+x^2y^4-x^2y^2+1$ je pozitivně definitní (jeho minimum je $\frac{26}{27}$). Předpokládejme, že je součtem čtverců nějakých polynomů q_i. Tyto polynomy mohou být nejvýše stupně 2 v každé proměnné x, y. V těchto polynomech se nemůže vyskytnout člen s x^2y^2; nebudou tam ani členy x^2 a y^2, dokonce ani samostatné x a y (vždy stačí si představit, co by se dostalo při umocnění a srovnat to s výchozím polynomem). Zbude tedy $q_i(x, y) = a_i x^2 y + b_i x y^2 + c_i x y + d_i$. Zkusme je umocnit a sečíst; zajímá nás koeficient u x^2y^2 – ten je $\Sigma_i c_i^2$, jenže tento koeficient je u výchozího polynomu -1, což nejde.[10]

Připadalo vám to jednoduché? Omyl. S tím, že pozitivně definitní polynom nemusí být součtem čtverců polynomů, přišel původně Minkowski, ale jako s hypotézou. Dokázal to až Hilbert (1888), jenže způsobem nepřímým a velice komplikovaným (viz [20]). Zdá se, že první explicitní příklad takového polynomu pochází až z roku 1967! Pěkně je to popsáno v článku Waltera Rudina [60]. Algoritmus umožňující rozhodnout, zda se daný polynom dá vyjádřit jako součet čtverců, je obsažen v článku Victorie Powers a Thorstena Wörmanna [51].

Obecný problém se Hilbertovi nepodařilo vyřešit (= dokázat hypotézu). Zařadil jej tedy do seznamu svých slavných 23 problémů:[11]

> 17. Vyjádření definitních forem čtverci
>
> Definitní se nazývá taková celistvá racionální funkce nebo forma libovolně mnoha proměnných s reálnými koeficienty, která pro žádné reálné hodnoty těchto proměnných nenabývá záporné hodnoty. Systém všech definitních funkcí se chová invariantně vůči operacím sečítání a násobení, ale i podíl dvou definitních funkcí – pokud je celou funkcí proměnných – je definitní forma. Čtverec každé takové libovolné formy je zjevně opět definitní formou. Protože však, jak jsem ukázal,[12] ne každá definitní forma se dá vyjádřit jako součet čtverců, vyvstává otázka – na kterou jsem pro případ ternárních forem dal kladnou odpověď[13] –, *zda se nedá každá definitní forma vyjádřit jako podíl součtů čtverců forem.* Současně je pro jisté otázky ohledně možnosti jistých geometrických konstrukcí žádoucí vědět, zda koeficienty těch forem, které jsou použity v tomto vyjádření, se stále mohou brát z téže oblasti racionality [Rationalitätsbereich], která je dána koeficienty představované formy.[14]

Připomeňme: *formou* se rozumí polynom více proměnných, jehož všechny členy mají týž stupeň. V závislosti na počtu proměnných se mluví o formách binárních (dvě

[10] Příklad jsem si vypůjčil od Weisse a D'Mella [63], str. 40.

[11] V přednášce na pařížském kongresu matematiků (1900) nevyslovil všech 23 problémů (ani 17. problém); v aktech tohoto kongresu [22] byly ovšem všechny, německé znění [23] vyšlo dokonce dříve, anglický překlad [24] následoval velmi brzy; je i samozřejmě i ruský překlad [25]. O Hilbertových problémech pojednávají souhrnně například knihy [1] a novější [64].

[12] Mathematische Annalen Bd. 32 (viz [20]).

[13] Acta mathematica Bd. 17 (viz [21]).

[14] Srv. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, Kap. VII, zvláště § 38.

proměnné), ternárních, ..., dále se pak podle stupně rozlišují formy lineární, kvadratické, kubické atd. „Oblast racionality“ = „Rationalitätsbereich“ je starší alternativní označení pro těleso (Körper).

6 Artinovo řešení a reálná tělesa

Sedmnáctý Hilbertův problém byl vyřešen v roce 1927 Emilem Artinem [8] na základě krásné a elegantní teorie reálných těles, kterou rozvinul Emil Artin (1898–1962) spolu s Otto Schreierem (1901–1929) [6], [7]. Tato teorie je vyložena ve všech hlubších učebnicích algebry.[15]

Těleso se nazývá **reálné**[16], jestliže -1 není součtem čtverců prvků tohoto tělesa. Ekvivalentně: je-li součet čtverců nějakých prvků roven nule, jsou tyto prvky všechny nulové.[17] Těleso K se nazývá **reálně uzavřené**, jestliže jej už nelze dále rozšířit se zachováním reálnosti, tj. jestliže každé algebraické rozšíření tohoto tělesa, které je reálné, je totožné s K. *Reálným uzávěrem* tělesa K se rozumí reálně uzavřené těleso, které je algebraickým rozšířením tohoto tělesa. Takové rozšíření vždy existuje podle Zornova lemmatu.

Připomeňme ještě, že těleso je **uspořádané**, je-li dána podmnožina kladných prvků P tohoto tělesa. P musí splňovat dva požadavky: (1) 0 není prvek P a pro každý prvek x tohoto tělesa platí, že buď $x \in P$ nebo $-x \in P$; (2) s každými dvěma prvky x, y tam patří i jejich součet $x + y$ a součin $x \cdot y$.
Projděme nyní sled vět, které vedou nakonec k řešení Hilbertova problému.

Reálně uzavřené těleso R lze uspořádat, a to jediným způsobem: kladné prvky jsou (nenulové) součty čtverců prvků tohoto tělesa. Každý kladný prvek je čtverec v R. Každý polynom lichého stupně nad R (tedy prvek $R[x]$, abych připomněl standardní značení) *má kořen v R.*

Poslední tvrzení je důsledkem podobně elegantní věty:

Je-li K reálné těleso a je-li p ireducibilní polynom nad K lichého stupně a α je jeho kořen, pak těleso $K(\alpha)$ (tedy těleso, které se dostane adjunkcí α, abych připomněl standardní značení) *je reálné.*

Připomeňme si opět (už méně standardní) značení: pro těleso K označuje K^{a} algebraicky uzavřené algebraické rozšíření K.

Je-li R reálně uzavřené těleso, pak $R^{\mathrm{a}} = R(\sqrt{-1})$. – Je-li R těleso takové, že $R \neq R^{\mathrm{a}}$, ale $R^{\mathrm{a}} = R(\sqrt{-1})$, pak je R reálně uzavřené.

Stejně elegantně a čistě algebraicky se dokazuje pro reálně uzavřená tělesa Sturmova věta o počtech kořenů v zadaném intervalu.

[15] Například B. L. van der Waerden [62], Serge Lang [44], Nathan Jacobson [34] a [35], Falko Lorenz [45], nebo v důležité monografii Albrechta Pfistera [49]. Výklady jsou dosti podobné, zde se přidržím výkladu Langova.
[16] Někdy se dodává „formálně“ reálné.
[17] Takže reálná tělesa musí mít charakteristiku nula.

Jestliže těleso K *není* reálné, pak *každý* jeho prvek je součtem čtverců. Platí totiž

$$a = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$$

a -1 je součtem čtverců. Pro reálná tělesa platí důležitá věta:

Je-li prvek a kladný při všech uspořádáních reálného tělesa k, pak je součtem čtverců.

Předpokládejme naopak, že a je sice kladný při všech uspořádáních, ale není součtem čtverců.[18] Uděláme algebraický uzávěr tělesa k a v něm musí (podle Zornova lemmatu) existovat maximální podtěleso K, v němž a pořád není součtem čtverců. Těleso K je *reálné*, protože kdyby nebylo reálné, byl by každý jeho prvek, tedy i a, součtem čtverců. *V tomto tělese je $-a$ čtvercem.* Kdyby nebyl, pak bychom mohli K skutečně rozšířit adjunkcí prvku $\sqrt{-a}$. V tomto rozšíření $K(\sqrt{-a})$ by ovšem už a musel být součtem čtverců: $a = \Sigma_i(x_i + y_i\sqrt{-a})^2$. Odtud dostaneme:

$$a = \frac{\Sigma_i x_i^2}{1 + \Sigma_i y_i^2}\,.$$

(Poznámka: $\Sigma_i x_i y_i = 0$, protože jinak by $\sqrt{-a}$ byl prvkem K a byl by tedy čtvercem.) Takže a je součtem čtverců, a to je spor. Platí $a = -b^2$ pro nějaké b, a proto je $a < 0$ při libovolném uspořádání K, a tudíž i pro nějaké uspořádání K.

Odtud se už dostane **Artinova věta**, která je odpovědí na Hilbertův 17. problém:

Nechť K je reálné těleso připouštějící jen jedno uspořádání. Nechť dále f je pozitivně definitní racionální funkce n proměnných nad K. Pak je tato funkce součtem čtverců racionálních funkcí těchto proměnných nad tělesem K.

Je to moc hezké, ale jak je vidět i z ukázky důkazů, je to naneštěstí odpověď čistě existenční. My jsme ale s Hilbertem potřebovali vědět nejen to, že se něco (a co) dá zkonstruovat, nýbrž i to, *jak* se to dá zkonstruovat. Na konstruktivní řešení se muselo zase dlouho čekat.

7 Po dalších třiceti letech – Robinson a Kreisel

V roce 1955 přišel s alternativním řešením 17. Hilbertova problému Abraham Robinson.[19] Robinson založil svou analýzu problému na Artinově teorii reálných těles, přinesl však řadu zlepšení, jichž dosáhl pomocí jím rozvíjené teorie modelů.[20]

Teorie modelů je část matematické logiky, která zkoumá matematické struktury pomocí predikátové logiky prvního řádu (tj. logiky s kvantifikátory $\exists$ a $\forall$, které ale kvantifikují jen přes předměty, nikoli přes predikáty). Zkoumá věty, vyjádřitelné

[18] Reprodukuji zde Maninův náčrt důkazu (viz [1]). Je to současně ukázka toho, jak vypadají všechny ostatní důkazy.

[19] [52] a následující článek [53], oba jsou přetištěny v Robinsonových spisech [54]; Abraham Robinson je obecněji znám svou rehabilitací nekonečně malých veličin v nestandardní matematické analýze.

[20] Viz Robinsonův pozdější úvod do teorie modelů a metamatematiky algebry [55], kde je uvedeno i řešení 17. problému.

v této logice o takových matematických strukturách a množiny definované formulemi této logiky.

Teorii modelů používal už ve třicátých letech Alfred Tarski ke zkoumání především reálných čísel; svá zkoumání mohl završit až po druhé světové válce: v roce 1948 publikoval knihu [61], v níž dokázal, že teorie reálných čísel (a tím elementární eukleidovská geometrie) je *rozhodnutelná*: existuje *algoritmus*, který pro každou formuli φ o reálných číslech zformulovanou v logice prvního řádu rozhodne, zda je v této teorii odvoditelná, nebo zda je odvoditelná její negace $\neg\varphi$.

Tato věta je v protikladu ke slavnému Gödelovu výsledku o nerozhodnutelnosti aritmetiky, tj. teorie přirozených čísel (v logice prvního řádu).[21]

Velmi zhruba řečeno, odpověď na otázku, proč to jde (rozhodnout) u reálných čísel a ne u čísel přirozených, spočívá v tom, že polynomiální rovnice se v reálných čísel chovají „slušně“, kdežto v přirozených číslech jsou s nimi jen potíže.

Tarského důkaz sestává (opět zhruba řečeno – ale to „zhruba“ už bude platit až do konce tohoto článku) ze dvou kroků: prvním je *eliminace kvantifikátorů*, druhým pak rozhodnutelnost formulí bez kvantifikátorů.

Eliminaci kvantifikátorů je možné předvést na jednoduchém příkladu. Relace $\varphi(x, y, z)$ definovaná formulí prvního řádu

$$\exists u\,(xu^2 + yu + z = 0)$$

je ekvivalentní následující formuli bez kvantifikátorů:

$$x^2 - 4yz \geq 0\,.$$

Eliminace kvantifikátorů se u Tarského zakládá především na Sturmově větě (algoritmu) o počtech kořenů polynomů.

Formule bez kvantifikátorů jsou složeny pomocí logických operátorů $\neg$, $\vee$ a $\wedge$ ze vztahů $=$ a $>$ mezi polynomy (libovolného konečného počtu proměnných). Tyto polynomy mají *celočíselné* koeficienty a zmíněné vztahy jsou rozhodnutelné. To byl druhý a závěrečný krok Tarského důkazu a algoritmu.

Všechno to platí nejen pro těleso reálných čísel, ale obecně pro reálně uzavřená tělesa. Právě toho využil Abraham Robinson k tomu, aby nahradil existenční větu Artinovu konstruktivním důkazem.

[21] Tarského věta je stále málo obecně známa, o čemž mj. svědčí dosti běžný úsudek (spíše ale předsudek), že když jsou nerozhodnutelná už přirozená čísla, tak tím hůře pro čísla reálná, která se přece definují na základě přirozených čísel. Je to ještě horší: nakreslí se „osa reálných čísel“ a na ní se vyznačí „přirozená čísla“. Výše jsme také vycházeli z jednotkové úsečky, ale nepletli jsme si ji (doufám) s přirozeným číslem 1; takovou úsečkou budeme těžko počítat, kolik je nějakých předmětů. Naprosté nepochopení vyvolává pak tvrzení, že reálná čísla neobsahují čísla přirozená (a že dokonce se zde pletou dva odlišné významy slova „číslo“). Kdyby bylo možné vyčlenit z množiny reálných čísel nějakou formulí prvního řádu „přirozená čísla“, byla by podle Tarského věty teorie přirozených čísel rozhodnutelná. – Malý test: jsou vyčlenitelná přirozená čísla z teorie racionálních čísel? Odpověď je ovšem ano, ale není to vůbec jednoduché, musí se na pomoc přivolat teorie diofantických rovnic a je to docela slavný výsledek Julie Robinsonové (která nesouvisí příbuzensky s Abrahamem Robinsonem).

Krátce poté (1957) dal Georg Kreisel tomuto Robinsonovu důkazu podobu algoritmu.[22] Tento krok byl významný i proto, že představoval změnu ve „fundacionistických“ filosofiích matematiky (typu Hilbertova programu): „*Určit konstruktivní (rekursivní) obsah nebo konstruktivní ekvivalent nekonstruktivistických pojmů a vět, používaných v matematice*, zvláště v aritmetice a analýze.“[23] To znamenalo nahradit dosti vágní Hilbertův program přesně formulovaným programem konstruktivistickým (rekursivními interpretacemi matematických systémů). Tento Kreiselův „unwinding“ program byl teoreticky velice úspěšný a současně prakticky nepoužitelný, jak uvidíme v dalším dějství; skvělé shrnutí tohoto programu lze nalézt u Fefermana [16].

8 Je to strašně složité

Potud to všechno bylo krásné. Jenže Tarského algoritmus je použitelný jen „teoreticky“, „v principu“. Je to totiž „otřesně“ složitý (hypercomplex). Později se sice našly jiné způsoby eliminace kvantifikátorů (zvláště pak pomocí „cylindrické dekompozice“), které algoritmus zjednodušily, takže nyní je jen „hrozně“ složitý: část provádějící eliminaci kvantifikátorů vyžaduje 2^{2^m} operací (kde m je zhruba řečeno počet kvantifikátorů, které se mají eliminovat), rozhodnutelnost bezkvantifikátorových formulí vyžaduje 2^n kroků, přičemž n je počet proměnných. Navíc, pokud se nemýlím, je tato druhá složitost definitivní v tom smyslu, že odpovídající problém je „hard“, tj. je ekvivalentní problému $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. Algoritmus není tedy realizovatelný na počítačích a automatické dedukce musí používat různé heuristické postupy.[24]

S Kreiselovým algoritmem tomu bylo nejinak: v roce 1955 se Artin ptal Kreisela, zda by se z jeho (Artinova) důkazu daly získat meze počtu a stupňů racionálních funkcí, jejichž čtverce v součtu dávají daný polynom stupně d s n proměnnými; meze měly být funkcí n a d. Kreisel uvedl první náčrt v [37]. Yandell [64] uvádí (bez dalšího odkazu), že Artin poté, co se dozvěděl, jak by mohla vypadat odpověď, poznamenal, že dá přednost čistě existenčnímu důkazu před konstrukcí vyžadující $2^{2^{100}}$ kroků. Oba odhady mezí byly totiž dvojnásobně exponenciální v n i d.

Formulujme explicitněji: najít nejmenší počet $\nu(n, d)$ takový, že každý nezáporný polynom stupně d s n proměnnými lze napsat jako součet čtverců $\nu(n, d)$ racionálních funkcí.

Na zásadní průlom se muselo počkat až do roku 1967, kdy A. Pfister [48] dokázal, že $\nu(n, d) \leq 2^n$. Na tomto odhadu je zajímavé, že závisí jen na n, nikoli na d. Pro $\nu(n, 3)$ je nejlepší dolní mez $n + 2$. Přes veškeré úsilí jsou to zatím nejlepší známé odhady.[25]

---

[22] Kreisel [37]; Yandell [64] dodává, že Kreiselův výzkum byl tehdy zčásti financován americkou armádou: Office of Ordonance Research, U. S. Army, Contract No. DA-36-1034-ORD-1622, a uvádí to jako příklad rozumného využití prostředků na obranu. Zdá se, že by to mohl být i důvod, proč se mi přes všechno úsilí nepodařilo ke Kreiselovu článku dostat.

[23] Kreisel [39], str. 155.

[24] Uvedené složitosti upraveného Tarského algoritmu pocházejí od Heintze a dalších [19]. Je načase uvést i novější základní literaturu k tomuto tématu (včetně následujících úvah o Kreiselově algoritmu). Nejlepší je asi velká monografie Basu-Polack-Roy [10].

[25] K tomu viz například články Delzell et al. [12], Devanur et al. [14].

9 Tak co se vlastně vyřešilo?

V předchozím oddíle se odpovídalo na otázku po nejmenším počtu čtverců. Další krajně obtížné otázky se týkají konstrukce efektivního algoritmu pro nalezení odpovídajících racionálních funkcí a složitosti tohoto algoritmu. Tady to také nevypadá dobře.

Poslední výsledky, které znám, se týkají polynomů čtvrtého stupně n proměnných: není možné, aby se každý takový polynom dal vyjádřit pomocí čtverců racionálních funkcí, jejichž počet by byl „malý“ (tj. polynomiální v n) a každá z oněch racionálních funkcí by se dala vypočítat „malým“ předpisem.[26]

Literatura

[1] Aleksandrov P. S., red.: *Проблемы Гильберта* [Hilbertovy problémy]. Nauka, Moskva, 1969 (existuje přetisk vydaný nakl. ISFARA, v městě Kasli v Čeljabinské oblasti v r. 2000).

[2] Alperin R. C.: *Trisection and Totally Real Origami*. MAA Monthly, 2005, dostupné na http://www.math.sjsu.edu/∼alperin/TRFin.pdf.

[3] Alperin R. C.: *Origami Alignments and Constructions in the Hyperbolic Plane*. 2010, dostupné na http://www.math.sjsu.edu/∼alperin/HyperbolicAlignments.pdf.

[4] Alperin R. C., Lang R. J.: *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms*. 2006, dostupné na http://www.math.sjsu.edu/∼alperin/AlperinLang.pdf.

[5] Alperin R. C.: *A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*. New York Journal of Mathematics 6 (2000), 119–133.

[6] Artin E., Schreier O.: *Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5 (1927), 225–231.

[7] Artin E., Schreier O.: *Algebraische Konstruktion reeller Körper*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5 (1927), 85–99.

[8] Artin E.: *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 2 (1927), 100–115.

[9] Auckly D., Cleveland J.: *Totally Real Origami and Impossible Paper Folding*. Am. Math. Monthly 102 (1995), 215–226.

[10] Basu S., Pollack R., Roy M.-F.: *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. Second edition, Springer, 2006.

[11] Cipra B., Demaine E. D., Demaine M. L., Rodgers T. (eds): *Tribute to a Mathemagician*. A. K. Peters, 2004.

[12] Delzell Ch. N., Gonzáles-Vega L., Lombardi H.: *A continuous and rational solution to Hilbert's 17th problem and several cases of the Positivstellensatz*. Draft: http://hlombardi.free.fr/publis/DGLMega92.pdf.

[26] Zde už nezbude než odkázat na článek, v němž se to jasně formuluje a dokazuje: Devanur et al. [14].

[13] Demaine E. D., O'Rourke J.: *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.

[14] Devanur N. R., Lipton R. J., Vishnoi N. K.: *On the Complexity of Hilbert's 17th Problem*. In: Lodya K., Mahajan M. (eds): *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*. LNCS 3328, Springer, 2005, 237–249.

[15] Dyck W. von: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. München, 1892.

[16] Feferman S.: *Kreisel's „unwinding" program*. In: Kreiseliana [46], 247–273.

[17] Geretschläger R.: *Euclidean Constructions and the Geometry of Origami*. Mathematics Magazine 68 (1995), 357–371.

[18] Haga K.: *Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding*. Překlad z japonštiny, World Scientific, 2008.

[19] Heintz J., Roy M.-F., Solernò P.: *Sur la complexité du principe de Tarski-Seidenberg*. Bull. Soc. Math. France 118 (1990), 101–126.

[20] Hilbert D.: *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*. Math. Annalen 32 (1888), 342–350; přetištěno v *Gesammelte Abhandlungen*, zweiter Band, Julius Springer, Berlin, 1933, 154–161.

[21] Hilbert D.: *Über ternäre definite Formen*. Acta Mathematica 17 (1893), 169–198.

[22] Hilbert D.: *Sur les problèmes futurs des Mathématiques*. Compte rendu du Deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, 58–114; 17. problém je na str. 97–98.

[23] Hilbert D.: *Mathematische Probleme*. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse aus dem Jahre 1900, 253–297; 17. problém je na str. 284–285.

[24] Hilbert D.: *Mathematical problems*. Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437–479.

[25] Hilbert D.: *Математические проблемы* [Matematické problémy]. In: Aleksandrov [1].

[26] Hilbert D.: *Grundlagen der Geometrie*. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. G. B. Teubner, Leipzig, 1903.

[27] Hilbert D.: *Grundlagen der Geometrie*. Mit Supplementen von Paul Bernays, 14. Auflage, Herausgegeben und mit Anhängen versehen von Michael Toeppel, Teubner, Stuttgart – Leipzig, 1999.

[28] Hilbert D.: *Основания геометрии* [Základy geometrie]. Překlad 7. německého vydání I. S. Gradštejn, redakce P. K. Raševskij, OGIZ, Moskva – Leningrad, 1948.

[29] Hilbert D.: *Les fondements de la géométrie*. Edition critique de Paul Rossier, Dunod, Paris, 1971; reprint (faksimile) Editions Jacques Gabay, Paris, 1997.

[30] Hilbert D.: *The Foundations of Geometry*. Authorized translation by E. J. Towsend, The Open Court, Chicago, 1902.

[31] Hilton P., Pedersen J.: *A Mathematical Tapestry. Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics.* Ilustrated by Sylvie Donmoyer, Cambridge University Press, 2010.

[32] Hull T.: *A Note on „Impossible“ Paper Folding.* Am. Math. Monthly 103 (1996), 240–241.

[33] Husimi K.: *Origami no kikagaku* [Origami a geometrie]. Nippon Hyoronsha, Tokyo, 1979.

[34] Jacobson N.: *Basic Algebra II.* Second edition, W. H. Freeman, 1989, kapitola 11: Formally Real Fields.

[35] Jacobson, N.: *Lectures in Abstract Algebra III.* Theory of Fields and Galois Theory, Springer, 1964, kapitola 6: Artin–Schreier Theory.

[36] Klein F.: *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.* Teubner, Leipzig, 1895.

[37] Kreisel G.: *Sums of Squares.* Summaries of Talks Presented at the Summer Institute for Symbolic Logic in 1957 at Cornell Univ., second ed., Institute Defense Analyses, Princeton, 1960, 313–320.

[38] Kreisel G.: *Mathematical Significance of Consistency Proofs.* Journal of Symbolic Logic 23 (1958), 155–182.

[39] Kreisel G.: *A Survey of Proof Theory.* Journal of Symbolic Logic 33 (1968), 321–388.

[40] Kürschák J.: *Die Streckenabtragen.* Math. Annalen 55 (1902), 597–598.

[41] Landau E.: *Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate.* Math. Annalen 57 (1903), 53–64.

[42] Lang R. J.: *Origami and Geometric Constructions.* Napsáno původně 1996, v roce 2003 byla zkrácená verze otištěna v knize *A Tribute to a Mathemagician* (viz [11]); verze 2010 je na internetu: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf. Existuje dokonce ruský překlad *Оригами и геометрические конструкции* [Origami a geometrické konstrukce], rovněž dostupný na internetu http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions_russian.pdf.

[43] Lang R. J.: *Origami Dessign Secrets. Mathematical Methods for an Ancient Art.* A. K. Peters, 2003.

[44] Lang S.: *Algebra.* Revised third edition, Springer, 2002.

[45] Lorenz F.: *Algebra I, II.* Springer, 2006 a 2008.

[46] Odifreddi P., ed.: *Kreiseliana. About and Around George Kreisel.* A. K. Peters, 1996.

[47] Olson A. T.: *Mathematics through Paper Folding.* Math. Association of India, 1959.

[48] Pfister A.: *Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten.* Invent. Math. 4 (1967), 229–237.

[49] Pfister A.: *Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology.* London Math. Soc. Lectures Note Series 217, Cambridge University Press, 1995.

[50] Powers V.: *Hilbert's 17th Problem and Champagne Problem.* Am. Math. Monthly 103 (1996), 879–887.

[51] Powers V., Wörmann T.: *An Algorithm for Sums of Squares of Real Polynomials.* http://www.mathcs.emory.edu/~vicki/pub/sos.pdf.

[52] Robinson A.: *On Ordered Fields and Definite Functions.* Math. Annalen 130 (1955), 257–271.

[53] Robinson A.: *Further Remarks on Ordered Fields and Definite Functions.* Math. Annalen 130 (1956), 405–409.

[54] Robinson A.: *Selected Papers.* Edited by H. J. Keisler, S. Körner, W. A. J. Luxemburg, and A. D. Young. Volume 1: Model Theory and Algebra, Yale University Press, 1979.

[55] Robinson A.: *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra.* North Holland, 1963.

[56] Row S.: *Geometrical Exercises in Paper Folding.* Madras, 1893.

[57] Row S.: *Geometrical Exercises in Paper Folding.* Edited and revised by W. W. Beman, D. E. Smith, The Open Court, Chicago, 1901 a další vydání.

[58] Row S. (Роу, Сундара): *Геометрические упражнения с куском бумаги* [Geometrická cvičení s kouskem papíru]. Druhé vydání, Mathesis, Oděssa, 1923.

[59] Roy M.-F.: *The Role of Hilbert Problems in Real Algebraic Geometry.* European Women in Mathematics, Proceedings of the 9th general meeting Hindawi, 2000, 189–200.

[60] Rudin W.: *Sums of Squares of Polynomials.* Am. Math. Monthly 107 (2000), 813–821.

[61] Tarski A., McKinsey J. C. C.: *A decision method for elementary Algebra and Geometry.* 1. vyd. 1948, 2. vyd. Berkeley and Los Angeles, 1951.

[62] Waerden B. L. van der: *Algebra I, II.* Springer, mnoho vydání německých i anglických.

[63] Weiss W., D'Mello Ch.: *Fundamentals of Model Theory.* Dostupné na http://www.math.toronto.edu/weiss/model_theory.html.

[64] Yandell B. H.: *The Honors Class. Hilbert's Problems and Their Solvers.* A. K. Peters, Nautick, MA., 2002.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky.*

Adresa

Doc. RNDr. Jiří Fiala, CSc.
Katedra filosofie
Fakulta Filozofická
Západočeská univerzita v Plzni
306 14 Plzeň
e-mail: *jiri-fiala@volny.cz*

POJEM KOMPAKTNOSTI: PŮVOD, VÝVOJ, VÝZNAM

Ivan Netuka

Abstract: This contribution is focused on a single theorem: *Every countable cover of* $[0,1]$ *formed by open intervals contains a finite subcover.* (É. Borel, 1894) The way in which Borel was led to this discovery is described in detail, and its close relationship to the roots of measure theory is emphasized. Several results that have been considered by some authors as predecessors of the Borel theorem are mentioned. The development of the notion of compactness is analyzed with special reference to its significance for modern mathematics, in particular for topology and mathematical analysis. The power of the concept of compactness as an efficient tool in proofs of deep and interesting results is documented by means of several mathematical illustrations.

Obsah

1 Původ pojmu kompaktnosti: analytické funkce

K základnímu výsledku týkajícímu se kompaktnosti, k Borelově větě, nedospěl É. Borel v rámci snah po zpřesňování základů matematické analýzy. Cesta vedla přes analýzu v komplexním oboru.[1]

V klasické teorii funkcí komplexní proměnné se v 19. století setkáváme v zásadě s dvěma koncepcemi. První z nich, reprezentovaná A.-L. Cauchym, je založena na pojmu derivace a křivkového integrálu.

Komplexní funkce f definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{C}$ se nazývá *holomorfní*, jestliže má v každém bodě $z \in U$ derivaci $f'(z)$. Její definice je formálně shodná s definicí z reálné analýzy:[2]

$$f'(z) := \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} .$$

Jestliže $U(z_0, r)$ je kruh o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$ a $a_n \in \mathbb{C}$ jsou taková čísla, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je v $U(z_0, r)$ konvergentní, potom je její součet holomorfní funkce v $U(z_0, r)$.

Druhá koncepce má za primární pojem mocninnou řadu s kladným poloměrem konvergence (*analytický element*). Je spojena především se jménem K. Weierstrasse.

Ze základního kurzu komplexní analýzy je známo, že komplexní funkce f definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{C}$ je holomorfní, právě když je v okolí každého bodu rozvinutelná v mocninnou řadu. Tedy holomorfní funkce splývají s funkcemi *lokálně* rozvinutelnými v mocninnou řadu. Podrobněji platí: *Je-li $z_0 \in U$ a V je největší otevřený kruh se středem z_0 obsažený v U, pak holomorfní funkce $f : U \to \mathbb{C}$ je ve V součtem mocninné řady o středu z_0* (ve skutečnosti Taylorovy řady).

Souvislost holomorfních funkcí a mocninných řad budeme ilustrovat jednoduchým příkladem. Nechť $f : z \mapsto 1/(1-z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Zřejmě je f holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ a její rozvoj v mocninnou řadu o středu v počátku je geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Tato řada nekonverguje pro žádný bod z jednotkové kružnice, takže vyjadřuje funkci f jen na části definičního oboru. Na druhé straně, pro každý bod $z_0 \neq 1$ je f součtem mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ na kruhu $U(z_0, |z_0 - 1|)$. Pro $z_0 \notin \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ je průnik $U(0,1) \cap U(z_0, |z_0 - 1|)$ neprázdná otevřená množina, na níž se součty obou řad rovnají. Tedy analytický element $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ je *analytickým pokračováním* analytického elementu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Nyní je zřejmé, jak lze postupně dospět pomocí konečného řetězce kruhů z elementu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ k funkci, která je definována v libovolném bodě $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Bude platit, že její hodnota je v našem případě $f(z)$, a to v důsledku věty o jednoznačnosti: *Jsou-li f_1 a f_2 holomorfní funkce na oblasti $U \subset \mathbb{C}$* (tj. na otevřené a souvislé množině) *a shodují se na otevřeném kruhu obsaženém v U, pak $f_1 = f_2$ na U.*

Náš jednoduchý příklad ilustruje pojetí, v němž primární pojem není derivace, nýbrž analytický element a jeho analytická pokračování, což je Weierstrassova koncepce. Nechme stranou, že analytické pokračování může vést k mnohoznačným funkcím (tak je tomu např. u komplexního logaritmu) nebo, při jiném pojetí, k funkcím definovaným na Riemannových plochách.

[1] O historii analýzy v komplexním oboru se lze poučit např. v [46], kap. 8, [50], kap. 27, [74]. Základy komplexní analýzy jsou vyloženy např. v [74] a [78], kap. 10, a v [91].

[2] Existence derivace podle *komplexní* proměnné má za následek překvapivé vlastnosti. Např. *existence* první derivace implikuje *existenci* derivací libovolného řádu.

Může se stát, že analytický element pokračovat z kruhu konvergence není možné. Například mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, která konverguje v $U(0,1)$, je analytický element, který nelze pokračovat přes žádný bod jednotkové kružnice.[3] (Říká se, že jednotková kružnice je *přirozenou hranicí* pro holomorfní funkci danou součtem uvedené mocninné řady.)

K. Weierstrass si povšiml,[4] že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n + z^{-n}} \tag{1}$$

reprezentuje dvě analytické (= holomorfní) funkce, jednu na $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ a druhou na $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Přestože jsou definovány jedním *analytickým předpisem* (1), nemají, při klasickém přístupu, tyto dvě funkce nic společného: funkci f definovanou v $U(0,1)$ pomocí (1) nelze analyticky pokračovat přes jednotkovou kružnici, neboť v okolí každého jejího bodu je f neomezená. Přesto bychom měli tendenci domnívat se, že by (v nějakém vhodně zobecněném smyslu) funkce pocházející z jediného vyjádření souviset měly.

Podobný jev lze pozorovat u funkcí tvaru[5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z - a_n}\,, \tag{2}$$

kde $\alpha_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ a $a_n \in \mathbb{C}$. Soustředíme se na případ,[6] že $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ a množina $M := \{a_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ je hustá podmnožina jednotkové kružnice $\mathbb{T}$. Potom je funkce definovaná rovností (2) holomorfní na $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$ a, podobně jako nahoře, analytické pokračování přes $\mathbb{T}$ není možné.

[3] Označíme-li $f(z)$ součet této řady, f splňuje funkcionální rovnici $f(z^2) = f(z) - z$. Odtud lze odvodit, že funkce f je neomezená na každém poloměru jednotkové kružnice spojujícím počátek s bodem $\{2\pi ik/2^n\}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Takové body tvoří hustou podmnožinu jednotkové kružnice.

[4] Tento příklad je uveden v jedné z nemnoha publikovaných Weierstrassových prací [95].

[5] Funkce tohoto typu byly v osmdesátých letech 19. století předmětem zkoumání významných matematiků, např. se jimi zabýval P. Appell, H. Poincaré, E. Goursat, T.-J. Stieltjes, A. Pringsheim. Viz citace v [41], s. 97–99.

[6] Ve skutečnosti É. Borel vyšetřuje obecnější situaci, v níž místo $z - a_n$ vystupují mocniny $z - a_n$. V případě, že posloupnost $\{\alpha_n\}$ konverguje k nule dostatečně rychle, existují úsečky neobsahující žádný z bodů a_n, na nichž nejen řada, ale i řada derivací libovolného řádu konvergují stejnoměrně. Na takové úsečce součet řady definuje komplexní funkci třídy $\mathcal{C}^\infty$, která není nutně analytická. Výsledky tohoto typu vedly k pojmu kvazianalytických tříd. Zhruba řečeno: za jakých podmínek je funkce f třídy $\mathcal{C}^\infty$ identicky rovna nule na $\mathbb{R}$, pokud jsou všechny její derivace v bodě 0 rovny nule? Jistě toto platí, pokud funkce f má holomorfní rozšíření na oblast obsahující reálnou osu. Ale např. pro funkci $f(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(0) = 0$, platí $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna přirozená čísla n. (Základní informaci o kvazianalytických třídách lze nalézt v kap. 19 Rudinovy knihy [78].) É. Borela úvahy o funkcích zmíněného typu dovedly k tomuto překvapujícímu výsledku: *Nechť* $\{d_n\}$ *je* libovolná *posloupnost. Potom existuje funkce* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *taková, že* $f^{(n)}(0) = d_n$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Další originální Borelův přínos spočívá ve vytvoření teorie *monogenních funkcí*, které jsou obecnější než analytické funkce. Jsou definovány na kompaktních množinách a nesou určité společné znaky s analytickými funkcemi. Je pozoruhodné, že se o funkce tohoto typu oživil zájem po více než sedmdesáti letech v souvislosti s tzv. *jemně holomorfními* funkcemi. (Slovo *jemně* referuje k jemné topologii v teorii potenciálu. Viz např. [6], kap. 7, a [37].)

Jeden z podstatných přínosů É. Borela k teorii funkcí komplexní proměnné spočívá v důkazu, že v některých případech vazba mezi dvěma *oddělenými* funkcemi existuje. Borelovy výzkumy v tomto směru měly pro rozvoj moderní matematiky zásadní význam daleko přesahující rámec matematické analýzy, neboť předznamenaly

– zrod pojmu kompaktnosti,
– zrod moderní teorie míry.[7]

2 Borelova cesta k Borelově větě

Budeme studovat řadu (2) za dodatečného předpokladu, že $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|\alpha_n|} < \infty$ (stále se předpokládá, že množina $M := \{a_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ je hustá podmnožina $\mathbb{T}$). Zvolme v $\mathbb{C}$ dva body A a B, $|A| < 1$ a $|B| > 1$. É. Borel ukázal, že *existuje kruhový oblouk* γ *s krajními body* A *a* B *takový, že řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n/(z - a_n)$ *konverguje absolutně a stejnoměrně na* γ, takže v jistém smyslu lze funkci definovanou pomocí (2) pokračovat přes $\mathbb{T}$ z vnitřku jednotkové kružnice na její vnějšek.

V tomto důkazu u É. Borela vstupuje do hry pokrývání *nekonečně* (spočetně) mnoha intervaly, což je základ moderního pojetí teorie míry.

É. Borel uvažuje takto:[8] nechť L je množina bodů, které mají od A a B stejnou vzdálenost, tedy L je přímka kolmá na (uzavřenou) úsečku $[A, B]$ o koncových bodech A a B procházející jejím středem S. Nechť L' je jedna z otevřených polopřímek, na něž L dělí bod S. Pro každý bod $Z \in L'$ nechť $\gamma(Z)$ je (uzavřený) oblouk kružnice o středu Z s koncovými body A a B, který neprotíná L'. Potom pro každé $Z \in L'$ existuje právě jeden průsečík (označíme jej $\Phi(Z)$) kružnice $\mathbb{T}$ a oblouku $\gamma(Z)$. Nechť $[C, D] \subset L'$ je uzavřená úsečka. Budeme předpokládat, že $\Phi(C) \in M$ a $\Phi(D) \in M$. Zřejmě $\Phi : Z \mapsto \Phi(Z)$ je prosté zobrazení $[C, D]$ na uzavřený oblouk $K \subset \mathbb{T}$. Není těžké ověřit, že existuje $b > 0$ takové, že pro vzdálenost bodu $\Phi(Z'')$ od množiny $\gamma(Z')$ platí $\operatorname{dist}\big(\Phi(Z''), \gamma(Z')\big) \geq b|Z'' - Z'|$, kdykoli $Z', Z'' \in [C, D]$.

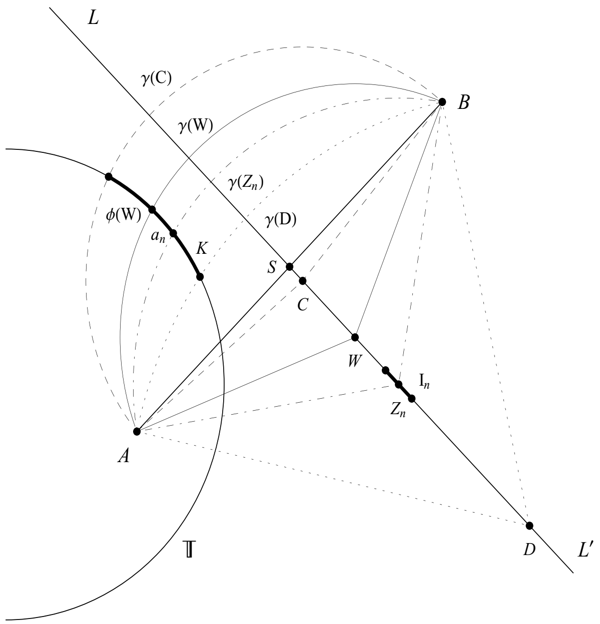
Protože předpokládáme, že $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|\alpha_n|} < \infty$, existují čísla $d_n > 0$ taková, že $\sum_{n=0}^{\infty} d_n < \infty$ a $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|/d_n < \infty$.

Nechť d je délka úsečky $[C, D]$ a nechť k je takové přirozené číslo, že $\sum_{n=k+1}^{\infty} d_n < \frac{1}{2}d$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $\delta_n := d/2(k+1)$, pokud $0 \leq n \leq k$, a $\delta_n = d_n$, pokud $n \geq k+1$. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < d$.

Označme $J := \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n \in K\}$ a pro $n \in J$ označme Z_n bod, pro který $\Phi(Z_n) = a_n$. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $I_n \subset L$ otevřenou úsečku o středu Z_n a délce δ_n. Nechť $W \in [C, D] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$.

[7] V knize [12] É. Borel říká: *Výzkumy o řadách racionálních zlomků mě vedly ke studiu množin reálných čísel, z nichž jsem vydělil množiny, které jsem nazval měřitelné.* Viz [21], s. 28.

[8] É. Borel v disertaci [11] studuje obecnější případ. Náš výklad, přizpůsobený současnému matematickému jazyku, má za cíl ukázat podstatu Borelových úvah vedoucích k teorii míry a k větě o pokrytí. Předběžné oznámení [10] výsledků disertace začíná slovy: *Dovoluji si Akademii požádat o svolení, abych jí mohl sdělit některé výsledky, jejichž důkazy musím publikovat později.* V závěru prezentuje výsledek o existenci nespočetně mnoha *křivek* (courbes), na nichž řada (2) konverguje stejnoměrně, a píše: *Při důkazu tohoto tvrzení jsem se opíral o to, že pokud v nějakém zadaném intervalu na přímce máme nekonečně mnoho* [myslí se spočetně] *dílčích intervalů, jejichž součet* [myslí se součet délek] *je menší než celý interval* [= jeho délka], *existuje nespočetně mnoho bodů přímky, které nepatří do žádného dílčího intervalu.* V samotné disertaci [11] k tomuto tvrzení uvádí: *Na přesný důkaz tohoto faktu odkazuji k závěrečné poznámce v disertaci.* Viz [15], 1. díl, s. 256. K tomu se vrátíme v následující poznámce pod čarou.



Pak pro každé $n \in J$ a každé $z \in \gamma(W)$ platí $|z - a_n| \geq \operatorname{dist}\big(\Phi(Z_n), \gamma(W)\big) \geq b|Z_n - W| \geq b\,\delta_n/2$, tedy

$$\frac{|\alpha_n|}{|z - a_n|} \leq \frac{2}{b} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\delta_n}, \quad z \in \gamma(W),\ n \in J.$$

Protože $W \neq C,\ W \neq D$, existuje $c > 0$ takové, že $\operatorname{dist}\big(a_n, \gamma(W)\big) \geq c$ pro každé $n \in \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big) \backslash J$, tedy

$$\frac{|\alpha_n|}{|z - a_n|} \leq \frac{1}{c} \cdot |\alpha_n|, \quad z \in \gamma(W),\ n \in \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big) \backslash J.$$

Protože řady $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|/\delta_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$ konvergují, řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z - a_n} \quad \textit{konverguje absolutně a stejnoměrně na } \gamma(W).$$

Zásadní otázku, totiž zda takové W existuje (tedy zda $[C, D] \backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$), jsme zatím nezodpověděli.[9] Ta ovšem už s komplexní analýzou nemá nic společného a lze ji formulovat takto: Na

[9] V závěrečné poznámce disertace [11] (viz [15], 1. díl, s. 281) se k platnosti lemmatu o existenci bodů *nepatřících do žádného dílčího intervalu* É. Borel vrací a píše: *Toto lemma by se mohlo považovat za takřka zřejmé; nicméně, s přihlédnutím k jeho důležitosti, podám důkaz opírající se o větu zajímavou samu o sobě: Jestliže máme na přímce* [myslí se uzavřený interval] *nekonečně mnoho* [myslí se spočetně] *dílčích intervalů takových, že každý bod přímky* [mluví se o uzavřeném intervalu] *je vnitřním bodem alespoň jednoho z nich, potom lze efektivně určit omezený počet* [myslí se konečný] *intervalů vybraných ze zadaných intervalů mající stejnou vlastnost* (*každý bod přímky je vnitřním bodem alespoň jednoho z nich*). Toto je první znění Borelovy věty o pokrytí. Viz obrazová příloha III.

přímce máme spočetně mnoho otevřených úseček a součet jejich délek (budeme říkat *sumární délka*) je menší než délka uzavřené úsečky $[C, D]$. Tvrdí se: v $[C, D]$ existuje bod, který není obsažen v žádné z otevřených úseček. Vlastně se jedná o tvrzení týkající se reálné osy: uzavřený interval $I \subset \mathbb{R}$ nelze pokrýt spočetně mnoha otevřenými intervaly I_n, jejichž sumární délka je menší než délka I. Samozřejmě součet délek *konečně* mnoha intervalů pokrývajících I je zřejmě větší než délka I. Pokud bychom tedy uměli z pokrytí $\{I_n\}$ vybrat konečné pokrytí, pak je tvrzení dokázáno.

Tímto způsobem byl É. Borel přiveden k otázce redukce nekonečného spočetného pokrytí na konečné.

Poznamenejme ještě, že Borelova úvaha o volbě otevřených úseček připomíná Harnackův důkaz, že spočetnou podmnožinu reálné osy lze pokrýt spočetně mnoha intervaly o libovolně malé sumární délce. Ve skutečnosti tuto informaci É. Borel užívá při důkazu, že existuje dokonce *nespočetně* mnoho oblouků $\gamma(W)$, podél nichž lze mluvit o pokračování přes $\mathbb{T}$. Totiž pokud by takových $W \in [C, D]$ bylo spočetně, pak bychom je pokryli intervaly $J_1, J_2, \ldots$ o sumární délce menší než je rozdíl délky úsečky $[C, D]$ a sumární délky intervalů $I_0, I_1, \ldots$, a pak bychom pracovali s $I_0, I_1, \ldots, J_1, J_2, \ldots$

Z hlediska formování teorie míry je důležitý ještě Borelův postřeh: Množina bodů $W \in [C, D]$, pro něž má smysl mluvit o pokračování přes $\mathbb{T}$, je nejen nespočetná, ale v jistém smyslu vyplní takřka celou úsečku, až na část „libovolně malé délky“. (V dnešní terminologii samozřejmě mluvíme o jednorozměrné Lebesgueově míře.) Totiž, pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ můžeme úvahu zopakovat pro volbu $\delta'_n := (1/m)\,\delta_n$ místo δ_n. Pak sumární délka příslušných intervalů I'_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je menší než $(1/m)\,d$ a řada (2) konverguje pro každé $W \in [C, D] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} I'_n$ absolutně a stejnoměrně na $\gamma(W)$.

Ještě jedna poznámka na závěr. É. Borel dokazuje *existenci* (dokonce nespočetně mnoha) oblouků $\gamma(W)$, aniž by kterýkoli jediný specifikoval explicitně. V tomto smyslu má Borelova argumentace charakter *pravděpodobnostního důkazu* užívaného hojně v moderní matematice: existence objektu majícího určitou vlastnost (V) se dokazuje pomocí odůvodnění, že pravděpodobnost, že (V) neplatí, je menší než 1. (V Borelově případě by *pravděpodobnost* znamenala normalizovanou jednorozměrnou míru na úsečce $[C, D]$.)

3 É. Borel a teorie míry

Zásadní impulz do vývoje integrálu vnesl B. Riemann otázkou formulovanou v jeho habilitačním spise: *Co znamená* $\int_a^b f(x)\,dx$?

A.-L. Cauchy pracoval se součtovou definicí integrálu pro *spojité funkce*. Riemannův zájem míří jiným směrem: jak vypadají *všechny* funkce, pro něž má smysl mluvit o integrálu (na základě součtové definice)? Pro omezené funkce B. Riemann formuluje nutnou a postačující podmínku integrovatelnosti. Její vyjádření je, z pohledu současné matematiky, poněkud těžkopádné. Důvod je přirozený: ještě dalších 50 let bylo třeba počkat na uspokojivý pojem lineární míry, který zobecňuje pojem délky intervalu a umí měřit dostatečně široký systém podmnožin reálné osy. S takovou výbavou je pak matematické vyjádření faktu, že riemannovsky integrovatelné funkce jsou přesně ty, které nejsou příliš nespojité, jasné a elegantní: *Je-li* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omezená funkce, pak* f *je riemannovsky integrovatelná, právě když množina bodů nespojitosti funkce* f *má Lebesgueovu míru* 0.

V druhé polovině 19. století se postupně dostávají na scénu komplikovanější funkce i podmnožiny reálných čísel. Vznikaly nemalé nejasnosti (až zmatky) v chápání různých pojetí zanedbatelných množin.[10]

Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *množina nulové délky* (v Jordan-Peanově smyslu), jestliže M lze pokrýt *konečně* mnoha intervaly libovolně malé sumární délky. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *řídká*, jestliže každý interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahuje interval J takový, že $M \cap J = \emptyset$. První definice má metrický charakter, druhá topologický, a problém je v tom, že tyto pojmy nejdou ruku v ruce. Je třeba si také uvědomit, že se teorie bodových množin sotva rodila a představy o komplikovaných (např. řídkých) množinách byly velmi povrchní a zjednodušené. Objev řídkých množin, které nelze pokrýt *konečně* mnoha intervaly libovolně malé délky, byl významným krokem pro další vývoj matematické analýzy.

Borelovy výzkumy s definitivní platností poukázaly na *principiální nedostatečnost* pojmu délky založeném na konečných systémech intervalů. Jestliže uvažujeme množinu N všech $W \in [C, D]$, pro něž řada (2) na $\gamma(W)$ *nekonverguje*, pak množiny N a $[C, D] \backslash N$, z pohledu délky v Jordan-Peanově pojetí, nerozlišíme, neboť obě mají vnitřní délku 0 a vnější délku rovnou délce úsečky $[C, D]$. Operování se *spočetně mnoha* množinami se stalo nevyhnutelností a tento přístup vedl É. Borela k axiomatické definici[11] pojmů měřitelnosti a míry, které uvádíme v poněkud modernizované formě ve volném překladu:

Jestliže je množina tvořena nekonečně mnoha disjunktními intervaly o sumární délce s, řekneme, že tato množina má míru s. Jestliže dvě disjunktní množiny mají míry s a s', pak jejich sjednocení má míru $s + s'$...

Obecněji: jestliže po dvou disjunktní množiny ze spočetného nekonečného systému mají míry $s_1, s_2, \ldots$, pak jejich sjednocení má míru $s_1 + s_2 + \ldots$

To vše plyne z naší definice míry. Ještě další definice: jestliže množina E míry s obsahuje množinu E' míry s', potom množina $E \backslash E'$ má míru $s - s'$...

Množiny, kterým lze podle této definice přiřadit míru, se nazývají měřitelné.

Zde stojíme u samotného zárodku moderní teorie míry jako σ-aditivní množinové funkce definované na σ-algebře.[12]

É. Borel se otázkou rozsáhlosti systému měřitelných množin nezabýval, zmiňuje pouze, že uzavřené množiny jsou měřitelné. Neuvádí žádnou souvislost své koncepce míry s integrálem. Nevyjadřuje se ani k tomu, zda množina N (výše zmíněná v souvislosti s divergencí řady (2)) je měřitelná (ve skutečnosti je jen obsažena v měřitelné množině (= borelovské množině) míry nula a není nutně borelovská).

Závěrem můžeme konstatovat, že É. Borel teorii míry nerozpracoval, vytvořil však její základy a ideově ji, vlastně jako vedlejší produkt svých bádání o komplexních funkcích, inicioval.

[10] Podrobnou diskusi lze nalézt např. v [41], kap. 3, a [46], kap. 9. Viz také [51].

[11] É. Borel byl ovlivněn svým kolegou a spolužákem z École normale supérieure J. Drachem. Viz [41], s. 103. J. Drach byl jeden z prvních matematiků systematicky uplatňujících abstraktní axiomatickou metodu v teorii čísel, algebře i analýze; matematické objekty jsou vymezeny svými vlastnostmi ve formě postulátů.

[12] Historii teorie míry a integrálu je věnována rozsáhlá literatura. Mnoho odkazů lze nalézt na [68], zde zmíníme pouze knihy [21], [46], kap. 9, [50], kap. 44, [55] a [69]. Borelově přístupu je speciálně věnován článek [22]. Přehledně je historie integrálu od Riemanna k Lebesgueovi vyložena např. v [51] a [69].

Skutečné vybudování míry a zejména její systematické uplatnění jako stavebního kamene pro nový účinný pojem integrálu bylo dílem H. Lebesguea.[13]

4 Věta o konečném pokrytí v historické perspektivě

V úvodní historické poznámce ke své stati o Borelově větě[14] T. H. Hildebrandt v roce 1926 říká: *Stejně jako v případě jiných matematických výsledků, zrození Borelovy věty představuje zajímavou kapitolu matematické historie, k níž budoucnost bezpochyby přispěje dalšími poznatky. Zatím pocta za první nepopiratelné vyslovení věty o intervalech náleží Borelovi, přestože Borelova formulace zahrnuje pouze redukci spočetného systému na konečný. Název Heine-Borelova věta patrně pochází od Schoenfliese, který uvádí souvislost Borelovy věty s Heineho důkazem stejnoměrné spojitosti spojité funkce na intervalu, publikovaným v roce 1872. O tom, že by si Heine byl vědom toho, že jeho důkaz v sobě skrývá větu o pokrytí, lze pochybovat.*

E. Heine v úvodu článku z roku 1872 říká, že jeho práce je v zásadě shrnutím výsledků dosažených jinými matematiky. Je zajímavé, že zásluhy připisuje především K. Weierstrassovi, méně G. Cantorovi, avšak Dirichletův podíl zmíněn není. Ve skutečnosti Heineho důkaz víceméně opakuje Dirichletovu argumentaci z roku 1854.[15] Věta, kterou P. G. L. Dirichlet dokazuje, má toto znění: *Budiž $y = f(x)$ funkce proměnné x, spojitá v intervalu, který jde od a k b* [myslí se uzavřený]. *Pak je vždy možné nalézt pro každou kladnou libovolně malou veličinu ρ druhou příslušně malou veličinu σ, která má tu vlastnost, že na každém podintervalu* [délky] $\leq \sigma$ *se funkce y nemění o více než ρ.*

Jedná se tedy o větu o stejnoměrné spojitosti, i když takový termín P. G. L. Dirichlet neužívá (ten pochází od E. Heineho).

Zde připomeneme pouze hlavní myšlenku Dirichletova důkazu. *Směřuje se od a k b. Označme c_1 bod, v němž se funkce poprvé liší (v absolutní hodnotě) o ρ od počáteční hodnoty $f(a)$, takže $|f(c_1) - f(a)| = \rho$ a $|f(x) - f(a)| < \rho$ pro x mezi a a c_1. Stejným způsobem se postupuje od c_1 a označí se c_2 hodnota x, v níž poprvé se $f(x)$ liší od $f(c_1)$ o $\pm\rho$, takže podobně $|f(c_2) - f(c_1)| = \rho$ a $|f(x) - f(c_1)| < \rho$ pro všechna x mezi c_1 a c_2; takto se pokračuje dále. Tak dostáváme posloupnost hodnot $a, c_1, c_2, \ldots$ s uvedenými vlastnostmi. Zajímáme se o to, zda lze po konečném počtu kroků dosáhnout b, tedy chceme vědět, zda dospějeme k poslední hodnotě $\widetilde{c}$, která buď splývá s bodem b nebo je mu tak blízko, že pro každé x mezi $\widetilde{c}$ a b se $f(x)$ liší od $f(\widetilde{c})$ o veličinu menší než*

[13] Způsob, kterým teorii míry a integrálu H. Lebesgue rozpracoval, byl příčinou ostrých prioritních sporů mezi Borelem a Lebesguem. Jsou zaznamenány v četných dopisech adresovaných Lebesguem Borelovi. Viz [56]. (Dopisy Borela Lebesgueovi se nezachovaly.) Prioritní souboj někdy bývá přirovnáván k polemice mezi Newtonem a Leibnizem; v případě francouzských matematiků však jejich současníci do sporu nevstupovali. K definitivní roztržce mezi Borelem a Lebesguem dochází v roce 1917. Zajímavý komentář ke vztahům H. Lebesguea a É. Borela podává G. Choquet. Viz [56], s. 13, a [21], s. 28. Připomíná, že otázka priority zůstala živá i ve dvacátých letech. Ještě v roce 1928, při dalším vydání Borelových *Leçons sur la théorie des fonctions*, můžeme číst: *Pan Lebesgue myslel, že dokázal s podrobnostmi, co já jsem vyslovil; ale to se dá provést jinak.* Ono *jinak* není příliš přesvědčivé a sám É. Borel nikdy nepřišel s vysvětlením. V dopise Baireovi se de la Vallée Poussin v roce 1922 o sporu vyjádřil takto: *Sotva jde o vědeckou výměnu názorů, je to především konflikt dvou povah.* Viz [56], s. 13.

[14] V článku [45] je velmi podrobně rozebrán vývoj poznatků souvisejících s Borelovou větou do roku 1925. Důraz je zejména kladen na různé důkazy i na roli Borelovy věty v rozvíjející se moderní matematické analýze a topologii. Viz kapitola *The Borel Theorem in General Spaces.*

[15] V roce 1904 vydal G. Arendt publikaci *Leçons sur la théorie des intégrales simples et multiples* se zápisky Dirichletových přednášek z let 1852 až 1854.

je ρ. [Nyní nastává zásadní moment důkazu.] *Pokud by tomu tak nebylo, měli bychom rostoucí posloupnost $\{c_n\}$, která konverguje k číslu $c \le b$. Protože*

$$\left| f(c_{n+1}) - f(c_n) \right| = \rho \tag{3}$$

a f je spojitá v bodě c, hodnoty $f(c) - f(c_n)$ a $f(c) - f(c_{n+1})$ se blíží k nule pro rostoucí n. Tudíž také jejich rozdíl $f(c_{n+1}) - f(c_n)$ se blíží k nule, což odporuje rovnosti (3).

P. Dugac vyslovuje přesvědčení, že v Dirichletově důkazu je myšlenka pokrytí explicitně vyjádřena.[16] Tento názor, na základě pečlivé analýzy, zpochybňují B. Maurey a J.-P. Tacchi. Spojení Heine-Borel, které se dodnes v učebnicích často vyskytuje, nepovažují za oprávněné.[17]

Zpětně lze samozřejmě hledat zárodek věty o pokrytí ve výsledcích předcházejících Borelově větě. Z literatury uvedeme dva výsledky, které jsou větě o pokrytí ideově blízké.

S. Pincherle je autorem této věty[18] z roku 1881: *Jestliže f je kladná funkce zdola odražená od nuly v nějakém okolí každého bodu uzavřeného intervalu I, potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $f(x) \ge \varepsilon$ pro každé $x \in I$.* V pozadí tohoto výsledku může někdo spatřovat náznak redukce nekonečného (ale ne spočetného) systému otevřených intervalů (= okolí) na konečný. Podobně vyznívá výsledek,[19] který P. Cousin vyslovil v roce 1895: *Jestliže je každému bodu uzavřené oblasti v rovině přiřazen kruh obsahující tento bod, potom lze takovou oblast rozdělit na konečný počet podoblastí, z nichž každá leží uvnitř některého z kruhů daného systému.* Zde je opět navozena idea redukce nespočetného systému na konečný.

Obecné znění Borelovy věty, kde se pokrývající systém otevřených intervalů nepředpokládá spočetný, bývá připisováno H. Lebesgueovi, který důkaz publikoval v roce 1904. H. Lebesgue v roce 1907 uvádí,[20] že „tento důkaz pochází z roku 1898 od A. Vieillefonda nebo ode mne, už nevím, když jsme společně studovali Borelovu disertaci". Často bývá „nespočetná" verze Borelovy věty nazývána Borel-Lebesgueova, což patrně není také úplně korektní. Důkazy[21] A. Schoenfliese a W. H. Younga časově předcházejí důkaz *publikovaný* H. Lebesguem. Ve skutečnosti v důsledku

---

[16] Viz [25], s. 93.

[17] Autoři [60] píší: *Dugacovo tvrzení se nám zdá přehnané. I když je nezpochybnitelné, že Dirichlet obdržel výsledek konečnosti, může se o souvislosti s Borelovou větou o pokrytí mluvit na základě jednoduchého faktu, že se interval prostřednictvím konečného počtu bodů rozdělí na konečný počet menších podintervalů? Nezdá se nám, že se pouhá idea konečného podrozdělení intervalu, používaná například v definici Riemannova integrálu, přibližuje podstatným způsobem k myšlence věty o pokrytí.* Velmi rozhodně proti spojení *Heine-Borel* vystoupil H. Lebesgue v souvislosti s Veblenovým článkem [90] *The Heine-Borel theorem* z roku 1904, v němž je spojení prosazováno. V [56] si lze přečíst Lebesgueův dopis z 15. září 1904 adresovaný É. Borelovi, kde H. Lebesgue píše: *Veblen (Osvald) je nemístný šprýmař. Vidíte, v tom celém* [v dopise H. Lebesgue překládá takřka doslova Heineho důkaz] *naprosto nefiguruje pokrytí intervalu nekonečně mnoha intervaly, z nichž se pak vybírá. Shrnuji. Heine o Vaší větě neříká nic, vůbec nic, ani vzdáleně ...* H. Lebesgue dopis uzavírá: *Jde o pitomost, kterou jsem předpokládal, ale hroznější, než jsem předpovídal.* Další komentáře ke spojení *Heine-Borel* lze nalézt v [13], [25], [60] a [15], 2. díl, s. 841, 3. díl, s. 1249.

[18] Viz např. [45], [66], kap. III.

[19] Podrobná analýza je zpracována v kapitolách *Le lemme de Cousin* v [60] a [61]. J. Mawhin rozebírá detailně vztah Borelovy věty a Cousinova lemmatu. V souvislosti s větou o pokrytí zůstává Cousinovo jméno ve starší literatuře zcela v pozadí. Jeho zájem se soustřeďoval na funkce více komplexních proměnných a v této disciplíně jsou jeho výsledky ceněny. Je pozoruhodné, že Cousinovo lemma bylo vícekrát „znovuobjeveno", v padesátých letech v souvislosti s Henstock-Kurzweilovým integrálem. Viz [61].

[20] Recenze knihy W.-H. Young, C. Young: *The Theory of Sets of Points.* Viz [54].

[21] Jde o práce [80], [81], [97] a také [98], [76], [82]. Podrobnější komentář je uveden v [60].

Lindelöfovy věty[22] lze redukci od nespočetného ke konečnému provést ve dvou krocích: *Každý systém otevřených intervalů obsahuje spočetný podsystém se stejným sjednocením.* Z dnešního pohledu jsou prioritní spory o původ Borelovy věty o pokrytí pro *libovolné* systémy intervalů vcelku málo pochopitelné.[23]

Na tomto místě, ještě před komentářem k Borelovým důkazům, se podívejme na důkaz Borelovy věty v obecném znění, jak ji v knize *Leçons sur l'intégration*[24] dokazuje H. Lebesgue. *Předpokládejme, že $\mathcal{I}$ je systém otevřených intervalů pokrývající interval $[a,b]$. Existuje interval $(\alpha,\beta) \in \mathcal{I}$, pro nějž $\alpha < a < \beta$. Zřejmě platí: pro každé $x \in (\alpha,\beta)$ je možno interval $[a,x]$ pokrýt konečně mnoha intervaly z $\mathcal{I}$, což vyjádřím obratem, že x je dostižen. Je třeba dokázat, že b je dostižen. Je-li x dostižen, všechny body z $[a,x]$ jsou také dostiženy. Jestliže x není dostižen, žádný bod z $[x,b]$ není dostižen. Pokud tedy b není dostižen, existuje první bod, který není dostižen, nebo poslední bod, jenž je dostižen. Označme tento bod*[25] *x_0. Pak existuje $(\alpha_1,\beta_1) \in \mathcal{I}$, pro nějž $x_0 \in (\alpha_1,\beta_1)$. Nechť x_1 je bod z (α_1,x_0), x_2 je bod z (x_0,β_1). Pak, podle předpokladu, x_1 je dostižen, tedy konečně mnoho intervalů z $\mathcal{I}$ poslouží k jeho dostižení. Přidání (α_1,β_1) nám poslouží k dostižení bodu $x_2 > x_0$. Tedy x_0 není ani poslední bod, který je dostižen, ani první, který není dostižen. Tudíž bod b je dostižen.*

V poznámce pod čarou H. Lebesgue píše, že tato verze umožňuje podat přímý důkaz věty o stejnoměrné spojitosti: *Nechť funkce f je spojitá v každém bodě z $[a,b]$. Každý bod z $[a,b]$ je tedy podle definice obsažen v otevřeném intervalu, v němž je oscilace funkce menší než ε. Interval $[a,b]$ lze pokrýt konečně mnoha takovými intervaly. Nechť l je délka nejkratšího z použitých intervalů. Pak v každém intervalu délky l je oscilace f nejvýše 2ε, neboť takový interval zasáhne nejvýše dva intervaly. Tedy spojitost je stejnoměrná.*

Původní Borelův důkaz z disertace zde reprodukovat nebudeme.[26] Je založen na Cantorově teorii ordinálních čísel (na transfinitní indukci) a užívá jednak spočetnost pokrývajících intervalů, jednak fakt, že množina spočetných ordinálních čísel je nespočetná.

V roce 1903 É. Borel formuluje a dokazuje tuto větu:[27] *Je-li E omezená a uzavřená podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ a $E_1, E_2, \ldots$ je spočetný systém množin takový, že každý bod z E je obsažen ve vnitřku některé z nich, potom lze mezi $E_1, E_2, \ldots$ nalézt konečný počet množin takových, že každý bod z E je vnitřním bodem alespoň jedné z nich.* Důkaz je založen na myšlence postupného půlení a je (víceméně formální) modifikací důkazu, který pro uzavřený interval $E := [a,b] \subset \mathbb{R}$ uvádí É. Borel v *Leçons sur la théorie des fonctions.* (Není bez zajímavosti, že podtitul této knihy je *Principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions.*) Důkaz, který je dnes běžný a bývá zařazován do základních kurzů matematické analýzy, připomeneme jen v rychlosti pro jednorozměrný případ.

Má se dokázat, že existuje index k takový, že každý bod z $[a,b]$ je vnitřním bodem některé z množin $E_1, \ldots, E_k$. Předpokládejme, že takové k neexistuje. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje bod $x \in [a,b]$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, pro něž x je vnitřním bodem E_n, platí $n > m$. Nyní

[22] Viz [57] a [58].

[23] Prioritní spory se táhly až do roku 1913. Viz [83]. V [60] se píše: ... *dožadování se autorství u tohoto zobecnění bylo příležitostí k určitým polemikám mezi Schoenfliesem, Youngem, Lebesguem, které nám dnes mohou připadat tak trochu směšně malé.*

[24] Viz [53], s. 105.

[25] Současné vyjádření by bylo: položme $x_0 := \sup\{x \in [a,b] : x \text{ je dostiženo}\}$.

[26] Viz [11]; důkaz je reprodukován např. v [45] a [60].

[27] Viz [15], 3. díl, s. 1467.

interval $[a, b]$ rozpůlíme. Potom alespoň jeden ze vzniklých dvou uzavřených intervalů má stejnou vlastnost, tedy nelze ho pokrýt konečně mnoha množinami z $E_1, E_2, \ldots$ Postupným půlením vytvoříme posloupnost do sebe zařazených uzavřených intervalů I_n s délkami konvergujícími k nule. V průniku těchto intervalů leží právě jeden bod x_0. Platí $x_0 \in [a, b]$ a pro vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ je x_0 vnitřním bodem množiny E_{n_0}. Pro dostatečně velké n je $I_n \subset E_{n_0}$, což odporuje konstrukci intervalů $I_1, I_2, \ldots$

É. Borel v poznámce pod čarou píše: *Slovo spočetný* [systém] *bychom mohli vypustit, aniž by tvrzení přestalo platit; za tuto poznámku vděčím panu Lebesgueovi. Avšak zde jsme potřebovali tvrzení uvedené v textu, které se snadněji dokáže.*

É. Borel se k větě o pokrytí uzavřených intervalů $[a, b]$ pomocí spočetně mnoha otevřených intervalů $I_0, I_1, \ldots$ vrací v souvislosti s teorií míry v roce 1912.[28] Jak poznamenávají B. Maurey a J.-P. Tacchi, Borelův nový důkaz má takřka algoritmický charakter a zaslouží, aby byl zmíněn.

Nechť $b_0 = a$ a n_1 je nejmenší index, pro nějž $b_0 \in J_{n_1}$. Označíme $J_{n_1} := (a_1, b_1)$, tedy $a_1 < b_0 < b_1$. Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$ a že je definován interval $J_{n_k} := (a_k, b_k)$. Pokud $b_k \leq b$, označíme n_{k+1} nejmenší index takový, že $b_k \in J_{n_{k+1}} := (a_{k+1}, b_{k+1})$. Dokážeme, že se tento proces po konečně mnoha krocích zastaví. Přesněji řečeno, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $b_N > b$, takže intervaly (a_n, b_n), $1 \leq n \leq N$, pokrývají interval $[a, b]$. Protože posloupnost $\{b_k\}$ je rostoucí, indexy n_k odpovídající intervalům $J_{n_k} = (a_k, b_k)$ jsou navzájem různé. Pokud by se proces nezastavil, rostoucí posloupnost $\{b_k\}$ by konvergovala k číslu $c \in (a, b]$. Ale bod c je obsažen v jistém intervalu J_m. Existuje dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > m$ a zároveň $b_k \in J_m$. To je však ve sporu s definicí n_{k+1} jako nejmenšího indexu n, pro nějž $x \in J_n$.

5 Od teorie míry k topologii

Pro É. Borela byla věta o pokrytí základním stavebním kamenem pro teorii míry. Význam Borelova výsledku pro další vývoj teorie míry, z velké části formulované v abstraktním kontextu, přestal být dominantní. Na druhé straně Borelova věta otevřela cestu k rozsáhlé kapitole topologie – teorii kompaktnosti, která se ukázala velice užitečná v různých oblastech matematiky.

V klasické monografii J. L. Kellyho[29] je v úvodu kapitoly 5 uvedeno: *Pojem kompaktního topologického prostoru … vznikl jako výsledek abstrakce vycházející z některých důležitých vlastností prostoru reálných čísel. Klasická Heine-Borel-Lebesgueova věta tvrdí, že každé otevřené pokrytí libovolné omezené uzavřené podmnožiny prostoru reálných čísel obsahuje konečné podpokrytí. Tato věta má neobyčejně hluboké důsledky. Stalo se s ní totéž, co s většinou dobrých vět: její závěr se stal definicí.*

Na začátku 20. století se čím dál více objevuje tendence studovat abstraktní prostory. M. Fréchet, ve snaze najít společný kontext pro Cantorovu teorii bodových množin a pro studium funkcí chápaných jako body vhodného prostoru, zavedl řadu abstraktních pojmů, z nichž postupně vykrystalizovaly struktury běžně užívané v moderní matematice. Nejprve se M. Fréchet snažil axiomatizovat pojem limity, následně zavedl (pod jiným názvem) metrické prostory, později prostory vycházející z pojmu okolí a formuloval výsledky, které jsou zobecněním základních vět známých z reálné analýzy.[30] Jeho první definice kompaktnosti je založena na neprázdnosti průniku libovolné posloupnosti do sebe zařazených neprázdných uzavřených množin. Ukazuje, že tato

[28] Viz [14].
[29] Viz [48], kap. 5.
[30] Viz Fréchetova disertace [32].

podmínka je ekvivalentní existenci hromadného bodu pro libovolnou nekonečnou množinu.[31] Poznamenává, že (relativně) kompaktní množiny mají vlastnosti analogické *omezeným množinám* (konečné množiny jsou kompaktní; sjednocení konečně mnoha kompaktních množin je kompaktní množina; množina, která obsahuje nekompaktní množinu, není kompaktní). Analogie s omezenými množinami zde vychází z Bolzano-Weierstrassovy věty pro prostor reálných čísel a Fréchetovy výzkumy jsou motivované snahou najít vhodný abstraktní rámec pro Weierstrassovu větu o existenci minima spojité funkce.

Pro náš výklad je podstatné, že M. Fréchet byl prvním matematikem, který v obecnosti upozornil na souvislost mezi Bolzano-Weierstrassovou větou a Borelovou větou.[32] Kontext, v němž ekvivalenci dokázal, nechme zde stranou. V prvních desetiletích 20. století se objevuje celá řada výsledků, v nichž se různé verze (často vzájemně neekvivalentních) pojmů blízkých ke kompaktnosti vyskytují.[33] Terminologie je nejednotná, také abstraktní rámec, v němž se pracuje, se postupem času vyvíjí.

V Hausdorffově *Grundzüge der Mengenlehre* (1914) je v kontextu topologických prostorů (definice pomocí axiomů pro okolí) kompaktnost charakterizována pomocí Borelovy věty o pokrytí. V kapitole VIII, §8, je pro metrické prostory dokázána věta o souvislosti kompaktnosti a totální omezenosti.[34] Role Borelovy věty byla předmětem podrobného zkoumání P. S. Urysona a P. S. Aleksandrova.[35] V obecných topologických prostorech, jak se ukázalo, není možné opírat se o vlastnosti posloupností. Např. uzavřené množiny, na rozdíl od metrických prostorů, není možné v topologii charakterizovat pomocí konvergentních posloupností, množiny bodů indexované přirozenými čísly jsou obecně „krátké“. Také v této obecnosti nelze kompaktnost charakterizovat pomocí existence vybrané konvergentní posloupnosti. A. Weil na toto téma v roce 1937 napsal:[36] *Opustíme-li spočetnost, není již legitimní považovat pojem posloupnosti a pojem limity za podstatný nástroj a je třeba tyto pojmy nahradit jinými, jejichž pole působnosti je méně omezující.* Ve stejné době H. Cartan uvedl:[37] *Přes veškeré služby, které spočetné posloupnosti poskytly topologii, není jejich využití přizpůsobeno studiu obecných prostorů.*

Adekvátním prostředkem se ukázal být pojem filtru a případně pojem zobecněných posloupností (*nets*), které zde již nebudeme rozebírat.

---

[31] Viz [30] a [31]. Podrobnější výklad přínosu M. Frécheta lze nalézt např. v [71] a [72].

[32] Viz Fréchetova disertace [32], s. 26.

[33] Např. *ensemble compact, ensemble extrémal, ensemble compact en soi, ensemble parfaitement compact, parfaitement compact en soi, ensemble bicompact, ensemble totalement borné, espace quasi-compact.*

[34] Viz [33], [40], kap. 8.8.

[35] Zejména uvádíme [1], [3], [4] a [2], kap. 2. Od P. S. Aleksandrova a P. S. Urysona pochází pojem bikompaktního prostoru. (Ještě v druhé polovině 20. století byla terminologie nejednotná; nyní se termín *bikompaktní* neužívá.) Pro vysvětlení původu termínu bikompaktní připomeňme definice z Aleksandrovových a Urysonových prací. Je-li M podmnožina topologického prostoru X a $x \in X$, pak se x nazývá *úplný hromadný bod množiny* M, jestliže každé okolí bodu x protíná M v množině stejné mohutnosti, jako má M. Podmnožinu M nazývají autoři *kompaktní*, jestliže má Borelovu vlastnost pro každé *spočetné* pokrytí, neboli, ekvivalentně, každá spočetná podmnožina M má úplný hromadný bod. Tuto ekvivalenci autoři zobecnili záměnou „spočetná“ za „množina mohutnosti $\leq m$“ a zavedli termín *bikompaktní* pro případ, že ekvivalentní podmínky platí pro libovolnou mohutnost. Podrobné ospravedlnění termínu *bikompaktní* lze nalézt v [4] na s. 17.

[36] Viz [96], s. 3.

[37] Viz [20]. N. Bourbaki pracuje s pojmy filtru a ultrafiltru systematicky. Viz [16], kap. I.6, [17], s. 143.

Pro moderní matematiku se Borelova věta stala definicí: Topologický prostor se nazývá *kompaktní*, jestliže z každého jeho otevřeného pokrytí lze vybrat konečné pokrytí.

V průběhu 35 let od vyslovení Borelovy věty o pokrytí pro reálnou přímku se díky řadě objevů dostala topologie do stádia dospělosti a byly dosaženy zásadní hluboké výsledky o kompaktnosti.[38] Jmenujme především obdivuhodný výkon dvaadvacetiletého A. N. Tichonova, který v roce 1929 dokázal, že *kartézský součin libovolného systému kopií kompaktního intervalu* $[0,1]$ (tedy $[0,1]^I$, kde I je indexová množina libovolné mohutnosti) *je kompaktní v součinové topologii.* Další hluboký výsledek z roku 1937 patří E. Čechovi: *Libovolný topologický součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní prostor.* Jako poslední zmíníme tzv. *Stone-Čechovu kompaktifikaci*, tedy vnoření libovolného úplně regulárního prostoru X do Hausdorffova kompaktního prostoru $\beta(X)$ takového, že X je hustá podmnožina $\beta(X)$ a každá omezená spojitá funkce na X má spojité rozšíření na $\beta(X)$.

6 Význam kompaktnosti: vybrané ukázky

Redukce nekonečného na konečné je blahodárná v mnoha matematických situacích. Několik z nich,[39] většinou spadajících do matematické analýzy, zde pro ilustraci, často jen v náznaku, uvedeme.

E. Hewitt v článku *The rôle of compactness in analysis*[40] píše: *Analýza je obrovský obor matematiky a pojem kompaktnosti a argumenty na něm založené vstupují do velice mnoha různých částí analýzy. Předložit skutečně adekvátní obraz o roli kompaktnosti v analýze by vlastně vyžadovalo pokrýt většinu analýzy ... Kompaktnost také hraje životní roli v mnoha důkazech existence jako důkazová technika.*

[38] Výsledky A. N. Tichonova a E. Čecha jsou publikovány v [89] a [23]. O Čechových a Tichonovových pracích a o původu Stone-Čechovy kompaktifikace se lze poučit v [19] a [84]. Historický pohled na vývoj topologie přináší [35]. Pěkný komentář je uveden v [79], s. 383: *A. Tichonov* [89] *dokázal kompaktnost kartézského součinu intervalů a výsledek užil ke konstrukci prostoru nyní známého jako Čechova* (*nebo Stone-Čechova*) *kompaktifikace úplně regulárního prostoru. E. Čech* [23] *dokázal kompaktnost součinu kompaktních prostorů v obecném případě a studoval vlastnosti kompaktifikace. Tudíž se ukazuje, že Čech dokázal Tichonovovu větu, zatímco Tichonov našel Čechovu kompaktifikaci – dobrá ilustrace historické spolehlivosti pojmenovávání v matematice.* S tím jsme se již v tomto příspěvku setkali u věty o pokrytí. Poslední ilustrace: v [42], s. 182, E. Heine v poznámce pod čarou uvádí, že převzal od G. Cantora fakt, že *funkce f je spojitá v bodě x, když a jen když $f(x_n)$ se blíží k $f(x)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, která se blíží k x ...* Mnoho z nás se na přednáškách odkazuje na *Heineho definici* spojitosti ...

[39] Celá řada aplikací zůstává nezmíněna. Např. Riesz-Schauderova teorie kompaktních operátorů, role kompaktnosti ve spektrální teorii, v topologické teorii míry, teorii pravděpodobnosti atd., nemluvě o užití kompaktnosti mimo analýzu.

[40] Článek [43] je založen na autorových přednáškách, které jako zvaný řečník pronesl v roce 1957 na zasedáních Mathematical Association of America. Teze prezentovaná v článku spočívá v konstatování, že pro velice mnoho tvrzení v analýze platí: (a) jsou triviální pro konečné množiny; (b) pravdivá a přiměřeně jednoduchá pro nekonečné kompaktní množiny; (c) buďto neplatí nebo jejich důkaz je extrémně obtížný v nekompaktním případě. V závěru článku autor zdůrazňuje roli kompaktnosti pro věty o existenci. Vysvětluje princip, jak kompaktnost za určitých okolností umožňuje získat řešení úloh na extrémy pomocí *minimizující* posloupnosti. Článek uzavírá slovy: *There is a formidable list of existence theorems in analysis that employ this compactness technique. However, as Kipling said, that is another story.* Ukázky této *story* jsou zařazeny v částech 6, 7, 8 a 10.

6.1 Spojité funkce na uzavřeném intervalu

Věta. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Potom funkce f je omezená.*

Důkaz. Nechť $x \in [a,b]$. Protože funkce f je v bodě x spojitá, existuje $\delta(x) > 0$ takové, že

$$|f(y) - f(x)| \le 1, \quad y \in [a,b] \cap \big(x - \delta(x), x + \delta(x)\big).$$

Pak $\big\{\big(x-\delta(x), x+\delta(x)\big)\big\}_{x\in[a,b]}$ je otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$. Existují tudíž body $x_1, \dots, x_n$ v intervalu $[a,b]$ takové, že $[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{n} \big(x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)\big)$. Zřejmě tedy f je omezená, neboť

$$|f(y)| \le 1 + \max\big\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_n)|\big\}, \quad y \in [a,b].$$

□

Toto tvrzení, které je zařazeno v každém kurzu analýzy, je okamžitě zřejmé, pokud víme, že je $f\big([a,b]\big)$, jako spojitý obraz kompaktní množiny, kompaktní množina. Pak je navíc jasné, že taková funkce nabývá svého maxima a svého minima.[41]

Samozřejmě je možno dokázat existenci např. maxima pomocí věty o pokrytí takto. Nechť $M := \sup f\big([a,b]\big)$. Víme, že $M < \infty$. Předpokládejme, že pro každé $x \in [a,b]$ je $f(x) < M$; odvodíme spor. Nechť $z \in [a,b]$. Potom (spojitost!) existuje $\eta(z) > 0$ takové, že $f(y) < f(z) + \frac{1}{2}\big(M - f(z)\big)$ pro každé $y \in [a,b] \cap \big(z - \eta(z), z + \eta(z)\big)$. Pak existují body $z_1, \dots, z_k \in [a,b]$ takové, že $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} \big(z_i - \eta(z_i), z_i + \eta(z_i)\big)$. Označme M' největší z čísel $f(z_1), \dots, f(z_k)$, takže $M' < M$. Je-li $x \in [a,b]$, je $x \in \big(z_i - \eta(z_i), z_i + \eta(z_i)\big)$ pro vhodné $i \in \{1, \dots, k\}$. Potom $f(x) \le f(z_i) + \frac{1}{2}\big(M - f(z_i)\big) = \frac{1}{2} f(z_i) + \frac{1}{2} M \le \frac{1}{2}(M' + M)$. Odtud $\sup f\big([a,b]\big) < M$, což je spor.

Poznamenejme, že v učebnicích se často tato věta dokazuje s využitím Bolzano-Weierstrassovy věty. Výše uvedený důkaz jsme volili jako další ilustraci techniky konečného pokrytí.

Bylo v něm podstatné, že pro každé $z \in [a,b]$ množina $\big\{y \in [a,b] : f(y) < f(z) + \frac{1}{2}(M - f(z))\big\}$ obsahuje okolí bodu z v $[a,b]$.

Jednoduchá modifikace úvah, které jsme provedli na základě věty o konečném pokrytí pro uzavřený interval, vede např. k větě o existenci minima (na niž se budeme odvolávat v dalším textu). Připomínáme, že funkce $G : X \to (-\infty, \infty]$ na topologickém prostoru X se nazývá *zdola polospojitá*,[42] jestliže pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $\{x \in X : G(x) > c\}$ otevřená.

Věta. *Nechť X je neprázdný kompaktní topologický prostor, $F : X \to (-\infty, \infty]$ je zdola polospojitá funkce. Potom je funkce F zdola omezená a nabývá na X minima.*

[41] Věta o nabývání extrémů pochází od K. Weierstrasse z roku 1861. Její důkaz se často opírá o tzv. Bolzano-Weierstrassovu větu o existenci vybrané konvergentní posloupnosti z omezené posloupnosti reálných čísel a o tzv. Heineho definici spojitosti. Viz [92], kap. 2.4 a 4.3, kde lze nalézt historické poznámky.

[42] Na první pohled by se mohlo zdát, že pojem polospojitosti pochází z *rozdělení* definice spojitosti na dvě části. Ve skutečnosti má tento pojem původ v Baireových výzkumech o *odděleně* spojitých funkcích; viz [7]. Nechť f je funkce dvou proměnných definovaná např. na intervalu $[-1,1] \times [-1,1]$ a nechť f je odděleně spojitá, tj. funkce $f_x : y \mapsto f(x,y)$, $y \in [-1,1]$, je spojitá pro každé $x \in [-1,1]$ a funkce $f^y : x \mapsto f(x,y)$, $x \in [-1,1]$, je spojitá pro každé $y \in [-1,1]$. Definujme $M(x) := \max\big\{f_x(y) : y \in [-1,1]\big\}$, $x \in [-1,1]$. Potom je M zdola polospojitá funkce, která obecně není spojitá. Školní příklad: $f(x,y) := 2\,xy/(x^2 + y^2)$, $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \setminus \big\{(0,0)\big\}$ a $f(0,0) := 0$.

6.2 Stejnoměrná spojitost na metrických prostorech

Věta. *Nechť (X, d_X) je kompaktní metrický prostor, (Y, d_Y) je metrický prostor a $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Potom je zobrazení f stejnoměrně spojité.*[43]

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Pro každé $x \in X$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že pro každé $x' \in X$, $d_X(x', x) < \delta(x)$, platí $d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \frac{1}{2}\,\varepsilon$. Nechť $V(x) := \big\{x' \in X :\ d_X(x', x) < \frac{1}{2}\,\delta(x)\big\}$. Potom $\{V(x)\}_{x\in X}$ je otevřené pokrytí kompaktního prostoru X, tedy existují body $x_1, \ldots, x_n$ z X takové, že $X = \bigcup_{j=1}^{n} V(x_j)$. Položíme-li $\delta := \frac{1}{2} \min \big\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\big\}$, je $\delta > 0$. Nechť x, $x' \in X$, $d_X(x, x') < \delta$. Pak existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $x \in V(x_k)$, takže $d_X(x, x_k) < \frac{1}{2}\,\delta(x_k)$. Dále platí $d_X(x', x_k) \le d_X(x', x) + d_X(x, x_k) < \delta + \frac{1}{2}\,\delta(x_k) \le \delta(x_k)$. Odtud dostáváme nerovnosti $d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \le d_Y\big(f(x'), f(x_k)\big) + d_Y\big(f(x_k), f(x)\big) < \varepsilon$.

□

6.3 Stoneovo aproximační lemma

Věta. *Nechť X je kompaktní topologický prostor, $C(X)$ je Banachův prostor reálných spojitých funkcí na X a nechť $\mathcal{F} \subset C(X)$ je svaz* (tj. pro $f, g \in \mathcal{F}$ je také $\min\{f, g\} \in \mathcal{F}$ a $\max\{f, g\} \in \mathcal{F}$) *a nechť $\mathcal{F}$ obsahuje konstanty a odděluje body* (tj. pro každé $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje $f \in \mathcal{F}$ splňující $f(x) \neq f(y)$). *Potom stejnoměrný uzávěr $\mathcal{F}$ je roven $C(X)$.*

Důkaz. Nechť $f \in C(X)$, $\varepsilon > 0$. Nejprve dokážeme, že pro každé $x \in X$ existuje funkce $g_x \in \mathcal{F}$ taková, že

$$g_x(x) = f(x) \quad \text{a} \quad g_x > f - \varepsilon \text{ na } X. \tag{4}$$

Zvolme $x \in X$. Z předpokladu o oddělování bodů snadno odvodíme: pro každé $y \in X$ existuje funkce $h_y \in \mathcal{F}$, pro niž

$$h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y).$$

Protože $h_y(y) > f(y) - \varepsilon$ a funkce h_y a f jsou spojité, existuje okolí $U(y)$ bodu y takové, že $h_y > f - \varepsilon$ na $U(y)$. Z otevřeného pokrytí $\big\{U(y)\big\}_{y\in X}$ kompaktního prostoru X lze vybrat konečné pokrytí, tedy existují body $y_1, \ldots, y_n \in X$ takové, že $X = U(y_1) \cup \ldots \cup U(y_n)$. Potom pro funkci $g_x := \max\{h_{y_1}, \ldots, h_{y_n}\}$ platí $g_x \in \mathcal{F}$ (neboť $\mathcal{F}$ je svaz), $g_x(x) = f(x)$ a $g_x > f - \varepsilon$ na prostoru X.

Protože $g_x(x) < f(x) + \varepsilon$, existuje okolí $V(x)$ bodu x takové, že $g_x < f + \varepsilon$ na $V(x)$. Z otevřeného pokrytí $\big\{V(x)\big\}_{x\in X}$ vybereme konečné pokrytí, tudíž existují body $x_1, \ldots, x_m \in X$ takové, že $X = V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_m)$. Potom pro funkci $h := \min\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_m}\}$ platí $h \in \mathcal{F}$ (neboť $\mathcal{F}$ je svaz) a podle (4) je $h > f - \varepsilon$. Je-li $y \in X$, je $y \in V(x_j)$ pro vhodné $j \in \{1, \ldots, m\}$, a proto $h(y) \le g_{x_j}(y) < f(y) + \varepsilon$. Vidíme, že funkce $h \in \mathcal{F}$ splňuje

$$|f - h| < \varepsilon \quad \text{na } X,$$

takže f je prvkem stejnoměrného uzávěru $\mathcal{F}$.

□

[43] Důkaz věty o stejnoměrné spojitosti často využívá Bolzano-Weierstrassovu větu a tzv. Heineho definici spojitosti. Viz [92], s. 387.

Uvedené aproximační lemma je klíčem k důkazu Stone-Weierstrassovy věty:[44] *Nechť* $\mathcal{A} \subset C(X)$ *je algebra* (tj. $\mathcal{A}$ je vektorový prostor a pro $f, g \in \mathcal{A}$ je $f \cdot g \in \mathcal{A}$), *nechť* $\mathcal{A}$ *obsahuje konstanty a odděluje body. Potom stejnoměrný uzávěr* $\mathcal{A}$ *je roven* $C(X)$.

K důkazu uvedeme tento komentář: označíme-li $\mathcal{F}$ stejnoměrný uzávěr $\mathcal{A}$, potom $\mathcal{F}$ je uzavřená algebra mající tuto vlastnost:

$$f \in \mathcal{F} \Rightarrow |f| \in \mathcal{F}.$$

K důkazu této implikace se hodí toto tvrzení:[45] *Je-li* $\alpha > 0$ *a* $\varepsilon > 0$, *potom existuje reálný polynom* p *takový, že*

$$\big||t| - p(t)\big| < \varepsilon, \quad t \in [-\alpha, \alpha].$$

Je-li $f \in \mathcal{F}$ a $\alpha := \sup |f|(X)$, pak $p \circ f \in \mathcal{F}$ (neboť $\mathcal{F}$ je algebra) a $\big||f| - p \circ f\big| < \varepsilon$, takže $|f| \in \mathcal{F}$ (neboť $\mathcal{F}$ je uzavřená v $C(X)$). Protože $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big)$, $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big)$, je $\mathcal{F}$ skutečně svaz, a tedy $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} = C(X)$.

Speciálním případem uvedeného výsledku je klasická Weierstrassova věta o aproximaci:[46] *Je-li* $f \in C\big([a, b]\big)$, *potom existují polynomy* $p_1, p_2, \ldots$ *takové, že* p_n *konvergují k* f *stejnoměrně na* $[a, b]$.

6.4 Lokálně kompaktní topologické vektorové prostory

Topologický prostor X se nazývá *lokálně kompaktní*, jestliže pro každý bod existuje relativně kompaktní okolí (tj. okolí, jehož uzávěr je kompaktní).

Víme, že prostory $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$ jsou lokálně kompaktní.

Nechť X je vektorový prostor a τ je topologie na X. Říkáme, že τ je *vektorová topologie*, jestliže každá jednobodová množina v X je uzavřená a jestliže vektorové operace (sčítání a násobení skalárem) jsou spojité vzhledem k τ. Je-li X vektorový prostor a τ je vektorová topologie na X, mluvíme o *topologickém vektorovém prostoru* X (podrobněji: (X, τ)). Každý topologický vektorový prostor je Hausdorffův. Každý topologický prostor dimenze d je homeomorfní s $\mathbb{R}^d$ (nebo $\mathbb{C}^d$), tedy je lokálně kompaktní. Zajímavé je, že *žádný* topologický vektorový prostor nekonečné dimenze *není* lokálně kompaktní.

Věta. *Nechť* X *je lokálně kompaktní topologický vektorový prostor. Potom prostor* X *má konečnou dimenzi.*

Důkaz. [47] Z předpokladu plyne, že existuje okolí V bodu 0 takové, že uzávěr $\overline{V}$ okolí V je kompaktní. Protože $\big\{x + \frac{1}{2}V\big\}_{x \in X}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny $\overline{V}$, existují body $x_1, \ldots, x_n \in X$ takové, že

$$\overline{V} \subset \Big(x_1 + \frac{1}{2}V\Big) \cup \ldots \cup \Big(x_n + \frac{1}{2}V\Big).$$

Nechť Y je vektorový prostor generovaný vektory $x_1, \ldots, x_n$, takže dimenze Y je nejvýše n. Platí $Y + Y = Y$ a pro každý skalár $\alpha \neq 0$ je $\alpha Y = Y$. Protože $V \subset Y + \frac{1}{2}V$, je také $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$, čili $V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V \subset Y + \frac{1}{8}V$ atd., takže $V \subset \bigcap_{j=1}^{\infty}(Y + 2^{-j}V) = \overline{Y}$. Protože prostor Y má konečnou dimenzi, je uzavřený, tedy $\overline{Y} = Y$, neboli $V \subset Y$. Protože V je okolí 0, platí,

[44] O historii Stone-Weierstrassovy věty pojednává stať [87]. Role kompaktnosti pro platnost této věty je vysvětlena v [43].

[45] Existuje celá řada důkazů tohoto tvrzení; viz např. [77], s. 159 a 169, [44], s. 93.

[46] Historie Weierstrassovy věty je popsána např. v [73].

[47] Podrobnosti lze nalézt v [79], s. 17.

že $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} k \cdot V$, tedy $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} k \cdot Y = Y$. Dokázali jsme, že $X = Y$ a dimenze X je tedy nejvýše n.

$\square$

6.5 Rieszova věta o reprezentaci

Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém $\beta \subset \tau$ se nazývá *báze topologie* τ, jestliže každá množina z τ je sjednocením podsystému množin z β.

Věta. [48] *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází. Nechť $C_c(X)$ je vektorový prostor reálných funkcí s kompaktním nosičem na X. Nechť I je nezáporný lineární funkcionál na $C_c(X)$. Potom existuje právě jedna borelovská míra μ na X taková, že*

$$I(f) = \int_X f \, d\mu, \quad f \in C_c(X).$$

6.6 Izoperimetrická úloha v rovině

Řešení izoperimetrické úlohy,[49] při neformálním vyjádření, je dobře známo: *Ze všech rovinných obrazců daného obvodu L má kruh s obvodem L největší obsah.* Je také známo, že se můžeme omezit na omezené konvexní množiny (tam již jsou pojmy obvodu a obsahu dobře definovány). Konečně se obecně ví, že geometrické úvahy umožňují ukázat, že kruh je skutečně řešením izoperimetrické úlohy, *pokud řešení existuje.* Podrobněji: dokazuje se, že pokud *není* konvexní množina s obvodem L kruh, pak existuje jiná konvexní množina s obvodem L, která má *větší* obsah.

Zde se soustředíme na tvrzení o *existenci*[50] *řešení* izoperimetrické úlohy. Důkaz je založen na kompaktnosti.

Nechť (X, ρ) je omezený metrický prostor, $\mathcal{F}_X$ je systém všech neprázdných uzavřených podmnožin X. Pro $x \in X$ a $F \in \mathcal{F}_X$ definujme $\rho(x, F) := \inf\{\rho(x, y) : y \in F\}$ a pro $\delta > 0$ položme $U_\delta(F) := \{z \in X : \rho(z, F) < \delta\}$. Na $\mathcal{F}_X$ budeme definovat metriku (tzv. *Hausdorffovu metriku*) takto: pro $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_X$ položíme $d(F_1, F_2) := \inf\{\delta > 0 : F_1 \subset U_\delta(F_2),\ F_2 \subset U_\delta(F_1)\}$.

Důležitý je tento výsledek:[51] *Je-li (X, ρ) kompaktní prostor, potom $(\mathcal{F}_X, d)$ je kompaktní prostor.* (Obvykle se dokazuje, že $(\mathcal{F}_X, d)$ je úplný a totálně omezený.)

---

[48] Na základě Hahn-Banachovy věty o rozšíření spojitého lineárního funkcionálu lze dokázat větu: *Nechť M je nekompaktní podmnožina $\mathbb{R}$. Potom existuje nezáporný lineární funkcionál L definovaný na prostoru všech omezených spojitých reálných funkcí na M takový, že L není reprezentovatelný pomocí žádné borelovské míry na M.* Viz [43]. Historii Rieszovy věty o reprezentaci je věnován článek [39]. Podrobný výklad o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na prostorech spojitých funkcí lze nalézt např. v [8], kap. IV., [44], kap. III.12, [78], kap. 2.

[49] O historii izoperimetrické úlohy se lze poučit např. v [9]. Tam je přehledně vyloženo pět Steinerových geometrických důkazů i nedávné přístupy k rovinné izoperimetrické úloze. Ve vícerozměrném případě jisté problémy představuje zavedení pojmu povrchu pro dostatečně obecné množiny. Výklad založený na pojmu tzv. množin s konečným perimetrem je zpracován v [88].

[50] V [9] je uvedeno, že první důkaz (nepublikovaný) existence řešení izoperimetrické úlohy byl podán K. Weierstrassem v jeho přednáškách z variačního počtu v roce 1879. Již jsme zmínili, že za řešení izoperimetrické úlohy nelze považovat tento „důkaz“: *pro každou křivku, která není kružnicí, existuje metoda* (navržená J. Steinerem) *poskytující křivku stejné délky, která omezuje obrazec většího obsahu. Proto kruh má největší obsah.* O. Perron ilustruje nepřípustnost takové úvahy na příkladu „věty“: *Mezi všemi přirozenými čísly je číslo 1 největší.* „Důkaz“: pro každé přirozené číslo, které není 1, existuje metoda (stačí vzít čtverec čísla) poskytující větší přirozené číslo. Proto 1 je největší přirozené číslo. Viz [67], s. 40.

[51] Důkaz a podrobnosti k výkladu lze nalézt v [86], kap. 9. Viz též [38], kap. 1.16.

Vraťme se k izoperimetrické úloze v rovině. Za X zvolíme uzavřený kruh v rovině a označíme $\mathcal{C}_X$ systém neprázdných uzavřených konvexních podmnožin kruhu X. Tedy prvky našeho metrického prostoru $\mathcal{C}_X$ jsou kompaktní konvexní podmnožiny C, pro něž $\emptyset \neq C \subset X$. Protože $\mathcal{C}_X$ je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru $\mathcal{F}_X$, je $\mathcal{C}_X$ kompaktní prostor. Pro každé $C \in \mathcal{C}_X$ je definován *obsah* $a(C)$ množiny C (= dvojrozměrná Lebesgueova míra C) a *obvod* $l(C)$ množiny C (= supremum obvodů konvexních mnohoúhelníků vepsaných do C). Zřejmě je funkce $C \mapsto a(C)$ spojitá na $\mathcal{C}_X$ a není těžké ukázat, že funkce $C \mapsto l(C)$ je spojitá na $\mathcal{C}'_X := \mathcal{C}_X \setminus \{C \in \mathcal{C}_X : a(C) = 0\}$.

Nechť $L > 0$ a X je uzavřený kruh o poloměru L. Potom uzavřený čtverec o stejném středu jako X a délce strany $L/4$ je obsažen v X a má obvod L a obsah $L^2/16$. Tedy množina

$$\mathcal{K} := \left\{C \in \mathcal{C}_X : l(C) = L \text{ a } a(C) \geq \frac{L^2}{16}\right\}$$

je neprázdná a je průnikem dvou uzavřených podmnožin $\mathcal{C}_X$: vzoru uzavřené množiny $\{L\}$ při spojitém zobrazení $l : \mathcal{C}'_X \to [0, \infty)$ a vzoru uzavřené množiny $[L^2/16, \infty)$ při spojitém zobrazení $a : \mathcal{C}_X \to [0, \infty)$. Proto je $\mathcal{K}$ neprázdná kompaktní množina, tudíž spojitá funkce a na této množině nabývá maxima.

Věta. *Nechť $L > 0$. Potom existuje kompaktní konvexní množina C_0, pro niž $l(C_0) = L$ a $a(C_0) = \max\{a(C) : C$ kompaktní konvexní množina, $l(C) = L\}$.*

6.7 Věty o pevném bodu

Značná část matematiky a jejích aplikací se zabývá řešením rovnic. Jsou-li X a Y množiny, $M \subset X$, $G : M \to Y$ a $y \in Y$, zajímá nás většinou existence a jednoznačnost prvku $x \in M$ takového, že $G(x) = y$. Ve speciálním případě, když X je vektorový prostor a $Y = X$, můžeme definovat zobrazení $F : x \mapsto x + G(x) - y,\ x \in M$. Potom $x \in M$ je řešením rovnice $G(x) = y$, právě když $F(x) = x$, neboli x je *pevným bodem* zobrazení F.

Následující *Brouwerova věta*,[52] v níž kompaktnost hraje podstatnou roli, představuje principiální výsledek o existenci pevného bodu. Ve velmi jednoduché situaci $d = 1$ a $M = [0, 1]$ se tvrzení redukuje na základní poznatek o funkcích reálné proměnné: *Jestliže $g : [0, 1] \to [0, 1]$ je spojitá funkce splňující $g(0) \geq 0$, $g(1) \leq 0$, potom má funkce g v $[0, 1]$ nulový bod.*

Věta. *Nechť M je neprázdná kompaktní konvexní podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^d$ a $F : M \to M$ je spojité zobrazení. Potom F má pevný bod.*

Předpoklad konečné dimenze je zde podstatný[53]. Věta neplatí např. pro prostor l^2 nad tělesem reálných čísel. Pro $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ definujme $S(x) := (0, x_1, x_2, \ldots)$, označme $e_1 = (1, 0, \ldots)$ a položme

$$F(x) := \frac{1}{2}\big(1 - ||x||\big)e_1 + S(x), \quad x \in l^2.$$

Potom zobrazení F je spojité a pro uzavřenou jednotkovou kouli $M := \{x \in l^2 : ||x|| \leq 1\}$ platí $F(M) \subset M$. Nechť $x = (x_1, x_2, \ldots)$ je pevný bod zobrazení F, tj. $F(x) = x$. Potom

[52] Brouwerova věta pochází z roku 1911. Podrobný výklad lze nalézt v článku [63] s názvem *Le théorème du point fixe de Brouwer: un siècle de métamorphoses*. Článek doprovází seznam literatury o 207 položkách.

[53] Přesvědčivé příklady pocházejí od A. N. Tichonova a S. Kakutaniho z let 1935 a 1943. Viz citace v [62] a [63].

$x_1 = \frac{1}{2}\big(1 - ||x||\big)$ a $x_{n+1} = x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, je nutně $x_1 = 0$, takže $x = 0$. Ovšem pak $F(x) = \big(\frac{1}{2}, 0, 0, \dots\big)$, což je spor.

Spojitost zobrazení F tedy nezaručuje existenci pevného bodu. Zavedeme následující důležitý pojem.

Nechť X a Y jsou normované lineární prostory, $M \subset X$ a $F : M \to Y$. Budeme říkat, že zobrazení F je *kompaktní*, jestliže F je spojité a obraz každé omezené množiny při zobrazení F je relativně kompaktní podmnožina prostoru Y. Následující *Schauderova věta*[54] je zobecněním Brouwerovy věty pro prostory nekonečné dimenze.

Věta. *Nechť M je neprázdná omezená uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru X a $F : M \to M$ je kompaktní zobrazení. Potom F má pevný bod.*

Obvyklý důkaz využívá aproximace zobrazení pomocí zobrazení s oborem hodnot konečné dimenze. Pak se na aproximující operátory aplikuje Brouwerova věta. Právě kompaktnost naznačuje, že F nemá daleko od konečně dimenzionálních zobrazení. Podrobněji: *pro kompaktní zobrazení F existují prostory $X_n \subset X$ konečné dimenze a zobrazení $F_n : M \to X_n$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $||F(x) - F_n(x)|| \le 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Věta má četné aplikace při vyšetřování integrálních a diferenciálních rovnic.

Jako ilustraci uvedeme, jak lze Schauderovu větu užít k důkazu existence lokálního řešení[55] obyčejné diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$.

Věta. *Nechť $\alpha > 0$ a $f \in C\big([-\alpha, \alpha]^2\big)$. Nechť $m \ge 1$ a nechť $|f| \le m$ na $[-\alpha, \alpha]^2$. Potom na $(-\alpha/m, \alpha/m)$ existuje řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 0$.*

Důkaz. Označme I (resp. I^0) uzavřený (resp. otevřený) interval s koncovými body $-\alpha/m$, α/m. Tvrdíme, že existuje diferencovatelná funkce φ na intervalu I^0 taková, že $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$, $x \in I^0$, a $\varphi(0) = 0$.

Nechť $M := \big\{\psi \in C(I) : ||\psi|| \le \alpha\big\}$. Potom M je neprázdná uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru $C(I)$. Pro $\psi \in C(I)$ definujme

$$F(\psi) : x \mapsto \int_0^x f\big(t, \psi(t)\big)\, dt, \quad x \in I.$$

Potom $F : M \to C(I)$ je spojité zobrazení a platí $\big|F(\psi)(x)\big| = \big|\int_0^x f\big(t, \psi(t)\big)\, dt\big| \le m \cdot |x| \le \alpha$, kdykoli $x \in [-\alpha/m, \alpha/m]$. Vidíme, že $F(M) \subset M$, tudíž $F(M)$ je omezená podmnožina $C(I)$. Jestliže $x, z \in I$ a $\psi \in M$, platí odhad

$$\big|F(\psi)(x) - F(\psi)(z)\big| = \Big|\int_0^x f\big(t, \psi(t)\big)\, dt - \int_0^z f\big(t, \psi(t)\big)\, dt\Big| \le m|x - z|.$$

Vidíme, že množina $F(M) \subset C(I)$ je bodově omezená a bodově stejně spojitá na I, tudíž je $F(M)$ relativně kompaktní podmnožina $C(I)$ (podle *Arzèla-Ascoliho věty*,[56] kterou níže připomeneme).

[54] Věta byla dokázána v roce 1930; soubor příbuzných výsledků je diskutován v [24], kap. 5, [36], kap. 5, [100], kap. 1.

[55] Důkazům tzv. Peanovy věty o existenci řešení je věnována rozsáhlá literatura; zmíníme např. [38], kap. 1.12, [93] a [94].

[56] Původní verze Arzèla-Ascoliho věty pochází z let 1883 a 1889. Viz [26], komentář v odstavci 16 kapitoly IV.

Odtud plyne, že F je kompaktní zobrazení, takže všechny předpoklady Schauderovy věty jsou splněny. Existuje tedy pevný bod zobrazení F, neboli existuje funkce $\varphi \in C(I)$ taková, že $\varphi(x) = \int_0^x f\big(t, \varphi(t)\big)\, dt$, tedy zřejmě $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$, $x \in I^0$, a $\varphi(0) = 0$.

$\square$

Ještě k Arzèla-Ascoliho větě. *Nechť Y je kompaktní topologický prostor, $C(Y)$ je Banachův prostor spojitých* (komplexních nebo reálných) *funkcí na Y s normou*

$$||\varphi|| := \sup\big\{|\varphi(x)| : x \in Y\big\}$$

a $A \subset C(Y)$ je bodově omezená a bodově stejně spojitá množina, tj.

(a) $\sup\big\{|\varphi(x)| : \varphi \in A\big\} < \infty$ *pro všechna $x \in Y$,*

(b) *pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in Y$ existuje okolí $V(x)$ bodu x takové, že pro každé $\varphi \in A$ a každé $z \in V(x)$ platí $\big|\varphi(z) - \varphi(x)\big| < \varepsilon$.*

Potom je A relativně kompaktní podmnožina $C(Y)$. Speciálně tvrzení platí, pokud (Y, d) je kompaktní metrický prostor a množina A je stejně lipschitzovská, tj. existuje $m \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varphi \in A$ a pro každou dvojici bodů $x, z \in Y$ platí $|\varphi(x) - \varphi(z)| \le m\, d(x, z)$.

6.8 Neexpanzivní zobrazení

Mezi základní věty o pevném bodu patří *Banachova věta o kontrahujícím zobrazení*: *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $F : X \to X$ je kontrahující zobrazení, tj. existuje $k \in [0, 1)$ takové, že*

$$\rho\big(F(x), F(y)\big) \le k\rho(x, y), \quad x, y \in X.$$

Potom F má pevný bod (pokud $X \ne \emptyset$).

Podstatná je zde úplnost a podmínka, že $k < 1$.

Je-li např. $X = \mathbb{R}$ a $F(x) = x - \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$, potom $F'(x) = 1 - 1/(1 + x^2) < 1$, $x \in \mathbb{R}$, tedy $\big|F(y) - F(z)\big| < |y - z|$ pro $y, z \in \mathbb{R}$, $y \ne z$. Zřejmě zobrazení F nemá pevný bod.

Situace se mění, pokud X je kompaktní prostor.[57]

Věta. *Nechť (X, ρ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a nechť $F : X \to X$ splňuje*

$$\rho\big(F(y), F(z)\big) < \rho(y, z), \quad y, z \in X,\ y \ne z.$$

Potom F má právě jeden pevný bod.

Důkaz. Jednoznačnost je zřejmá. Definujme funkci $f : X \to \mathbb{R}$ takto: $f(y) := \rho\big(y, F(y)\big)$, $y \in X$. Potom f je spojitá funkce na kompaktním prostoru X, tedy existuje bod $x \in X$ takový, že $f(x) = \min\big\{f(y) : y \in X\big\}$. Označme $a := \rho\big(x, F(x)\big)$. Kdyby $a > 0$, platilo by $0 < a \le \rho\big(F(x), F(F(x))\big) < \rho\big(x, F(x)\big) = a$, což není možné. Tedy $a = 0$ a $F(x) = x$.

$\square$

[57] Toto je speciální případ obecnější věty o pevném bodu dokázané M. Edelsteinem v [27].

Ještě u zobrazení, která nezvětšují vzdálenost, ještě chvilku zůstaneme.

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $F : X \to X$. Říkáme, že zobrazení F je *neexpanzivní*, jestliže

$$\rho\big(F(x), F(y)\big) \leq \rho(x, y), \quad x, y \in X.$$

Následující *Browderova věta*[58] opět využívá kompaktnost. Je formulována pro Hilbertův prostor. V normovaných lineárních prostorech nekonečné dimenze, jak víme, omezené množiny nemusí být v topologii definované normou relativně kompaktní (a nejsou, pokud obsahují vnitřní body). Zde vstupuje do hry slabá topologie, při níž jsou omezené podmnožiny Hilbertova prostoru relativně kompaktní (neboť Hilbertovy prostory jsou reflexivní).

Věta. *Nechť M je neprázdná omezená uzavřená konvexní podmnožina Hilbertova prostoru X a nechť $F : M \to M$ je neexpanzivní zobrazení. Potom F má pevný bod.*
Jestliže $x_0 \in M$, $x_n := F(x_{n-1})$ a $y_n := (1/n) \sum_{j=0}^{n-1} x_j$, $n \in \mathbb{N}$, potom posloupnost $\{y_n\}$ konverguje slabě (tj. ve slabé topologii) *k pevnému bodu zobrazení F.*

K důkazu jen několik poznámek. Protože množina M je konvexní, je $y_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Protože M je omezená, je slabě relativně kompaktní. Na tomto místě bychom řekli: a tudíž $\{y_n\}$ obsahuje konvergentní vybranou posloupnost $\{y_{n_k}\}$. To není zřejmé (zřejmé by to bylo v případě, že by M byla ve slabé topologii metrizovatelná). Nicméně hluboký Eberleinův a Šmuljanův výsledek tuto vlastnost *sekvenciální kompaktnosti* poskytuje.[59] Tudíž $\{y_{n_k}\}$ konverguje slabě k prvku x, který padne do M, neboť M je uzavřená, tudíž slabě uzavřená, neboť je konvexní. Další části důkazu jsou netriviální, využívají počítání se skalárním součinem a předpoklad, že F je neexpanzivní. Ve skutečnosti se dokáže, že celá posloupnost $\{y_n\}$ je slabě konvergentní k x a x je pevný bod zobrazení F.

6.9 Extremální body konvexní množiny

Nechť X je vektorový prostor a $K \subset X$ je konvexní množina. Neprázdná množina $S \subset K$ se nazývá *extremální*, jestliže platí: je-li $x \in K$, $y \in K$, $t \in (0, 1)$ a $tx + (1 - t)y \in S$, potom $x \in S$ a $y \in S$. Jednobodové extremální množiny se nazývají *extremální body*. Tedy $x \in K$ je extremální bod množiny K, právě když x není vnitřním bodem žádné úsečky s koncovými body v K.

Jestliže $M \subset X$, pak nejmenší konvexní množinu obsahující M nazýváme *konvexní obal* množiny M. Konvexní obal množiny M je roven množině všech konvexních kombinací prvků z M. Uzávěr konvexního obalu množiny M v topologickém vektorovém prostoru X se nazývá *uzavřený konvexní obal* množiny M.

Klasická *Minkowskiho věta*[60] říká, že kompaktní konvexní množinu v $\mathbb{R}^d$ lze zrekonstruovat z extremálních bodů: *Je-li $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní konvexní množina, potom K splývá s konvexním obalem množiny extremálních bodů.* Jinak řečeno, jestliže $x \in K$, potom existují $n \in \mathbb{N}$, extremální body $x_1, \ldots, x_n$ a nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ taková, že $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ a $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$.

Takové tvrzení neplatí v prostorech nekonečné dimenze, platí pouze *aproximativně*, jak ukazuje *Krejn-Milmanova věta*:[61]

[58] Podrobný důkaz a aplikace lze nalézt v [24], s. 97.
[59] Věty o slabé topologii lze nalézt např. v [26], kap. V, odst. 4, 6. Viz též [28] a [29].
[60] Minkowskiho věta pochází z let 1901 až 1903. Viz historické poznámky v [59], s. 49.
[61] Krejn-Milmanova věta byla dokázána v roce 1940. Viz historické poznámky v [59], s. 49.

Věta. *Nechť X je topologický vektorový prostor a nechť jeho duál X^* odděluje body. Jestliže $K \subset X$ je kompaktní konvexní množina, potom K splývá s uzavřeným konvexním obalem extremálních bodů množiny K.*

Zásadním krokem důkazu je informace, že K (pokud je neprázdná) obsahuje alespoň jeden extremální bod. Ten se získá (pomocí Zornova lemmatu) jako průnik maximálního uspořádaného systému kompaktních extremálních podmnožin množiny K. Kompaktnost vstupuje do hry prostřednictvím tohoto jednoduchého tvrzení: *Nechť Y je Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{K}$ je neprázdný systém kompaktních množin v Y mající tuto vlastnost: je-li $\widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}$ konečný systém, potom $\bigcap \widetilde{\mathcal{K}} \neq \emptyset$. Potom je $\bigcap \mathcal{K} \neq \emptyset$.*

Důkaz je snadný. Předpokládejme, že $\bigcap \mathcal{K} = \emptyset$, zvolme $K \in \mathcal{K}$ a označme $\mathcal{G}$ systém tvořený doplňky množin z $\mathcal{K}$. Protože Y je Hausdorffův prostor, jsou kompaktní množiny uzavřené, tedy prvky systému $\mathcal{G}$ jsou otevřené množiny. Žádný bod z K není obsažen ve všech množinách z $\mathcal{K}$, takže $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí kompaktní množiny K. Existují tedy množiny $G_1, \dots, G_n$, které pokrývají K. Potom pro konečný systém tvořený doplňky $K_1, \dots, K_n$ množin $G_1, \dots, G_n$ platí $K \cap K_1 \cap \ldots \cap K_n = \emptyset$, což je spor.

6.10 Variační počet: Dirichletův princip

Dirichletův princip[62] založený na minimalizaci integrálu energie měl sloužit jako nástroj k důkazu existence řešení Dirichletovy úlohy. K. Weierstrass v roce 1870 podrobil zacházení s variačními úlohami ostré kritice. Zjednodušeně řečeno bychom dnes podstatu kritiky vyjádřili takto: nelze zaměňovat pojmy *minima* a *infima*.[63]

Dirichletova úloha je klasická a patrně nejznámější okrajová úloha matematické fyziky.

V dalším výkladu budeme předpokládat, že U je (neprázdná) omezená podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^d$ a f je spojitá funkce na hranici ∂U množiny U. *Klasická Dirichletova úloha* (pro množinu U a *okrajovou podmínku* f) spočívá v nalezení funkce u, která je *harmonická* na U, je spojitě rozšiřitelná na uzávěr $\overline{U}$ množiny U a toto rozšíření na ∂U splývá s funkcí f.

Připomeňme, že funkce $u : U \to \mathbb{R}$ se nazývá *harmonická*, jestliže $u \in C^2(U)$ (tj. u má spojité parciální derivace druhého řádu na U) a splňuje *Laplaceovu rovnici*

[62] Dirichletovu principu je věnována rozsáhlá literatura. Historický vývoj zachycuje Monnova knížka *Dirichlet's principle* s výstižným podtitulem *A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis.* Viz [67]. Význam a využití Dirichletova principu pro Riemannův důkaz základní věty konformního zobrazení je analyzován v [70]. V [5] je zachycen vývoj problematiky v letech 1860 až 1890. Dále v knize [85], kap. II.2, lze nalézt výklad o roli Dirichletova principu ve vývoji teorie potenciálu. Viz též [64]. Moderní výklad založený na slabé diferencovatelnosti je zahrnut do většiny textů o parciálních diferenciálních rovnicích či učebnic funkcionální analýzy. Viz [36], kap. 15, [99], kap. 2, také [100], kap. 2. Poznamenejme, že kromě přímé metody variačního počtu se minimalizace Dirichletova integrálu vyšetřuje metodami Hilbertova prostoru (Lax-Milgramovo lemma). Viz např. [24], s. 50, [100], kap. 2.

[63] K. Weierstrass uvádí tento příklad variační úlohy na prostoru $\mathcal{C}^1\big([-1,1]\big)$ funkcí spojitě diferencovatelných na $[-1,1]$: minimalizovat integrál

$$F(f) := \int_{-1}^{1} \big(x\, f'(x)\big)^2\, dx \quad \text{na množině } M := \big\{f \in \mathcal{C}^1\big([-1,1]\big) : f(-1) = 0,\ f(1) = 1\big\}.$$

Je-li $f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} nx)/(\operatorname{arctg} n)$, je $f_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, a $F(f_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Odtud plyne, že $\inf\big\{F(f) : f \in M\big\} = 0$. Jestliže $f_0 \in \mathcal{C}^1\big([-1,1]\big)$ a $F(f_0) = 0$, potom $x\, f_0'(x) = 0$ na $[-1,1]$ a f_0 je konstantní. Tedy $f_0 \notin M$; viz [85], s. 60.

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{na } U.$$

Není těžké dokázat,[64] že Dirichletova úloha má nejvýše jedno řešení. Zásadní problém je s *existencí* řešení.

Jeden z možných přístupů k důkazu existence je tzv. *přímá metoda variačního počtu.* Je založena na Dirichletově integrálu. Pro funkci $u \in C^1(U)$ (předpokládá se tedy, že u má na U spojité parciální derivace prvního řádu) označíme ∇u její gradient, tj. vektorovou funkci $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)$. *Dirichletův integrál (integrál energie)* pro funkci $u \in C^1(U)$ je definován rovností

$$F(u) := \int_U |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

(v dalším všechny integrály chápeme jako Lebesgueovy).

Ve speciálních případech lze klasickou Dirichletovu úlohu řešit minimalizací Dirichletova integrálu.[65] Označme $D(U)$ množinu funkcí spojitých na $\overline{U}$, jejichž parciální derivace prvního řádu mají spojité rozšíření z U na $\overline{U}$ a parciální derivace druhého řádu jsou spojité na U. Následující provizorní výsledek má motivační charakter.

Věta. *Nechť $u \in D(U)$, nechť $f := u_{|\partial U}$ a nechť*

$$F(u) = \min\left\{F(v) : v \in D(U),\ v_{|\partial U} = f\right\}.$$

Potom u je řešení Dirichletovy úlohy pro U a f.

Důkaz. Označme $C_c^\infty(U)$ množinu všech nekonečně diferencovatelných funkcí na U, které mají kompaktní nosič obsažený v U.

Nechť w je spojitá funkce na $\overline{U}$, $w_{|U} \in C_c^\infty(U)$, $t \in \mathbb{R}$ a $v := u + tw$. Potom $v_{|\partial U} = f$ a $v \in D(U)$. Definujme $\varphi(t) := F(u + tw)$, $t \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\varphi(t) = F(u) + 2t \int_U \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) \, dx + t^2 \int_U |\nabla w(x)|^2 \, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože $\varphi \geq \varphi(0)$ na $\mathbb{R}$, je $\varphi'(0) = 0$, tedy platí

$$\int_U \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) \, dx = 0.$$

Protože má funkce w kompaktní nosič v U, integrace per partes[66] dává

$$\int_U \Delta u(x) w(x) \, dx = 0.$$

Víme, že Δu je spojitá funkce na U a rovnost platí pro *každou* funkci $w \in C_c^\infty(U)$. Proto je $\Delta u = 0$ na U, takže u je řešením Dirichletovy úlohy pro U a f.

□

[64] Vyplývá to z principu minima pro harmonické funkce: *Jestliže w je spojitá funkce na $\overline{U}$ a harmonická na U, potom existuje bod $z \in \partial U$ takový, že $w(z) = \min\left\{w(x) : x \in \overline{U}\right\}$.* Viz [6], s. 5, [59], s. 646.

[65] Laplaceova rovnice je Euler-Lagrangeovou rovnicí funkcionálu F (= integrálu energie). Viz např. [100], kap. 2. V dalším symbol $u_{|\partial U}$ značí restrikci funkce u na množinu ∂U.

[66] Důkaz lze nalézt např. v [100], s. 117.

Náš výsledek není uspokojivý. Předpoklad, že f má hladké rozšíření na $\overline{U}$, je omezující. Existují však principiální důvody, proč při klasické formulaci není naděje získat řešení Dirichletovy úlohy pomocí minimalizace Dirichletova integrálu:[67]

(a) existují množiny U a spojité funkce f na ∂U takové, že pro *každé* spojité rozšíření f na hladkou funkci v na U platí $F(v) = \infty$ (takže vlastně nemáme co minimalizovat),

(b) existují množiny U a hladké funkce g na $\mathbb{R}^d$ takové, že *klasická* Dirichletova úloha pro U a $f := g_{|\partial U}$ nemá řešení (takže minimalizace Dirichletova integrálu jej nemůže poskytnout).

Postupem času bylo rozpoznáno, že variační přístup na *klasických prostorech hladkých funkcí* nemůže dát příznivé výsledky. Ty lze získat, pokud minimum budeme hledat na dostatečně velkém prostoru funkcí lépe přizpůsobeném integrálu energie.

Pro hledání vhodného prostoru, na němž je účelné minimum Dirichletova integrálu hledat, zkusme provést tuto motivační úvahu.

Nechť $D(U,f) := \{v \in D(U) : v_{|\partial U} = f\}$, $m := \inf\big\{F(v) : v \in D(U,f)\big\}$ a nechť $\{v_n\}$ je *minimizující posloupnost*, tj. $v_n \in D(U,f)$ a

$$\lim_{n\to\infty} F(v_n) = m.$$

Pro členy minimizující posloupnosti $\{v_n\}$ se snadno dokáže rovnost

$$F(v_n - v_k) = 2\,F(v_n) + 2\,F(v_k) - 4\,F\Big(\frac{v_n + v_k}{2}\Big).$$

Protože $\frac{1}{2}(v_n + v_k) \in D(U,f)$, je $F\big(\frac{1}{2}\,(v_n + v_k)\big) \geq m$, tedy

$$\begin{aligned}\int_U |\nabla v_n(x) - \nabla v_k(x)|^2\,dx &= F(v_n - v_k) \\ &\leq 2\,F(v_n) + 2\,F(v_k) - 4m,\end{aligned} \tag{5}$$

z (5) plyne, že pro $j \in \{1,\dots,d\}$ je $\big\{\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\big\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $L^2(U)$. Protože prostor $L^2(U)$ je úplný (zde se podstatně využívá, že pracujeme s *Lebesgueovým integrálem*), existuje vektorová funkce w mající složky z $L^2(U)$ taková, že $\frac{\partial v_n}{\partial x_j} \to w_j$ pro $n \to \infty$ pro každé $j \in \{1,\dots,d\}$. Samozřejmě není z ničeho zřejmé, že w má tvar ∇u pro vhodnou funkci $u : U \to \mathbb{R}$, která by případně mohla realizovat minimum funkcionálu F na $D(U,f)$. Přesto je zde určitá indikace, že L^2-konvergence gradientů bude hrát významnou roli. Na druhé straně *diferencovatelnost* v klasickém smyslu a *konvergence v integrálním smyslu* nejdou příliš dohromady. Není překvapivé, že se jako užitečná ukázala *zobecněná* diferencovatelnost, tzv. *distributivní diferencovatelnost*.

Po této předběžné úvaze se vrátíme k přesnějším matematickým formulacím.

Označme $W^{1,2}(U)$ *Sobolevův prostor*[68] funkcí z $L^2(U)$, jejichž první distributivní derivace patří do $L^2(U)$. Jako obvykle ztotožňujeme funkce, které se shodují skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře), a tedy striktně vzato je $W^{1,2}(U)$ prostor tříd ekvivalence. Ovšem, jak

[67] K (a) se zpravidla uvádí Hadamardův příklad z roku 1906: U je jednotkový kruh v $\mathbb{C}$ a $f(e^{it}) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(n!t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Viz [67], kap. III.1. Vcelku málo je známo, že první relevantní příklad pochází od F. Pryma z roku 1871. Viz [75]. Tvrzení (b) vyjadřuje, že existují množiny U, které nejsou *regulární* pro Dirichletovu úlohu. Viz [6], kap. 6, [18], [47], kap. 3, [49], kap. 9.

[68] Základní poznatky jsou připomenuty v části 8 této práce. Viz také [36] a [100].

je běžné, často mluvíme o prvcích $W^{1,2}(U)$ jako o funkcích a máme na mysli některého reprezentanta.

Pro $u \in W^{1,2}(U)$ je definována *Sobolevova norma*

$$||u|| := \Big(\int_U \big(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \big)\, dx \Big)^{1/2},$$

kde ∇u je distributivní gradient funkce u. Prostor $W^{1,2}(U)$ se Sobolevovou normou je úplný, tedy $W^{1,2}(U)$ je Banachův prostor. Ve skutečnosti je $W^{1,2}(U)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u, v) := \int_U \big(u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \big)\, dx, \quad u, v \in W^{1,2}(U).$$

V přímé metodě variačního počtu není hilbertovská struktura podstatná, později však pro nás bude důležité, že $W^{1,2}(U)$, jakožto Hilbertův prostor, je reflexivní prostor.[69]

Prostor $W^{1,2}(U)$ je pro úlohu minimalizace integrálu energie přirozený, neboť je dostatečně bohatý, aby v něm bod minima bylo možno nalézt. Je ovšem třeba rozhodnout, jak formulovat okrajovou podmínku. Pro funkci f spojitou na ∂U nedává žádný smysl říci: zvolme funkci $u \in W^{1,2}(U)$, pro niž $u_{|\partial U} = f$. Ani v nejjednodušších situacích (třeba když U je koule) nelze spojitou funkci na ∂U rozšířit na funkci z $W^{1,2}(U)$. Proto je účelné chápat okrajovou podmínku ve vhodně zobecněném smyslu. Nejprve je rozumné dát v termínech prostoru $W^{1,2}(U)$ smysl výroku: funkce $u \in W^{1,2}(U)$ má hraniční hodnoty rovné nule.

Za přirozené vyjádření představy, že „funkce u z $W^{1,2}(U)$ se anuluje na hranici", se nabízí podmínka $u \in W_0^{1,2}(U)$, kde $W_0^{1,2}(U)$ je uzávěr prostoru $C_c^\infty(U)$ v Sobolevově normě. Pro dvě funkce $u, v \in W^{1,2}(U)$ pak za matematické vyjádření představy, že „u se rovná v na ∂U", lze považovat podmínku $u - v \in W_0^{1,2}(U)$.

Nyní konečně můžeme formulovat Dirichletův princip následujícím způsobem: Nechť

$$F(v) := \int_U |\nabla v(x)|^2\, dx, \ v \in W^{1,2}(U).$$

Nechť $u_0 \in W^{1,2}(U)$ a $M := \big\{ v \in W^{1,2}(U) : v - u_0 \in W_0^{1,2}(U) \big\}$. Hledáme $u \in W^{1,2}(U)$ splňující $F(u) = \min \big\{ F(v); v \in M \big\}$, neboli

$$\int_U |\nabla u(x)|^2\, dx = \min \Big\{ \int_U \big|\nabla v(x)\big|^2\, dx \, : v \in M \Big\}. \tag{6}$$

Věta. *Je-li $u_0 \in W^{1,2}(U)$, potom existuje právě jeden prvek $u \in W^{1,2}(U)$ splňující* (6).

Důkaz se podaří dokončit díky těmto ingrediencím:

(a) F je konvexní funkcionál na $W^{1,2}(U)$;

(b) F je ryze konvexní funkcionál na M;

(c) F je spojitý funkcionál na $W^{1,2}(U)$;

[69] Definice je připomenuta v části 7.

(d) existuje slabě kompaktní množina[70] $M_0 \subset W_0^{1,2}(U)$ taková, že

$$\inf\big\{F(v) : v \in M\big\} = \inf\big\{F(u_0 + w) : w \in M_0\big\};$$

(e) funkcionál $G : w \mapsto F(u_0 + w)$ je slabě zdola polospojitý na M_0.

V důkazu se nám bude hodit Poincarého nerovnost[71] pro odhad L^2-normy $w \in W_0^{1,2}(U)$ vyjádřený pomocí L^2-normy gradientu:

$$||w||_2^2 \leq a||\nabla w||_2^2, \quad w \in W_0^{1,2}(U), \tag{7}$$

kde $a := \lambda_d(U)/\omega_d$ ($\lambda_d(U)$ je Lebesgueova míra U a ω_d je objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$).

Tvrzení. *Funkcionál F je na $W^{1,2}(U)$ konvexní.*

Důkaz. Nechť $u, v \in W^{1,2}(U)$ a $\alpha \in (0,1)$. Protože funkce $t \mapsto t^2$, $t \in \mathbb{R}$, je konvexní, platí

$$\begin{aligned} F\big(\alpha u + (1-\alpha)v\big) &= \int_U \big|\alpha\nabla u(x) + (1-\alpha)\nabla v(x)\big|^2\,dx \qquad (8)\\ &\leq \int_U \big(\alpha|\nabla u(x)|^2 + (1-\alpha)|\nabla v(x)|^2\big)\,dx \\ &= \alpha F(u) + (1-\alpha)F(v). \end{aligned}$$

□

Tvrzení. *Funkcionál F je na konvexní množině M ryze konvexní.*

Důkaz. Nechť $u, v \in M$, $\alpha \in (0,1)$ a

$$F\big(\alpha u + (1-\alpha)v\big) = \alpha F(u) + (1-\alpha)F(v).$$

Protože funkce $t \mapsto t^2$, $t \in \mathbb{R}$, je ryze konvexní, vidíme z (8), že $\nabla u = \nabla v$ (rovnost skoro všude). Proto pro $w := u - u_0 - (v - u_0)$ je $w \in W_0^{1,2}$ a $\nabla w = 0$. Podle Poincarého nerovnosti (7) je $||w||_2 = 0$, tudíž $u = v$.

□

Z teorie Lebesgueova integrálu[72] je známo: *Je-li $\{g_n\}$ posloupnost prvků z $L^2(U)$ a $||g_n - g||_2 \to 0$ pro $n \to \infty$, potom existují $h \in L^2(U)$ a posloupnost $\{g_{n_k}\}$ vybraná z $\{g_n\}$ takové, že $|g_{n_k}| \leq h$, $k \in \mathbb{N}$, a $\lim_{k\to\infty} g_{n_k} = g$ λ_d-skoro všude.* Tento výsledek nyní použijeme.

---

[70] Pojem slabé topologie je připomenut v části 7.

[71] Toto je klíčová nerovnost pro Sobolevovy prostory. Její důkaz lze nalézt např. v [47] a [100].

[72] Při důkazu úplnosti prostoru $L^1(\mu)$ se obvykle dokazuje: z *cauchyovské posloupnosti v $L^1(\mu)$ lze vybrat posloupnost bodově konvergentní skoro všude.* Viz [78], s. 68. Výsledek pro $L^2(\mu)$ lze nalézt např. v [100], s. 112, nebo [99], s. 57.

Tvrzení. *Funkcionál F je spojitý na $W^{1,2}(U)$.*

Důkaz. Nechť $v, v_n \in W^{1,2}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, a $||v_n - v|| \to 0$ pro $n \to \infty$. Chceme dokázat, že $F(v_n) \to F(v)$ pro $n \to \infty$. Z definice normy ve $W^{1,2}(U)$ dostáváme $||\nabla v_n - \nabla v||_2 \to 0$ pro $n \to \infty$. Víme, že existují funkce $w \in L^2(U)$ a posloupnost $\{v_{n_k}\}$ vybraná z $\{v_n\}$ takové, že $|\nabla v_{n_k}| \le w$ a $\lim_{k\to\infty} \nabla v_{n_k} = \nabla v$ λ_d-skoro všude. Z Lebesgueovy věty dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} F(v_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty} \int_U \left|\nabla v_{n_k}(x)\right|^2 dx = \int_U \lim_{k\to\infty} \left|\nabla v_{n_k}(x)\right|^2 dx \\ &= \int_U \left|\nabla v(x)\right|^2 dx = F(v).\end{aligned}$$

Modifikace této úvahy ukazuje, že *každá konvergentní posloupnost* vybraná z $\{F(v_n)\}$ má limitu $F(v)$, tedy $\lim_{n\to\infty} F(v_n) = F(v)$.

Definujme nyní funkcionál

$$G : w \mapsto F(u_0 + w), \quad w \in W_0^{1,2}(U).$$

Potom G je spojitý ryze konvexní funkcionál a z Poincarého nerovnosti plyne

$$\begin{aligned}||w||^2 &= ||w||_2^2 + ||\nabla w||_2^2 \le (a+1)\,||\nabla w||_2^2 \\ &\le (a+1)\big(||\nabla(u_0+w)||_2 + ||\nabla u_0||_2\big)^2 \\ &\le 2(a+1)\big(||\nabla(u_0+w)||_2^2 + ||\nabla u_0||_2^2\big),\end{aligned}$$

tudíž

$$\big(2(a+1)\big)^{-1}||w||^2 - ||\nabla u_0||_2^2 \le ||\nabla(u_0+w)||_2^2, \quad w \in W_0^{1,2}(U).$$

Platí tedy

$$\lim_{||w||\to\infty} G(w) = \infty.$$

Zvolme $r > 0$ takové, že $G(w) \ge G(0)$ pro každé $w \in W_0^{1,2}(U)$, $||w|| > r$, a nechť $M_0 := \{w \in W_0^{1,2}(U) : ||w|| \le r\}$. Protože $W_0^{1,2}(U)$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $W^{1,2}(U)$, je $W_0^{1,2}(U)$ Hilbertův prostor, a tudíž reflexivní prostor. Tedy koule M_0 je slabě kompaktní.

Vzápětí odůvodníme, že G je slabě zdola polospojitý funkcionál (tedy zdola polospojitý vzhledem ke slabé topologii). Tudíž existuje prvek $\widetilde{w} \in M_0$ (kompaktnost!) takový, že

$$\begin{aligned}G(\widetilde{w}) &= \min\big\{G(w) : w \in M_0\big\} \\ &= \min\{G(w) : w \in W_0^{1,2}(U)\},\end{aligned} \tag{9}$$

neboť $\min\big\{G(w) : w \in M_0\big\} \le G(0) \le G(w)$ pro každé $w \in W_0^{1,2}(U)\backslash M_0$. Prvek $\widetilde{w}$ je určen jednoznačně, neboť ryze konvexní funkcionál nemůže být konstantní na (nedegenerované) úsečce.

Označme $u := u_0 + \widetilde{w}$. Potom $u \in W^{1,2}(U)$, $u - u_0 \in W_0^{1,2}$, tedy $u \in M$, a

$$\begin{aligned}F(u) &= F(u_0 + \widetilde{w}) = \min\big\{F(u_0 + w) : w \in W_0^{1,2}(U)\big\} \\ &= \min\big\{F(v) : v \in M\big\}.\end{aligned}$$

Prvek u, v němž se nabývá minima, je určen jednoznačně, neboť prvek $\widetilde{w}$ je určen jednoznačně.

Připomeňme, že *v normovaném lineárním prostoru je každá uzavřená konvexní množina slabě uzavřená* (tedy uzavřená ve slabé topologii).[73]

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Protože G je spojitý a konvexní funkcionál, je množina

$$\{w \in W_0^{1,2}(U) : G(w) \leq c\}$$

uzavřená a konvexní, tedy *slabě uzavřená*. Proto je množina

$$\{w \in W_0^{1,2}(U) : G(w) > c\}$$

slabě otevřená pro každé $c \in \mathbb{R}$, tedy G je *slabě zdola polospojitý funkcionál*. Tím je důkaz existence a jednoznačnosti minima funkcionálu F zakončen.

□

O prvku u, v němž se realizuje minimum Dirichletova integrálu, víme však jen to, že $u \in W^{1,2}(U)$. Vyřešili jsme sice variační úlohu (6), ale ztratili jsme souvislost s původní motivací, totiž zda lze Dirichletovu úlohu řešit minimalizací Dirichletova integrálu. Klíčem k pochopení této souvislosti je vhodná integrální charakteristika harmonických funkcí. Označme $W_c^{1,2}(U)$ prostor prvků z $W^{1,2}(U)$, které lze reprezentovat funkcí s kompaktním nosičem v U. Podobně jako v úvodu této kapitoly, můžeme pro $w \in W_c^{1,2}(U)$ definovat funkci $\varphi(t) := F(u + tw)$, $t \in \mathbb{R}$, a z informace, že F nabývá v bodě u minima, dostáváme $\varphi'(0) = 0$, tedy pro $v := u$ platí

$$\int_U \nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = 0, \quad w \in W_c^{1,2}(U). \tag{10}$$

Funkce $v \in W^{1,2}(U)$ splňující (10) se nazývá *slabě harmonická* na U. Důvod pro terminologii je zřejmý: je-li h harmonická funkce na U, pak integrace per partes dává pro každé $w \in W_c^{1,2}(U)$ rovnost

$$\int_U \nabla h(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_U \Delta h(x) w(x)\, dx = 0,$$

tudíž h je slabě harmonická.

Pozoruhodný[74] je následující výsledek:

Věta. *Nechť $v \in W^{1,2}(U)$ je slabě harmonická funkce. Potom existuje harmonická funkce $\widetilde{v}$ na U taková, že rovnost $v = \widetilde{v}$ platí λ_d-skoro všude na U.*

Nyní můžeme výsledky o souvislosti Dirichletova principu a Dirichletovy úlohy shrnout do závěrečné věty.

Věta. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná omezená otevřená množina a nechť $u_0 \in W^{1,2}(U)$. Potom existuje právě jedna harmonická funkce u na U splňující $u - u_0 \in W_0^{1,2}(U)$. Funkce u je spojitým reprezentantem jednoznačně určeného řešení úlohy minimalizace Dirichletova integrálu na M, tj.*

$$\int_U \left|\nabla u(x)\right|^2 dx = \min\left\{ \int_U \left|\nabla v(x)\right|^2 dx : v \in W^{1,2}(U),\ v - u_0 \in W_0^{1,2}(U)\right\}.$$

[73] Obvyklý důkaz je založen na oddělovací verzi Hahn-Banachovy věty. Viz např. [79], s. 64, [99], s. 64.

[74] Tzv. Weylovo lemma. Viz [47], s. 18, a také [6], s. 102 a 312.

7 Základní výsledky o kompaktnosti[75]

Nechť X je množina a τ je systém podmnožin množiny X. Říkáme, že τ je *topologie* na X, jestliže má tyto vlastnosti:

(a) $\emptyset \in \tau,\ X \in \tau$,

(b) jsou-li $V_1, \dots, V_n \in \tau$, pak $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$,

(c) je-li $\{V_\alpha\}$ libovolný systém množin z τ, pak $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Dvojice (X, τ) (nebo pouze X) se nazývá *topologický prostor*. Prvkům systému τ se říká *otevřené množiny*. *Okolím* bodu $x \in X$ rozumíme každou otevřenou množinu obsahující x.

Příklad. Systém otevřených podmnožin metrického prostoru X je topologie na X.

Podmnožina K topologického prostoru (X, τ) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každého otevřeného pokrytí množiny K lze vybrat konečné. Podrobněji: je-li $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ systém množin z τ takový, že $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$, pak existují $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ takové, že $K \subset \bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$. Je-li $K = X$, mluvíme o *kompaktním prostoru*.

Množina $K \subset X$ se nazývá *relativně kompaktní*, jestliže její uzávěr $\overline{K}$ je kompaktní.

Říkáme, že topologický prostor X je *Hausdorffův*, jestliže pro každé dva body $x, y \in X$, $x \neq y$, existují okolí V_x bodu x a okolí V_y bodu y taková, že $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Uzavřené podmnožiny kompaktního prostoru jsou kompaktní. Kompaktní podmnožiny Hausdorffova prostoru jsou uzavřené.

Nechť X a Y jsou topologické prostory, $f : X \to Y$. Říkáme, že zobrazení f je *spojité*, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subset Y$ je její vzor $f^{-1}(V)$ otevřená množina v X. Je-li $Y := (-\infty, \infty]$, říkáme, že funkce $f : X \to Y$ je *zdola polospojitá*, jestliže pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in X : f(x) > c\}$ otevřená.

Jestliže $f : X \to Y$ je spojité zobrazení a $K \subset X$ je kompaktní množina, potom $f(K)$ je kompaktní podmnožina Y.

Nechť X je topologický prostor, $A \subset X$ a $x \in X$. Říkáme, že x je *hromadným bodem množiny A*, jestliže každé okolí bodu x obsahuje bod z A různý od bodu x.

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Říkáme, že prostor (X, ρ) je *totálně omezený*,[76] jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $F \subset X$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $y \in F$ splňující $\rho(x, y) < \varepsilon$. *Každá totálně omezená množina v X je omezená.*

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

(i) *(X, ρ) je kompaktní*;

(ii) *(X, ρ) je úplný a totálně omezený*;

(iii) *každá nekonečná podmnožina v X má hromadný bod*;

(iv) *každá posloupnost bodů z X obsahuje konvergentní vybranou posloupnost.*

[75] Tyto základní výsledky lze nalézt např. v [44], [77], [78] a [92].

[76] Hermannu Weylovi je připisován tento příměr: *Jestliže je město kompaktní, je možné je hlídat konečným počtem libovolně krátkozrakých policistů.*

Nechť X je kompaktní metrický prostor, Y je metrický prostor a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Potom f je stejnoměrně spojité.

Podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^d$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená. Tedy podmnožina $\mathbb{R}^d$ je relativně kompaktní, právě když je omezená.

Jestliže X je normovaný lineární prostor, potom každá omezená množina v X je relativně kompaktní, právě když X má konečnou dimenzi.

Nechť X je množina a τ_1, τ_2 jsou topologie na X. Jestliže $\tau_1 \subset \tau_2$, říkáme, že τ_1 je *slabší* než τ_2 (a τ_2 je *silnější* než τ_1).

Topologie kompaktního Hausdorffova prostoru je v jistém smyslu odolná vůči změně topologie: nelze ji zeslabit, aniž bychom ztratili oddělování bodů, a nelze ji zesílit, aniž bychom přišli o kompaktnost. Podrobněji: *Jestliže $\tau_1 \subset \tau_2$ jsou topologie na X, (X, τ_1) je Hausdorffův prostor, (X, τ_2) je kompaktní prostor, potom $\tau_1 = \tau_2$.*

Nechť X je množina a $\mathcal{F} \neq \emptyset$ je systém zobrazení $f : X \to Y_f$, kde Y_f je topologický prostor. Potom existuje *nejslabší topologie* τ na X taková, že každé zobrazení $f \in \mathcal{F}$ je spojité. Topologie τ se nazývá *slabá topologie na X indukovaná systémem $\mathcal{F}$*, krátce *$\mathcal{F}$-topologie* na X.

Jestliže X je kartézský součin topologických prostorů X_ι, $\iota \in I$, $\pi_\iota(x)$ je ι-tá souřadnice bodu $x \in X$ a $\mathcal{F} := \{\pi_\iota\}_{\iota \in I}$, pak $\mathcal{F}$-topologie na X se nazývá *součinová topologie*. Platí důležitá věta (*Tichonov*): *Kartézský součin kompaktních topologických prostorů* (se součinovou topologií) *je kompaktní prostor.*

Nechť X je normovaný lineární prostor a X^* je jeho *duál*, tj. prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na X. Pro každé $x \in X$ definujme $x^{**} : x^* \mapsto x^*(x)$, $x^* \in X^*$. Potom je $x^{**} \in X^{**}$ $\big(:= (X^*)^* \big)$. Prostor X se nazývá *reflexivní*, jestliže $\kappa : x \mapsto x^{**}$ (*kanonické vnoření* X do X^{**}) je zobrazení X *na* X^{**}, tedy $\kappa(X) = X^{**}$. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Je-li $\mathcal{F} := X^*$, pak se $\mathcal{F}$-topologie na X nazývá *slabá topologie*. Platí důležitá věta (*Eberlein-Šmuljan*): *Uzavřená jednotková koule v X je kompaktní ve slabé topologii, právě když X je reflexivní prostor.*

Je-li $\mathcal{F} := \{x^{**} : x \in X\}$, pak se $\mathcal{F}$-topologie na X^* nazývá *slabá* topologie*. Platí důležitá věta (*Banach-Alaoglu*): *Uzavřená jednotková koule v X^* je kompaktní ve slabé* topologii.*

8 Distributivní derivace a Sobolevův prostor

Začneme následujícím jednoduchým postřehem. Nechť $C_c^1(\mathbb{R})$ je prostor spojitě diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}$, nechť $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ je prostor funkcí lebesgueovsky integrovatelných na každém omezeném intervalu.

Jsou-li $f, \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, pak integrací per partes dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} f'\varphi = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi'. \tag{11}$$

Jestliže $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, pak levá strana rovnosti (11) nemá smysl (o klasické derivaci funkce f nelze obecně mluvit), zatímco pravá strana je dobře definována. To nám napovídá, jak definovat *zobecněnou* derivaci.

Řekneme, že funkce $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ je *distributivní derivace* funkce $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (nebo také *slabá derivace* funkce $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$), jestliže platí

$$\int_{\mathbb{R}} g\varphi = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi', \quad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}). \tag{12}$$

Je důležité připomenout, že rovnost (12) určuje funkci g jednoznačně (rozumí se skoro všude). Z teorie integrálu je totiž známo tvrzení: *Je-li* $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *a*

$$\int_{\mathbb{R}} h\varphi = 0, \quad \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}),$$

potom $h = 0$ *skoro všude.*

Po této motivační úvaze nepřekvapí následující definice (užíváme obvyklá označení).

Nechť U je omezená otevřená podmnožina prostoru $\mathbb{R}^d$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ a $j \in \{1, \ldots, d\}$. Říkáme, že funkce $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ (lokálně lebesgueovsky integrovatelná funkce) je *distributivní derivací funkce u podle j-té proměnné, jestliže*

$$\int_U v\varphi = -\int_U u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad \varphi \in C^1_c(U);$$

označení: $v = D_j u$. Nyní můžeme definovat[77] *Sobolevův prostor* $W^{1,2}(U)$ jako prostor všech funkcí (přesněji prvků) $u \in L^2(U)$, pro jejichž distributivní derivaci platí $D_j u \in L^2(U)$, $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Jestliže $u, v \in W^{1,2}(U)$, definujeme skalární součin

$$(u, v) := \int_U uv + \int_U \sum_{j=1}^{d} D_j u D_j v$$

(místo $\sum_{j=1}^{d} D_j u D_j v$ se také píše $\nabla u \cdot \nabla v$).

Podstatné je (a zde opět oceníme význam Lebesgueova integrálu), že $W^{1,2}(U)$ s tímto skalárním součinem je úplný prostor, tedy *Hilbertův prostor*, a $W^{1,2}(U)$ s normou

$$||v|| = \Big(\int_U \big(|v|^2 + |\nabla v|^2\big)\Big)^{1/2}, \quad v \in W^{1,2}(U),$$

je *Banachův prostor.*

Označme $W^{1,2}_0(U)$ uzávěr prostoru $C^\infty_c(U)$ ve $W^{1,2}(U)$. Potom je $W^{1,2}_0(U)$ Hilbertův prostor a platí důležitá věta (*Rellich*): *Vnoření prostoru $W^{1,2}_0(U)$ do prostoru $L^2(U)$ je kompaktní, tj. uzavřená jednotková koule ve $W^{1,2}_0(U)$ je relativně kompaktní v $L^2(U)$.*

9 Émile Borel (1871–1956)

Émile Borel je spolu s Henri Lebesguem a René Bairem jedním z nejvýznamnějších představitelů francouzské matematické školy přelomu 19. a 20. století.[78]

Narodil se 7. ledna 1871 v městečku Saint-Affrique v rodině protestantského pastora. Jeho matka pocházela z obchodnické rodiny. V osmnácti letech byl přijat na École polytechnique i na École normale supérieure. Zvolil si École normale, kde (ve věku 23 let) obhájil doktorát. Po

[77] O prostorech funkcí existuje rozsáhlá literatura. Viz citace v [24], [36], [100].

[78] Život a dílo É. Borela jsou zachyceny v celé řadě pramenů. V [15], 1. díl, je publikována rozsáhlá Fréchetova stať (viz též [34]) a jsou zařazeny analýzy Borelova přínosu k jednotlivým matematickým disciplínám (autoři A. Denjoy, M. Fréchet, P. Lévy, G. Valiron). Z dalších zdrojů jmenujme [21], [52], [60] a [65]. Mimořádně zajímavé informace lze nalézt v textu *Notice sur les travaux scientifiques* sepsaném É. Borelem v letech 1912, 1918, 1929. Viz [15], 1. díl.

krátkém působení na univerzitě v Lille se vrátil v roce 1897 na École normale. Po celý život působil na vysokých školách v Paříži. Ve třiceti letech se oženil s Margueritou Appelovou, dcerou významného francouzského matematika Paula Appela. V roce 1921 byl zvolen členem Pařížské akademie věd.[79]

S Borelovým jménem je spojeno vybudování Institutu Henriho Poincarého a založení rozsáhlé edice matematických knih nazvané *Collection Borel* (nakladatelství Gauthier-Villars), která byla zahájena vydáním jeho první knihy *Leçons sur la théorie des fonctions* v roce 1898. Sám É. Borel v edici vydal deset knih, publikovali v ní také H. Lebesgue, R. Baire, R. Nevanlinna, P. A. A. Montel, N. N. Luzin a další význační matematici. É. Borel věnoval značnou pozornost otázkám výuky i popularizaci matematiky.

É. Borel byl také významným politickým činitelem: v letech 1924 až 1936 byl poslancem francouzského parlamentu, byl zvolen starostou rodného města Saint-Affrique (v roce 1927) a dokonce byl ministrem námořnictva. Bojoval v 1. světové válce (byl dekorován Croix de Guerre), za německé okupace byl vězněn, později se účastnil odboje.

É. Borel byl velikou osobností vědeckého i společenského dění ve Francii, originálním badatelem, oblíbeným přednášejícím, politikem a neúnavným organizátorem matematického života. Zemřel 3. února 1956.

É. Borel byl matematikem širokého záběru. Jeho práce se týkají teorie čísel, algebry, geometrie, analýzy a teorie pravděpodobnosti a jejich aplikací v matematické fyzice, v teorii her a statistice. É. Borel se rovněž věnoval otázkám filozofie vědy.

Publikoval na 300 článků a více než 30 knih. S jeho jménem je spojena věta o konečném pokrytí, počátky teorie míry, sčítací metody pro divergentní řady, teorie monogenních a kvazianalytických funkcí, významné příspěvky k teorii pravděpodobnosti a další.

[79] Ve Výroční zprávě JČMF za správní rok 1924–1925 je uvedena informace: *Na předešlé valné schůzi byl jednomyslně zvolen čestným členem Émile Borel, profesor university v Paříži, pro své vědecké zásluhy a činnost organisační mezi intelektuálními pracovníky.* V rubrice Zprávy a drobnosti v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky z roku 1936, s. D177, se dozvídáme, že Émile Borel byl zvolen zahraničním členem Královské české společnosti nauk.

Doc. M. Bečvářové vděčím za informaci, že E. Borel navštívil Československo ve dvacátých letech minulého století u příležitosti založení československé pobočky *Coopération Intellectuelle*, a pak v roce 1935. Fotografie z Borelovy návštěvy v Praze ve dnech 26. 11. – 30. 11. 1935 poskytl pro obrazovou přílohu doc. J. Veselý. Viz část 10.

10 Obrazové přílohy

Portrét É. Borela s podpisem[80]

Titulní strana Borelovy disertace[81]

První znění Borelovy věty o pokrytí[82]

Borelova věta v n-rozměrném prostoru[83]

Fotografie z Borelovy návštěvy v Praze[84]

---

[80] Převzato z [15], 1. díl.
[81] Viz [11] a [15], 1. díl, s. 239.
[82] Viz poznámka pod čarou[9].
[83] Viz [15], 3. díl, s. 1467, a poznámka pod čarou[27].
[84] Na zadní straně obou zarámovaných fotografií je uvedena tato legenda ke snímkům:

É. Borel

Bydžovský *Kořínek* *Jarník*
Schoenbaum *Koesler* *Hlavatý*

Cl. Eug. Pirau

EMILE BOREL
1871-1956

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS,

PAR M. ÉMILE BOREL,
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

L'intégrale de Cauchy a été le premier exemple d'une expression analytique égale à zéro dans une certaine région du plan et à une fonction déterminée dans une autre région. Dès lors, on a dû se poser la question suivante : Étant données deux fonctions d'une variable complexe, définies, l'une lorsque la variable est dans un certain domaine, l'autre lorsqu'elle est dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que *c'est la même fonction?* Avant les travaux de Cauchy, cette question aurait paru à peu près dénuée de sens ou tout au moins résolue immédiatement : on a la même fonction, pensait-on, lorsqu'on a la même expression analytique. Il est clair que l'existence d'expressions analytiques telles que l'intégrale de Cauchy ou certaines séries qui en ont été déduites par M. P. Appell (1) conduirait,

(1) P. APPELL, *Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle* (*Acta mathematica*, t. I).

NOTE.

Nous nous sommes appuyés (p. 26) sur ce lemme que, si l'on a une infinité d'intervalles partiels donnés sur une droite, dont la somme est inférieure à un intervalle total également donné, il existe au moins un point de l'intervalle total n'appartenant à aucun des intervalles partiels. Il est d'abord clair que, s'il y a sûrement un tel point, il en existe une infinité non dénombrable, car, s'il y en avait une infinité dénombrable, on pourrait les enfermer dans des intervalles dont la somme serait aussi petite que l'on veut et pourrait être choisie de manière que, en ajoutant ces intervalles à ceux qui sont déjà donnés, on ait une somme inférieure à l'intervalle total; il devrait donc y avoir un point de la droite n'appartenant à aucun de ces intervalles.

De plus, on peut supposer que l'on entend par point appartenant à l'intervalle tout point compris entre les extrémités et ne coïncidant pas avec elles; car il est possible d'agrandir chaque intervalle, par ses deux extrémités, d'une fraction suffisamment faible de sa propre longueur pour que la somme des intervalles reste inférieure à l'intervalle total. Il est clair qu'après cet agrandissement les points intérieurs aux anciens intervalles et leurs extrémités sont intérieurs aux nouveaux intervalles au sens restreint du mot.

On peut considérer ce lemme comme à peu près évident; néanmoins, à cause de son importance, je vais en donner une démonstration reposant sur un théorème intéressant par lui-même; il en existe d'autres démonstrations plus simples. Voici ce théorème : *Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un* NOMBRE LIMITÉ *d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété* (*tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux*). Il est bien entendu que le mot *intérieur* est toujours pris dans le sens restreint qui exclut les extrémités; il est aisé de s'assurer que, sans cela, le théorème ne serait pas vrai. On pourrait démontrer directement que tout point de la droite est nécessairement à l'intérieur d'un intervalle de rang limité (en supposant les intervalles numérotés suivant une loi quelconque), mais la démonstration suivante paraît être davantage dans la nature des choses.

de E l'ensemble des points communs à E' et C(E) d'une part, à E et C'(E) d'autre part, et points *intérieurs* à E les points de E qui n'appartiennent pas à sa frontière. L'ensemble E est dit *fermé* lorsqu'il contient tous les points de l'ensemble dérivé E'.

19. Ces définitions étant rappelées, nous allons démontrer le théorème suivant [1] :

Théorème VIII. — *Soit* E *un ensemble borné et fermé donné,* $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ *une infinité dénombrable* [2] *d'ensembles tels que tout point de* E *soit* intérieur *à, au moins, l'un d'eux; il est possible de trouver, parmi* $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$, *un nombre* limité *d'ensembles tels que tout point de* E *soit intérieur à, au moins, l'un d'eux.*

Il suffit de prouver qu'il existe un nombre fini M, tel que tout point de E soit *intérieur* à un E_j, tel que $j < M$. Or, nier l'existence de M, c'est affirmer que, *quel que soit le nombre* A, *il existe dans* E *au moins un point* x *tel que tous les* E_i *qui renferment* x *à leur intérieur soient tels que* $i > A$. Si l'on décompose l'ensemble E en un nombre limité d'autres ensembles, il y en aura au moins un ayant la même propriété.

L'ensemble E étant borné, il existe un nombre positif B tel que l'on ait, pour tout point de E,

$$|x_i| < B \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

(1) J'ai énoncé ce théorème pour le cas des ensembles linéaires ($n = 1$) dans ma Thèse (*Sur quelques points de la théorie des fonctions,* Paris, Gauthier-Villars, 1894); j'en ai donné dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions* une démonstration qui s'étend immédiatement au cas de n dimensions (c'est cette extension qui est donnée dans le texte). Dans sa Thèse (*Intégrale, longueur, aire,* publiée dans les *Annali di Mathematica*), M. Lebesgue a fait d'importantes applications de ce théorème et de sa généralisation; *voir* aussi son Cours cité au bas de la page 335.

Le théorème est énoncé et démontré ici pour le cas d'un ensemble borné et fermé quelconque.

(2) On pourrait supprimer le mot *dénombrable* sans que l'énoncé cessât d'être exact; je dois cette remarque à M. Lebesgue. Mais nous n'avons besoin ici que de l'énoncé du texte, un peu plus aisé à démontrer.

Literatura

[1] Alexandroff P.: *Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume.* Math. Ann. **92** (1924), 294–301.

[2] Alexandroff P., Hopf H.: *Topologie.* Erster Band. Berichtigter Reprint, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1974.

[3] Alexandroff P., Urysohn P.: *Zur Theorie der topologischen Räume.* Math. Ann. **92** (1924), 258–266.

[4] Alexandroff P., Urysohn P.: *Mémoire sur les espaces topologiques compacts.* Verh. kon. Akad. Wet. **14** (1929), 1–96.

[5] Archibald T.: *From attraction theory to existence proofs: the evolution of potential-theoretic methods in the study of boundary-value problems, 1860–1890.* Rev. Histoire Math. **2** (1996), 67–93.

[6] Armitage G. H., Gardiner S. J.: *Classical potential theory.* Springer-Verlag, London, 2001.

[7] Baire R.: *Sur l'origine de la notion de semi-continuité.* Bull. Soc. Math. France **55** (1927), 141–142.

[8] Bauer H.: *Measure and integration theory.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001.

[9] Blåsjö V.: *The isoperimetric problem.* Amer. Math. Monthly **112** (2005), 526–566.

[10] Borel É.: *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* C. R. Acad. Sci. Paris **118** (1894), 340–342.

[11] Borel É.: *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **12** (1895), 9–55.

[12] Borel É.: *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[13] Borel É.: *Sur une propriété des ensembles fermés.* C. R. Acad. Sci. Paris **140** (1905), 298–300.

[14] Borel É.: *Le calcul des intégrales définies.* J. Math. Pures Appl. **8** (1912), 159–210.

[15] Borel É.: *Oeuvres.* Tomes I, II, III, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1972.

[16] Bourbaki N.: *Éléments de mathématique. Topologie générale.* Hermann, Paris, 1965.

[17] Bourbaki N.: *Elements of the history of mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[18] Brelot M.: *Le balayage de Poincaré et l'epine de Lebesgue.* In: Proceedings of the 110th national congress of learned societies (Montpellier, 1985), Com. Trav. Hist. Sci., Paris, 1985, 141–151.

[19] Cameron D. E.: *The birth of the Stone-Čech compactification. Rings of continuous functions.* In: Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **95**, Dekker, New York, 1985, 67–78.

[20] Cartan H.: *Théorie des filtres.* C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 595–596.

[21] Choquet G., De Pauw T., de la Harpe P., Kahane J.-P., Pajot H., Sévennec B.: *Autour du centenaire Lebesgue.* Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[22] Cohen L. W.: *Measure and integration in the manner of Borel.* Scripta Math. **29** (1973), 417–435.

[23] Čech E.: *On bicompact spaces.* Ann. of Math. **38** (1937), 823–844.

[24] Drábek P., Milota J.: *Lectures on nonlinear analysis.* Vydavatelský servis, Plzeň, 2004.

[25] Dugac P.: *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue.* Arch. Internat. Hist. Sci. **39** (1989), 69–110.

[26] Dunford N., Schwartz J. T.: *Linear operators.* Part I.: General theory, Interscience Publishers, New York, 1958.

[27] Edelstein M.: *On fixed and periodic points under contractive mappings.* J. London Math. Soc. **37** (1962), 74–79.

[28] Fabian M., Habala P., Hájek P., Montesinos V., Zizler V.: *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis.* CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2011.

[29] Fabian M., Habala P., Hájek P., Montesinos V., Pelant J., Zizler V.: *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* CMS Books Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[30] Fréchet M.: *Généralisation d'un théorème de Weierstrass.* C. R. Acad. Sci. Paris **139** (1904), 848–849.

[31] Fréchet M.: *Sur les fonctions d'une infinité de variables.* C. R. Acad. Sci. Paris **140** (1905), 567–568.

[32] Fréchet M.: *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* Rend. Circ. Mat. Palermo **22** (1906), 1–74.

[33] Fréchet M.: *Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel.* Rend. Circ. Mat. Palermo **30** (1910), 1–26.

[34] Fréchet M.: *La vie et l'oeuvre d'Émile Borel.* Monographies de l'Enseignement Mathématique, Imprimerie Kundig, Genève, 1965.

[35] Freudenthal H.: *Die Topologie in historischen Durchblicken.* In: Überblicke Mathematik, Ed. D. Laugwitz, Bibliogr. Institut Zürich, Wissenschafts-Verlag, Zürich, 1971, 7–24.

[36] Fučík S., Kufner A.: *Nonlinear differential equations.* Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam – New York, 1980.

[37] Fuglede B.: *Finely holomorphic functions. A survey.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **33** (1988), 283–295.

[38] Goffman C., Pedrick G.: *First course in functional analysis.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.

[39] Gray J. D.: *The shaping of the Riesz representation theorem: a chapter in the history of analysis.* Arch. Hist. Exact Sci. **31** (1984), 127–187.

[40] Hausdorff F.: *Grundzüge der Mengenlehre.* Von Veit, Leipzig, 1914.

[41] Hawkins T.: *Lebesgue's theory of integration.* The University of Wisconsin Press, Madison, London, 1970.

[42] Heine E.: *Die Elemente der Functionenlehre.* J. Reine Angew. Math. **74** (1872), 172–188.

[43] Hewitt E.: *The rôle of compactness in analysis.* Amer. Math. Monthly **67** (1960), 499–516.

[44] Hewitt E., Stromberg K.: *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable.* Springer-Verlag, New York, 1965.

[45] Hildebrandt T. H.: *The Borel theorem and its generalizations.* Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), 423–474.

[46] Jahnke H. N.: *A history of analysis.* Amerian Mathematical Society, Providence, RI – London, 2003.

[47] Jost J.: *Partial differential equations.* Springer, New York, 2007.

[48] Kelley J. L.: *General topology.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York – Berlin, 1975.

[49] Kellogg O. D.: *Foundations of potential theory.* Springer-Verlag, Berlin – New York, 1967.

[50] Kline M.: *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, 1972.

[51] Knobloch E.: *Von Riemann zu Lebesgue – zur Entwicklung der Integrationstheorie.* Historia Math. **10** (1983), 318–343.

[52] Knobloch E.: *Émile Borel as a probabilist.* In: The probabilistic revolution, MIT Press, Cambridge, 1987, 215–233.

[53] Lebesgue H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[54] Lebesgue H.: *Young (W.-H.) et Chisholm Young (Grace). The Theory of Sets of Points.* Bull. Sci. Math. (2) **3** (1907), 129–135.

[55] Lebesgue H.: *Oeuvres scientifiques.* Volume I, L'Enseignement Mathématique, Université de Genève, 1972.

[56] Lebesgue H.: *Les lendemains de l'intégrale: lettres à Émile Borel.* With an unpublished work by Gustave Choquet. Vuibert, Paris, 2004.

[57] Lindelöf E.: *Sur quelques points de la théorie des ensembles.* C. R. Acad. Sci. Paris **137** (1903), 697–700.

[58] Lindelöf E.: *Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles.* Acta Math. **29** (1905), 183–190.

[59] Lukeš J., Malý J., Netuka I., Spurný J.: *Integral representation theory. Applications to convexity, Banach spaces and potential theory.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010.

[60] Maurey B., Tacchi J.-P.: *La genèse du théorème de recouvrement de Borel.* Rev. Histoire Math. **11** (2005), 163–204.

[61] Mawhin J.: *Initiation à la compacité: une variante.* In: L'enseignement de l'analyse aux débutants, Eds. C. Hauchart et N. Rouche, Academia – Erasme, Louvain-la Neuve, 1992, 109–125.

[62] Mawhin J.: *Autour du théorème du point fixe.* Rev. Questions Sci. **177** (2006), 27–44.

[63] Mawhin J.: *Le théorème du point fixe de Brouwer: un siècle de métamorphoses.* Science et technique en perspective **10** (2007), 175–220.

[64] Mawhin J.: *Henri Poincaré and the partial differential equations of mathematical physics.* In: The scientific legacy of Poincaré, Hist. Math. 36, AMS, Providence, RI, 2010, 257–277.

[65] Медведев Ф. А.: *Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв.* Издательство „Наука", Москва [Medvedev F. A.: Francouzská škola teorie funkcí a množin na přelomu XIX.–XX. století. Nakladatelství „Nauka", Moskva], 1976 (rusky).

[66] Medvedev F. A.: *Scenes from the history of real functions.* Birkhäuser, Basel, 1991.

[67] Monna A. F.: *Dirichlet's principle. A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis.* Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht, 1975.

[68] Netuka I.: *Teorie míry a integrálu* [online]. Poslední verze květen 2011 [cit. 15. 5. 2011] http://www.karlin.mff.cuni.cz/~netuka/vyuka/teorie_miry_a_integralu.pdf .

[69] Pesin I. N.: *Classical and modern integration theories.* Academic Press, New York – London, 1970.

[70] Петрова С. С.: *Принцип Дирихле в работах Римана.* Историко-математические исследования [Petrova S. S.: Dirichletův princip v dílech Riemanna. Istoriko-matěmatičeskije issledovanija] **16** (1965), 295–310 (rusky).

[71] Pier J.-P.: *Genèse et évolution de l'idée de compact.* Rev. Histoire Sci. Appl. **2** (1961), 169–179.

[72] Pier J.-P.: *Historique de la notion de compacité.* Historia Math. **7** (1980), 425–443.

[73] Pinkus A.: *Weierstrass and approximation theory.* J. Approx. Theory **107** (2000), 1–66.

[74] Remmert R.: *Theory of complex functions.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[75] von Renteln M.: *Friedrich Prym (1841–1915) – and his investigations on the Dirichlet problem.* Rend. Circ. Math. Palermo (2) Suppl. **44** (1996), 43–55.

[76] Riesz F.: *Sur un théorème de M. Borel.* C. R. Acad. Sci. Paris **140** (1905), 224–226.

[77] Rudin W.: *Principles of mathematical analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York – Auckland – Düsseldorf, 1976.

[78] Rudin W.: *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[79] Rudin W.: *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[80] Schoenflies A.: *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **8** (1900), zweites Heft, 1–250.

[81] Schoenflies A.: *Sur un théorème de Heine et un théorème de Borel.* C. R. Acad. Sci. Paris **144** (1907), 22–23.

[82] Schoenflies A.: *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen.* Teubner, Leipzig – Berlin, 1913.

[83] Schoenflies A.: *Über einen Youngschen Beweis des verallgemeinerten Borelschen Intervalltheorems.* Palermo Rend. **35** (1913), 74–78.

[84] Simon P.: *Čech-Stone compactification.* In: The mathematical legacy of Eduard Čech, Birkhäuser, Basel, 1993, 26–37.

[85] Сологуб В. С.: *Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях.* Издательство „Думка“, Киев [Sologub V. S.: Rozvoj teorie eliptických rovnic v 18. a 19. století. Nakladatelství „Dumka“, Kijev], 1975 (rusky).

[86] Spivak M.: *A comprehensive introduction to differential geometry.* Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.

[87] Stone M. H.: *A generalized Weierstrass approximation theorem.* In: Studies in modern analysis, Vol. 1, Ed. R. C. Buck, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America, Prentice-Hall, Inc., 1962, 30–87.

[88] Talenti G.: *The standard isoperimetric theorem.* In: Handbook of convex geometry, Vol. A, B, North-Holland, Amsterdam, 1993, 73–123.

[89] Tichonoff A. N.: *Über die topologische Erweiterung von Raümen.* Math. Ann. **102** (1930), 544–561.

[90] Veblen O.: *The Heine-Borel theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. **10** (1904), 436–439.

[91] Veselý J.: *Komplexní analýza pro učitele,* Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000.

[92] Veselý J.: *Základy matematické analýzy.* První díl, druhý díl, Matfyzpress, Praha, 2004, 2009.

[93] Walter J.: *On elementary proofs of Peano's existence theorems.* Amer. Math. Monthly **80** (1973), 282–286.

[94] Walter J.: *Proof of Peano's existence theorem without using the notion of the definite integral.* J. Math. Anal. Appl. **59** (1977), 587–595.

[95] Weierstrass K.: *Zur Functionenlehre.* Berlin Ak. Monatsber. 1880, 719–743.

[96] Weil A.: *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale.* Hermann, Paris, 1937.

[97] Young W. H.: *Overlapping intervals.* Proc. Lond. Math. Soc. **35** (1902), 384–388.

[98] Young W. H.: *On an extension of the Heine-Borel theorem.* The Messenger of Mathematics **33** (1904), 129–132.

[99] Zeidler E.: *Applied functional analysis. Main principles and their applications. Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[100] Zeidler E.: *Applied functional analysis. Applications to mathematical physics. Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1995.

Poděkování
Práce vznikla díky podpoře výzkumného záměru MSM 0021620839 financovaného MŠMT.

Adresa
Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc.
Matematický ústav Univerzity Karlovy
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *netuka@karlin.mff.cuni.cz*

STANISŁAW GOŁĄB
I GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA W POLSCE

ZDZISŁAW POGODA

Abstrakt: Stanisława Gołąba uważa się za jednego z twórców, dziś już klasycznej teorii obiektów geometrycznych i głównego twórcę szkoły geometrii różniczkowej w Krakowie. Teoria obiektów geometrycznych była w okresie międzywojennym nowoczesną teorią matematyczną i siłą napędową rozwoju całej geometrii różniczkowej, w szczególności znalazła bardzo ważne zastosowanie w fizyce teoretycznej. W artykule przedstawiona jest sylwetka Stanisława Gołąba oraz jego osiągnięcia i wpływ na rozwój geometrii różniczkowej w Polsce.

Rys. 1
Stanisław Gołąb

Współczesna geometria różniczkowa jest dziedziną niezwykle rozbudowaną i dzieli się na wiele różnych poddziedzin. Jej rezultaty znalazły ważne zastosowania w innych działach matematyki. Trudno sobie wyobrazić ogólną teorię względności bez przestrzeni pseudoriemannowskich i współczesną kosmologię bez geometrycznych modeli wszechświata. Również klasyczna mechanika przyjęła elegancką postać w języku teorii rozmaitości symplektycznych. Zaskakujące rezultaty Donaldsona o niewygładzalnych strukturach na R^4 możliwe były do uzyskania dzięki teorii Yanga-Millsa, której równania przejrzyście można sformułować się w języku obiektów geometrycznych. Metody geometryczne, dzięki pracom W. Thurstona okazały się bardzo przydatne przy klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych. Z kolei dzięki rezultatom R. Hamiltona i G. Perelmana z teorii potoków Ricciego udało się udowodnić twierdzenie geometryzacyjne dla tychże rozmaitości oraz rozstrzygnąć klasyczną wersję hipotezy Poincarégo. A są to tylko może najbardziej spektakularne przykłady wykorzystania geometrii różniczkowej. Trudno sobie wyobrazić współczesną matematykę bez takich pojęć jak tensor, koneksja czy wiązka włóknista.

Pierwsze pomysły zaliczane do geometrii różniczkowej pojawiły się wraz z powstaniem rachunku różniczkowego i całkowego. Twórcy nowych, potężnych metod zaczęli je stosować do badania własności krzywych i, na początku w nieco mniejszym stopniu, powierzchni. Rachunek różniczkowy umożliwił zdefiniowanie takich pojęć jak krzywizna krzywej, czy skręcenie. Wiele ważnych i ciekawych rezultatów zawdzięczamy Johannowi Bernoulliemu i Leonhardowi Eulerowi – pionierom w dziedzinie badań nad teorią krzywych. Euler rozpoczął także systematyczne badania powierzchni metodami analizy matematycznej. Niezwykle ważnym wydarzeniem dla rozwoju geometrii różniczkowej było powstanie *Disquisitiones generales circa superficies curvas* Gaussa w 1827 roku. W dziele tym Gauss nie tylko usystematyzował dotychczasową wiedzę na temat powierzchni, ale także wprowadził wiele bardzo ważnych pojęć i udowodnił szereg fundamentalnych twierdzeń. Jego pomysły przeniósł na wyższe wymiary i znacznie rozwinął Bernhard Riemann w słynnym wykładzie habilitacyjnym wygłoszonym w 1854 roku. Choć wykład ukazał się drukiem dopiero po śmierci autora w 1866 roku, to śmiało można stwierdzić, że dał początek rozwojowi wielu ważnych kierunków nowoczesnej geometrii różniczkowej. Większość ważnych idei geometrii ma swój początek, jeśli nie w *Disquisitiones* Gaussa, to w wykładzie habilitacyjnym Riemanna.

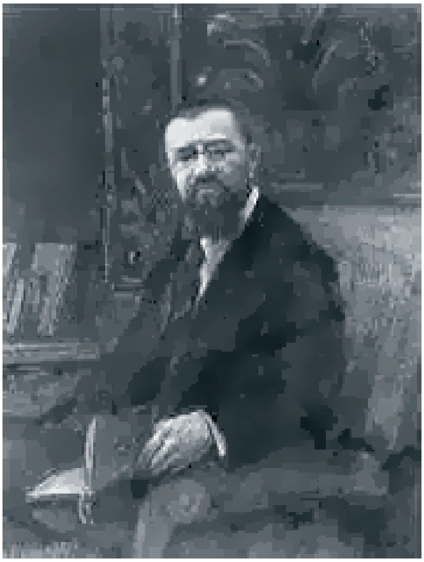
Gdy wspomina się o dziedzinach matematyki rozwijanych przez Polaków, to przede wszystkim wymienia się topologię, teorię mnogości, teorię równań różniczkowych, analizę matematyczną i podstawy matematyki. Topologia i teoria mnogości zostały wskazane przez Zygmunta Janiszewskiego jako dziedziny młode, dające szansę szybkiego uzyskania nowych ważnych i liczących się rezultatów, co było ważne dla rozwoju polskiej matematyki. Geometria różniczkowa znalazła się na dalszym planie, choć i tu rezultaty uzyskane przez polskich matematyków okazały się istotne i znalazły trwałe miejsce w matematyce. Geometria różniczkowa w swej klasycznej postaci teorii krzywych i powierzchni była już dziedziną okrzepłą a w wersji uogólnionej niewiadomo było, w którym kierunku się rozwinie.

Przed pojawieniem się pierwszych oryginalnych prac poświęconych geometrii różniczkowej napisanych przez Polaków na język polski zostały przetłumaczone fundamentalne rozprawy z tej dziedziny. I tak, w 1877 roku opublikowany został w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu (tom IX) wykład habilitacyjny Riemanna pod tytułem „O hypotezach, które służą za podstawę geometryi" przetłumaczony przez Samuela Dicksteina i Władysława Gosiewskiego[1]. Dickstein i Gosiewski założyli w 1888 pierwsze czasopismo matematyczno-fizyczne o szerszym zasięgu – *Prace Matematyczno-Fizyczne*. W tym to czasopiśmie Dickstein umieszczał tłumaczenia wielu ważnych artykułów z geometrii różniczkowej. Znalazł się tam między innymi świeżo opublikowany w 54 tomie *Mathematische Annalen* fundamentalny artykuł Ricciego i Levi-Civity noszący polski tytuł *Metody rachunku różniczkowego bezwzględnego i ich zastosowania*. Tłumaczenie ukazało się w niecały rok po opublikowaniu oryginału, a przecież nie było wtedy matematyka czytającego po polsku, który interesowałby się nowopowstałym rachunkiem tensorowym[2] (por. [12]). Być może Dickstein chciał

[1] Tłumaczenie to zostało ponownie wydrukowane w Pracach Matematyczno-Fizycznych w 1922 roku (nr 32, str. 113–143).
[2] Rachunek tensorowy nazywano wtedy bezwzględnym albo absolutnym rachunkiem różniczkowym.

zainteresować polskie środowisko matematyczne nowymi technikami w geometrii różniczkowej przeczuwając ich wyjątkową przydatność – piętnaście lat później ukazała się praca Einsteina poświęcona ogólnej teorii względności i znaczenie rachunku tensorowego zostało potwierdzone.

Pierwszym, który podjął systematyczne badania w dziedzinie geometrii różniczkowej był Kazimierz Żorawski. Uzyskał on szereg ważnych i ciekawych rezultatów cytowanych w literaturze światowej. Część jego wyników zaliczanych później do geometrii różniczkowej najpierw znalazła swoje miejsce w teorii równań różniczkowych i analizie. Żorawski był matematykiem wielkiego formatu, jednak nie stworzył szkoły podobnej do tych, jakie powstały w Warszawie i Lwowie. Zajmował się trudnymi zagadnieniami wymagającymi długoletnich studiów, a ponadto był raczej typem naukowca samotnika. Mimo to dzięki swoim wykładom, pracom i osobistym kontaktom wywarł wpływ na kilku matematyków rozbudzając w nich zainteresowanie geometrią różniczkową i teorią grup Liego. Od początku działalności w Krakowie zorganizował seminarium, na którym referowano najnowsze wyniki z teorii ciągłych grup przekształceń (por. [12], [13]). Ziarno zasiane przez Żorawskiego w Krakowie zakiełkowało – Antoni Hoborski doktorant Stanisława Zaremby, ale też słuchacz wykładów Żorawskiego, podjął prace nad problemami geometrii różniczkowej. Marzył o stworzeniu szkoły geometrii różniczkowej. Jednak nie było mu dane zrealizowanie tego pomysłu w pełni. Niestety wybuch wojny i śmierć w obozie koncentracyjnym 1940 roku przerwały jego działalność. Ideę Hoborskiego podjął i rozwinął jego uczeń oraz współpracownik – Stanisław Gołąb.



Rys. 2
Antoni Hoborski

Stanisław Gołąb urodził się w Travniku w Bośni 26 lipca 1902 roku, jednak szkołę podstawową i średnią ukończył już w Krakowie. Od 1920 roku studiował na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Studia ukończył w 1924 roku i dwa lata później złożył egzamin uprawniający do zawodu nauczyciela. Przypomnijmy, że w tym czasie absolwent studiów matematycznych mógł zdać egzamin nauczycielski i podjąć pracę w szkole, względnie, jeśli chciał wybrać karierę naukową, pracując w szkole musiał wykazać się ogromną wytrwałością i zdobywać kolejne stopnie naukowe. Istniała też dla nielicznych możliwość wyjazdu za granicę na studia uzupełniające. Warto dodać, że do roku 1926 nie było stopnia magistra. Stanisław Gołąb rozpoczął pracę już w 1922 roku na Akademii Górniczej, a w latach 1928–1931 uzupełniał wiedzę na studiach we Włoszech, Czechosłowacji, Niemczech i przede wszystkim w Holandii. W Holandii zetknął się z wybitnym specjalistą w dziedzinie geometrii różniczkowej Jahnem Arnoldusem Schoutenem i pod jego kierunkiem przygotował pracę doktorską *Über verallgemeinerte projective Geometrie* ([6]), którą obronił na Uniwersytecie Jagiellońskim w 1931 roku. W następnym roku habilitował się na podstawie pracy *Zagadnienia metryczne geometrii Minkowskiego* ([7]).

Rys. 3
Stanisław Gołąb w młodości

Urzeczywistniając zamierzenia Antoniego Hoborksiego Stanisław Gołąb był wraz z Władysławem Ślebodzińskim jednym z głównych twórców szkoły geometrii różniczkowej w Polsce (por. [5]). Organizował lub współorganizował liczne konferencje krajowe i międzynarodowe. To właśnie z jego inicjatywy odbywały się systematycznie konferencje z geometrii różniczkowej, na przemian o charakterze naukowym i szkoleniowym. Niestety po śmierci Profesora zwyczaj organizowania tych konferencji zaniknął i dopiero pod koniec lat dziewięćdziesiątych XX stulecia matematycy zajmujący się geometrią różniczkową ponownie zaczęli się spotykać regularnie na konferencjach w Krynicy.

Zainteresowania naukowe Stanisława Gołąba dotyczyły rozmaitych działów matematyki; pisał oryginalne prace z topologii, algebry, analizy, logiki, równań różniczkowych oraz rozmaitych zastosowań. Jednak jego podstawową dziedziną działalności naukowej była geometria różniczkowa, a w szczególności teoria obiektów geometrycznych, których szczególnym przypadkiem są tensory, formy różniczkowe i koneksje. Będąc uczniem i współpracownikiem Schoutena Stanisław Gołąb zapoznał się z najnowocześniejszym ujęciem analizy tensorowej. Wraz z Schoutenem wypracował podstawowe zasady lokalnego rachunku tensorowego, znane jako „Kern-Index Methode”. Techniki te znacznie ułatwiły pracę i wiele własności uczyniły bardziej przejrzystymi umożliwiając rozmaite klasyfikacje, sugerując nowe kierunki badań. Stanisława Gołąba uważa się za jednego głównych twórców, dziś już klasycznej, teorii obiektów geometrycznych. Obiektami geometrycznymi interesowało się wielu znakomitych matematyków. Prace z tej dziedziny pisali między innymi O. Veblen, J. H. C. Whitehead i J. A. Schouten podając rozmaite, nierównoważne definicje obiektu geometrycznego. Dopiero Aleksander Wundheiler asystent profesora Przeborskiego przy Katedrze Mechaniki teoretycznej na Uniwersytecie Warszawskim zaproponował na Kongresie Geometrii Różniczkowej w Moskwie w 1934 roku definicję tego pojęcia (por. [13], [14]), która została powszechnie zaakceptowana, a potem uogólniona właśnie przez Stanisława Gołąba.

Stanisław Gołąb sprecyzował niezwykle ważne pojęcie pseudogrupy transformacji, komitanty i równoważności obiektów. Przytoczmy dla przykładu niektóre definicje zaproponowane przez Stanisława Gołąba. Zacznijmy od definicji pseudogrupy przekształceń, którą można znaleźć obecnie np. w podręczniku, a raczej monografii *Rachunek tensorowy* [4]. Od słynnego inauguracyjnego wykładu erlangeńskiego Felixa Kleina matematycy doceniali znaczenie pojęcia grupy przekształceń w geometrii. Okazało się jednak, że w wielu subtelnych rozważaniach pojęcie grupy jest niewystarczające. W 1939 roku Stanisław Gołąb przedstawił w pracy [8] precyzyjną definicję pseudogrupy przekształceń.

> Załóżmy, że zbiór G przekształceń T ma następujące własności:
>
> 1. Każde przekształcenie T ma jako dziedzinę D zbiór otwarty i niepusty.
> 2. Jeżeli pewne przekształcenie T_1 o dziedzinie D_1 należy do zbioru G i jeśli T_1 zacieśnimy do dowolnej niepustej dziedziny D_2 będącej częścią D_1, to zacieśnienie T_2 rónież należy do G.
> 3. Jeżeli przekształcenie T_1 o dziedzinie D_1 i odpowiadającej jej przeciwdziedzinie dziedzinie T_2 należy do G i jeśli przekształcenie T_2 o dziedzinie D_2 też należy do G, to superpozycja przekształceń T_1T_2 (o dziedzinie D_1) również należy do G.
> 4. Jeżeli przekształcenie T_1 o dziedzinie D_1 należy do G i jeśli x jest dowolnym punktem dziedziny D_1, to istnieje taka dziedzina D_0 zawierająca x i zawarta w D_1 oraz takie przekształcenie T_2, którego dziedziną jest obraz dziedziny D_0 poprzez przekształcenie T_1, że T_2 należy do G i przy tym $T_2T_1 = I$ w D_0 (I jest przekształceniem identycznościowym).

Pseudogrupy przekształceń tworzą zbiory lokalnych homeomorfizmów, lokalnych dyfeomorfizmów ustalonej klasy, lokalnych dyfeomorfizmów konforemnych, symplektycznych itp.

Na bazie pseudogrupy przekształceń Stanisław Gołąb zdefiniował pojęcie obiektu geometrycznego uogólniając i łącząc wiele pozornie odległych sytuacji w geometrii. Najpierw określane są ogólne obiekty (por. [4], [8]).

Niech będzie dana n wymiarowa przestrzeń oparta na pseudogrupie przekształceń G_r (r jest liczba naturalną niezależną od n). Weźmy pod uwagę punkt $\underset{0}{\xi}$. Powiemy, że w punkcie $\underset{0}{\xi}$ został określony pewien obiekt, jeśli każdemu dopuszczalnemu układowi współrzędnych (λ) został jednoznacznie przyporządkowany ciąg liczb

$$\omega_\alpha \qquad (\alpha = 1,...,m)$$

które nazywamy współrzędnymi obiektu ω w układzie (λ). Współrzędne obiektu ω w układzie (λ') oznaczać będziemy

$$\omega_{\alpha'} \qquad (\alpha' = 1',...,m')$$

Przyporządkowanie to możemy zapisać

$$\omega_\alpha = f_\alpha(\lambda) \qquad \alpha = 1,...,m.$$

Liczba m – ilość współrzędnych obiektu – jest na ogół niezależna od wymiaru przestrzeni n. W szczególności punkt jest obiektem o n współrzędnych, podobnie wektor ma n współrzędnych. Najprostszym obiektem jest skalar, gdyż ma jedna współrzędną – w tym przypadku funkcja f jest stała niezależna od układu współrzędnych.

Jeśli w każdym punkcie pewnego obszaru określony został obiekt, to mówimy, że w tym obszarze zostało zdefiniowane pole obiektów. Często terminu „obiekt" i „pole obiektów" używa się wymiennie.

Definicja obiektu jest bardzo ogólna, dlatego wyróżnia się pewne bardziej specjalne rodziny obiektów na przykład właśnie obiekty geometryczne.

Obiekt ω nazywamy obiektem geometrycznym, jeśli dla każdych dwóch dopuszczalnych układów współrzędnych (λ) i (λ') zachodzi związek

$$(*) \quad \omega_{\alpha'} = F_{\alpha'}[\omega_\alpha; T(\lambda \to \lambda')]$$

tzn., że współrzędne obiektu ω w układzie (λ') dadzą się obliczyć na podstawie znajomości współrzędnych tego obiektu w układzie (λ) oraz przekształcenia T, które prowadzi od układu (λ) do układu (λ'). Związek (*) będziemy nazywali regułą przekształcenia dla danego obiektu geometrycznego.

Jeśli teraz regułę przekształcenia obiektu geometrycznego da się napisać w postaci

$$\omega_{\alpha'} = F_{\alpha'}[\omega_\alpha; \underset{0}{\xi^\lambda}, \underset{0}{\xi^{\lambda'}}, \underset{0}{A}{}^{\lambda'}_{\lambda}, [\partial_\mu A^{\lambda'}_\lambda]_0, \ldots, [\frac{\partial^p \xi^{\lambda'}}{\partial \xi^{\lambda_1} \ldots \partial \xi^{\lambda_p}}]_0]$$

a zatem w takiej postaci, gdzie funkcje F zależą od współrzędnych obiektu w układzie (λ), a ponadto od współrzędnych punktu $\underset{0}{\xi}$ w pierwotnym i nowym układzie współrzędnych oraz od pochodnych cząstkowych przekształcenia T obliczonych w punkcie $\underset{0}{\xi}$, aż do pochodnych rzędu p $(p \leq r)$, to obiekt nazywamy obiektem geometrycznym klasy p. Przyjęto tu oznaczenie

$$A^{\lambda'}_\lambda = \frac{\partial \xi^{\lambda'}}{\partial \xi^\lambda}$$

W naturalny sposób obiektami geometrycznymi są wektory, kowektory, formy różniczkowe i ogólnie tensory typu (p,q) z regułami przekształcenia odpowiednio

$$v^{\lambda'} = A^{\lambda'}_\lambda v^\lambda$$

$$\sigma_{\lambda'} = A^\lambda_{\lambda'} \sigma_\lambda$$

$$\omega_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_q} = A^{\lambda_1 \ldots \lambda_q}_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_q} \omega_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$$

$$\omega^{\lambda'_1 \ldots \lambda'_p}{}_{\mu'_1 \ldots \mu'_q} = A^{\lambda'_1 \ldots \lambda'_p \mu_1 \ldots \mu_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu'_1 \ldots \mu'_q} \omega^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}{}_{\mu_1 \ldots \mu_q}$$

Stanisław Gołąb wyróżnił i sklasyfikował liczne rodziny obiektów geometrycznych. Łącznie poświęcił obiektom czterdzieści publikacji. Ich pełny spis można znaleźć w artykule [1]. W swoich badaniach nad obiektami posługiwał się metodami teorii równań funkcyjnych, stanowiącej pewien specjalny sposób ujmowania i rozwiązywania zagadnień. Efektem tej działalności jest często cytowana monografia [2] napisana wspólnie z Aczélem. Stanisław Gołąb jest również autorem wspomnianego już podręcznika – monografii *Rachunek tensorowy* ([4]), gdzie oprócz podstawowego kursu rachunku tensorowego zamieścił wiele oryginalnych rezultatów dotyczących obiektów geometrycznych, które znalazły zastosowanie na przykład w różnych działach geometrii różniczkowej i fizyki.

Należy zaznaczyć także, że Stanisław Gołąb studiował różnorodne zagadnienia w przestrzeniach z koneksjami liniowymi i rzutowymi, w przestrzeniach riemannowskich, rozwiązywał problemy w przestrzeniach Minkowskiego i Finslera oraz w ogólnych przestrzeniach metrycznych. Dokładny opis publikacji wraz z analizą najważniejszych prac został umieszczony w artykule [1]. Interesował się również, dzięki swojemu nauczycielowi, klasyczną geometrią różniczkową uzyskując wiele ciekawych rezultatów, w szczególności dotyczących własności krzywych, pojęcia krzywizny i n-ścianu Freneta. W badaniach tych wykorzystywał intensywnie topologię, algebrę i analizę wektorową. Liczba jego publikacji w tej dziedzinie wynosi czterdzieści trzy (por. [1], [10]) .

Stanisław Gołąb był matematykiem wszechstronnym, jego działalność trafnie opisał jeden z wybitnych uczniów Mieczysław Kucharzewski (por. [10], [3]):

Twórczość naukową profesora Gołąba charakteryzują trzy cechy.

Pierwszą, najważniejszą, jest możliwie ogólne i precyzyjne ujmowanie zagadnień. Stąd zrodziło się zainteresowanie topologią, logiką, algebrą, a potem równaniami funkcyjnymi.

Druga cecha to wiązanie matematyki z zastosowaniami.

Trzecia wreszcie cecha to jasność ich przedstawienia i wielka komunikatywność wyników. Umiejętność jasnego przedstawienia nawet bardzo skomplikowanych zagadnień była niewątpliwie wynikiem zainteresowania profesora dydaktyką na wszelkim poziomie.

Stanisław Gołąb był nie tylko wielkim uczonym, ale również doskonałym nauczycielem i wychowawcą licznej kadry naukowej. Potrafił skupić wokół siebie młodych zdolnych ludzi i zainteresować ich dziedziną nie tak popularną jak inne rozwijane w Polsce dziedziny matematyki. Cieszył się ogromnym autorytetem i sympatią swoich studentów. W pracy dydaktycznej wyznawał zasadę, iż należy pomagać wszystkim zainteresowanym działalnością naukową. Pomagał więc wielu uczniom w różnych sytuacjach. W sprawach ważnych okazywał ogrom serca i życzliwości. Można zaryzykować tezę, że bardziej właśnie z tego powodu uważano go za „ojca polskich geometrów" niż z powodu dużej liczby jego naukowych „dzieci".

Pierwszym, nie całkiem formalnym doktorantem Stanisława Gołąba był Włodzimierz Wrona promowany najpierw w 1943 roku, a później już oficjalnie 1945, ale ze względów formalnych (promotorem musiał być profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego) pod kierunkiem Franciszka Lei. Dlatego pierwszym oficjalnym doktorem wypromowanym przez Gołąba był Tadeusz Trajdos (UJ, 1950). Drugą z kolei była Hanna Pidek-Łopuszańska (UJ, 1951). Prace doktorskie pod kierunkiem Stanisława Gołąba pisali także Zenon Moszner (UJ, 1957), Mieczysław Kucharzewski (UJ, 1959), Marek Kuczma (UJ, 1961), Andrzej Zajtz (UJ, 1961), Edward Siwek (UJ, 1964). Łącznie wypromował 29 doktorów (ostatni w 1979, Jerzy Gondek). Był recenzentem w 80 przewodach doktorskich i 45 habilitacyjnych. Znakomita większość matematyków zajmujących się geometrią różniczkową w latach siedemdziesiątych była albo uczniami albo uczniami uczniów Stanisława Gołąba (jak autor niniejszego opracowania).

Ucząc przez długie lata na Akademii Górniczo-Hutniczej zdobył sobie uznanie ogromnej rzeszy inżynierów. Potrafił zainteresować ich wykładami i umiał od nich wymagać. Znakomicie też bronił znaczenia zastosowań matematyki. Na zarzut, że „całką nie da się wydobyć węgla", odpowiadał w specyficzny dla siebie sposób: „łopatą wytrzymałości stempla się nie obliczy".

Był człowiekiem o ogromnym poczuciu humoru i znakomicie dostrzegał komizm pozornie poważnych sytuacji. Był osobą życzliwą, miał jednak cięty język i często go wykorzystywał w drobnych sprawach. Oto jedno zdarzenie opisane przez Jacka Gancarzewicza również znakomitego ucznia Stanisława Gołąba (por. [3]).

> *Pamiętam, że jako początkujący pracownik Uniwersytetu na seminarium prowadzonym przez profesora w Instytucie Matematycznym PAN referowałem pracę o G-gęstościach i W-gestościach. Po podaniu definicji, ze względu na dualność twierdzeń, powiedziałem, że w dalszym ciągu będę zajmował się tylko G-gestościami. W tym miejscu, Profesor przerwał mi referat i powiedział: „Rozumiem, dlaczego pan woli mówić o G-gęstościach – zapewne uważa pan, że nazwa ta pochodzi od pana nazwiska". Oczywiście sala zaniosła się śmiechem – ku zadowoleniu Profesora.*

Za swoją działalność Stanisław Gołąb był wielokrotnie nagradzany najwyższymi odznaczeniami państwowymi i resortowymi – między innymi Krzyżem Kawalerskim (1956) i Krzyżem Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski (1967). W 1969 roku Akademia Górniczo-Hutnicza nadała mu tytuł doktora honoris causa. Zmarł 30 kwietnia 1980 roku i został pochowany na Cmentarzu Rakowickim w Krakowie.

Teoria obiektów geometrycznych była w okresie międzywojennym nowoczesną teorią matematyczną i siłą napędową rozwoju całej geometrii różniczkowej, w szczególności znalazła bardzo ważne zastosowanie w fizyce teoretycznej. Później utraciła swoje pierwszoplanowe znaczenie. Pod koniec lat siedemdziesiątych XX stulecia znów znalazła się w centrum zainteresowań geometrów, ale już w innej nowoczesnej formie wiązek i operatorów naturalnych. Dzisiejsze badania w zakresie operatorów i wiązek naturalnych, prowadzone również intensywnie w Krakowie, można śmiało uznać za kontynuację idei zapoczątkowanych przez Stanisława Gołąba.

Rys. 4
Stanisław Gołąb wdług Leona Jeśmanowicza

Bibliografia

[1] *Bibliography of professor Stanisław Gołąb*. Demonstartio Math. 6(1973), 51–75.

[2] Aczél J., Gołąb S.: *Funktinalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*. Warszawa, 1960.

[3] Gancarzewicz J., Pogoda Z.: *Stanisław Gołąb (1902–1980)*. Złota Księga UJ, Wydział Matematyki i Fizyki, Kraków, 2000, 357–362.

[4] Gołąb S.: *Rachunek tensorowy*. PWN, Warszawa, 1966.

[5] Gołąb S.: *Antoni Hoborski organizator polskiej szkoły geometrycznej*. Wiadomości Matematyczne 12(1969), 33–49.

[6] Gołąb S.: *Über verallgemeinerte projective Geometrie*. Prace Mat.-Fiz. 32(1930), 1–63.

[7] Gołąb S.: *Zagadnienia metryczne geometrii Minkowskiego*. Prace AGH 6(1932), 1–79.

[8] Gołąb S.: *Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationnen"*. Math. Ann. 116(1939), 768–780.

[9] Kucharzewski M.: *Scientific achiements of professor Gołąb in the domain of geometry*. Demonstratio Mathematica 6(1973), 19–38.

[10] Kucharzewski M.: *Życie i twórczość profesora Stanisława Gołąba*. Wiadomości Matematyczne 19(1976), 128–131.

[11] Łopuszańska H., Trajdos T.: *Professor Stanisław Gołąb – scientist and teacher*. Demonstratio Mathematica 6(1973), 9–18.

[12] Pogoda Z.: *Początki geometrii różniczkowej w Polsce*. Antiquitates Mathematicae 1(2007), 115–130.

[13] Pogoda Z.: *Kazimierz Żorawski and the Cracow Mathematical School*. 31. Mezinárodní konference Historie Matematiky, Velké Meziříčí, 18. – 22. 8. 2010, 211–216.

[14] Wundheiler A.: *Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien*. Труды семин. по вект. и тенс. анализу 4(1937), 366–375.

Adres

Zdzisław Pogoda Ph.D.
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
Ul. St. Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
e-mail: *zdzisław.pogoda@uj.edu.pl*

KONFERENČNÍ VYSTOUPENÍ

IZOPERIMETRICKÝ PROBLÉM KRÁĽOVNEJ DIDÓ

ANNA BÁLINTOVÁ, R. TROJÁČKOVÁ

Abstract: The isoperimetric problems are nowadays the object of an extensive study in mathematics. The goal of this paper is presented the historic roots of question, in particular, the Arabic contributions. The origins went to the problem Queen Dido.

1 Úvod

Izoperimetrické problémy sú v súčasnosti objektom intenzívneho matematického výskumu. Predmetom záujmu predloženého konferenčného príspevku sú ich historické korene. Tým najhlbším je tzv. *Izoperimetrický problém kráľovnej Didó*, ktorý vyústil v založenie mesta Kartágo. Dôležitosť tohto historického momentu podtrhla aj celosvetová matematická konferencia organizovaná v máji roku 2010 pod názvom *DIDO conference.* Miesto jej konania bolo práve tam, kde voľakedy toto slávne mesto vzniklo – v Tunise, hlavnom meste Tuniska. Konferencia zhromaždila z mnohých krajín sveta expertov na klasické izoperimetrické problémy. Mohutný rozvoj nastal v spojení s funkcionálnou analýzou a teóriou pravdepodobnosti

2 Východzie poznatky

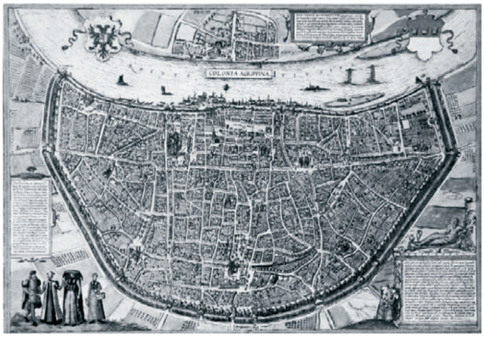
Pripomeňme si v tejto súvislosti najskôr legendu začínajúcu v 9. storočí pred naším letopočtom:

Po tom, čo manžela fenickej princeznej Elissy (neskoršie nazývanej kráľovna Didó) zavraždil jej brat Pygmalion, musela ona sama uniknúť a hľadať bezpečie. Pristala v Byrse, na území, ktoré sa nachádzalo v blízkosti dnešného Tunisu. Jej požiadavke o azyl a založenie vlastného mesta, vyhovel kráľ Numídie Iarbas so zaujímavou, zvláštnou podmienkou. Svoje nové územie mala vyznačiť jedinou buvolou kožou. Úlohu vyriešila geniálne tak, aby územie bolo čo najväčšie. Dala rozrezať kožu na tenké pásy, ktoré vytvorili pruh dlhý 4 km a ohraničila ním územie v tvare polkruhu uzavretého pobrežím. Kráľovná Didó takto intuitívne vyriešila izoperimetrický problém pre prípad euklidovskej polroviny. V skutočnosti to znamenalo založenie mesta Kartágo v roku 814 p. n. l. a 72 rokov pred založením Ríma. Tento okamih je považovaný za historický základ klasických izoperimetrických problémov.

O niečo zložitejšiu úlohu predstavuje iná staroveká legenda, ktorá popisuje hrdinský čin Horácia Coclesa – sám bránil drevený most cez rieku Tiber pred útočiacimi Etruskami, až pokiaľ sa rímskym obrancom nepodarilo most zničiť. Potom v plnej zbroji skočil do rieky a preplával k rímskemu brehu. Za odmenu dostal toľko pôdy, koľko bol schopný ohraničiť orbou pluhom za jeden deň – opäť intuitívne vyriešil izoperimetrický problém, tento krát pre prípad euklidovskej roviny.

Súvislosť s izoperimetriou nás napadne aj pri pohľade na plán mestských hradieb v stredoveku. Ten istý princíp ako kráľovnú Didó inšpiroval aj staviteľov miest v stredoveku. Ich opevnenie si vyžadovalo na jednej strane náročné stavebné práce a na druhej strane stálu vojenskú posádku na obranu mesta. Oba tieto dôvody uprednostňovali maximalizovať vnútorný plošný obsah mesta vzhľadom k jeho priemeru.

Obr. 1
Paríž z čias Filipa Augusta



Obr. 2
Stredoveký Kolín

Matematická formulácia základného klasického problému je nasledujúca: *Určiť rovinný geometrický útvar, ktorý má maximálny obsah pri danom konštantnom priemere.* Je zaujímavé, že riešenie nás napadne hneď – intuitívne, ale k dôkazu je potrebný solídny matematický aparát. Intuícia je mimoriadne dôležitá, ale nie je všemocná. Historické omyly len potvrdzujú, aký dôležitý je matematický dôkaz. V súvislosti s intuíciou pripomeňme citát z českého prekladu diela Thomasa G. Halesa [4], ktorý si položil vážnu otázku: *Proč je mezi intuicí a důkazem tak velká propast? ... Geometrie nás podpichuje a provokuje.* Vo svojom článku *Dělové koule a včelí plásty* popisuje isté nedávno dokázané vety, ktoré by mohli byť dokázané už pred stáročiami, len keby naše matematické nástroje dokázali súperiť so silou našej intuície.

Napríklad tvrdenie známe ako Keplerova domnienka, zostávalo bez dôkazu takmer 400 rokov. V r. 1998, pomocou doktoranda Samuela P. Fergusona, predložil G. Hales jej dôkaz. Pre úplnosť uveďme túto hypotézu: *V trojrozmernom priestore nemá žiadne usporiadanie gulí rovnakého polomeru väčšiu hustotu ako kubické plošne centrované usporiadanie.* Toto usporiadanie je tiež známe pod názvom *usporiadanie delových gulí*.

Vráťme sa k nášmu izoperimetrickému problému, ktorý bol v minulosti vyriešený tiež pomocou ľudskej intuície. Definitívna odpoveď opierajúca sa o rigorózny matematický dôkaz nechala však na seba dlho čakať. V priebehu storočí sa o riešenie problému v rôznych modifikáciách usilovali viaceré osobnosti. Jeden z prvých, ktorý sa pokúsil o matematický dôkaz založený na euklidovskej geometrii, bol grécky matematik Zénodore (2. st. p. n. l.). Ako prvý použil *označenie izoperimetrický problém*. Žiaľ, jeho dielo týkajúce sa izoperimetrických problémov sa nezachovalo a informácie o ňom máme len prostredníctvom jeho nasledovníkov (Théon z Alexandrie 335–405, Pappus 4. st.). Podľa týchto zdrojov dokázal nasledujúca tvrdenia:

– *Medzi všetkými n-uholníkmi daného konštantného priemeru, je to práve pravidelný n-uholník, ktorý ohraničuje maximálny obsah.*
– *Kruh daného priemeru ohraničuje väčší obsah ako ktorýkoľvek pravidelný mnohouholník toho istého priemeru.*

Uvádza sa, že v spise Zénodora boli aj výsledky geometrie v priestore, okrem iného aj dôkaz tvrdenia: *Guľová plocha je teleso maximálneho objemu pri danom konštantnom povrchu*.

Tento výsledok sa používal niekoľko storočí bez toho, že by bol uvedený skutočný dôkaz.

2.1 Prínos arabských matematikov k problematike

- Abu-Ja'far al-Khāzin (900–971) zhromaždil vo svojom spise všetko, čo bolo v jeho dobe známe o izoperimetrických problémoch. Naznačil aj možnosti ďalšieho vývinu.

- Nasir ad-Din at-Tusi (1201–1274), celým menom Abu Ja far Muhamed ben Muhamed ben al-Hasan Nasir ad Din at-Tusi, nazývaný tiež Nasir Eddin (obr. 3), výrazne zasiahol do dejín matematiky. Bol to perzský filozof, matematik, astronóm, lekár ... Mimochodom, patril medzi tých málo moslimských vedcov, ktorý uznávali vývojovú teóriu ľudstva.

Obr. 3
Nasir ad-Din at-Tusi

At-Tusi písal svoje diela v perzštine, ale prekladal ich sám do arabštiny. Záležalo mu na tom, aby jeho diela boli šírené arabskými matematikmi. Viedol observatórium v Marhabe – najväčšie vedecké centrum v tej dobe. Pozýval sem najvýznamnejších súčasných vedcov. Jeho súborné dielo, dnes nazývané *Pojednanie o štvoruholníku* obsahujúce 9 dielov zasvätených rovinnej a sférickej geometrii, zaujalo dôležité postavenie v histórii arabskej matematiky. Odvodil množstvo nových trigonometrických vzorcov používajúc proporcionálne vzťahy v rovinnom a sférickom trojuholníku. Je považovaný za zakladateľa trigonometrie ako samostatnej časti geometrie. O prvenstvo ohľadne sférickej trigonometrie súperili ďalší vedci, okrem iných Abu al-Wafa al-

Bouzani. Kulminujúcim bodom arabskej trigonometrie bolo však jednoznačne dielo at-Tusiho. Rozvinul trigonometriu natoľko, že mohol previesť úplné dôkazy riešenia izoperimetrického problému pre prípad trojuholníka a obdĺžnika. Tento vedec je zároveň považovaný za najkompetentnejšieho v oblasti astronómie, v období od Ptolemaja po Koperníka. A práve kvôli potrebám astronómie venoval zvláštnu pozornosť rozvoju rovinnej a sférickej trigonometrie. Jeho obšírny spis ovplyvnil niektorých matematikov z obdobia renesancie. Aj jeho dielo sledovalo známu cestou prenikania *arabskej vedy* do Európy – a síce trasu cez Španielsko.

Čo vlastne chápeme pod pojmom arabská veda, prípadne arabskí matematici? Pod pojmom *arabská veda* sa rozumie veda napísaná v arabštine, a to i v prípade, keď nebola materinským jazykom autora, ktorý mohol byť na viac aj iného etnického pôvodu. Treba si uvedomiť, že arabský jazyk a islám tvorili v istom období (od 9. st. n. l.) dva hlavné piliere spojujúce obrovské, politicky rozdrobené územie od Andalúzie cez Maghreb, Stredný východ až po Indiu.

Je úžasné pozorovať spojitosť rozvoja matematiky z jedného brehu Stredomorie na druhý, od 3. st. p. n. l. po 17. st., od Grékov cez Arabov po Európanov. Je to tá istá racionalita, ktorá prekonáva epochy, hranice a jazyky. ([6])

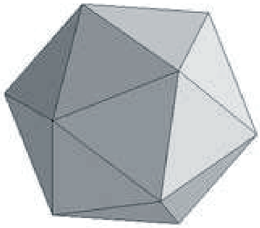
2.2 Prínos európskych matematikov k problematike

Štúdium izoperimetrických viet v staroveku bolo založené hlavne na geometrii trojuholníka. Elementárne metódy neumožňovali ísť omnoho ďalej, hlavne čo sa týkalo dokazovania existencie riešenia. Ďalší podstatný pokrok v oblasti izoperimetrie znamenali až európski matematici 19. storočia: Hermann Schwarz, Jakob Steiner, Karl Weierstrass, Hermann Minkowski, Jakob Steiner (1796–1863), dokázal riešenie pre prípad euklidovskej roviny. Použil postup spočívajúci v symetrizácii útvaru: zostal zachovaný obvod, ale zväčšil sa obsah, alebo zostal zachovaný obsah, ale zmenšil sa obvod. V dôkaze uvádza jednoznačnosť riešenia, ale nie jeho existenciu. Tento nedostatok odstránil Karl Weierstrass (1815–1897), ktorý už mohol využiť k dôkazu metódy variačného počtu. Jeho prístup spočíval v tom, že neštudoval jednu špecifickú krivku, ale množinu kriviek meniacich sa v závislosti od parametra.

Hermann Schwarz (25. 1. 1843, Poľsko) v r. 1884 vyriešil izoperimetrický problém pre prípad dim 3: *Určiť plochu ohraničujúcu maximálny objem pri minimálnom povrchu.* V jeho prácach nájdeme silné spojenie medzi analýzou a geometriou – čo je obdivuhodné. Iný uhol pohľadu poskytujú práce Hermanna Minkowskiho (1864–1909), tzv. Minkowskiho vety. Umožňujú dokázať izoperimetrické tvrdenia a zovšeobecniť ich do euklidovských priestorov vyšších dimenzií. Stretávame sa tu s pojmom Minkovského súčet, ktorý pri označení $P + Q$ korešponduje množine súčtov, z ktorých prvý člen je prvkom z P (konvexný kompakt) a druhý prvkom z Q (guľa dim n s priemerom t):

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q} = \{x \in E,\ x = p + q,\ p \in P,\ q \in Q\}.$$

Minkowski študoval nové geometrické štruktúry. Namiesto klasickej euklidovskej geometrie dim n sa zameral na bodové množiny (konvexné kompakty), pre ktoré definoval operáciu sčítania.



Obr. 4
Ikosaéder

Obr. 5
Mydlová bublina je tiež odpoveď
na izoperimetrický problém

V euklidovskej geometrii – izoperimetria – znamenala pôvodne štúdium vlastností geometrických rovinných útvarov majúcich rovnaký priemer, neskoršie sa pridalo zovšeobecnenie do euklidovských priestorov vyšších dimenzií. Stretávame sa v rámci nej s pojmami ako izoperimetrické vety, izoperimetrické nerovnosti, izoperimetrický pomer.

Príklad izoperimetrickej nerovnosti
V prípade dim 2 vyjadruje skutočnosť, že plocha o priemere p a obsahu α splňuje nerovnosť:

$$4\pi\alpha\,/\,p^2 < 1.$$

Príklad izoperimetrického koeficientu
Je známe, že guľovú plochu možno najlepšie aproximovať konvexnými mnohostenmi. Je ich päť a nazývajú sa *Platónove telesá.* Platónove teleso s najväčším izoperimetrickým koeficientom je ikosaéder (obr. 4). Pre zaujímavosť, jeho spomínaný koeficient má hodnotu:

$$q = 36\pi\,(5^2\varphi^4 a^6 / 6^2\, 5^3\, 3\sqrt{(3a^6)}) = \pi\,\varphi^4 / 15\sqrt{3} \approx 0{,}8279772$$

Izoperimetria úzko súvisí s inými odvetviami matematiky ako je diferenciálna geometria, topológia, teória grúp ... Napríklad štúdium plôch s konštantnou strednou krivosťou, H > 0, umožňuje lepšie pochopiť riešenia niektorých izoperimetrických problémov. Konečne s odpoveďou na izoperimetrický problém sa stretávame i pri bežnom pohľade okolo nás – mydlová bublina (obr. 5).

Obráťme ešte na záver pohľad do histórie a síce k bratom Bernoulliovým. Je známe, že bratia Ján a Jakub sa nemali radi a žiarlili na úspechy druhého. Vyzývali sa navzájom k riešeniu rôznych matematických úloh. Jedna z týchto úloh bola izoperimetrická a k jej vyriešeniu vyzval svojho brata Jakub Bernoulli. Matematicky vyjadrené, jedná sa v nej o hľadanie maxima istého funkcionálu pri danej vedľajšej podmienke. Túto zaujímavú úlohu možno nájsť v prednáške prof. ing. Cyrila Höschla, DrSc., *Histórie variačného počtu* ([3]).

3 Záver

Príbeh o kráľovnej Didó podtrhuje skutočnosť, že geometria je úzko spojená s ľudskou intuíciou a predstavivosťou. Dáva nám okrem iného príležitosť, pripomenúť si okolnosti založenia slávneho mesta. V súčasnosti je Kartágo rezidenčným predmestím hlavného mesta. Tunisania sú náležite hrdí na historické korene ich hlavného mesta. Po prílete do Tunisu Vás víta letisko *Cartage*, aby Vám hneď pripomenulo slávnu minulosť miesta, na ktoré ste vstúpili. Pár kilometrov neďaleko sa nachádzajú jeho ruiny, vyhľadávaný turistický cieľ návštevníkov z celého sveta (obr. 6). Pri prvom pohľade Vás možno napadne, ako málo zostalo z tak veľkého mesta. Spolu s izoperimetriou však zostáva v našich myšlienkach naďalej ...

Obr. 6
Ruiny Kartága

Literatúra

[1] Lorch R.: *Abū Ja'far al-Khāzin on Isoperimetry and the Archimedean Tradition*. Zeichrif für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften 3(1986), 150–229.

[2] Boček L., Hromadová J.: *Izoperimetrické nerovnosti, Blaschke a trochu politiky*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2009, 21–29.

[3] Höschl C. *Históríe variačního počtu*. Prednášky prof. ing. Cyrila Höschla, DrSc., na stránke http://mechanika.jonyho.net.

[4] Hales T. C.: *Dělové koule a včelí plásty*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 46(2001), n. 2, 101–118 (český preklad).

[5] www.cs. wikipedia.org

[6] Bellosta H.: *A propos de l'histoire des sciences arabes*. SMT Gazette 82(1999).

Adresa

RNDr. Anna Bálintová, CSc.
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Monastir
Avenue de l' Environnement
5019 Monastir
Tunisie
e-mail: *abalintova@seznam.cz*

ALGEBRA NA KONCI 19. A POČÁTKU 20. STOLETÍ

Jindřich Bečvář

Abstract: Almost all books on algebra which were used before 1930 present algebra more or less as the discipline of polynomial equations and polynomial forms. The last important textbook published in the ninetenth century is world-renowned Weber's *Lehrbuch der Algebra*, some further books of this type were written in the first third of the twentieth century. Step by step, the new abstract concepts of the structural conception of algebra appear in the textbooks. The real general change is comming with famous van der Waerden's *Moderne Algebra*.

Úvod

Zásadní změna charakteru algebry, k níž došlo během několika desetiletí na konci devatenáctého a na počátku dvacátého století, byla způsobena zejména novými objevy, které přinesly výrazný obrat od studia algebraického a numerického řešení rovnic k výzkumu vlastností algebraických struktur a jejich homomorfismů, v první řadě grup a těles, dále okruhů, oborů integrity, jejich ideálů atd. Současně se podstatně rozšířil svět objektů, s nimiž bylo možno pracovat obdobným způsobem jako s čísly (substituce, transformace, permutace, matice, vektory, hyperkomplexní čísla, zbytkové třídy atd.).[1]

Charakter algebry podstatně ovlivnila teorie množin, která na počátku dvacátého století intenzivně pronikala do základů matematiky. Obrovský vliv na pojetí algebry měl rovněž proces axiomatizace matematiky, jenž začal v osmdesátých letech devatenáctého století a v dalších desetiletích stále sílil. S příchodem teorie množin a postupující axiomatizací bylo přirozeným způsobem spjato všestranné posilování abstrakce.

Současná algebra je do značné míry teorií algebraických struktur a jejich homomorfismů. Algebraickou strukturou je přitom míněna abstraktní množina (množina jakýchkoli objektů, jejichž podstatu nespecifikujeme) se zvoleným souborem operací (případně i relací), pro něž platí dané axiomy. Toto pojetí algebraické struktury je výrazně postaveno na pojmu množina a na axiomatickém přístupu.

První část následujícího textu navozuje atmosféru konce devatenáctého a počátku dvacátého století, připomíná základní fakta o vzniku a vývoji teorie množin, o vzniku třetí krize matematiky a snahách o její překonání. Rovněž podává

[1] V souladu s názory Thomase S. Kuhna (1923–1996) je možno v této souvislosti hovořit o změně paradigmatu. Viz T. S. Kuhn: *Struktura vědeckých revolucí*, OIKOYMENH, Praha, 1997, 206 stran, dotisk 2008. Viz též Ziauddin Sardar: *Thomas Kuhn a vědecké války*, Triton, Praha, 2001, 80 stran; H. Mehrtens: *T. S. Kuhn's theories and mathematics: A discussion paper on the "new historiography" of mathematics*, Historia mathematica 3(1976), 297–320.

stručnou informaci o tehdejším procesu axiomatizace matematiky a v závěru uvádí nejdůležitější fakta o vývoji algebry.

Druhá část textu se snaží nastínit duch algebry druhé poloviny 19. století pomocí několika učebnic, které byly v té době sepsány a užívány. Třetí část se věnuje výrazné osobnosti, Heinrichu Weberovi, a jeho rozsáhlé učebnici algebry, která do značné míry charakterizovala algebru konce 19. století. Čtvrtá část pojednává o učebnicích algebry prvních tří desetiletí 20. století a ukazuje jejich prostřednictvím vývoj této disciplíny. Pátá část podává základní informace o B. L. van der Waerdenovi a jeho slavné knize *Moderne Algebra*, která znamenala ve vývoji algebry významný přelom. Závěrečná část připomíná postoj českého algebraika Vladimíra Kořínka k několika učebnicím algebry.

Článek obsahuje řadu úryvků z úvodů jednotlivých učebnic, které dokumentují postupně se měnící pohledy jejich autorů na obsah a charakter disciplíny, které říkáme algebra. Výtahy z obsahů jednotlivých učebnic umožňují srovnání jejich zaměření. Ukázky definic pojmů těleso, grupa, resp. okruh apod. dávají příležitost sledovat přerod algebry rovnic v algebru struktur. Zájemce o další studium lze odkázat zejména na monografii *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* [Co], kterou sepsal Leo Corry, na knihu *Origins of Modern Algebra* [No] Luboše Nového, případně na monografii *A History of Algebra* [Whi], jejímž autorem je Bartel Leendert van der Waerden.

1 Konec devatenáctého a počátek dvacátého století

1.1 Konec 19. století

Bouřlivý rozvoj matematiky, přírodních i společenských věd vedl na přelomu 19. a 20. století k velkému uspokojení nad dosaženými výsledky. Například americký fyzik Albert Abraham Michelson (1852–1931), který je známý svým pokusem na zjištění pohybu Země vůči éteru a opakovaným měřením rychlosti světla, v článku *Some of the objects and methods of physical science*[2] napsal:

The more important fundamental laws and facts of physical science have all been discovered, and these are now so firmly established that the possibility of their ever being supplanted in consequence of new discoveries is exceedingly remote. … our future discoveries must be looked for in the sixth place of decimals.

Světoznámý britský fyzik William Thompson (Lord Kelvin, 1824–1907), který zavedl roku 1848 absolutní teplotní stupnici, vyjádřil ve stati *Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light*[3] obdobný názor jako A. A. Michelson:

There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement.

[2] University of Chicago Quarterly Calendar 10(1894), Nr. 2, 12–15 [*Speech at the dedication of Ryerson Lab*, University of Chicago, 1894].

[3] Philosophical Magazine, 6$^{\text{th}}$ serie, 2(1901), Nr. 7, 1–40.

Michelsonův i Thompsonův názor se velmi brzy ukázal být značně pošetilým. Koncem 19. století byla objevena radioaktivita, zanedlouho vznikla speciální a obecná teorie relativity, o něco později se zrodila kvantová mechanika, začala dlouhá a úspěšná cesta do nitra hmoty, intenzivně se rozvíjela částicová fyzika. Připomeňme ještě např. supravodivost, umělou radioaktivitu, kosmické záření, řetězovou reakci; řada objevů se postupně rodila v kosmologii (rudý posuv, rozpínání vesmíru, bílí trpaslíci, kvasary, pulsary, velký třesk, černé díry atd.).

Podobný optimismus jako ve fyzice panoval na přelomu devatenáctého a dvacátého století i v matematice. Ve druhé polovině 19. století byl totiž završen proces zpřesňování matematické analýzy zavedením ε-δ-jazyka (A.-L. Cauchy, 1789–1857, B. Bolzano, 1781–1848, K. T. Weierstrass, 1815–1897). Byla tak překonána tzv. *druhá krize matematiky* související s neopatrným, byť geniálním zacházením s nekonečně malými a nekonečně velkými veličinami, které bylo tak typické pro 18. století.[4] Navíc byly v sedmdesátých letech 19. století podány exaktní teorie reálných čísel (R. Dedekind, 1831–1916, G. Cantor, 1845–1918, K. T. Weierstrass a další). Matematická analýza byla postavena na pevný základ. Slavila úspěchy i v komplexním oboru.

Devatenácté století přineslo mnoho dalších významných matematických výsledků. Připomeňme zejména objev neeukleidovské geometrie (N. I. Lobačevskij, 1792–1856, J. Bolyai, 1802–1860, C. F. Gauss, 1777–1855, B. Riemann, 1826–1866), rozvoj projektivní, algebraické, diferenciální a n-rozměrné geometrie, vznik a rozšíření deskriptivní geometrie, tenzorového počtu atd. Úspěšně si vedla i teorie čísel, výrazně pokročil výzkum prvočísel, byla dokázána transcendentnost čísel π a e. Matematika slavila úspěchy i v řadě aplikací (nebeská mechanika, geodézie atd.). Vyřešeny byly klasické problémy řecké matematiky. Objeveny byly kvaterniony, oktávy a další systémy hyperkomplexních čísel, začala se rozvíjet teorie algeber, rodila se teorie matic, vektorový počet atd.

V posledních třech desetiletích 19. století byla vytvořena teorie množin, která po počátečním silném odporu začala na přelomu 19. a 20. století pronikat do základů matematiky (viz dále).

Na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži roku 1900 přednesl David Hilbert (1862–1943) přehled 23 problémů, o nichž předpokládal, že budou v matematice 20. století hrát významnou roli. Velké uspokojení ze současného stavu matematiky vyjádřil na tomto kongresu Henri Poincaré (1854–1912). Ve svém příspěvku *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques*[5] uvedl:

Il ne reste plus aujourd'hui en Analyse que des nombres entiers ou des systèmes finis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalité ou d'inégalité.

---

[4] *První krizí matematiky* rozumíme zhroucení základů matematiky po objevu nesouměřitelnosti úseček. Došlo k němu ve starém Řecku někdy na přelomu šestého a pátého století př. Kr. Východiskem z této krize byla změna tehdejšího aritmetického pojetí matematiky na geometrické.

[5] Compte Rendu du Deuxième congrès international des mathématiciens tênu à Paris du 6 au 12 août 1900, Gauthier-Villars, Paris, 1902, 115–130.

Les Mathématique, comme on l'a dit, se sont arithmétisées.

... On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte. (str. 120, 122)

Optimismus vyplýval jednak z úspěchů matematiky devatenáctého století, jednak z radostného očekávání významných výsledků století dvacátého. Neměl však dlouhého trvání.

1.2 Teorie množin

V 19. století vznikla teorie množin. Některé její myšlenky zformuloval v posledních dvou letech svého života Bernard Bolzano, matematik a filozof italsko-německého původu, který prožil celý život v Čechách. Jeho kniha *Paradoxien des Unendlichen* byla publikována roku 1851, český překlad Otakara Zicha (1908–1984) vyšel pod názvem *Paradoxy nekonečna* až roku 1963.

Bernard Bolzano se ve své knize postavil za přijetí aktuálního nekonečna. Navázal tak na německého matematika, fyzika a filozofa, právníka a diplomata Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716), který jako jeden z mála matematiků aktuální nekonečno prosazoval. Jako motto své knihy proto použil následující Leibnizovu myšlenku:

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur.[6]

Bernard Bolzano však nedospěl k tomu, že nekonečna mohou být „různě veliká“. To zjistil 7. prosince 1873 německý matematik Georg Cantor a svůj objev ještě téhož dne oznámil Richardu Dedekindovi.[7] Již v prosinci odeslal do tisku práci *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*,[8] která je dnes považována za první práci z teorie množin.

Georg Cantor vybudoval v letech 1873 až 1884 teorii kardinálních a ordinálních čísel, dnes o ní hovoříme jako o *naivní*, *intuitivní*, nebo *cantorovské* teorii množin. V devadesátých letech pak publikoval delší shrnující práci – *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*.[9]

Počáteční velká averze k teorii množin a jejímu tvůrci byla postupně překonávána.[10] Koncem 19. století tato teorie získávala značné sympatie a uznání, začátkem 20. století již byla akceptována. Na jejím základě začala být budována

---

[6] Opera omnia studio Ludov. Dutens, Tom. II, part. I, p. 243. V české verzi Bolzanovy knihy: *Jsem natolik pro aktuální nekonečno, že namísto abych připustil, že se ho příroda děsí, jak se běžně říká, jsem přesvědčen, že je má v oblibě všude, aby lépe zdůraznila dokonalosti svého Tvůrce.*

[7] H. Meschkowski, W. Nilson (ed.): *Georg Cantor. Briefe*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 35–37.

[8] Journal für die reine und angewandte Mathematik 77(1874), 258–262.

[9] Mathematische Annalen 46(1895), 481–512, 49(1897), 207–246.

[10] Viz J. W. Dauben: *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1979; H. Meschkowski: *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1967, xii+287 stran.

téměř celá matematika, řada disciplín byla v té době víceméně postavena na teorii množin.

1.3 Třetí krize matematiky

Na přelomu 19. a 20. století však došlo k důležitým zjištěním. Byly objeveny tzv. *antinomie* teorie množin, které zpochybňovaly její správnost. Vzniklá situace byla chápána jako zpochybnění základů matematiky; začalo se hovořit o *třetí krizi matematiky.*

První antinomii objevil italský matematik Cesare Burali-Forti (1861–1931), publikoval ji v článku *Una questione sui numeri transfiniti.*[11] (G. Cantor ji však znal již roku 1895.) Týká se množiny všech ordinálních čísel – zní takto:

Ordinální číslo množiny všech ordinálních čísel je větší než každé ordinální číslo.[12]

Patrně nejznámější antinomií je tzv. Russellův paradox. Bertrand Russell (1872–1970) jej formuloval v knize *The Principles of Mathematics.*[13] V podstatě je postavena na představě množiny všech množin.

Utvořme množinu všech množin, které nejsou svým prvkem:

$$M = \{X \mid X \notin X\}.$$

Z této definice vyplývá, jak snadno zjistíme, že když $M \in M$, potom $M \notin M$, a když $M \notin M$, potom $M \in M$. V každém případě tedy docházíme ke sporu.[14]

Během krátké doby se objevila řada dalších antinomií, které vedly k závažnému závěru: pojem množiny je v Cantorově teorii zaveden značně „volně“.[15]

1.4 Axiomatizace

Koncem 19. století výrazně sílily tendence vedoucí k axiomatické výstavbě jednotlivých disciplín i celé matematiky.

[11] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 11(1897), 154–164, 260. Anglický překlad viz J. van Heijenoort (ed.): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967, 105–111.

[12] Viz I. Copi: *The Burali-Forti paradox*, Philosophy of Science 25(1958), 281–286; Ch. Menzel: *Cantor and the Burali-Forti paradox*, The Monist 67(1984), 92–107.

[13] Cambridge University Press, London, 1903, 2. vydání 1938.

[14] A. R. Garciadiego: *Bertrand Russell and the Origins of the Set-theoretic Paradoxes*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1992, xxix+264 stran; I. Grattan-Guinness: *How Bertrand Russell discovered his paradox*, Historia mathematica 5(1978), 127–137.

[15] O vzniku a vývoji teorie množin, antinomiích, 3. krizi matematiky a snahách o její překonání se lze řadu informací dočíst v knížce *Teorie množin pro učitele* od E. Fuchse (PřF MU, Brno, 1999, 200 stran). Viz též A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy: *Foundations of Set Theory*, 2. vydání, North-Holland, Amsterdam, London, 1973, x+404 stran; P. E. Johnson: *A History of Set Theory*, Weber & Schmidt, Boston, 1972, ix+109 stran; W. Purkert, H. J. Ilgauds: *Georg Cantor. 1845–1918*, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1987, 262 stran; F. A. Medvedev: *Razvitie teorii množestv v XIX veke*, Akademija nauk SSSR, Moskva, 1965, 231 stran.

Poznamenejme nejprve, že metodologické zásady budování exaktní vědecké teorie podal Aristotelés ze Stageiry (384–322) v souboru šesti spisů, jež jsou známy pod pozdějším názvem *Organon* (*Kategorie*, *O vyjadřování*, *První analytiky*, *Druhé analytiky*, *Topiky*, *O sofistických důkazech*[16]). Podle těchto zásad sepsal Eukleides kolem roku 300 př. Kr. své dílo *Stoicheia*, které je snad nejslavnějším matematickým textem všech dob. V něm jsou nejprve zavedeny základní pojmy, poté formulovány tzv. postuláty popisující principy konstrukcí kružítkem a pravítkem (tzv. eukleidovské konstrukce), a pak axiomy. Teprve potom následují věty a jejich důkazy.

Eukleidův přístup byl po celá dvě tisíciletí vzorem pro sepisování matematických textů. Ovlivnil však i filozofy, autory nematematických spisů, kteří si matematiky vážili a snažili se o napodobení *geometrického způsobu*, resp. o využití *geometrické metody*. Například nizozemský filozof Baruch (Benedictus) Spinoza (1632–1677) je autorem spisů *Ethica ordine geometrico demonstrata* (*Etika vyložená způsobem užívaným v geometrii*) a *Renati des Cartes Principia philosophiae more geometrico demonstrata* (*René Descarta Principy filosofie způsobem užívaným v geometrii vyložené*). Struktura těchto spisů odpovídá matematickému textu; začíná definicemi a axiomy, pokračuje tvrzeními, důkazy, důsledky apod. Uveďme pro zajímavost úryvek z předmluvy Lodewijka Meyera (1629–1681) ke Spinozovým *Principům filozofie*.

Všichni ti, kteří chtějí rozumět více než obyčejní lidé, jsou jednomyslně toho názoru, že nejlepší a nejbezpečnější cestou při zkoumání pravdy a vyučování pravdě je metoda využívaná matematiky ve studiu a výkladu věd, v níž se z **definic**, **postulátů** *a* **axiomů** *dokazují* **závěry**. *A vskutku je to tak. Vždyť přece jisté a spolehlivé poznání každé neznámé věci může být získáno a odvozeno jen z jistých předběžných poznatků a ty je nutno předem postavit jako stabilní základ, který by se později sám, a tím i celá na něm postavená budova lidského poznání, od sebe nesesul a nebo by nebyl zničen maličkým nárazem. Že však to, co těm, kdo pěstují matematiku, obvykle vystupuje pod jménem definice, postuláty a axiomy, je takového druhu, nemůže být pochybné pro nikoho, kdo se s onou vznešenou disciplínou byť jen zběžně pozdravil.* **Definice** *totiž nejsou ničím jiným než nejpřesnějším vysvětlením termínů a jmen, jimiž jsou označeny pojednávané věci.* **Postuláty** *pak a* **axiomy** *neboli obecné pojmy ducha jsou tak jasnými a zřetelnými výpověďmi, že jim všichni, kteří správně pochopili samotná slova, nikterak nemohou odepřít svůj souhlas.*[17]

Italský matematik Giuseppe Peano (1855–1932), který byl koncem 19. století vůdčí osobností světové logiky, byl jedním z prvních myslitelů, kteří začali důsledně axiomatizovat matematiku, a to exaktněji a abstraktněji než bylo kdykoli dříve zvykem. Roku 1888 zformuloval v knize *Calcolo geometrico* axiomy vektorového prostoru, o rok později publikoval v knize *Arithmetices principia,*

[16] Tyto Aristotelovy spisy vyšly v českém překladu Antonína Kříže (1898–1965) v letech 1958 až 1978, doprovodné studie a komentáře napsal Karel Berka (1923–2004).

[17] Viz B. Spinoza: *René Descarta Principy filosofie*, Filosofia, Praha, 2004, 241 stran. Citát ze stran 33 a 35.

nova methodo exposita axiomy oboru přirozených čísel (tzv. Peanovy axiomy).[18] Ve svém projektu *Formulaire de Mathématiques* (resp. *Formulario*) z let 1895 až 1908 se snažil překládat matematiku do řeči formulí.[19]

Významný počin týkající se axiomatického přístupu učinil David Hilbert, když roku 1899 vydal knihu *Grundlagen der Geometrie*, v níž provedl důslednou axiomatizaci eukleidovské geometrie. Navázal na myšlenky, které naznačil již Moritz Pasch (1843–1931) v knize *Vorlesungen über neuere Geometrie* (iv+202 stran) z roku 1882.[20]

V úvodu své knihy *Grundlagen der Geometrie* uvedl:

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.

Roku 1884 vydal Gottlob Frege (1848–1925) knihu *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, v níž se snažil odvodit aritmetické pojmy z logiky. V letech 1893 a 1903 publikoval v Jeně dvoudílnou knihu *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.* I v aritmetice se tedy na konci 19. století a počátku 20. století objevovaly snahy po exaktnějším vybudování základů.

1.5 Cesta z krize

V prvních dvou desetiletích 20. století teorie množin v matematice pevně zakotvila. Snadno to lze doložit odkazem na knižní literaturu, která byla nové teorii věnována.[21] Artur Schoenflies (1853–1928) vydal roku 1900 obsáhlou stať nazvanou *Die Entwickelung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten*,[22] roku 1908 publikoval pod stejným titulem její pokračování knižně (Teubner, Leipzig,

[18] Obdobným způsobem popsal přirozená čísla R. Dedekind v knížce *Was sind und was sollen die Zahlen* (F. Vieweg, Braunschweig, 1888, xvii+58 stran).

[19] Viz též H. C. Kennedy: *The origins of modern axiomatics: Pasch to Peano*, The American Mathematical Monthly 79(1972), 133–136.

[20] Druhé vydání (J. Springer, Berlin, 1926, x+275 stran) obsahuje připojenou stať Maxe Dehna (1878–1952) pojmenovanou *Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung* (strany 185–271). Připomeňme na tomto místě ještě nástupní přednášku Otto Höldera (1859–1937) přednesenou 22. července 1899 na univerzitě v Lipsku a nazvanou *Anschauung und Denken in der Geometrie* (Akademische Antrittsvorlesung, B. G. Teubner, Leipzig, 1900, 75 stran) a Hilbertův pozdější článek *Axiomatisches Denken* (Mathematische Annalen 78(1918), 405–415).

[21] Jedna z prvních pojednání vydali Gerhard Hessenberg (1874–1925) – *Grundbegriffe der Mengenlehre* (Abhandlungen der Friesschen Schule, Neue Folge 1, Heft IV, 1906, 220 stran), William Henry Young (1863–1942) a jeho žena Grace Chisholm Young (1868–1944) – *The theory of sets of points* (Cambridge University Press, 1906, xii+316 stran), Wacław Sierpiński (1882–1969) – *Zarys teoryi mnogości* (Warszawa, 1912, 158 stran).

[22] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8(1900), 1–250. Viz též jeho článek o teorii množin v Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 1899.

x+331 stran). O pět let později vydal upravený první díl pod modifikovaným názvem *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen* (x+389 stran), s přepracováním textu mu pomáhal Hans Hahn (1879–1934).

Jednou z prvních učebnic teorie množin je kniha *Grundzüge der Mengenlehre* Felixe Hausdorffa (1868–1942) z roku 1914.[23] Další úspěšnou učebnici vydal roku 1919 Adolf Fraenkel (1891–1965) pod názvem *Einleitung in die Mengenlehre. Eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgrossen.*[24] Učebnice a monografie věnované teorii množin jsou dokladem toho, že si tato teorie v prvních dvou desetiletích 20. století v matematice vydobyla pevné místo.

Krize v základech matematiky však byla stále pociťována, proto byla intenzivně hledána východiska.[25] Bylo zřejmé, že je nutno celou matematiku postavit na přísně logických základech. Bertrand Russell a Alfred North Whitehead (1861–1947) publikovali v letech 1910 až 1913 třídílnou monografii *Principia mathematica*, která je základním dílem tzv. logicismu. Pokoušeli se propojit matematiku s logikou. Velký ohlas však jejich kniha neměla.

David Hilbert teorii množin hájil. Ve stati *Über das Unendliche*[26] z roku 1925 napsal (druhá věta tohoto úryvku bývá často citována):

Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir, wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können. (str. 170)

Řada matematiků, logiků a filozofů se v prvních třech desetiletích 20. století trápila situací, v níž se ocitla teorie množin po objevu antinomií, mnozí řešili problémy axiomatizace jednotlivých disciplín a celé matematiky, diskutovali otázky exaktního budování základů matematiky, matematického poznávání a matematické jistoty.[27]

---

[23] Veit & Comp., 1914, viii+476 stran, reprint vyšel roku 1949 v New Yorku. V knize je na straně iii vytištěno toto věnování: *Dem Schöpfer der Mengenlehre Herrn Georg Cantor in dankbarer Verehrung gewidmet.* Druhé vydání se objevilo roku 1927 pod stručnějším názvem *Mengenlehre* (285 stran), třetí roku 1935, reprint vyšel roku 1944 v New Yorku, anglický překlad roku 1957.

[24] J. Springer, Berlin, 1919, iv+155 stran, druhé vydání je z roku 1923 (ix+251 stran), třetí z roku 1928 (424 stran), reprint z roku 1946. Dalšími Fraenkelovými knihami jsou *Abstract Set Theory* (1953), *Foundations of Set Theory* (1958).

[25] Například významný německý matematik a fyzik Hermann Weyl (1885–1955), autor slavné knihy *Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* (1918), publikoval roku 1921 článek *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* (Mathematische Zeitschrift 10(1921), 37–79).

[26] Mathematische Annalen 95(1925), 161–190; francouzský překlad: Acta Mathematica 48(1926), 91–122.

[27] Například vynikající matematik Otto Hölder vydal roku 1914 stať *Die Arithmetik in strenger Begründung* (Programmabhandlung der philosophischen Fakultät, Leipzig, 1914, iv+74 stran, 2. vydání: Berlin, 1929) a o deset let později obsáhlý spis *Die Mathematische Methode. Logisch erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik* (J. Springer, Berlin, 1924, x+563 stran).

Postupně převládlo přesvědčení, že nejlepším východiskem z krize bude exaktní vybudování teorie množin jako přísně axiomatické teorie. Tak se v letech 1904 až 1921 zrodil axiomatický systém Zermelův-Fraenkelův, který vytvořili Ernst Zermelo (1871–1953) a Adolf Fraenkel.[28]

Na axiomatický systém byly kladeny dva zcela zásadní požadavky: úplnost a bezespornost:

– O pravdivosti jakéhokoli tvrzení týkajícího se pojmů dané teorie lze rozhodnout na základě výchozího systému axiomů. Jakékoli takové tvrzení lze tedy buď dokázat nebo vyvrátit.

– Nelze dojít ke sporu, tj. není možno dokázat dvě tvrzení, která by si navzájem odporovala.

Ve stejné době zformuloval David Hilbert program směřující k formalizované, exaktní výstavbě matematiky a prokázání její bezespornosti. Své základní ideje (tzv. *Hilbertův program*) publikoval zejména v článcích *Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung*[29] a *Über das Unendliche*.[30] Se svým žákem Wilhelmem Ackermannem (1896–1962) vydal roku 1928 útlou knížku *Grundzüge der theoretischen Logik* (viii+120 stran), v níž byl podán soubor axiomů a dedukční pravidla predikátového počtu – problémem bylo, zda je tento logický kalkul úplný, tj. zda je každá obecně platná formule dokazatelná.[31]

V září roku 1930 však rakouský matematik a logik Kurt Gödel (1906–1978) oznámil v diskusi na konferenci v Královci své významné výsledky, které pak publikoval v práci *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*.[32] Populárně je můžeme přiblížit takto:

Filozof Moritz Geiger (1880–1937) publikoval roku 1924 spis nazvaný *Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie* (Filser, Augsburg, 1924, xxiii+271 stran).
Hermann Weyl sepsal přehledný článek *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (In A. Baeumler, M. Schröter (ed.): *Handbuch der Philosophie*, München und Berlin, 1926, 4. Lieferung, Abt. IIA, 162 stran).
Filozof Felix Kaufmann (1895–1949) publikoval roku 1930 spis *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung* (Franz Deuticke, Leipzig und Wien, 1930, x+203 stran, na stranách 198 až 203 je bohatý seznam literatury).

[28] Poznamenejme, že v letech 1937 až 1954 byl koncipován druhý takový axiomatický systém, Gödelův-Bernaysův, jehož autory jsou Kurt Gödel (1906–1978) a Paul Bernays (1888–1977). Oba tyto axiomatické systémy jsou ekvivalentní: platí-li nějaké tvrzení v jednom z nich, platí i ve druhém.

[29] Abhandlung aus dem Seminar der Hamburgischen Universität 1(1922), 157–177. Viz též jeho článek *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Mathematische Annalen 88(1923), 151–165.

[30] Mathematische Annalen 95(1925), 161–190.

[31] Poznamenejme, že D. Hilbert a P. Bernays vydali v letech 1934 a 1939 dvoudílnou monografii *Grundlagen der Mathematik* (471+498 stran), v níž rozpracovali své myšlenky o formalizaci matematiky. 2. vydání je z roku 1968.

[32] Monatshefte für Mathematik und Physik 38(1931), 173–198. Český překlad je otištěn na stranách 168–205 knihy *Kurt Gödel*, kterou editovali J. Malina a J. Novotný (Brno, 1996, 268 stran). Najdeme v ní řadu dalších informací a bibliografických odkazů.

– Každá bezesporná teorie obsahující aritmetiku (např. teorie množin) obsahuje nerozhodnutelné tvrzení.
– Nelze dokázat bezespornost teorie v rámci jejího formalismu.

Tím vzaly za své požadavky na úplnost a bezespornost axiomatických systémů. Hilbertův program se ukázal jako neuskutečnitelný. Přesto významně přispěl ke zcela zásadním úvahám o exaktní výstavbě matematiky. Třetí krize matematiky překonána nebyla a překonána ani být nemůže. Hermann Weyl roku 1946 v článku *Mathematics and Logic. A brief survey serving as preface to a review of The Philosophy of Bertrand Russell*[33] napsal:

From this history one thing should be clear: ... we are less certain than ever about the ultimate foundations of (logic and) mathematics. Like everybody and everything in the world, we have our 'crisis'. We have had it for nearly fifty years. Outwardly it does not seem to hamper our daily work, and yet I for one confess than it has had a considerable, practical influence on my mathematical life: it directed my interests to fields I considered relatively 'safe', and has been a constant drain on the enthusiasm and determination with which I pursued my research work. This experience is probably shared by other mathematicians who are not indifferent to what their scientific endeavours mean in the context of man's whole caring and knowing, suffering and creative existence in the world. (str. 13)

1.6 Algebra

Algebra jako *matematická disciplína* byla původně zaměřena na řešení rovnic. Její počátky lze vysledovat již ve starém Egyptě a Mezopotámii v době před čtyřmi tisíci lety, o něco později též ve staré Číně a Indii. V těch starých dobách ještě neexistovaly „rovnice“ v dnešním slova smyslu, tj. formální zápisy využívající nějakou, třeba jen velmi primitivní symboliku. Tehdejší počtáři řešili slovní úlohy vedoucí na rovnice nebo na jejich soustavy pečlivě naučenými postupy, jež dnes můžeme výstižně označit jako algoritmy. Úspěšně počítali řadu úloh, které mnohdy odpovídají úlohám současné školské matematiky, jindy jsou dokonce podstatně těžší. Jejich početní metody poměrně přesně odpovídají našim obratům užívaným při řešení rovnic.

Úlohy vedoucí na lineární rovnice byly řešeny již ve starém Egyptě a Mezopotámii, úlohy vedoucí na soustavy lineárních rovnic ve staré Číně. V Mezopotámii se tehdejší počtáři dobře vyrovnali i s úlohami, které je možno řešit kvadratickou rovnicí, resp. některou speciální rovnicí vyššího stupně. K rozvoji algebry později významně přispěli zejména arabští matematici; z názvu jednoho spisu al-Chwárizmího (asi 780 až 850) vznikl název algebra. V první polovině 16. století se s rovnicemi třetího a čtvrtého stupně vypořádali italští matematici; získané výsledky publikoval souhrnně Geronimo Cardano (1501–1576) v knize *Ars Magna* z roku 1545 (mimo jiné tzv. Cardanovy vzorce). Téměř tři století se

[33] American Mathematical Monthly 53(1946), 1–13.

pak řada matematiků neúspěšně pokoušela nalézt obdobně konstruované vzorce pro řešení algebraické rovnice pátého stupně.[34]

V sedmnáctém století byl rozpoznán význam algebry pro geometrii (R. Descartes, 1596–1650, P. de Fermat, 1601–1665) – zrodila se analytická geometrie. Její základní myšlenkou je vyjádření křivek a ploch algebraickými rovnicemi, které popisují vztahy souřadnic bodů těchto útvarů v nějakém souřadnicovém systému. Na tyto představy bezprostředně navázala algebraická geometrie studující algebraické křivky a plochy. Rozvoj analytické geometrie dal řadu podnětů diferenciálnímu a integrálnímu počtu (J. Kepler, 1571–1630, R. Descartes, P. de Fermat, B. Cavalieri, 1598–1647, E. Torricelli, 1608–1647, Ch. Huygens, 1629–1695, ..., a posléze I. Newton, 1643–1727, a G. W. Leibniz), který byl též nazýván „algebraickou analýzou“ (*analyse algébrique*).

Zcela zásadní výsledky v algebře přineslo devatenácté století. Byla dokázána tzv. *Základní věta algebry* (C. F. Gauss), zanedlouho poté byl vyřešen problém algebraického řešení algebraických rovnic (řešení v radikálech). Nejprve byla dokázána neřešitelnost obecné rovnice pátého stupně (N. H. Abel, 1802–1829), vzápětí byla načrtnuta teorie postihující veškeré případy (Galoisova teorie, E. Galois, 1811–1832). Zodpovězena byla otázka řešitelnosti geometrických úloh kružítkem a pravítkem.

V druhé polovině 19. století se algebra začala výrazně měnit. Matematici pracovali čím dále, tím více s novými soubory objektů, jejichž struktura byla podobná struktuře číselných oborů. S prvky těchto souborů bylo možno „počítat“ podobným způsobem jako s čísly. Takováto bádání vedla k vyšetřování nových struktur: lineární asociativní algebry, neasociativní algebry, vektorové prostory, grupy, tělesa, okruhy, obory integrity, ideály atd. V souvislosti s Galoisovou teorií, resp. s problematikou řešení geometrických úloh kružítkem a pravítkem se rozvíjelo studium řešitelných grup, rozšíření těles, algebraických a transcendentních čísel apod. V úzkém vztahu k teorii čísel se matematici věnovali kongruencím, zbytkovým třídám, konečným tělesům. Algebra pronikla novým způsobem do geometrie v Kleinově Erlangenském programu. Postupně se rodila algebra abstraktních struktur.[35]

---

[34] Poznamenejme, že algebraické řešení algebraické rovnice (resp. řešení algebraické rovnice v radikálech) znamená vyjádřit kořen rovnice vzorcem obsahujícím pouze její koeficienty a znaky operací $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt[n]{\ }$.

[35] O vývoji algebry viz delší stať J. Bečvář: *Algebra v 16. a 17. století*, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*, edice Dějiny matematiky, sv. 12, Prometheus, Praha, 1999, 161–235. Článek obsahuje bohatou bibliografii. Viz též A. N. Kolmogorov, A. P. Juškevič (red.): *Matematika XIX veka. Matematičeskaja logika, Algebra, Teorija čisel, Teorija verojatnostej*, Nauka, Moskva, 1978, 255 stran; anglický překlad: Birkhäuser, Basel, 1992, 308 stran; I. Kleiner: *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007, xv+168 stran; I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova: *The Beginnings and Evolution of Algebra*, The Mathematical Association of America, Washington, 2000, xvi+179 stran; E. Scholz (Hrsg.): *Geschichte der Algebra*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990, viii+506 stran; J. J. Gray, K. H. Parshall (eds.): *Episodes in the History of Modern Algebra (1850–1950)*, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2007,

2 Několik učebnic algebry druhé poloviny 19. století

2.1 Joseph Alfred Serret

Francouzský matematik Joseph Alfred Serret (1819–1885) absolvoval roku 1840 pařížskou École Polytechnique, potom sloužil u dělostřelectva, od roku 1848 působil na École Polytechnique a od roku 1849 na Sorbonně. Roku 1860 se stal členem pařížské akademie. O rok později byl jmenován profesorem nebeské mechaniky na Collège de France v Paříži, v letech 1863 až 1871 přednášel na Sorbonně. Od roku 1873 pracoval v Bureau des Longitudes (doslova Úřad zeměpisných délek, Francouzský astronomický institut).

J. A. Serret byl všestranným matematikem. Pracoval zejména v matematické analýze, diferenciální geometrii (známé jsou tzv. Frenetovy-Serretovy vzorce týkající se prostorových křivek), algebře, aritmetice a teorii čísel, mechanice a astronomii. Na Sorbonně přednášel jako první o Galoisově teorii, dal některé podněty k rozvoji teorie grup. Napsal učebnice *Traité de trigonométrie* (1850), *Traité d'arithmétique* (1852), *Éléments de trigonométrie à l'usage des arpenteurs* (1853) a dvoudílný *Cours de calcul différentiel et intégral* (1868, xiii+618+xii+731 stran, 6. vydání je z roku 1911, německý překlad z roku 1884-85, 8. vydání z roku 1924), editoval *Oeuvres de Lagrange* (1867–1877) a *Traité de calcul différentiel de Lacroix* (1867).[36]

Velmi oblíbená Serretova učebnice *Cours d'algèbre supérieure* [Se] byla studována více než osm desetiletí. Poprvé vyšla roku 1849 v jednom svazku o 400 stranách. Její třetí vydání z roku 1866 má ve dvou svazcích již téměř 1350 stran, sedmé, stejně obsáhlé francouzské vydání je z roku 1928. Německý překlad *Handbuch der höheren Algebra* vyšel roku 1868 zpracovaný Georgem Wertheimem (1857–1939) rovněž ve dvou svazcích (viii+508+viii+540 stran) a znovu v letech 1878 a 1879. Ruská verze je z roku ????, dotisk vyšel roku 1910.

Z úvodu německého vydání z roku 1868 ocitujeme zajímavou pasáž charakterizující algebru tak, jak byla v druhé polovině 19. století vnímána.

Die Algebra hat es wesentlich mit der Analysis der Gleichungen zu thun; die verschiedenen besonderen Theorien, die sie enthält, beziehen sich sämmtlich mehr oder weniger gerade auf diesen Gegenstand. Von diesem Gesichtspunkte aus lassen sich drei ganz verschiedene Theile der Algebra unterscheiden:

1. Die allgemeine Theorie der Gleichungen, d. i. die Gesammtheit der allen Gleichungen gemeinsamen Eigenschaften.

2. Die Auflösung der numerischen Gleichungen, d. h. die Bestimmung der exacten oder Näherungswerthe der Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten bestimmte Zahlen sind.

---

viii+335 stran; H.-W. Alten, A. Djafari Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wußing: *4000 Jahre Algebra. Geschichte. Kulturen. Menschen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003, xiv+653 stran.

[36] *Joseph Alfred Serret*, Bulletin des sciences mathématiques, 2. série, 9(1885), 123–132.

3. Die algebraische Auflösung der Gleichungen, d. h. die Bestimmung eines aus den Coefficienten einer gegebenen Gleichung zusammengesetzten Ausdrucks, welcher, für die Unbekannte substituirt, der Gleichung identisch genügt, mögen nun ihre Coefficienten numerisch gegeben sein, oder mögen sie, einfach als bekannt ansehen, unbestimmt gelassen und durch Buchstaben bezeichnet werden. ([Se]-I, str. 1)

Dvoudílná Serretova učebnice je (v německé verzi z roku 1868) členěna do pěti částí, které se dále dělí na kapitoly. Dvě části jsou v prvním díle, tři ve druhém. Obsah i koncepci celé učebnice dobře vystihují názvy jednotlivých částí:

1. *Die allgemeinen Eigenschaften und die numerische Auflösung der Gleichungen* (5–294),
2. *Die symmetrischen Functionen* (295–508),
3. *Eigenschaften der ganzen Zahlen* (3–172),
4. *Die substitutionen* (173–340),
5. *Die algebraische Auflösung der Gleichungen* (341–540).[37]

V závěrečné kapitole páté části je vyložena problematika algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně, algebraického řešení algebraických rovnic, nemožnosti algebraického řešení obecné rovnice stupně vyššího než čtvrtého a řešitelnosti některých rovnic vyšších stupňů. Jsou zde podány základy Galoisovy teorie; autor využil některé výsledky z předchozích kapitol, v nichž se již velmi pomalu rodil pojem grupy.

Die Substitutionen $1, S_1, S_2, \ldots, S_{\nu-1}$, durch welche man von der Permutation (6) der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ zu den ν Permutationen (7) übergeht, bilden ein conjugirtes System. Mit andern Worten: die ν Permutationen (7) machen eine Gruppe aus. ([Se]-II, str. 340)

Poznamenejme, že 4. vydání Serretovy učebnice *Cours d'algèbre supérieure* citoval Václav Řehořovský (1849–1911) v knize *Theorie souměrných funkcí kořenů* z roku 1883. Ta měla být prvním dílem učebnice *Základové vyšší algebry* Eduarda Weyra (1852–1903) a Václava Řehořovského. K napsání dalších svazků však nedošlo. Eduard Weyr citoval Serretovu učebnici algebry v článku *O integrování racionálných differenciálů*.[38]

2.2 Camille Marie Ennemond Jordan

Francouzský matematik Camille Jordan (1838–1922) studoval na École Polytechnique a na hornické škole v Paříži, kterou roku 1861 absolvoval. V letech

[37] Kniha bohužel nemá rejstřík.

[38] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 11(1882), 125–137. Poznamenejme, že Ed. Weyr více než využil Serretovu učebnici analýzy (a další knihy) při sepisování své knihy *Počet differenciálný* z roku 1902 – viz J. Bečvář a kol.: *Eduard Weyr 1852–1903*, edice Dějiny matematiky, sv. 2, Prometheus, Praha, 1995, 196 stran a 24 obrazových příloh. O všestranných aktivitách české matematické obce viz M. Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, edice Dějiny matematiky, sv. 34, Matfyzpress, Praha, 2008, 355 stran.

1861 až 1873 pracoval jako báňský inženýr, roku 1873 se na École Polytechnique stal repetitorem a o tři roky později profesorem; penzionován byl roku 1912. V letech 1883 až 1912 vyučoval též na Collège de France. Roku 1881 se po Michelu Chaslesovi (1809–1880) stal členem Institute de France (Académie des Sciences, Akademie věd v Paříži); roku 1895 byl jejím víceprezidentem a roku 1916 prezidentem. Od roku 1895 byl členem Petrohradské akademie. V letech 1885 až 1922 vedl *Journal de mathématiques pures et appliquées.*

Věnoval se zejména algebře, teorii čísel, teorii reálných funkcí, geometrii, topologii a krystalografii. Sepsal třídílnou učebnici *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1882 až 1887), která byla velmi ceněna. Jeho jméno nesou Jordanova-Hölderova věta o kompozičních řadách, Jordanův kanonický tvar, Jordanova míra a Jordanova křivka.[39]

Jordanova rozsáhlá monografie *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Jo] byla vydaná v Paříži roku 1870 (xviii+667 stran). Má čtyři části, které se dále dělí, kromě části první, na kapitoly, ty dále na paragrafy a ty ještě na odstavce. Uvedeme jen názvy čtyř hlavních částí a dílčích kapitol.

1. *Des congruences* (1–18),
2. *Des substitutions* (*Des substitutions en général, Des substitutions linéaires*) (19–249),
3. *Des irrationnelles* (*Généralités, Applications algébriques, Applications géométriques, Applications à la théorie des transcendantes*) (251–382),
4. *De la résolution par radicaux* (*Conditions de résolubilité, Réduction du problème A, Réduction du problème B, Réduction du problème C, Résumé, Groupes a exclure, Indépendance des groupes restants*) (383–662).

V úvodu své monografie C. Jordan napsal:

Le problème de la résolution algébrique des équations est l'un des premiers qui se soient imposés aux recherches des géomètres. Dès les débuts de l'Algèbre moderne, plusieurs procédés ont été mis en avant pour résoudre les équations des quatre premiers degrés: mais ces diverses méthodes, isolées les unes des autres et fondées sur des artifices de calculs, constituaient des faits plutôt qu'une théorie, jusqu'au jour où Lagrange, les soumettant à une analyse approfondie, sut démêler le fondement commun sur lequel elles reposent et les ramener à une même méthode véritablement analytique, et prenant son point de départ dans la théorie des substitutions. ([Jo], str. v)

Celá Jordanova kniha je prosycena grupami; to bylo na tehdejší dobu zcela neobvyklé. Definice grupy substitucí je již na počátku druhé části,

[39] Viz H. Villat: *Camille Jordan*, Journal de mathématiques pures et appliquées, sér. 9, 1(1922), I–IV; A. Buhl: *Camille Jordan*, L'Enseignement Mathématique 22(1921-1922), 214–218; É. Picard, É. Bertin: *Nachruf auf Camille Jordan*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 174(1922), 209–211.

o několik stránek dál jsou ve velmi srozumitelné podobě uvedeny Lagrangeova[40] a Cauchyova věta:

On dira qu'un système de substitutions forme un groupe (ou un faisceau) si le produit de deux substitutions quelconques du système appartient lui-même au système. ([Jo], str. 22)

Si le groupe H est contenu dans le groupe G, son ordre n est un diviseur de N, ordre de G. ([Jo], str. 25)

Réciproquement, si p est un nombre premier, tout groupe dont l'ordre est divisible par p contiendra une substitution d'ordre p. ([Jo], str. 26)

Uveďme ještě zajímavou ukázku – dvě věty obsahující ekvivalentní podmínky řešitelnosti algebraické rovnice v radikálech; uvedeny jsou ve čtvrté části Jordanovy monografie:

Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que sa résolution se ramène à celle d'une suite d'équations abéliennes de degré premier. ([Jo], str. 386)

Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que ses facteurs de composition soient tous premiers. ([Jo], str. 387)

Jordanova monografie výrazně napomohla rozšíření a uznání Galoisových myšlenek obsažených v jeho práci *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*, kterou publikoval Joseph Liouville (1809–1882) roku 1846, tj. čtrnáct let po Galoisově smrti, v jedenáctém svazku časopisu Journal de mathématiques pures et appliquées.[41] Dala zcela zásadní podněty ke studiu grup substitucí (permutací), i grup abstraktních.[42] Rázně vykročila ke dvacátému století, k algebře struktur.

2.3 Ludwig Matthiessen

Ludwig Matthiessen (1830–1906), který působil jako učitel na gymnáziu v Husumu a později jako profesor matematiky na univerzitě v Rostocku, vydal roku 1878 v Lipsku rozsáhlou knihu nazvanou *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* [Ma] (xvi+1001 stran, druhé vydání je z roku 1896).

Monografie [Ma] je rozdělena na osm částí, které se dále člení na 42 kapitol a ty dále na 376 paragrafů. Podrobný obsah zaujímá 12 stran. Názvy všech osmi částí poměrně výstižně charakterizují obsah i zaměření celé knihy:

[40] V Jordanově monografii je proti titulnímu listu pěkná Lagrangeova podobizna.

[41] J. Liouville tento časopis roku 1836 založil a vedl jej až do roku 1874. Staral se o to, aby v něm vycházely zásadní a aktuální práce těch nejlepších matematiků.

[42] O vzniku a vývoji teorie grup viz H. Wussing: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs. Ein Beitrag zur Entstehung der abstrakten Gruppentheorie*, VEB, Berlin, 1969; anglický překlad: *The Genesis of the Abstract Group Concept. A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*, Cambridge, Mass., London, England, 1984, 331 stran. Viz též B. M. Kiernan: *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Sciences 8(1971), 40–154.

1. *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten* (1–23),
2. *Von den Transformationen der Gleichungen und den symmetrischen Functionen der Wurzeln* (24–153),
3. *Directe Auflösung particulärer Gleichungen* (154–236),
4. *Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden durch Substitution* (237–788),
5. *Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden durch Combination* (789–878),
6. *Von der Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade mit Hülfe goniometrischer Functionen* (879–920),
7. *Von den geometrischen Constructionen der Wurzeln der algebraischen Gleichungen* (921–963),
8. *Die Gesammtlitteratur der Algebra der Gleichungen* (964–1001).

Matthiessenova kniha obsahuje obrovské množství materiálu. Velmi podrobně prezentuje řadu výsledků, postupů a metod, k nimž lidstvo dospělo v minulých stoletích. Uvádí četné historické poznámky, zajímavé úryvky z původních prací a příslušné komentáře. Do značné míry charakterizuje chápání algebry v sedmdesátých letech 19. století. Kniha má dnes značný historický význam.

Poznamenejme pro zajímavost, že ve školním roce 1878/79 tuto knihu zakoupila knihovna c. k. českých vyšších realních škol v Praze (viz titulní list v příloze).

Uveďme ještě, že ve stejném roce byla v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky uveřejněna recenze Františka Josefa Studničky (1836–1903), profesora matematiky na pražské univerzitě, na druhé, rozšířené vydání Matthiessenovy knihy *Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Heis.*[43] F. J. Studnička citoval Matthiessenovu knihu [Ma] např. ve svém článku *O nejjednodušším řešení rovnic kubických.*[44] O Matthiessenově díle tedy u nás patrně bylo dobré povědomí.

2.4 Diedrich August Klempt

Diedrich August Klempt, učitel na reálce v Rostocku, vydal roku 1880 v Lipsku učebnici *Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen hundert Beispielen* [Kl] (xii+260 stran). V jejím úvodu mimo jiné napsal:

Während die ältere Algebra sich vorzugsweise mit der Aufgabe beschäftigt, diejenigen Werthe einer Funktion zu finden, für welche dieselbe verschwindet, sucht die neuere Algebra Eigenschaften der Funktionen zu entdecken und betrachtet

[43] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 7(1878), 183. Třetí vydání této knihy je z roku 1886 (Du Mont-Schaumburg, Köln, xvi+610+vi+546 stran).

[44] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 22(1893), 193–201.

die Kenntniss der Zahlwerthe der Wurzeln als etwas Nebensächliches. … Im Laufe weniger Jahrzehnte eroberten unsere ersten Forscher ein sehr ausgedehntes Reich für die Algebra und ihre Bedeutung ist in stetem Wachsthum begriffen. Deshalb ist es für den Studirenden der Mathematik nothwendig geworden, sich möglichst bald mit den wichtigsten Principien derselben vertraut zu machen, ja es ist sogar wünschenswerth, dass den Studirenden bereits in dem ersten Semester Gelegenheit geboten werde, die Hauptsätze und die vorzüglichsten Denkoperationen der modernen Algebra kennen zu lernen, um dann mit besserem Verständniss an die übrigen Disciplinen zu gehen. ([Kl], str. iii)

Kniha je rozdělena na devět částí, které jsou dále podrobně členěny (až na 149 paragrafů); podrobný obsah knihy je uveden na šesti stranách. Názvy jednotlivých částí poměrně přesně naznačují obsah i koncepci celé Klemptovy knihy:

1. *Combinatorik* (1–47),
2. *Determinanten* (47–147),
3. *Lineare Gleichungen und Funktionen* (148–183),
4. *Homogene lineare Funktionen zweiten Grades* (183–205),
5. *Allgemeine Sätze über ganze algebraische Funktionen* n*ten Grades mit einer Veränderlichen* (205–228),
6. *Symmetrische Funktionen der Wurzeln* (229–244),
7. *Elimination* (244–248),
8. *Die Discriminante* (249–253),
9. *Kanonische Formen* (254–260).

Velkou předností učebnice jsou četné příklady a úlohy, které doplňují výklad a napomáhají dobrému pochopení látky. Patrně se zde projevila zkušenost autora, středoškolského učitele.

V souvislosti s permutacemi se hned na začátku knihy objevil termín grupa, ale víceméně jen ve smyslu skupina:

Man schreibe erst alle Permutationen hin, die das Element a_1 *als erstes Element enthalten, dadurch bekommt man eine Gruppe von so viel Permutationen, als die* $(n-1)$ *Elemente* $a_2 \ldots a_n$ *überhaupt zulassen. Dann schreibe man alle Permutationen hin, die* a_2 *als Anfangselement enthalten. Es entsteht eine Gruppe von so viel Permutationen, als die* $(n-1)$ *Elemente* $a_1 a_3 \ldots a_n$ *zulassen. So fahre man fort bis* a_n *incl. Man erhält so* n *Gruppen.* ([Kl], str. 2)

V podobném duchu se setkáváme s „grupou" i v partii o symetrických funkcích:

… Bedienen wir uns des Ausdruckes Gruppe für ein beliebiges der Aggregate $b_1 \sum x_1$, $b_{12} \sum x_1^2 x_2 \ \ldots$ *, so bemerken wir leicht, dass jede Gruppe wieder eine symmetrische Funktion der Wurzeln ist und dass die Aufgabe,* Φ *zu berechnen, auf die Aufgabe zurückgeführt ist, jede Gruppe zu berechnen.* ([Kl], str. 237)

3 Heinrich Martin Weber a jeho učebnice

H. Weber se narodil 5. března 1842 v Heidelbergu. Od roku 1860 studoval na univerzitách v Heidelbergu a Lipsku, roku 1863 promoval v Heidelbergu, pak odešel do Königsbergu (Královec, Kaliningrad), kde si rozšiřoval znalosti u Franze Ernsta Neumanna (1798–1895) a Friedricha Julia Richelota (1808–1875). Sepsal zde svoji habilitační práci.

Roku 1866 se H. Weber habilitoval na univerzitě v Heidelbergu. V následujících letech působil na řadě míst: polytechnika v Curychu (1869–1875), univerzita v Königsbergu (1875–1883), technika v Berlíně-Charlottenburgu (1883), univerzita v Marburgu (1884–1892) a univerzita v Göttingen (1892–1894). Od roku 1895 působil v Strassburgu, který tehdy patřil Německu.[45] Roku 1904 řídil 3. mezinárodní kongres matematiků v Heidelbergu. Zemřel 17. května 1913 ve Strassburgu.[46] Heinrich Weber byl všestranně orientovaným matematikem. Věnoval se zejména algebře a teorii čísel, matematické analýze a jejím aplikacím ve fyzice. Se svým žákem Josefem Wellsteinem (1869–1919) sepsal rozsáhlé třísvazkové dílo nazvané *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik* [WW], které poprvé vyšlo v letech 1903 až 1907. Bylo široce využívané, dočkalo se několika dalších vydání. S Richardem Dedekindem vydal roku 1892 *Gesammelte mathematische Werke* Bernharda Riemanna. Přepracoval též Riemannovy přednášky z matematické fyziky a vydal je roku 1900/01 pod názvem *Differentialgleichungen und ihren Anwendungen in der Physik*.

Poznamenejme pro zajímavost, že H. Weber publikoval roku 1906 článek *Elementare Mengenlehre*.[47] V 64 letech tedy sepsal pojednání o nové disciplíně.

Roku 1893 publikoval H. Weber v časopise Mathematische Annalen významnou práci nazvanou *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie* [We]. Podal v ní obecný výklad Galoisovy teorie, který je považován za její první moderní prezentaci. V úvodu napsal:

Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen in einer Weise zu begründen, die soweit möglich alle Fälle umfasst, in denen diese Theorie angewandt worden ist. Sie ergiebt sich hier als eine unmittelbare Consequenz des zum Körperbegriff erweiterten Gruppenbegriffs, als ein formales Gesetz ganz ohne Rücksicht auf die Zahlenbedeutung

[45] Do francouzsko-německé války (1870–1871) a od konce první světové války patřil Francii.

[46] Viz *Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912*, New York, 1971; F. Rudio: *Nekrolog. Heinrich Weber (1842–1913, Mitglied der Gesellschaft seit 1870. Ehrenmitglied seit 1896)*, Naturforschende Gesellschaft (Zürich) 58(1913), 437–453; A. Voss: *Heinrich Weber*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 23(1914), 431–444; G. Frei: *Heinrich Weber and the emergence of class field theory*, in The History of Modern Mathematics I, MA, Boston, 1989; G. Frei: *Heinrich Weber (1842–1913)*, in D. Rauschning et al. (eds.): *Die Albertus-Universität zu Königsberg und ihre Professoren. Aus Anlass der Gründung der Albertus-Universität vor 450 Jahren*, Duncker & Humblot, Berlin, 1995, 509–520; N. Schappacher, K. Volkert: *Heinrich Weber; un mathématicien à Strasbourg, 1895–1913*, L'Ouvert 89(1997), 1–18.

[47] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 15(1906), 173–184.

der verwendeten Elemente. Diese Begründung ist hiernach also auch ganz unabhängig von dem Fundamentalsatz der Algebra über die Wurzelexistenz. Die Theorie erscheint bei dieser Auffassung freilich als ein reiner Formalismus, der durch Belegung der einzelnen Elemente mit Zahlwerthen erst Inhalt und Leben gewinnt. ...

Ich beginne, um vollständig klar zu sein, mit einer genauer Begriffsbestimmung des Gruppen- und Körperbegriffs ... ([We], str. 521)

Celý výklad je rozčleněn do sedmi paragrafů, jejichž obsah je dobře vystižen názvy: *Gruppen*, *Körper*, *Formenkörper*, *Congruenzkörper*, *Der Satz von Lagrange*, *Die Galois'sche Theorie*, *Endliche und unendliche Körper*.

Roku 1895 vyšel první díl rozsáhlé Weberovy učebnice *Lehrbuch der Algebra*. V úvodu se autor odvolal na vývoj algebry v posledních desetiletích a zdůvodnil tak potřebu nové, moderněji pojaté učebnice oproti dosud užívané výborné knize Serretově. Krátce popsal zaměření obou dílů:

Der erste Band enthält den elementaren Theil der Algebra, den man mit einem hergebrachten Ausdruck als Buchstabenrechnung bezeichnen kann, sodann die Vorschriften über die numerische Berechnung der Gleichungswurzeln und die Anfänge der Galois'schen Theorie.

Der zweite Band ... soll die allgemeine Theorie der endlichen Gruppen, die Theorie der linearen Substitutionsgruppen und Anwendungen auf verschiedene einzelne Probleme bringen und soll abschliessen mit der Theorie der algebraischen Zahlen, wo der Versuch gemacht ist, die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen diese Theorie bisher betrachtet worden ist, zu vereinigen. ([W]-I-1898, str. vi)

První díl Weberovy učebnice (2. vydání) sestává ze tří částí (které se dále dělí na 18 oddílů):

1. *Die Grundlagen* (23–267),
2. *Die Wurzeln* (269–488),
3. *Algebraische Grössen* (489–703).

V úvodu 17. oddílu nazvaného *Algebraische Auflösungen von Gleichungen* Heinrich Weber napsal:

Eine der ältesten Fragen, an der sich vorzugsweise die neuere Algebra entwickelt hat, ist die nach der sogenannten algebraischen Auflösung der Gleichungen, worunter man eine Darstellung der Wurzeln einer Gleichung durch eine Reihe von Radicalen, oder die Berechnung durch eine endliche Kette von Wurzelziehungen versteht. Auf diese Frage fällt von der Gruppentheorie das hellste Licht. ([W]-I-1898, str. 644)

Například zde dokázal, že alternující grupa je jednoduchá, tj. výsledek, který je nezbytný pro zjištění neřešitelnosti rovnice 5. stupně. Důkaz uvedl následujícím odstavcem:

Wir wollen nun nachweisen, dass, wenn n grösser als 4 ist, die alternirende Gruppe ausser der Einheitsgruppe überhaupt keine normalen Theiler hat, oder nach der früher eingeführten Bezeichnung einfach ist. Darauas folgt dann, dass die Bedingung, die wir für die algebraische Auflösbarkeit einer Gleichung als nothwendig gefunden haben, für die Gleichungen von höherem als dem vierten Grade, deren Gruppe die symmetrische oder die alternirende ist, nicht erfüllt ist, und dass also Gleichungen von höherem als dem vierten Grade, so lange die Coëfficienten unabhängige Variable sind, nicht mehr algebraisch lösbar sind. ([W]-I-1898, str. 649)

Druhý díl je přímo prosycen grupami; jeho čtyři části se dále dělí na 25 oddílů:

1. *Gruppen* (1–160),
2. *Lineare Gruppen* (161–347),
3. *Anwendungen der Gruppentheorie* (349–550),
4. *Algebraische Zahlen* (551–844).[48]

Teprve v druhém dílu H. Weber uvedl definici grupy v obdobné formě jako ve svém článku [We] z roku 1893:

Die allgemeine Definition der Gruppe ... lässt über die Natur dieses Begriffes noch manches im Dunkel ... In der Definition der Gruppe ist mehr enthalten, als es auf den ersten Blick den Anschein hat, und die Zahl der möglichen Gruppen, die aus einer gegebenen Anzahl von Elementen zusammengesetzt werden können, ist eine sehr beschränkte. Die allgemeinen Gesetze, die hier herrschen, sind erst zum kleinsten Theile erkannt, so dass jede neue specielle Gruppe, namentlich bei kleinerer Gliederzahl, ein neues Interesse bietet und zu eingehendem Studium auffordet.

Welche Gruppen sind zwischen einer gegebenen Zahl von Elementen, d. h. bei gegebenem Grade überhaupt möglich? Das ist die allgemeine Frage, um die es sich handelt, von deren vollständiger Lösung wir aber noch weit entfernt sind. Cayley hat diese Aufgabe zuerst für die niedrigsten Gradzahlen in Angriff genommen. ([W]-II-1899, str. 121)

Třetí díl Weberovy učebnice *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen* (1908)[49] má tuto strukturu:

1. *Analytischer Teil* (1–317),
2. *Quadratische Körper* (319–410),
3. *Komplexe Multiplikation* (411–560),
4. *Klassenkörper* (561–620),
5. *Algebraische Funktionen* (621–707),
   Tabellen (709–726).[50]

[48] Rejstřík obou dílů je na stranách 845 až 855 druhého dílu.

[49] Na páté straně (str. v) je toto věnování: *Richard Dedekind, David Hilbert, Hermann Minkowski in herzlicher Freundschaft gewidmet.*

[50] Rejstřík je na stranách 727 až 731.

Weberova učebnice [W] byla velmi úspěšná, ve druhém vydání vyšla již v letech 1898, 1899. Jako třetí díl jejího druhého vydání vyšla roku 1908 Weberova monografie *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen* [Wel] (původní vydání je z roku 1891). Třetí, resp. čtvrté vydání všech tří svazků je z let 1961, resp. 2001/02.

Roku 1912 vyšla redukovaná verze Weberovy algebry v jediném svazku pod názvem *Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande* [Wkl] (x+528 stran), druhé vydání je z roku 1921.

Weberova algebra je poslední velkou učebnicí, která do značné míry zachycuje obraz algebry konce 19. století. Přestože již přinesla nové pojmy rodící se strukturní algebry (grupa, těleso atd.), stále do značné míry zůstala u stěžejního tématu minulosti, u polynomů nad reálnými a komplexními čísly a řešitelnosti algebraických rovnic.

Stala se však standardním textem o grupách. Spolu s monografií *Theory of groups of finite order*,[51] kterou vydal roku 1897 William Burnside (1852–1927),[52] inspirovala matematiky dalších generací ke studiu teorie grup, jedné z nejdůležitějších algebraických teorií 20. století.[53] Přispěla též k rozšíření a upevnění terminologie. Dominovala více než třicet let, výrazně ji překonala až dvoudílná van der Waerdenova kniha *Moderne Algebra* z let 1930 a 1931, v níž již byl prezentován zcela jiný pohled na algebru.

Poznamenejme pro zajímavost, že v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky zveřejnil Eduard Weyr (1852–1903) krátkou recenzi na francouzské vydání prvního dílu Weberovy učebnice.[54] Prostřední odstavec jeho recenze zní takto:

Dílo Weberovo vyniká, tak jako Serretovo, nevšední přesností a jasností exposice. Vyloživ v Úvodu podstatu soustav čísel racionálných, irracionálných a komplexních, buduje auktor algebru rovnic od elementů, podávaje též theorii determinantů s některými applikacemi jakož i novější výzkumy Hermite-a, Sylvestera, Kroneckera a j., a dospívá do základů theorie Galoisovy a k applikaci její na algebraické řešení rovnic, zvláště t. zv. Abelových a speciálně oněch, Gaussem uvažovaných, na nichž závisí dělení kružnice na daný počet stejných dílů. Výklad theorie Galoisovy děje se způsobem, jehož byli Dedekind, Weber a Kronecker užili, a jenž usnadňuje vniknutí do této krásné a hluboké theorie přesností formulace velmi abstraktních pojmů její.

[51] Cambridge University Press, 1897, xxi+388 stran, 2. vydání: 1911, xxiv+512 stran, reprint: Dover, New York, 1955.

[52] A. R. Forsyth: *William Burnside*, Journal of the London Mathematical Society 3(1928), 64–80.

[53] Připomeňme v této souvislosti ještě knihu *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra* (B. G. Teubner, Leipzig, viii+290 stran), kterou vydal roku 1882 Eugen Netto (1846–1919), profesor na univerzitě ve Strassburgu. Její orientaci na teorii grup doložíme citátem ze str. 32: *Es würde daher eine fundamentale Aufgabe der Algebra sein, alle für n Elemente existierenden Gruppen aufzustellen.*

[54] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 28(1899), 285.

4 Weberovi následovníci

4.1 Conrad Gustav Bauer, Ludwig Bieberbach

Gustav Bauer (1820–1906) studoval na univerzitách v Erlangen a Berlíně. Celý život pak působil na univerzitě v Mnichově; nejprve jako soukromý docent (1857), potom jako mimořádný (1865), a posléze jako řádný profesor (1869).[55]

O vydání Bauerovy učebnice *Vorlesungen über Algebra* [Ba] bylo rozhodnuto u příležitosti jeho osmdesátých narozenin. Vydal ji Mnichovský matematický spolek (Mathematische Verein München) v Teubnerově nakladatelství v Lipsku roku 1903 (vi+376 stran); ve druhém a třetím vydání se kniha objevila v letech 1910 a 1921. O vydání se zasloužil Bauerův žák Karl Doehlemann (1864–1926).

Gustav Bauer sepsal svou učebnici na základě přednášek, které konal pro studenty prvního a druhého ročníku mnichovské univerzity v letech 1870 až 1897. Má čtyři části:

1. *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen* (1–105),
2. *Algebraische Auflösung der Gleichungen* (106–199),
3. *Numerische Auflösung der Gleichungen* (200–256),
4. *Theorie und Anwendung der Determinanten* (257–373).[56]

Je věnována „tradiční algebře“, neobsahuje v podstatě žádné větší náznaky měnícího se pojetí této disciplíny. Poznamenejme například, že se v ní pojem grupy objevil jen okrajově (str. 155), pojmy tělesa a oboru integrity zcela chybí.

Po Doehlemannově smrti přepracoval a modernizoval Bauerovu učebnici Ludwig Bieberbach (1886–1982).

Studoval na univerzitách v Heidelbergu a Göttingen. V letech 1913 až 1915 byl profesorem na univerzitě v Basileji, v letech 1915 až 1921 ve Frankfurtu nad Mohanem a v letech 1921 až 1945 na univerzitě v Berlíně. Významně podporoval fašistický režim; v letech 1936 až 1942 byl redaktorem neblaze proslulého „arijského“ časopisu *Deutsche Mathematik*. Po válce žil v ústraní.[57]

Bauerova učebnice přepracovaná Bieberbachem (x+334 stran) vyšla roku 1928 jako čtvrté vydání původní učebnice, ale pod jménem obou autorů. Páté vydání je z roku 1933 (x+358 stran). Původní členění učebnice se trochu změnilo:

1. *Grundlegende Eigenschaften der algebraischen Gleichungen* (1–57),
2. *Theorie und Anwendung der Determinanten* (58–116),
3. *Symmetrische Funktionen* (117–146),

[55] Viz A. Voss: *Zur Erinnerung an Gustav Bauer*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 16(1907), 54–75; C. von Voit: *Nekrolog auf Gustav Bauer*, Münch. Ber. 37(1907), 249–257.

[56] Rejstřík je na stranách 374 až 375.

[57] H. Grunsky: *Ludwig Bieberbach zum Gedächtnis*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 88(1986), 190–205.

4. *Numerische Auflösung der Gleichungen* (147–220),
5. *Algebraische Auflösung der Gleichungen* (221–340),
   Anhang: Kettenbrüche (341–356).[58]

L. Bieberbach se v úvodu 5. vydání vyjádřil o přepracování Bauerovy knihy takto:

An der Tendenz des Buches, das eine Darstellung der Theorie der algebraischen Gleichungen geben will, habe ich nichts geändert. Die Belange der abstrakten Gruppen- und Körpertheorie habe ich etwas deutlicher hervortreten lassen, die numerischen Methoden etwas weiterverfolgt, und manchen schönen modernen Satz über die Lage der Gleichungswurzeln aufgenommen. Die Determinanten und die quadratischen Formen, die lineare Algebra habe ich, ihrer besonderen Bedeutung wegen, etwas eingehender behandelt, als es dem unmittelbaren Bedürfnis der Gleichungstheorie entspricht. ([Ba]-1933, str. iv)

Bieberbachova modernizace textu je vidět již z toho, že se pojmy okruhu a tělesa objevily na samém počátku učebnice:

Man sagt, eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen … bildeten einen Körper, wenn die folgenden Tatsachen, Körperaxiome genannt, gelten. Die Körperaxiome zerfallen in zwei Sorten, die Ringaxiome und die eigentlichen Körperaxiome. Gelten nur die Ringaxiome, so heißt $\mathfrak{M}$ ein Ring. Ein Ring heißt somit ein Körper, wenn auch die an zweiter Stelle aufgeführten eigentlichen Körperaxiome gelten. ([Ba]-1933, str. 6) A následují podrobně popsané axiomy tělesa, resp. okruhu ([Ba]-1933, str. 6–8).

Pojem grupy byl zaveden v souvislosti s permutacemi, a to v této podobě:

Eine Menge von Substitutionen von n Elementen heißt eine Gruppe, wenn mit irgend zwei (nicht notwendig verschiedenen) Substitutionen S, T der Menge stets auch die Produkte ST und TS der Menge angehören. Die Anzahl der Substitutionen heißt die Ordnung der Gruppe. ([Ba]-1933, str. 307)

Die Substitutionsgruppen sind ein Beispiel zum allgemeinen Gruppenbegriff. … für dieses Produkt ab die folgenden Gruppenpostulate erfüllt sind.

1. ab ist ein Element von G.

2. Es gilt das assoziative Gesetz

$$(ab)c = a(bc).$$

3. Sind a und b Elemente aus $\mathfrak{G}$, so gibt es genau ein Element x und genau ein Element y, beide aus $\mathfrak{G}$, so daß die Gleichungen

$$xa = b$$
$$ay = b$$

erfüllt sind. ([Ba]-1933, str. 309)

[58] Rejstřík je na stranách 357 až 358.

4.2 Maxime Bôcher

Maxime Bôcher (1867–1918) studoval v letech 1883 až 1888 na Harvardu a v letech 1888 až 1891 v Göttingen. Pak se vrátil na Harvard a od roku 1904 zde působil jako profesor. Výrazně se zasloužil o rozvoj americké matematiky. V letech 1909 až 1910 byl prezidentem Americké matematické společnosti.

Pracoval v teorii potenciálu, intenzivně se věnoval diferenciálním rovnicím, trigonometrickým řadám, matematické fyzice, ale i algebře a geometrii. Napsal několik oblíbených učebnic.[59]

Roku 1907 vydal M. Bôcher učebnici *Introduction to Higher Algebra* [Bô] (xi+321 stran). Byla velmi úspěšná, německy vyšla již roku 1910 v překladu H. Becka, rusky roku 1933. Dnes bychom ji zařadili k prvním učebnicím lineární algebry, neboť věnuje velkou pozornost maticím, determinantům, lineární závislosti, lineárním rovnicím, lineárním transformacím, invariantům, bilineárním a kvadratickým formám a jejich geometrickým aspektům. Pojednává rovněž o polynomech a jejich rozkladech, symetrických funkcích, teorii elementárních dělitelů, ekvivalenci polynomiálních matic a ekvivalenci párů bilineárních forem. Přesto kniha přináší řadu poznatků tzv. obecné algebry. Neobsahuje sice pojem tělesa, ale velmi efektivně zavádí pojem grupy. 26. odstavec, který je nazván *Sets, Systems, and Groups*, začíná těmito slovy:

These three words are the technical names for conceptions which are to be met with in all branches of mathematics. In fact the first two are of such generality that they may be said to form the logical foundation on which all mathematics rests. ([Bô], str. 80)

M. Bôcher v této souvislosti odkázal čtenáře na svůj populární článek *The fundamental conceptions and methods of mathematics.*[60] Definici grupy podal velmi moderně, využil axiomatický přístup:

A system consisting of a set of elements and one rule of combination, which we will denote by $\circ$*, is called a group if the following conditions are satisfied:*

(1) If a *and* b *are any elements of the set, whether distinct or not,* $a \circ b$ *is also an element of the set.*

(2) The associative law holds; that is, if a, b, c *are any elements of the set,*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

(3) The set contains an element, i*, called the identical element, which is such that every element is unchanged when combined with it,*

$$i \circ a = a \circ i = a.$$

[59] G. D. Birkhoff: *The scientific work of Maxime Bôcher*, Bulletin of the American Mathematical Society 25(1919), 197–215; W. F. Osgood: *The life and services of Maxime Bôcher*, tamtéž, 25(1919), 337–350; W. F. Osgood: *Maxime Bôcher*, tamtéž, 35(1929), 205–217.

[60] Bulletin of the American Mathematical Society 11(1904), 115–135.

(4) If a is any element, the set also contains an element a', called the inverse of a, such that

$$a' \circ a = a \circ a' = i.$$

([Bô], str. 82)[61]

4.3 Robert Karl Emanuel Fricke

Robert Fricke (1861–1930) studoval od roku 1880 v Göttingen, Berlíně, Strassburgu a Lipsku. Promoval roku 1885 v Lipsku u Felixe Kleina (1849–1925), s nímž pak i nadále spolupracoval. Od roku 1886 působil jako učitel na dvoře prince Albrechta Pruského, od roku 1890 byl profesorem na gymnáziu v Braunschweigu. Po habilitaci roku 1892 se stal soukromým docentem na univerzitě v Göttingen a o dva roky později profesorem na technice v Braunschweigu. Ve dvacátých letech byl jedním z editorů souborného vydání Kleinových prací a o několik let později jedním z editorů souborného vydání Dedekindových prací.

R. Fricke pracoval zejména v teorii funkcí. V letech 1916 a 1922 vydal dvoudílnou knihu *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*, v níž podal krátký výklad Galoisovy teorie. Později se vyjádřil, že by rád vydal obšírnou verzi této obdivuhodné teorie. Friedrich Vieweg, vydavatel Weberovy učebnice algebry, mu roku 1922 sdělil, že Weberova kniha bude brzy rozebrána. R. Fricke tedy sepsal novou třídílnou učebnici algebry a vydal ji v letech 1924 až 1928 pod názvem *Lehrbuch der Algebra verfaßt mit Benutzung vom Heinrich Webers gleichnamigem Buche* [Fr]. Tím jasně naznačil, že vyšel z Weberova pojetí a že si jeho učebnice [W] váží.[62] V úvodu napsal:

Im ersten Bande wird man die Einwirkung von Webers Buch vielfach bemerken. Wenn dies auch bei den folgenden Bänden kaum im gleichen Maße der Fall sein wird, so habe ich doch im Andenken an die verehrungswürdige Persönlichkeit Heinrich Webers und in Dankbarkeit für die vielfältige Belehrung, die ich seinem Buche schulde, kein Bedenken getragen, Webers Namen in den Titel des vorliegenden Werkes aufzunehmen. …

… erste Band bringt die Grundlagen der Theorie der algebraischen Gleichungen unter Einschluß der Galoisschen Theorie. … Der zweite Band wendet sich zu den niedersten, nicht mehr „algebraisch“ lösbaren Gleichungen. … Der dritte Band soll die Theorie der algebraischen Zahlen auf Dedekindscher Grundlage behandeln. ([Fr]-I, str. iii–iv)

Frickeova učebnice je rozdělena do tří svazků, které se dále člení na oddíly (ty sestávají z kapitol a kapitoly z paragrafů). Uvádíme názvy jednotlivých svazků a jejich oddílů:

---

[61] Viz též R. Franci: *On the axiomatization of group theory by American mathematicians: 1902–1905*, Amphora (Basel) 1992, 261–277.

[62] R. Fricke pomáhal s přípravou Weberovy učebnice do tisku: *… der Herren E. Hess in Marburg, Fr. Meyer in Clausthal, R. Fricke in Braunschweig, die durch kundige und sorgfältige Ausführung der mühevollen Correktur der Druckbogen Genauigkeit und Richtigkeit des Textes gefördert haben, muss ich hier noch gedenken.* ([W]-I, str. vii)

1. *Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen* (viii+468 stran), oddíly: *Grundlegende Entwicklungen* (4–185), *Einzelsätze über reelle Gleichungen* (186–264), *Galoissche Gleichungstheorie* (265–461).
2. *Ausführungen über Gleichungen niederen Grades* (viii+418 stran), oddíly: *Endliche Gruppen binärer Substitutionen und Gleichungen fünften Grades* (2–181), *Endliche Gruppen ternärer Substitutionen und zugehörige Gleichungen* (182–329), *Geometrische Anwendungen der Gruppentheorie* (330–414).
3. *Algebraischen Zahlen* (vii+506 stran), oddíly: *Allgemeine Theorie der Zahlkörper* (2–189), *Ausführungen über besondere Zahlkörper* (190–502).

Orientaci v celém díle usnadňují podrobné obsahy a rejstříky, které jsou umístěné v každém svazku.

Třetí oddíl prvního svazku nazvaný *Galoissche Gleichungstheorie* se odvíjí od základních poznatků teorie grup. Její první kapitola pojednává o konečných grupách (zahrnuje Sylowovy věty), druhá o Abelových grupách, třetí o grupách permutací. Čtvrtá kapitola je věnována Galoisově teorii, pátá algebraicky řešitelným rovnicím. Uveďme Frickeovu definici grupy z počátku třetího oddílu.

Die m verschiedenen Elemente $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{m-1}$ bilden eine „Gruppe" $\mathfrak{G}_m$ der „Ordnung" m, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

I. Das Ergebnis der Zusammensetzung $E_b \cdot E_a$ irgend zweier Elemente E_a und E_b ist wieder eines der Elemente;

II. Für die nach I herstellbaren symbolischen Produkte von drei Faktoren gilt das assoziative Gesetz:

$$E_c \cdot (E_b \cdot E_a) = (E_c \cdot E_b) \cdot E_a;$$

III. Ist $E_b \neq E_c$, d. h. sind E_b und E_c irgend zwei verschiedene Elemente, und ist E_a irgend ein Element, so gilt auch:

$$E_b \cdot E_a \neq E_c \cdot E_a \qquad \textit{und} \qquad E_a \cdot E_b \neq E_a \cdot E_c.$$

([Fr]-I, str. 268)

Pojem tělesa je zaveden až na počátku čtvrté kapitoly o Galoisově teorii.

Für die Begründung der Galoisschen Gleichungstheorie bedarf man neben dem Gruppenbegriffe noch des von Dedekind eingeführten Körperbegriffs. Ein System konstanter Zahlen wird ein „Zahlenkörper" oder „Zahlkörper" oder kurz „Körper" $\mathfrak{K}$ genannt, wenn mit irgend zwei Zahlen a, b des Systems auch $(a+b)$, $(a-b)$, $a \cdot b$ und, falls $b \neq 0$ gilt, auch $a : b$ im System enthalten ist. Irgend eine rationale Rechnung, auf Zahlen von $\mathfrak{K}$ angewandt, ergibt stets wieder eine Zahl von $\mathfrak{K}$, wenn man nur allemal die Division durch 0 vermeidet. ([Fr]-I, str. 354)

Grupa je tedy definována obecněji – pomocí axiomů, zatímco pojem tělesa je odvozen z vlastností (racionálních, reálných, komplexních) čísel. Odpovídá to užití v Galoisově teorii, kde potřebujeme grupy permutací a číselná tělesa. S grupami se čtenář setkává v celém druhém svazku (grupy lineárních substitucí, cyklické grupy, geometrické aplikace atd.).

Definice tělesa je prakticky ve stejném tvaru uvedena na začátku třetího svazku (viz [Fr]-III, str. 2). O několik stránek dále je definován ideál:

Als ein Ideal $\mathfrak{a}$ *des Körpers* $\mathfrak{K}$ *wird jedes nicht nur aus der Zahl 0 bestehende System von ganzen Zahlen des Körpers* $\mathfrak{K}$ *bezeichnet, das folgende Eigenschaft hat: Mit den Zahlen* α *und* β *gehört auch jede Zahl* $(\lambda\alpha + \mu\beta)$ *dem System* $\mathfrak{a}$ *an, wenn* λ *und* μ *irgendwelche ganze Zahlen aus* $\mathfrak{K}$ *sind.* ([Fr]-III, str. 15)

Ideálem (číselného) tělesa $\mathfrak{K}$ je zde míněn (v našem smyslu) ideál oboru integrity celých čísel $\mathbb{Z}$, který je v tělese $\mathfrak{K}$ obsažen.

5.3 Helmut Hasse

Německý matematik Helmut Hasse (1898–1979) studoval od roku 1917 na univerzitách v Kielu, Göttingen a Marburgu, kde roku 1921 promoval u Kurta Hensela (1861–1941). O rok později se habilitoval, pak působil tři roky jako soukromý docent v Kielu. Od roku 1925 byl profesorem na univerzitě v Halle, od roku 1930 v Marburgu a od roku 1934 v Göttingen. Během války vedl v Berlíně Výzkumný institut říšského námořního úřadu. Od roku 1945 byl zaměstnán v německé akademii věd v Berlíně, od roku 1949 na Humboldtově univerzitě v Berlíně a v letech 1950 až 1966 na univerzitě v Hamburku.[63]

Helmut Hasse pracoval zejména v algebře a teorii čísel; je počítán ke škole Emmy Noetherové (1882–1935) a Emila Artina (1898–1962). S jeho jménem je spjata řada pojmů a tvrzení teorie algebraických čísel a teorie komutativních těles.[64]

Dva svazky Hasseova učebního textu *Höhere Algebra* [H] vyšly v letech 1926 a 1927 jako 931. a 932. svazek oblíbené edice *Sammlung Göschen* (160+160 stran). Jsou to útlé knížky malého formátu, které není možno ani obsahem ani účelem srovnávat s monumentální učebnicí Weberovou (jak to činí L. Corry v knize [Co]). Přesto do určité míry vystihují tehdejší představy o náplni a cílech algebry. V úvodu prvního svazku ji H. Hasse charakterizoval těmito slovy:

[63] G. Frei: *Helmut Hasse (1898–1979). A biographical sketch dealing with Hasse's fundamental contributions to mathematics, with explicit references to the relevant mathematical literature*, Expositiones mathematicae 3(1985), 55–69; H. W. Leopoldt: *Obituary. Helmut Hasse (August 25, 1898 – December 26, 1979)*, Journal of Number Theory 14(1982), 118–120; S. L. Segal: *Helmut Hasse in 1934*, Historia mathematica 7(1980), 46–56.

[64] Viz například jeho práce *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, I. Klassenkörpertheorie, II. Reziprozitätsgesetz* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 35(1926), 1–55, 36(1927), 233–311, 42(1932), 85–86; Der Ergänzungsbände VI. Band, 1930, iv+204 stran; 2. vydání: Physica-Verlag, Würzburg, Wien, 1965, 135+204 stran). Dochoval se text jeho přednášky *Klassenkörpertheorie. Ausarbeitung einer Vorlesung vom Sommersemester 1932 und eines Teiles der Fortsetzung vom Wintersemester 1932/33 an der Universität Marburg von Wolfgang Franz unter Mitwirkung von Lotte Elsner und Waldemar Kirsten*, 229+xiii stran.

Das Wort Algebra stammt aus dem Arabischen und bedeutet wörtlich das Hinüberschaffen eines Gliedes von einer Seite einer Gleichung auf die andere. Späterhin versteht man unter Algebra allgemein die Lehre von der Auflösung von Gleichungen (und zwar ausschließlich von solchen, die zu ihrer Bildung nur die vier sog. elementaren Rechenoperationen erfordern) mit einer Anzahl unbekannter Größen nach diesen. Dieser Aufgabe sind beiden vorliegenden Bändchen gewidmet. ([H]-I, str. 5)

Základní úkol algebry (*Grundaufgabe der Algebra*) vymezil H. Hasse takto:

Es sollen allgemeine, formale Methoden entwickelt werden, nach denen man mittels der vier elementaren Rechenoperationen gebildete Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Elementen eines Körpers nach den unbekannten auflösen kann. ([H]-I, str. 6–7)

První svazek Hasseova učebního textu se jmenuje *Lineare Gleichungen*, má čtyři kapitoly:

1. *Ringe, Körper, Integritätsbereiche* (7–50),
2. *Gruppen* (50–70),
3. *Determinantenfreie lineare Algebra* (71–109),
4. *Lineare Algebra mit Determinanten* (109–156).

Druhý svazek se nazývá *Gleichungen höheren Grades*. Má pět kapitol:[65]

1. *Die linken Seiten algebraischer Gleichungen* (8–40),
2. *Die Wurzeln algebraischer Gleichungen* (41–52),
3. *Die Körper der Wurzeln algebraischer Gleichungen* (52–81),
4. *Die Struktur der Wurzelkörper algebraischer Gleichungen* (81–129),
5. *Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Wurzelzeichen* (129–157).

Obsah a zaměření Hasseova učebního textu jsou výše uvedenými stručnými obsahy víceméně výstižně charakterizovány.[66]

Ve třetím vydání z roku 1951 se objevila následující zajímavá pasáž, která do jisté míry dokumentuje změnu chápání algebry v období od prvního ke třetímu vydání:

Es ist für die moderne Entwicklung der Algebra charakteristisch, daß die oben genannten Hilfsmittel zu selbstständigen umfangreichen Theorien Anlaß gegeben haben, die gegenüber der vorstehend angeführten Grundaufgabe der klassischen

[65] Jako přípravu ke studiu druhého svazku svého textu H. Hasse doporučil 930. svazek stejné edice – P. B. Fischer: *Elementare Algebra*, 1926, 149 stran. Jeho první část je nazvána *Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen*, druhá *Besondere Gleichungen und besondere Lösungsverfahren*. Roku 1939 vyšla pod stejným číslem v edici *Sammlung Göschen* drobná knížka Wolfganga Krulla (1899–1971) nazvaná *Elementare Algebra vom höheren Standpunkt* (143 stran). Fischerovu knížku měla patrně nahradit.

[66] Rychlou orientaci v textu umožňují podrobné rejstříky umístěné v obou svazcích.

Algebra immer mehr in den Mittelpunkt des Interesses getreten sind. So ist denn in moderner Auffassung die Algebra nicht mehr bloß die Lehre von der Auflösung der Gleichungen, sondern die Lehre von den formalen Rechenbereichen, wie Körper, Gruppen u. a., und ihre Hauptaufgabe ist die Gewinnung von Einsichten in die Struktur solcher Bereiche … Im beschränkten Rahmen der vorliegenden Bändchen ist es uns jedoch nicht möglich, diesen allgemeineren, modernen Gesichtspunkt in den Vordergrund zu stellen. Wir nehmen daher die vorstehend ausgesprochene Grundaufgabe der klassischen Algebra als wegweisenden Leitfaden und abgrenzenden Rahmen für unsere Darlegungen, werden aber dabei in der Tat, vor allem in 2, auch zu strukturellen Aussagen im Sinne der modernen Algebra geführt werden. ([H]-I-1951, str. 7, [H]-I-angl., str. 11)

Zavedení nových pojmů abstraktní algebry a výklad úvodních poznatků strukturní algebry obsažený v prvních dvou kapitolách prvního dílu (*Ringe, Körper, Integritätsbereiche* a *Gruppen*) je pouhou přípravou pro látku následujících kapitol prvního i druhého dílu, tj. pro otázky řešení rovnic. Výklad končí ve druhém díle Galoisovou teorií a řešitelností algebraických rovnic v radikálech.

Roku 1934 vydal H. Hasse jako 1082. svazek edice Sammlung Göschen doplněk ke svému dvoudílnému učebnímu textu – sbírku úloh nazvanou *Aufgabensammlung zur höheren Algebra* [H-A] (175 stran).[67] Na přípravě dalších dvou vydání této sbírky (1952, 1961) se podílel Walter Kolbe.

Hasseův dvoudílný učební text i doprovodná sbírka příkladů vycházely až do šedesátých let dvacátého století; roku 1954 se objevily i v anglické verzi.

4.5 Leonard Eugene Dickson

L. E. Dickson (1874–1954) studoval na univerzitě v Texasu. Doktorát získal roku 1896 v Chicagu, pak absolvoval studijní pobyt v Lipsku a Paříži. V letech 1897 až 1899 byl asistentem na univerzitě v Texasu, od roku 1900 působil na univerzitě v Chicagu jako asistent, v letech 1907 až 1910 jako docent, a poté jako profesor.[68]

Věnoval se zejména algebře a teorii čísel, algebraické geometrii a teorii invariantů. Roku 1923 vydal knihu *Algebras and their Arithmetics*, která vyšla o čtyři roky později v německém překladu pod názvem *Algebren und ihre Zahlentheorie* s připojenou statí *Idealtheorie in rationalen Algebren*, kterou sepsal Andreas Speiser (1885–1970).[69]

Proslulá je Dicksonova třídílná monografie *History of the Theory of Numbers* z roku 1934. Velmi známé jsou i jeho další knihy – *College Algebra* (J. Wiley, New York, 1902, vii+214 stran, 2. vydání: 1912), *Elementary Theory of Equations*

[67] Krátkou recenzi napsal Karel Rychlík (1885–1968) – Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 64(1935), D56.

[68] A. A. Albert: *Leonard Eugene Dickson. 1874–1954*, Bulletin of the American Mathematical Society 61(1955), 331–345.

[69] Orell Füssli Verlag, Zürich und Leipzig, 1927, viii+308 stran; Speiserova stať je XIII. kapitolou (strany 269–303).

(Chicago, 1914, iv+184 stran), *Linear Algebras* (Cambridge University Press, 1914, viii+73 stran). Jeho kniha *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory* byla jednou z prvních knih, které věnovaly větší pozornost grupám.[70]

Roku 1926 L. E. Dickson vydal knihu *Modern Algebraic Theories* [Di] (ix+276 stran), která vznikla na základě jeho přednášek z několika předchozích let. Obsahuje základy teorie matic, teorie grup a teorie invariantů. O tři roky později vyšla německy v Lipsku v překladu Ewalda Bodewiga pod názvem *Höhere Algebra*. Roku 1959 se objevil reprint původní knihy pod názvem *Algebraic Theories*. V úvodu své učebnice L. E. Dickson napsal:

This book … presupposes calculus and elementary theory of algebraic equations. Its aim is to provide a simple introduction to the essentials of each of the branches of modern algebra, with the exception of the advanced part treated in the author's Algebras and Their Arithmetics. The book develops the theories which center around matrices, invariants, and groups, which are among the most important concepts in mathematics.

The book provides adequate introductory courses in (i) higher algebra, (ii) the Galois theory of algebraic equations, (iii) finite linear groups, including Klein's "icosahedron" and theory of equations of the fifth degree, and (iv) algebraic invariants. ([Di], str. iii)

L. E. Dickson znal Serretovu i Weberovu učebnici algebry [W], znal rovněž Jordanovu monografii *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Jo] z roku 1870.

Řadu témat Dicksonovy knihy bychom dnes řadili do lineární algebry (matice, determinanty, lineární transformace, formy, kanonické tvary, elementární dělitelé, lineární závislost a nezávislost, lineární rovnice, …). Další témata však patří do obecné algebry (grupy, tělesa, řešitelnost v radikálech, rovnice vyšších stupňů, …).

L. E. Dickson nejprve zavedl grupu substitucí, teprve potom (v odstavci tištěném drobným písmem) podal obecnou definici abstraktní grupy:

… An abstract group is a system composed of a set of elements $a, b, \dots$ and a rule of combining any two of them to produce their "product", such that (i) every product of two of the elements and the square of each element are elements of the set, (ii) the associative law holds, (iii) the set contains an identity element I such that $Ia = aI = a$ for every element a of the set, and (iv) each element a of the set has an inverse a^{-1} belonging to the set, such that $aa^{-1} = a^{-1}a = I$. ([Di], str. 144)

Pojem tělesa naproti tomu zavedl jen v souvislosti s komplexními čísly ([Di], str. 54, 150). Zájemce o hlubší porozumění obecnému pojmu těleso odkázal na svoji knihu *Algebras and their Arithmetics*.

[70] B. G. Teubner, Leipzig, 1901, x+312 stran. Kniha má dvě části: *Introduction to the Galois field theory* (1–71), *Theory of linear groups in a Galois field* (73–310).

4.6 Hans Beck

Německý matematik Hans Beck (1876–1942) působil jako profesor matematiky na univerzitě v Bonnu. Roku 1910 vydal v Teubnerově vydavatelství v Lipsku a Berlíně pod názvem *Einführung in die höhere Algebra* svůj překlad Bôcherovy knihy *Introduction to higher algebra* [Bô], roku 1919 v Berlíně knihu *Koordinatengeometrie. Die Ebene* (x+432 stran) a v letech 1929 a 1930 v Lipsku dvoudílnou učebnici nazvanou *Elementargeometrie* (xii+112+x+184 stran).[71]

V edici Göschens Lehrbücherei[72] vydal Hans Beck roku 1926 knihu *Einführung in die Axiomatik der Algebra* [Be] (x+197 stran). Sepsal ji na základě své úvodní čtyřhodinové univerzitní přednášky a doporučil studentům matematiky a fyziky, matematikům a filozofům. V úvodu napsal:

Die Axiomatik der Algebra ist heute keineswegs abgeschlossen, aber immerhin soweit entwickelt, daß der Universitätsunterricht zu ihr hat Stellung nehmen müssen. ([Be], str. v)

Na začátku první kapitoly nazvané *Zahlen und Verknüpfungen* charakterizoval algebru těmito slovy:

Algebra ist die Lehre von den vier Spezies, das ist von Verknüpfungen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division in endlichmaliger Wiederholung.

Nach dieser landläufigen Definition haben wir es in der Algebra nicht mit unendlichen Prozessen zu tun. Die gehören in die Analysis.

Objekte der Algebra oder vielmehr ihrer Verknüpfungen sind (zunächst wenigstens) die Zahlen schlechthin; beschränkt man sich auf die ganzen Zahlen, so treibt man Zahlentheorie oder Arithmetik. Danach ist diese ein Ausschnitt aus der Algebra.

Was sind nun Zahlen? Diese Frage lassen wir insofern unbeantwortet … mehr als diese Objekte interessieren uns die mit ihnen vorzunehmenden Operationen. ([Be], str. 1)

Beckova kniha je poměrně útlá. Má dvanáct kapitol, z nichž většinu bychom dnes řadili do lineární algebry:

1. *Zahlen und Verknüpfungen* (1–14),
2. *Punktmengen* (15–22),
3. *Zahlenpaare* (23–30),
4. *Matrizes* (31–40),
5. *Vektoren* (41–47),
6. *Lineare Gleichungen* (48–73),

[71] E. Salkowski: *Hans Beck zum Gedächtnis*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 53(1943), 91–103.

[72] 1. Gruppe. Reine Mathematik, Band 6.

7. *Lineare Vektorgebilde* (74–93),
8. *Bilineare und quadratische Formen* (94–110),
9. *Proportionalität der Matrizes* (111–126),
10. *Determinanten* (127–164),
11. *Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit* (165–178),
12. *Der genetische Aufbau der Algebra* (179–194).[73]

Beckova učebnice je výrazně postavena na množinovém pojetí a axiomatickém přístupu. Uveďme pro zajímavost definici grupy.

G 1. Zu zwei Elementen A und B des Systems gibt es stets ein einziges Element $A \circ B$ des Systems.

G 2. Die Komposition ist assoziativ $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$.

G 3. Aus $A \circ C = B \circ C$ und ebenso aus $C \circ A = C \circ B$ folgt stets $A = B$.

G 4. Zu zwei Elementen A und B des Systems gibt es stets ein einziges X und ein einziges Y im System so, daß $B \circ X = A$ und $Y \circ B = A$ ist.

Es wird also für die Komposition nicht die kommutative Eigenschaft gefordert. ...

E 34. Ein System von Elementen bildet gegenüber einer Komposition, die der Folderungen G 1 bis G 4 genügt, eine Gruppe. ([Be], str. 165–166)

4.7 Oskar Perron

Německý matematik Oskar Perron (1880–1975) studoval v Mnichově, kde roku 1902 promoval u Ferdinanda Lindemanna (1852–1939). Ve studiích pak pokračoval v Tübingen a Göttingen, roku 1906 se habilitoval na univerzitě v Mnichově. V následujících letech působil v Tübingen, od roku 1914 pak jako řádný profesor v Heidelbergu. Za první světové války byl nasazen na frontu, v letech 1922 až 1950 pracoval na univerzitě v Mnichově. V době fašismu se neohroženě stavěl proti jeho reprezentantům, matematikům Ludwigu Bieberbachovi a Theodoru Vahlenovi (1869–1945).

Věnoval se hlavně teorii integrace (Perronův integrál), teorii potenciálu a matematické fyzice.[74] Je autorem obsáhlé monografie *Die Lehre von den Kettenbrüchen*.[75]

Perronova dvoudílná *Algebra* [Pe] vyšla roku 1927 v edici Göschens Lehrbücherei.[76] První díl je nazván *Die Grundlagen* (viii+307 stran), druhý *Theorie*

[73] V závěru knihy je otištěn rejstřík (195–197).

[74] J. Heinhold: *Oskar Perron*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 90(1988), 184–199; E. Frank: *Oskar Perron (1880–1975)*, Journal of Number Theory 14(1982), 281–291.

[75] B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913, xii+520 stran.

[76] 1. Gruppe. Reine Mathematik, Band 8, 9. Druhé vydání je z let 1932, 1933, třetí z roku 1951.

der algebraischen Gleichungen (viii+243 stran). První díl má šest kapitol (54 paragrafů), druhý jen pět (44 paragrafů):

1. *Grundbegriffe* (1–37),
2. *Polynomischer und Taylorschen Satz* (38–81),
3. *Determinanten* (82–146),
4. *Symmetrische Funktionen* (147–178),
5. *Teilbarkeit* (179–246),
6. *Existenz der Wurzeln* (247–304).

1. *Numerische Auflösung von Gleichungen* (1–40),
2. *Gleichungen bis zum vierten Grad und reziproke Gleichungen* (41–83),
3. *Substitutionsgruppen* (84–138),
4. *Die Galoissche Gleichungstheorie* (139–205),
5. *Die Gleichungen fünften Grades* (206–240).[77]

Jak je vidět z názvů i obsahů obou svazků, první díl je věnován úvodním partiím potřebným pro další výklad (číselné obory, tělesa, okruhy, vlastnosti polynomů, symetrické funkce, základní věta algebry, soustavy rovnic vyšších stupňů atd.) a některým oblastem lineární algebry (determinanty, matice, soustavy lineárních rovnic, bilineární a kvadratické formy atd.). Hlavním tématem druhého dílu jsou algebraické rovnice, jejich numerická a algebraická řešení, Galoisova teorie a její důsledky.

Oskar Perron si dobře uvědomoval proměnu algebry, které byla jeho generace svědkem. V úvodu prvního dílu napsal:

Was Algebra ist, läßt sich heute nicht so einfach definieren. Man hat in neuerer Zeit das Wort auch in die Mehrzahl gesetzt; es gibt bereits eine ganze Reihe verschiedener Algebren. Von diesen soll aber nur eine einzige in dem vorliegenden zweibändigen Werk behandelt werden, und zwar sozusagen die traditionelle Algebra, d. i. diejenige mathematische Disziplin, die man seit jeher mit diesem Namen belegt hat und deren Endziel die Theorie der algebraischen Gleichungen ist. …

Im Mittelpunkt der modernen Algebra muß, da es sich immer um die vier Grundrechnungsarten handelt, der K ö r p e r b e g r i f f stehen, und deshalb habe ich meine Leser mit diesem Begriff, der in den meisten anderen Darstellungen viel zu spät eingeführt wird und dann fast als notwendiges Übel erscheint, von Anfang an vertraut gemacht. Allerdings die Theorie der a b s t r a k t e n Körper, die vom Standpunkt des Axiomatikers an die Spitze zu stellen wäre, wird man in dem Buch vergebens suchen. ([Pe]-I, str. v–vi)

[77] V závěru obou dílů je umístěn rejstřík.

První paragraf prvního dílu začíná takto:

Unter Algebra versteht man im wesentlichen die Theorie der rationalen Funktionen. … ([Pe]-I, str. 1)

Z pojmů strukturní algebry se v učebnici setkáváme s pojmy těleso, okruh a grupa. Pojmy tělesa a okruhu se objevují na začátku prvního dílu nejprve v souvislosti s číselnými obory. O několik stránek dále jsou přeneseny na funkce.

Eine Gesamtheit von mehreren Zahlen, die so beschaffen ist, daß die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient von je zwei (gleichen oder verschiedenen) Zahlen der Gesamtheit stets wieder dieser Gesamtheit angehören, heißt ein Zahlenkörper, auch kurz Körper oder Rationalitätsbereich. ([Pe]-I, str. 17)

Eine Gesamtheit von mehreren (= mehr als eine) Zahlen, die so beschaffen ist, daß die Summe, die Differenz und das Produkt von je zwei (gleichen oder verschiedenen) Zahlen der Gesamtheit stets wieder dieser Gesamtheit angehören, heißt ein Zahlenring oder kurz Ring. ([Pe]-I, str. 21)

Auch die Begriffe „Körper“ und „Ring“ lassen sich von Zahlen auf Funktionen übertragen. Mann nennt eine Gesamtheit von mehreren rationalen Funktionen irgendwelcher Variabeln einen Körper, wenn Summe, Differenz, Produkt und Quotient von je zwei (gleichen oder verschiedenen) wieder der Gesamtheit angehören, wobei natürlich Quotienten mit dem Nenner 0 auszuschließen sind; man nennt sie einen Ring, wenn wenigstens Summe, Differenz und Produkt wieder der Gesamtheit angehören. Man spricht hier speziell von einem Funktionenkörper oder Funktionenring. ([Pe]-I, str. 36)

Povšimněme si, že jsou výše uvedené definice konstruovány – až na nutné odlišnosti – zcela stejným způsobem. O vlastnostech operací v nich nepadne ani zmínka, neboť pracujeme s objekty, v nichž všechny aritmetické zákony platí. Vlastnosti reálných a komplexních čísel (axiomy) byly již přehledně uvedeny na předchozích stránkách.

Poznamenejme ještě, že pojem grupy zavedl Oskar Perron pouze pro substituce, a to až ve druhém díle:

Ein Komplex $\mathfrak{G}$ heißt eine Gruppe, wenn das Produkt $\mathfrak{G}\mathfrak{G}$ nur Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ enthält; oder ausführlicher: wenn das Produkt von zwei beliebigen (nicht notwendig verschiedenen) Substitutionen des Komplexes stets wieder dem Komplex angehört. ([Pe]-II, str. 95)

4.8 Otto Haupt

Otto Haupt (1887–1988) studoval od roku 1906 ve Würzburgu a Berlíně, promoval roku 1911 ve Würzburgu, potom absolvoval studijní pobyt v Mnichově a Breslau (Wrócław, Vratislav) a roku 1913 se habilitoval na technice v Karlsruhe. Účastnil se bojů první světové války. Od roku 1920 byl profesorem v Rostocku, v letech 1921 až 1953 přednášel v Erlangen.[78]

[78] M. Barner, F. Flohr: *Otto Haupt zum 100. Geburtstag*, Jahresbericht der Deutschen

Pracoval v analýze, geometrii a algebře. Roku 1938 vydal v edici Göschens Lehrbücherei třídílnou učebnici analýzy nazvanou *Differential- und Integralrechnung* (196+168+183 stran).[79]

Roku 1929 vydal v Lipsku dvoudílnou učebnici algebry nazvanou *Einführung in die Algebra* [Ha].[80] Je rozdělena do šesti částí, které se dále člení na 23 kapitol.

1. *Grundbegriffe* (*Körper*, *Integritätsbereich und Quotientenkörper*, *Gruppen*, *Teilbarkeit*, *Restklassenringe*, *Adjunktion und Erweiterung. Ergänzungen*) (1–138),
2. *Transzendente Elemente* (*Einfache und mehrfache transzendente Erweiterung*, *Symmetrische Funktionen*, *Lineare Gleichungen*, *Teilbarkeit von Polynomen in einer Unbestimmten über einem Körper*, *Teilbarkeit von Polynomen über einem Integritätsbereich*) (139–253),
3. *Nullstellen von Polynomen* (*Existenz der Wurzeln. Eindeutigkeitssatz*, *Vielfachheit der Wurzeln und Reduzibilität*, *Resolventen eines Polynoms. Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades*, *Einheitswurzeln und reine Gleichungen*, *Anhang zum Kapitel 1*) (254–325).
4. *Polynome über Zahlkörpern* (369–427),
5. *Galoissche Theorie* (*Basis und Grad endlicher Erweiterungen*, *Auflösung von Gleichungen durch Radikale*, *Normalkörper*, *Gruppe eines Normalkörpers*, *Auflösung einer Gleichung gemäß der Galoisschen Theorie mit endlich vielen Schritten*, *Permutationsgruppe eines Polynoms*) (428–573),
6. *Ergänzungen zur Körpertheorie* (574–629).

V úvodu O. Haupt uvedl, že je jeho kniha určena především studentům, že však vychází vstříc i učitelům vyšších škol a je vhodná i k samostatnému studiu.

Es beschränkt sich daher auf die Elemente, unter Berücksichtigung auch neueren Algebra. ...

Einerseits war ich bestrebt, möglichst an Bekanntes anzuknüpfen, also von Konkretem auszugehen ...

Anderseits forderten die großen Fortschritte der Algebra in den letzten Jahrzehnten zum Versuch heraus, die modernen Methoden und Ergebnisse für

---

Mathematiker-Vereinigung 89(1987), 61–80; K. Jacobs: *Otto Haupt. Centenarian mathematician*, The Mathematical Intelligencer 9(1987), No. 4, 50–51; H. Bauer: *Otto Haupt – Zum 100. Geburtstag*, Aequationes mathematicae 32(1987), 1–18; *List of papers by Otto Haupt in chronological order*, Aequationes mathematicae 35(1988), 125–131; H. Bauer: *Otto Haupt. Zu Person und Werk*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 92(1990), 169–181.

[79] Dotisk je z roku 1944. Druhé, přepracované vydání (spolupracoval Christian Y. Pauc) je z let 1948, 1950, 1955. Na třetím, opět přepracovaném vydání se podílel Georg Aumann (1906–1980); vyšlo v letech 1974, 1979, 1983 pod názvem *Einführung in die reelle Analysis* (320+314+298 stran).

[80] Vyšla ještě ve druhém (1952, 1954) a první díl ještě ve třetím vydání (1956).

die Darstellung nutzbar zu machen, weil und soweit dadurch ein Gewinn an Einfachheit und zugleich Verständlichkeit zu erhoffen war. Dieser Versuch bedingt einen der Unterschiede der vorliegenden Einführung gegenüber fast allen bereits vorhandenen Lehrbüchern. [V poznámce pod čarou k tomuto místu poznamenal: *Eine Ausnahme macht, soweit mir bekannt, nur H. Hasse, Höhere Algebra I und II, Leipzig 1926/27, Sammlung Göschen Nr. 931/32.*] *Demgemäß ist das vorliegende Buch durchweg beeinflußt von der bahnbrechenden „Algebraischen Theorie der Körper" von Herrn E. Steinitz, was hier ein für allemal hervorgehoben sei.*[81] ([Ha]-I, str. v–vii)

Ve srovnání s předchozími učebnicemi je již Hauptova kniha značně orientována na strukturní algebru, jak dokumentuje výše uvedený stručný obsah. Například v prvních paragrafech první kapitoly jsou nejprve podrobně rozebrány pojmy *rovnost*, *větší* a *menší*, následuje partie o operacích sčítání a násobení, jejich vlastnostech (aritmetické zákony, mocniny, násobky), odvozených operacích odčítání a dělení, jejich vlastnostech apod. Teprve pak je zaveden pojem tělesa:

Die Gesamtheit der Postulate der Gleichheit, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nebst dem Distributivpostulat nennen wir die Körperpostulate.

Ein System von Elementen, dessen Elemente sich gemäß den Körperpostulaten verknüpfen lassen und das nicht aus dem einzigen Element Null besteht, heißt ein Körper (auch „Rationalitätsbereich"). ([Ha]-I, str. 27)

Velkou předností Hauptovy učebnice je řada úloh a cvičení; na konci knihy jsou otištěna jejich řešení (37+19 stran). Kniha bohužel nemá rejstřík, obsah je však velmi podrobný (6+4 strany).

5 Bartel Leendert van der Waerden

Holandský matematik Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996), jeden z nejvýznamnějších matematiků 20. století, se narodil roku 1903 v Amsterdamu. Studoval v letech 1919 až 1924 na univerzitě v Amsterdamu, ve studiích pokračoval na univerzitě v Göttingen. U Emmy Noetherové se podrobně seznámil s moderní algebrou, zejména s teorií hyperkomplexních čísel a teorií ideálů, topologii studoval u Hellmutha Knesera (1898–1973). V březnu 1926 obhájil v Amsterdamu disertační práci o algebraických základech geometrie čísel.

V Göttingen byl opět v zimním semestru roku 1926/27. Pokračoval ve studiu moderní algebry u E. Noetherové; u Richarda Couranta (1888–1927) se navíc seznámil s matematickou fyzikou. V letním semestru 1926/27 pracoval v Matematickém institutu univerzity v Hamburku, kde na něho měl velký vliv zejména Emil Artin a Otto Schreier (1901–1929).

[81] E. Steinitz: *Algebraische Theorie der Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 137(1910), 167–309; knižní vydání: *Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehen von Reinhold Baer und Helmut Hasse*, W. de Gruyter, Berlin, Leipzig, 1930, 150+27 stran; další vydání: Chelsea Publ. Comp., New York, 1950, 176 stran.

Roku 1927 se stal soukromým docentem na univerzitě v Göttingen, roku 1928 odmítl místo na univerzitě v Rostocku, vzápětí přijal místo na univerzitě v Groningen. O rok později byl hostujícím profesorem na univerzitě v Göttingen. Roku 1931 se stal řádným profesorem univerzity v Lipsku, spoluředitelem matematického semináře a matematického institutu. Spolupracoval s Wernerem Heisenbergem (1901–1976), Karlem Friedrichem Bonhoefferem (1899–1957) a Friedrichem Hermannem Hundem (1896–1997). Zajímal se nejen o matematiku, ale i o moderní teoretickou fyziku, kvantovou mechaniku a roli moderní algebry ve fyzice.

Rok 1947 strávil jako hostující profesor na Johns Hopkins University (Baltimore, USA), nabídku řádné profesury však nepřijal. V letech 1948 až 1951 působil na univerzitě v Amsterdamu, v letech 1951 až 1973 na polytechnice v Curychu. Roku 1973 byl penzionován, v letech 1973 až 1979 však ještě vedl Institut historie matematiky v Curychu, kde vybudoval velikou knihovnu.

Bartel Leendert van der Waerden napsal několik monografií a učebnic a více než tři sta kvalitních prací (algebraická geometrie, abstraktní algebra, teorie grup, topologie, teorie čísel, elementární geometrie, kombinatorika, matematická analýza, pravděpodobnost, matematická statistika, fyzika, kvantová mechanika, historie matematiky, historie moderní fyziky, historie astronomie, historie přírodních věd a filozofie starověkých civilizací). Stimuloval rozvoj matematického výzkumu v mnoha moderních směrech, vedl více než čtyřicet doktorandů.[82] Podílel se na vedení významné edice *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* a časopisů *Mathematische Annalen* a *Archive for History of Exact Sciences*.[83]

Van der Waerdenova dvoudílná monografie *Moderne Algebra* [Wa] znamenala výrazný předěl ve vývoji algebry 20. století. Byla vydána ve dvou svazcích v letech 1930 a 1931 v Berlíně v edici Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.[84] V úvodu prvního dílu van der Waerden zdůraznil proměnu, k níž v algebře došlo.

Ziel des Buches. Die „abstrakte“, „formale“ oder „axiomatische“ Richtung, der die Algebra ihren erneuten Aufschwung in der jüngsten Zeit verdankt, hat vor allem in der Körpertheorie, der Idealtheorie, der Gruppentheorie und der Theorie der hyperkomplexen Zahlen zu einer Reihe von neuartigen Begriffsbildungen, zur Einsicht in neue Zusammenhänge und zu weitreichenden Resultaten geführt. ...

---

[82] Viz *Mathematics Genealogy Project*, http://www.genealogy.ams.org.

[83] H. Gross: *Herr Professor B. L. van der Waerden feierte seinen siebzigsten Geburtstag*, Elemente der Mathematik 28(1973), 25–32; G. Frei: *Bartel Leendert van der Waerden zum 90. Geburtstag*, Historia mathematica 20(1993), 5–11; Y. Dold-Samplonius: *In memoriam: Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996)*, Historia mathematica 24(1997), 125–130; C. J. Scriba: *Bartel Leendert van der Waerden (2. Februar 1903 – 12. Januar 1996)*, Berichte zur Wissenschaftsgeschichte. Organ der Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte 19(1996), Nr. 4, 245–251.

[84] Svazky 33 a 34, viii+243+vii+216 stran. Deváté vydání prvního dílu je z roku 1993, šesté vydání druhého dílu z roku 1955. Anglický překlad vycházel v letech 1949, 1970, 1991, 2003, ruský v letech 1947, 1976 a 1979, portugalský roku 1954 a čínský roku 1964.

Stehen demnach allgemeine Begriffe und Methoden im Vordergrund, so sollen doch auch die Einzelresultate, die zum klassischen Bestand der Algebra gerechnet werden müssen, eine gehörige Berücksichtigung im Rahmen des modernen Aufbaus finden. ([Wa]-I, str. 1)

Uveďme stručný obsah prvního dílu, z něhož je dobře vidět zásadní obrat ke strukturnímu pojetí algebry. V centru pozornosti jsou grupy, tělesa, okruhy, obory integrity, ideály; problematika rovnic ustoupila do pozadí. Galoisovy myšlenky, které se zrodily v souvislosti s řešitelností algebraických rovnic, prokázaly obrovskou životnost, během celého století byly mohutnou inspirací. Jejich přímým důsledkem byl intenzivní rozvoj teorie grup a teorie těles.

1. *Zahlen und Mengen* (4–14),
2. *Gruppen* (15–36),
3. *Ringe und Körper* (36–67),
4. *Ganze rationale Funktionen* (67–85),
5. *Körpertheorie* (86–131),
6. *Fortsetzung der Gruppentheorie* (131–148),
7. *Die Theorie von Galois* (148–192),
8. *Geordnete und wohlgeordnete Mengen* (192–198),
9. *Unendliche Körpererweiterungen* (198–208),
10. *Reelle Körper* (208–238).

Van der Waerden v úvodu prvního dílu své monografie přehledně uvedl zdroje, z nichž čerpal. Byly to Artinovy algebraické přednášky z roku 1926 (Hamburk), seminář o teorii ideálů, který vedli E. Artin, W. Blaschke a O. Schreier v zimním semestru 1926/27 (Hamburk), přednášky E. Noetherové o teorii grup a hyperkomplexních čísel ze zimního semestru 1924/25 a zimního semestru 1927/28 (Göttingen) a van der Waerdenovy přednášky o obecné teorii ideálů ze zimního semestru roku 1927/28 (Göttingen). Největší inspirací byly myšlenky E. Artina a E. Noetherové, jak van der Waerden zdůraznil podtitulem své knihy: *Unter benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether.*

I obsah druhého dílu jasně dokumentuje zaměření na strukturní algebru.

11. *Eliminationstheorie* (1–22),
12. *Allgemeine Idealtheorie der kommutativen Ringe* (23–50),
13. *Theorie der Polynomideale* (51–85),
14. *Ganze algebraische Größen* (85–109),
15. *Lineare Algebra* (109–148),
16. *Theorie der hyperkomplexer Größen* (149–177),
17. *Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Systeme* (177–212).[85]

[85] Podrobný rejstřík k prvnímu dílu má pět stran, ke druhému čtyři.

6 Vladimír Kořínek

České vysoké školy byly roku 1939 německými okupanty uzavřeny. Na tuto situaci reagovali tři profesoři Univerzity Karlovy, matematici Bohumil Bydžovský (1880–1969), Vojtěch Jarník (1897–1970) a Vladimír Kořínek (1899–1981). Sepsali stručné návody k samostatnému studiu geometrie, analýzy a algebry a vydali je v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky. V. Kořínek nastínil ve svém článku *Návod ke studiu algebry pro začátečníky* [Ko] program studia, který víceméně odpovídá koncepci jeho pozdější učebnice *Základy algebry* z roku 1953.[86] Ke studiu doporučil v první řadě knihu Bieberbachovu a Bauerovu [Ba] (čtvrté, resp. páté vydání) a dvoudílnou Perronovu učebnici *Algebra* [Pe]; uvedl též výhody a nevýhody obou učebnic. Mimo jiné napsal:

Náš program lépe se přimyká ke knize Bieberbachově … Zvláště ve svém 5. vydání jsou Bieberbachovy Vorlesungen knihou moderně psanou …

Perronova Algebra není tak moderně psaná, algebraické stanovisko není v ní tak uplatněno, důkazy jsou často příliš a zbytečně složité. Perron pracuje rád při důkazech výpočtem, někdy i velmi složitým, místo logickou úvahou. Zato vše je provedeno velmi pečlivě a do všech podrobností, takže se čtenář neocitne na rozpacích. ([Ko], str. D26)

Vladimír Kořínek uvedl v přehledu literatury rovněž první díl Weberovy učebnice [W], první díl Frickeovy učebnice [Fr] a první díl knihy *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, kterou roku 1931 vydali Otto Schreier a Emanuel Sperner (1905–1980).[87] Vyjádřil se i k vhodnosti dalších učebnic k samostatnému studiu algebry:

Učebnice moderní abstraktní algebry, jako je kniha Hauptova, Hasseova neb van der Waerdenova, nehodí se rovněž pro naše účely. V těchto knihách jde o abstraktní, ryze algebraické vybudování teorie, z níž jen velmi malá část patří do našeho programu, a zůstává v nich naopak stranou mnoho věcí, které ze stanoviska abstraktní algebry patří do funkční teorie polynomů, jako je základní věta algebry, odhady pro absolutní hodnotu kořenů pomocí koeficientů rovnice, separace kořenů, numerické řešení rovnic, goniometrické řešení některých rovnic a věci tomu podobné. Tyto věci jsou však právě pro začátečníka důležité. Je nutno, jednak aby se naučil prakticky počítat, jednak aby se obeznámil blíže s vlastnostmi tělesa všech komplexních čísel a s vlastnostmi polynomů v tomto tělese, neboť, když pomineme vlastní podrobné studium algebry, bude právě při dalším studiu matematiky tyto věci nejvíce potřebovat.[88] ([Ko], str. D27)

[86] Nakladatelství ČSAV, Praha, 1953, 488 stran, 2. vydání: 1956, 520 stran.

[87] I. díl: B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1931, 238 stran, II. díl: 1935, 308 stran.

[88] Viz Z. Kohoutová, J. Bečvář: *Vladimír Kořínek (1899–1981)*, edice Dějiny matematiky, sv. 27, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2005. Krátká stať o Kořínkově *Návodu ke studiu algebry pro začátečníky* je na stranách 139 až 142. Na stranách 101 až 128 je pojednání o Kořínkově učebnici *Základy algebry.*

HANDBUCH

DER

HÖHEREN ALGEBRA

VON

J. A. SERRET.

DEUTSCH BEARBEITET VON G. WERTHEIM.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1868.

TRAITÉ
DES SUBSTITUTIONS
ET
DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. CAMILLE JORDAN,
INGÉNIEUR DES MINES, DOCTEUR ÈS SCIENCES,
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE GOETTINGUE ET DE L'INSTITUT LOMBARD.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—

1870

GRUNDZÜGE

DER

ANTIKEN UND MODERNEN ALGEBRA

DER

LITTERALEN GLEICHUNGEN

VON

LUDWIG MATTHIESSEN,

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU ROSTOCK.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.

Weihnacht 1941.
Grossmama H.

LEHRBUCH

DER

ALGEBRA

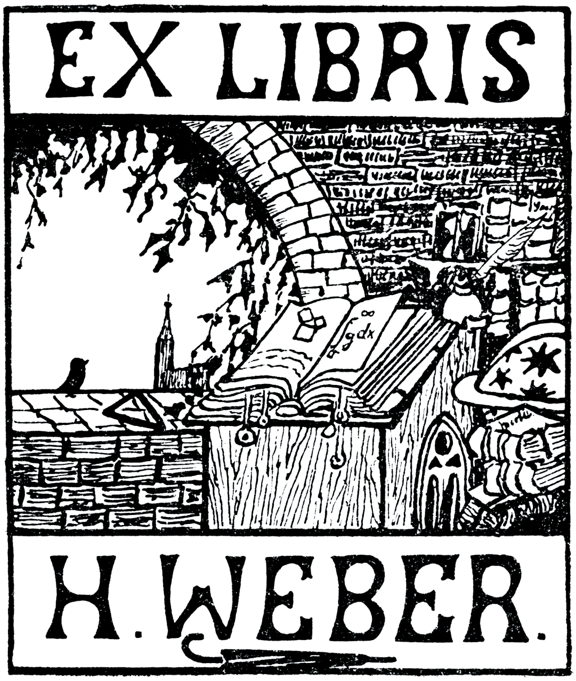
VON

HEINRICH WEBER
PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZWEITE AUFLAGE

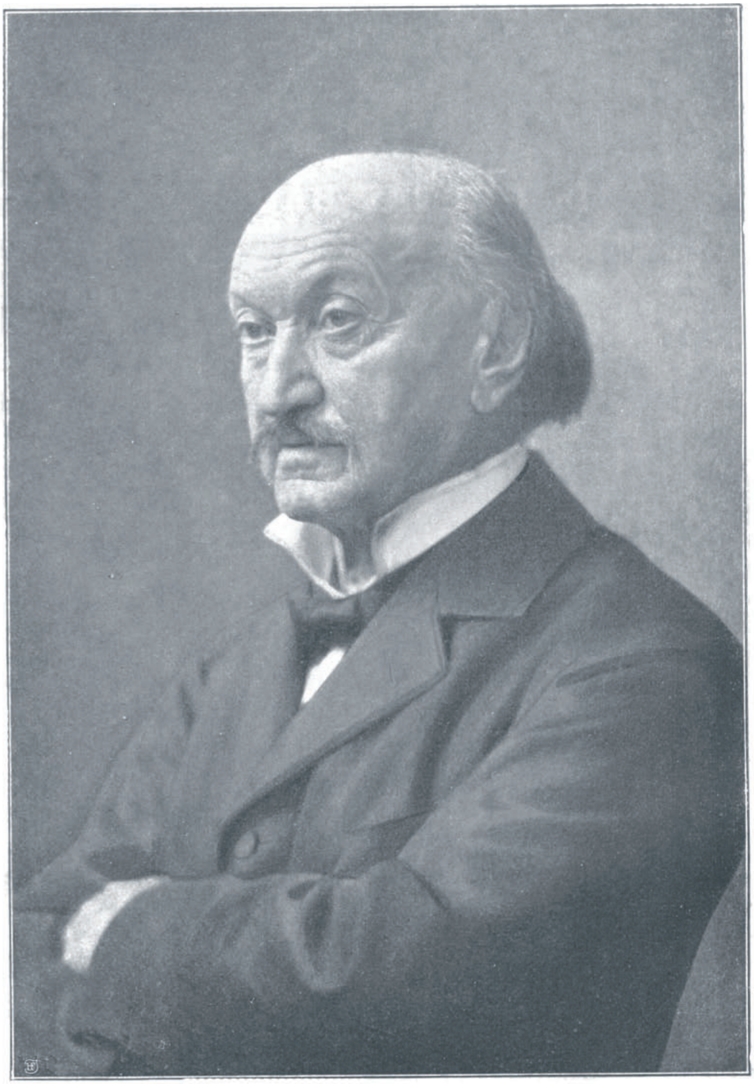
ERSTER BAND

BRAUNSCHWEIG
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN
1898



E. 25.

Toto ex libris je vlepeno v knize Ernsta Eckhardta *Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks. Neue Grundlegung für die Formeln der sphärischen Trigonometrie*, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909, vi+155 stran. Je to ex libris Heinricha Webera, autora knihy *Lehrbuch der Algebra*?



Prof Dr Gust Bauer

VORLESUNGEN ÜBER ALGEBRA

VON

DR. GUSTAV BAUER

GEHEIMRAT, O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

HERAUSGEGEBEN VOM

MATHEMATISCHEN VEREIN MÜNCHEN

MIT DEM BILDNIS GUSTAV BAUERS ALS TITELBILD
UND 11 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903

VORLESUNGEN ÜBER
ALGEBRA

UNTER BENUTZUNG DER DRITTEN AUFLAGE DES
GLEICHNAMIGEN WERKES VON † DR. GUSTAV BAUER

IN FÜNFTER VERMEHRTER AUFLAGE

DARGESTELLT VON

DR. LUDWIG BIEBERBACH
O. Ö. PROFESSOR AN DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BERLIN
MITGLIED DER PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN

MIT 15 FIGUREN IM TEXT UND AUF 1 TAFEL

1933
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Robert Fricke

Lehrbuch der Algebra

verfaßt mit Benutzung
von Heinrich Webers gleichnamigem Buche

Erster Band:

Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen

Mit 4 in den Text gedruckten Figuren

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.
1924

Sammlung Göschen

Höhere Algebra

Von

Dr. Helmut Hasse
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität
Halle (Saale)

I

Lineare Gleichungen

Berlin und Leipzig
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp.
1926

Algebra

Von

Dr. Oskar Perron
o. ö. Professor der Mathematik
an der Universität München

I

Die Grundlagen

Mit 4 Figuren

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 10 und Leipzig
1927

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

VON

OTTO HAUPT
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ERLANGEN

ERSTER BAND

LEIPZIG 1929
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

MODERNE ALGEBRA

VON

DR. B. L. VAN DER WAERDEN
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GRONINGEN

UNTER BENUTZUNG VON VORLESUNGEN
VON
E. ARTIN UND E. NOETHER

ERSTER TEIL

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

Literatura

[Ba] Bauer G., *Vorlesungen über Algebra*, B. G. Teubner, Leipzig, 1903, vi+376 stran, 2. vydání: 1910, vi+366 stran, 3. vydání: 1921, 4. vydání (přepracované L. Bieberbachem): B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1928, x+344 stran, 5. vydání: 1933, x+358 stran.

[Be] Beck H., *Einführung in die Axiomatik der Algebra*, Göschens Lehrbücherei, W. de Gruyter & Co., Berlin, Leipzig, 1926, x+197 stran.

[Bô] Bôcher M., *Introduction to higher algebra*, The Macmillan Company, New York, 1907, xi+321 stran; 2. vydání: 1922, další vydání: 1924, 1933, 1949, Dover, New York, 1964, 2004; německý překlad (H. Beck): *Einführung in die höhere Algebra*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1910, xii+ 348 stran, 2. vydání: 1925, dotisky: 1932, ..., 1952; ruský překlad: *Vvedenie v vysšuju algebru*, ONTI, Moskva, Leningrad, 1933.

[Co] Corry L., *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Science Networks – Historical Studies 17, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1996, 460 stran, 2. vydání: 2004, xvi+451 stran.

[Di] Dickson L. E., *Modern Algebraic Theories*, B. H. Sanborn & Co., Chicago, 1926, ix+276 stran; reprint: *Algebraic Theories*, Dover Publ., New York, 1959; německý překlad: *Höhere Algebra*, Autorisierte deutsche Ausgabe von L. E. Dickson „Modern algebraic theories“ herausgegeben von Ewald Bodewig, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1929, vii+242 stran.

[Fr] Fricke R., *Lehrbuch der Algebra verfaßt mit Benutzung von Heinrich Webers gleichnamigem Buche I., II., III.*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1924, 1926, 1928, viii+468, viii+418, vii+506 stran; kniha je k dispozici na internetu.

[H] Hasse H., *Höhere Algebra I. Lineare Gleichungen, II. Gleichungen höheren Grades*, Sammlung Göschen 931, 932, W. de Gruyter, Berlin, 1926, 1927, 160+160 stran, 2. vydání: 1933, 1937, 158+158 stran, 3. vydání: 1951, 1952, 152+158 stran, 4. vydání: 1957, 1958, 5. vydání: 1963, 1967, 6. vydání: 1969; anglický překlad (T. J. Benac): *Higher Algebra*, F. Ungar, New York, 1954, 336 stran.

[H-A] Hasse H., *Aufgabensammlung zur höheren Algebra*, Sammlung Göschen 1082, W. de Gruyter, Berlin, 1934, 175 stran; na dalších vydáních spolupracoval W. Kolbe – 2. vydání: 1952, 181 stran, 3. vydání: 1961, 183 stran; anglický překlad (T. J. Benac): *Exercises to Higher Algebra*, F. Ungar, New York, 1954, 212 stran.

[Ha] Haupt O., *Einführung in die Algebra I., II.*, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1929, xv+xiii+663 stran, 2. vydání: 1952, 1954, viii+xvi+673 stran, 3. vydání: 1956 (jen 1. díl).

[Jo] Jordan C., *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870, xviii+667 stran.

[Kl] Klempt D. A., *Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen hundert Beispielen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1880, xii+260 stran.

[Ko] Kořínek V., *Návod ke studiu algebry pro začátečníky*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **70** (1941–42), D25–D39.

[Ma] Matthiessen L., *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1878, xvi+1002 stran, 2. vydání: 1896; kniha je k dispozici na internetu.

[No] Nový L., *Origins of modern Algebra*, Academia, Prague, 1973, viii+252 stran.

[Pe] Perron O., *Algebra I. Die Grundlagen, II. Theorie der algebraischen Gleichungen*, Göschens Lehrbücherei, W. de Gruyter, Berlin, Leipzig, 1927, viii+307, viii+243 stran, 2. vydání: 1932, 1933, viii+301, viii+261 stran, 3. vydání: 1951.

[Se] Serret J. A., *Cours d'algèbre supérieure*, Bachelier, Paris, 1849, xi+400 stran, 2. vydání: Mallet-Bachelier, Paris, 1854, xvi+600 stran, další vydání ve dvou dílech – 3. vydání: 1866, xv+643, xii+664 stran, 4. vydání: 1879, xiii+647, xii+694 stran, 5. vydání: 1885, 6. vydání: 1909, 7. vydání: 1928; německý překlad (G. Wertheim): Teubner, Leipzig, 1868, viii+508, viii+540 stran, 2. vydání: 1878, 1879, vii+528, viii+574 stran; ruský překlad prvního francouzského vydání – dotisk: Petersburg, 1910, vi+iv+573 stran.

[Wa] van der Waerden B. L., *Moderne Algebra I., II.*, Springer Verlag, Berlin, 1930, 1931, viii+243, vii+216 stran.

[Whi] van der Waerden B. L., *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer Verlag, Berlin, 1985, xi+271 stran.

[We] Weber H., *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie*, Mathematische Annalen **43** (1893), 521–549.

[W] Weber H., *Lehrbuch der Algebra I., II.*, F. Vieweg, Braunschweig, 1895, 1896, xv+653, xiv+796 stran, 2. vydání: 1898, 1899, xvi+704, xvi+856 stran, 3. vydání: Chelsea, New York, 1961, 4. vydání: AMS Chelsea, Providence, 2001–2002; francouzský překlad (Griesse): *Traité d'algébré supérieure. Principes, racines des équations, grandeurs algébriques, théorie de Galois*, Gauthier-Villars, 1898, xi+764 stran; kniha je k dispozici na internetu.

[Wel] Weber H., *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, F. Vieweg, Braunschweig, 1891, xiii+504 stran, 2. vydání: *Lehrbuch der Algebra III. Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, F. Vieweg, Braunschweig, 1908, xvi+733 stran, 3. vydání: Chelsea, New York, 1961, 4. vydání: AMS Chelsea, Providence, 2001–2002; kniha je k dispozici na internetu.

[Wkl] Weber H., *Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande*, F. Vieweg, Braunschweig, 1912, x+528 stran, 2. vydání: 1921.

[WW] Weber H., Wellstein J. a kol., *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1903–1907, I. *Elementare Algebra und Analysis*, 1903, xiv+447 stran, 2. vydání: 1906, xviii+539 stran, 3. vydání: 1909, xviii+531 stran, 4. vydání: 1922, 5. vydání: 1934; II. *Elemente der Geometrie*, 1905, xii+602 stran, 2. vydání: 1907, xii+596 stran, 3. vydání: 1915, xiv+594 stran; III. *Angewandte Elementar-mathematik*, 1907, xiii+666 stran, 2. vydání: III.1 *Mathematische Physik*, 1910, xii+536 stran, 3. vydání: 1923; 2. vydání: III.2. *Darstellende Geometrie, graphische Statik, Warscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie*, 1912, xiv+671 stran, 3. vydání: 1924; ruský překlad: 1909–1911.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8*.

Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *becvar@karlin.mff.cuni.cz*

VÁCLAV LÁSKA V POLSKU

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Abstract: Václav Láska (1862–1943) was "the last Czech polyhistor" of natural sciences. He became a famous mathematician, astronomer, geodesist, seismologist, meteorologist, cartographer and teacher. Throughout his professional career he strove to integrate mathematical methods, based on exact mathematics and physics, into modern research. The main aim of the article is to map his life and teaching activities in Prague and Lwów as well as his scientific results.

1 Úvod

Václav Láska (1862–1943) byl „poslední český polyhistor" přírodních věd.[1] Proslavil se jako matematik, astronom, geodet, seismolog, meteorolog, kartograf a učitel. Po celý svůj odborný život se snažil postavit moderní přírodovědné bádání na exaktní matematicko-fyzikální základy a důsledně využívat matematické metody.

2 Rodina a studium

Václav Láska se narodil v Praze dne 24. srpna 1862. Jeho otec Václav Láska (1824–1886) byl truhlář z Libáně (okres Jičín) a postupně se vypracoval na malého pražského stavitele. Opravoval různé pražské kláštery, zúčastnil se výstavby věznice v Řepích a dokonce i opravy Karlštejna. Jeho matka byla Marie Menclová (1829–1899), dcera domkáře Josefa Mencla ze Starých Hradů (okres Jičín) a Barbory, rozené Tesařové. Rodina žila ve Spálené ulici v Praze. Václav měl tři sourozence, Jana (nar. 1854), Josefa (nar. 1865) a Františka (1870–1872).

V šesti letech začal navštěvovat elementární školu v centru Prahy, tzv. *českou trojickou školu*. Podle pozdějšího vyprávění se již tehdy rozhodl, že se stane astronomem. Měl však jen průměrné studijní výsledky a neprojevovalo se u něho žádné nadání.

V deseti letech byl rodinou poslán do *německého chlapeckého semináře v Bohosudově* (něm. Weisskirchlitz, okres Teplice), aby studoval na soukromém německém gymnáziu, které bylo součástí kláštera a v němž panoval velmi přísný klášterní řád. Zde se výrazněji rozvinul jeho skrytý talent a především hluboký zájem o matematiku. Poznamenejme, že v první až čtvrté třídě ho matematiku učil A. Dichtl, v páté Julián Vervaet.[2] V Bohosudově se výrazně zlepšil jeho prospěch, obvykle býval druhý ve třídě čítající 26 žáků.

---

[1] Je autorem více než tří stovek prací, které zasahují do následujících oborů: vyrovnávací počet a metoda nejmenších čtverců, praktické numerické výpočty, nomografie, počet graficko-statistický a graficko-mechanický, teorie pravděpodobnosti, matematická statistika, pojišťovnictví, matematický zeměpis, fyzikální zeměpis, kartografie, hydrologie, hyetologie (dešťopis), balneologie, klimatologie, geodézie (nižší a vyšší), geologie, geofyzika, seismologie, astronomie, fotogrammetrie, kosmická fyzika, filozofie matematiky, historie exaktních a přírodních věd, výuka matematiky a jejích aplikací a popularizace přírodních věd. Viz [3] a [4].

[2] Člen Tovaryšstva Ježíšova, pocházel z belgického Gentu, psal matematické i metodické příspěvky do Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky. Vyučoval v Praze a Bohosudově.

Hodnocení z většiny předmětů bylo výborné, pouze latina byla neuspokojivá, neboť styl memorování a nekonečného čtení autorit nevzbuzoval jeho zájem.

Po absolvování páté třídy rodiče rozhodli, že se Václav vrátí do Prahy a vzdělání ukončí na *německém gymnáziu na Malé Straně*. Zde studoval pátou až osmou třídu. Ačkoli měl výborné vysvědčení, musel pátou třídu opakovat, neboť pražští učitelé neměli důvěru k „venkovské" škole. Až na klasické jazyky měl opět výborný prospěch. Navíc se prohloubil jeho zájem o matematiku, fyziku, astronomii a přírodní vědy. Již jako kvintán sepsal „článek" o devítkové a jedenáctkové zkoušce a rozdával jej o přestávce spolužákům. Nutil je, aby si jej přečetli a diskutovali s ním o matematice. Aby přilepšil rodinnému rozpočtu, doučoval svého spolužáka Jaroslava hraběte Thuna. Z mnohaleté studijní pomoci se vyvinulo celoživotní přátelství, V. Láska získal vlivného a dosti bohatého ochránce. Během středoškolských studií vážně onemocněl a skoro ohluchl. Přesto mezi jeho celoživotní zájmy patřila hudba, přitahovala ho také historie exaktních věd, sociální problémy a otázky vystěhovalectví do USA. Roku 1883 složil maturitní zkoušku, která ho opravňovala ke studiu na libovolné vysoké škole v rakousko-uherské monarchii.

3 Vysokoškolské studium

V letech 1883 až 1886 poslouchal V. Láska přednášky na *filozofické fakultě německé univerzity v Praze*. Soustředil se především na matematiku (profesoři H. J. K. Durège a A. Puchta, soukromý docent S. Kantor), fyziku (profesoři E. Mach a F. Lippich) a astronomii (profesor L. Weinek). V letech 1885 až 1886 jako mimořádný student *německé techniky v Praze* docházel na přednášky z geodézie (profesor K. Kořistka). Během studií získal výborný přehled o astronomii, matematice, geodézii, meteorologii, filozofii, historii, pedagogice a psychologii. Svými profesory byl hodnocen jako neobyčejně sečtělý, s velmi širokými univerzálními znalostmi, vynikajícími pozorovacími schopnostmi a neobvyklou manuální zručností. Spolužáci o něm říkali, že je „chodící encyklopedie matematických věd".[3]

Ještě během studií si splnil svůj dětský sen a začal se odborně zabývat astronomií. Roku 1884 byl jmenován pomocníkem klementinské hvězdárny. Brzy se ukázalo, že je nadaným pozorovatelem, zdatným teoretikem a vynikajícím počtářem. Prožil zde i své první životní zklamání, které pramenilo z nedostatečného vybavení hvězdárny a nezájmu vlády o podporu vědecké práce.

Dne 19. prosince 1887 získal na německé univerzitě v Praze doktorát. Sepsal disertační práci *Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen in ihrer historischen Entwickelung*, kterou ocenili profesoři H. J. K. Durège a A. Puchta. Před komisí tvořenou profesory H. J. K. Durègem, E. Machem a F. Lippichem se podrobil dvěma doktorským zkouškám (odborná matematika a historie matematiky), a pak ještě zkoušce z obecné filozofie a historie. Komise ocenila jeho neobvyklou znalost literatury.

4 Počátek kariéry – Praha

Po ukončení studia se Václav Láska chtěl věnovat vědecké práci v astronomii a pedagogické práci na univerzitě nebo na technice. Objevily se však nečekané problémy. Vlivem vleklé jaterní choroby jeho otce se zhoršily rodinné poměry, a tak Václav Láska

[3] O studiu matematiky na německé univerzitě v Praze a na německé technice v Praze viz [1].

musel rodinu podporovat ze soukromých kondic a nevelkého platu na hvězdárně (400 zl. ročně). Přesto nerezignoval na odbornou práci a nepřijal nabízené místo středoškolského učitele. Teprve dne 28. dubna 1890 získal místo řádného asistenta c. k. astronomického ústavu české univerzity, které sice nebylo nejlépe placené, ale přiblížilo ho ke splnění jeho snu.[4]

4.1 Astronomická práce

Václav Láska nejprve ve spolupráci s ředitelem ústavu Augustem Seydlerem (1849–1891) prováděl výpočty drah malých planetek (stanovili např. dráhu Asporiny a Sapientie). V této práci pokračoval i za nového ředitele Gustava Grusse (1854–1922).[5]

S Gustavem Grussem se zaměřil na studium proměnných hvězd, o něž byl v Čechách původně malý zájem. Oživen byl především činností F. W. A. Argelandera (1799–1875), který ve 30. letech 19. století vypracoval metodu, jak velmi přesně stanovit změny jasnosti hvězd pouhým okem srovnáním s hvězdou známé jasnosti, která se svojí jasností liší jen málo od zkoumané hvězdy.[6] G. Gruss a V. Láska pozorovali nejprve proměnné hvězdy v integrálním světle a výsledky měření publikovali v *Rozpravách České akademii pro vědy, slovesnost a umění*.[7] Roku 1894 přešli ke spektroskopickému pozorování.[8] Přestože jejich pozorování nebyla příliš početná, měla význam pro rozvoj astrofyzikálního výzkumu u nás a je možno říci, že jejich teoretická úroveň odpovídala světovému trendu. Oba astronomové si uvědomovali, že je důležité sledovat nejen změny zdánlivé hvězdné velikosti, ale především změny spektra, což umožní lepší a přesnější studium hvězd. Emisní čáry vodíku a hélia byly běžně studovány ve světě, česká měření čáry H_α byla, i přes nedostatečné vybavení observatoře, na světové úrovni. Připomeňme, že Václav Láska dokonce zakoupil první fotografický přístroj ústavu a zařídil jeho namontování na dalekohled.

Třetí oblastí, v níž se V. Láska angažoval, byly geodeticko-astronomické práce, neboť pražská hvězdárna byla postavena před důležitý úkol – stanovit přesné souřadnice polohy, které byly nezbytné pro přesná astronomická měření. Úkol byl přidělen V. Láskovi, protože již za studií projevil hlubší zájem o geodézii. Polohu proměřoval tzv. *lomeným pasážníkem*[9] a s užitím osvědčené Horrebowovy-Talcottovy metody stanovil geografickou šířku Kindlovy vily $50^{\circ}6'11{,}7'' \pm 0{,}1''$.[10] Současně zjistil její geografické souřadnice geodetickým navázáním na triangulační body Prahy a provedl kritiku přesnosti dřívějšího stanovení souřadnic pražských triangulačních bodů.

---

[4] Poznamenejme, že mezi tehdejší hlavní úkoly ústavu patřilo postavení, smontování, orientace a následná kontrola nových přístrojů, vyhledání vhodné budovy pro měření, získání nových kvalitních asistentů (špatně placené místo se nezapočítávalo do let státní služby) a „zabránění“ odchodu kvalitních žáků, kteří po náročném zacvičení odcházeli na lepší místa do zahraničí.

[5] Poznamenejme, že to byla typická činnost studentů a asistentů. Podíleli se na ní mnozí budoucí čeští astronomové a matematici (např. F. Nušl, K. Petr, V. Nechvíle).

[6] Je možno říci, že české země hrály důležitou roli ve světovém trendu pozorování proměnných hvězd (viz např. práce V. Šafaříka a G. Grusse).

[7] Užívali Argelanderovu metodu a osmipalcový dalekohled, ke srovnání použili méně známé hvězdy a podařilo se jim popsat 20 hvězd slabších než 6. hvězdná velikost.

[8] Výsledky měření opět publikovali v Rozpravách České akademii pro vědy, slovesnost a umění. Užívali osmipalcový dalekohled, proměřili třináct hvězd a u pěti z nich nalezli jasné emisní čáry vodíku. Zaměřili se však především na ověřování a zpřesňování dříve získaných výsledků. Po roce 1896 činnost astronomického ústavu v tomto směru ochabla.

[9] Jedná se o dalekohled otočný pouze kolem vodorovné osy, který slouží k pozorování přechodů hvězd poledníkem.

[10] Slavná Kindlova vila byla až do roku 1900 sídlem českého astronomického ústavu.

4.2 Význam Láskovy práce na astronomické observatoři v Praze

Václav Láska byl skvělým pozorovatelem s dobrou matematickou průpravou, která mu umožnila provádět měření, pozorování a výpočty na světové úrovni. Přesto nemohl získat odpovídající místo na pražské univerzitě. Z existenčních důvodů se proto odklonil od astronomie a zaměřil svoji pozornost na geodézii.

4.3 Geodetická práce v Praze

Roku 1890 se habilitoval na české technice v Praze. Pro posouzení jeho žádosti byla sestavena komise ve složení F. Müller, K. V. Zenger, Ed. Weyr. Dne 22. března 1890 složil odborné kolokvium před zkušební komisí, kterou tvořila výše zmíněná trojice profesorů doplněná o profesory J. Šolína, K. Petrlíka a A. Vávru. F. Müller zkoušel kandidáta z historického vývoje geodézie, K. V. Zenger se dotazoval na metody určení zeměpisné polohy místa a Ed. Weyr požadoval výklad matematických principů kartografického zobrazení. Dne 24. března 1890 proslovil V. Láska před profesorským sborem české techniky v Praze habilitační přednášku nazvanou *Úlohy geodesie vyšší v budoucnosti*. Veškeré části jeho habilitačního řízení byly hodnoceny výborně. Dne 22. září 1890 byl proto jmenován na české technice soukromým docentem „vyšší geodesie".

V letech 1891/1892 až 1894/1895 konal na české technice výběrové přednášky, které měly pozoruhodnou úroveň a rozsah, neboť zahrnovaly kartografii, fotogrammetrii, vyšší geodézii, astronomické pasáže z vyšší geometrie, teorii a výpočty trigonometrických sítí.[11] Byly doprovázeny praktickým cvičením na Letné, demonstracemi na observatoři apod.

Pro studenty a další zájemce o geodézii, astronomii, matematiku a její technické aplikace sepsal učebnice a monografie. Česky psané učebnice nesly názvy *Počtářství geodetické, tj. návod ku počtům trigonometrickým a polygonálním pro účely katastrální* (Praha, 1894, 68 stran) a *Vyšší geodesie* (I. díl, Praha, 1896, 105 stran).[12]

Slavné, oblíbené a velmi rozšířené se staly jeho německy psané učebnice: *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik* (I.–IV. díl, Braunschweig, 1888 až 1894, XVI + 1071 stran),[13] *J. Lieblein's Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis zum Selbstunterricht* (2. vydání, Praha, 1889, VIII + 108 stran),[14] *Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie* (Bremerhaven und Stuttgart, 1889, XII + 280 stran; 2. výrazně upravené

---

[11] Přednášky byly charakterizovány takto: Základy kartografie – *dějiny zobrazování tvaru zemského, zobrazení podle starší theorie, Gaussova theorie nejmenších podobností a zobrazovací novější theorie*; Sférická astronomie – *soustavy souřadnic sférických a jich transformace, čas hvězdný, pravý a občanský, úkazy denního pohybu, změny souřadnic následkem praecese a nutace, opravy pozorování vzhledem k paralaxi, refrakci a aberaci, určení času azimutů, zeměpisných šířek a délek, astronomické stanovení tvaru zemského*; Geofyzika – *fyzikální stanovení tvaru zemského, odchylky od směru tížnice a jejich vliv na stanovení geodetických hodnot, kolísání osy zemské a teorie nivelování.*

[12] Tato učebnice, podle předmluvy dokončena roku 1894, byla vrcholem Láskovy teoretické práce. Měla velmi moderní pojetí uspořádání látky, důraz kladla na aplikace matematiky. Byla srovnávána s oblíbenou německou Pizzettiovou knihou (1895), jež měla podobnou strukturu.

[13] Tato rozsáhlá sbírka vzorců se rozšířila po celé Evropě a dostalo se jí výborného hodnocení v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (viz recenze 20(1888), str. 1283, 25(1893/1894), str. 1906).

[14] V. Láska značně přepracoval Liebleinovu učebnici, přidal pečlivé údaje o pramenech u jednotlivých úloh, historické komentáře a bibliografické poznámky.

vydání, Leipzig, 1906, 1913, 192 + 164 stran), *Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie* (Stuttgart, 1890, VIII + 187 stran), *Einführung in die Functionentheorie, eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung* (Stuttgart, 1894, V + 55 stran)[15] a *Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie)* (Stuttgart, 1894, VIII + 240 + 204 stran).[16]

4.4 Odborné studie a drobnější práce

V 90. letech 19. století Láskovy práce zasahovaly do astronomie, geodézie, geofyziky a aplikované matematiky. V. Láska je sepisoval česky a německy, publikoval je převážně ve Zprávách Královské české společnosti nauk, Rozpravách České akademie pro vědy, slovesnost a umění a v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky. K nejlepším pracím patřily: *Theorie nivellování na geoidu* (1894),[17] *O transformaci orthogonálních geodetických souřadnic na ellipsoidu* (1894),[18] *Vyšetřování změn světlosti hvězd proměnných* (1894, 1895),[19] *Pozorování jasných čar ve spektrech některých hvězd* (1894)[20] a *Stanovení zeměpisné šířky observatoře c. k. české univerzity* (1899).[21] Jeho drobné práce a menší studie měly nesmírně pestrou tematiku. Mezi zpracovávanými problémy můžeme najít: refrakci, optické klamy, meteorologii, historické poznámky o kyvadlových hodinách, rozbor astronomické práce Marka Marci, popisy historických i moderních astronomických přístrojů, výklady konstrukcí nových měřicích přístrojů (argeometr, teodolit, tachymetr), studie o konstrukci kuželoseček, grafická řešení neobvyklých aplikačních úloh, triangulaci, nivelaci, transformace geodetických souřadnic, interpretaci geodetických bodů, dělení ploch, kartografii atd.

5 Vrchol kariéry – Lvov

Na konci 19. století bylo na české univerzitě v Praze pouze jediné místo řádného profesora astronomie a na české technice v Praze jediné místo řádného profesora geodézie. Jak se ukázalo, žádosti o povolení druhé profesury zasílané do Vídně neměly žádný smysl. Václav Láska měl tedy nulovou šanci na kariéru a další postup v Praze. Proto přijal nabídku místa mimořádného profesora ve Lvově.

Dne 25. října 1895 byl jmenován mimořádným profesorem sférické astronomie a vyšší geodézie na polytechnice ve Lvově. Krátce po svém příchodu zahájil první polské přednášky z fotogrammetrie a nomografie a sepsal první polské učebnice geodézie a aplikované matematiky. Již dne 1. prosince 1895 byl jmenován ředitelem astronomické observatoře lvovské polytechniky. S velkým nadšením se pustil do reorganizace a modernizace astronomického pozorování. Dne 8. srpna 1897 byl jmenován soukromým docentem na lvovské univerzitě a o dva roky později řádným profesorem polytechniky. Roku 1901 se stal navíc ředitelem lvovské seismologické stanice a zahájil reformu seismologického výzkumu v Haliči.

[15] Jednalo se o klasickou učebnici diferenciálního a integrálního počtu, která však kladla důraz na fyzikální, astronomické a geodetické aplikace.
[16] O Láskově publikační činnosti viz [1] a [4].
[17] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), č. 11, 4 strany.
[18] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), č. 17, 8 stran.
[19] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), č. 13, 16 stran, 4(1895), č. 13, 17 stran.
[20] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), č. 30, 3 strany.
[21] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 8(1899), č. 25, 16 stran.

Poznamenejme, že Václav Láska se po příchodu do Lvova velmi rychle téměř dokonale naučil polsky, oblíbil si polské kolegy a studenty (přátelil se např. s fyzikem M. Smoluchowskim), měl hluboké porozumění pro polské národní hnutí, polskou kulturu, historii a literaturu. Přestože se stal uznávaným a ctěným odborníkem, toužil se vrátit do Čech. Do Lvova si přivedl svoji ženu, Anežku Maisnerovou z Kladna, jeho dva synové měli polské školy, ačkoli on sám měl vzdělání výhradně německé. Udržoval těsné kontakty s Prahou a sledoval změny na české univerzitě i technice. Vedl rozsáhlou odbornou korespondenci takřka s celým světem.

Pro polské posluchače sepsal a vydal učebnice a litografie přednášek: *Astronomia sferyczna i geodesya wyższa* (Lwów, 1901, 88 stran), *Teorya błędów i rachunek wyrównania* (Lwów, 1903, spoluautor S. Widt), *Teodolit i jego zastosowanie do zdjęć polygonanych* (Lwów, 1903, spoluautor S. Widt), *Miernictwo* (Lwów, 1903), *Wykłady nomografii* (Lwów, 1905, 43 stran, spoluautor F. Ulkowski) a *Teorya rzutów kotowanych* (Lwów, 1907, 49 stran).

Díky svým četným odborným pracím a osobním odborným kontaktům byl jmenován členem *Královské české společnosti nauk* (mimořádný člen 9. 1. 1895), *České akademie pro vědy, slovesnost a umění* (mimořádný člen 1896), *Société Belge d'Astronomie* (titulární člen 14. 3. 1904), *Komise pro zemětřesení ve Vídni*, *Ústředního ústavu pro meteorologii a geodynamiku ve Vídni*, *Bibliografické komise při Krakovské akademii* a členem vedení *1. mezinárodního kongresu pro seismologii ve Štrasburku* (1901).

5.1 Práce v seismologii

Příchodem do Haliče začal Láskův hlubší zájem o seismologii, která se stala pravděpodobně nejdůležitějším tématem jeho lvovského pobytu. Od prvopočátku se zaměřil především na aplikace matematických metod při řešení geodetických, geofyzikálních a seismologických problémů východní Haliče. Jeho práce získaly velkou odezvu v zahraničí (citovali je např. A. Sieberg, H. Benndorf, W. H. Hobbs, B. B. Golicyn). V. Láska patřil mezi zakladatele mladé a prudce se rozvíjející rakouské seismologie budované od samého počátku na matematických základech, přesných měřeních a jejich vyhodnocováních. Cenným dokumentem o jeho všestranných aktivitách ve Lvově jsou zprávy o seismologických měřeních ve východní Haliči a studie o historii zemětřesení v Polsku. Mezi světově ceněná pojednání o seismologii patří jeho německy psané práce: *Ziele und Resultate der modern Erdforschung* (1904),[22] *Die Erdbeben im Lichte neuester Forschungen* (1908)[23] a *Zur Geschichte der praktischen Geometrie in Polen* (1907, 1909).[24]

5.2 Práce v geodézii

Vzhledem k oboru svého působení na lvovské polytechnice se V. Láska zabýval i geodézií. Vedl četné studentské exkurze a organizoval praktická cvičení a měření v terénu. Od studií v Praze jej přitahovaly měřicí přístroje, jejich konstrukce, možnosti vylepšení a zdokonalení. Ve Lvově například navrhl nový tachymetr (viz tzv. Láska-Rost patent), novou konstrukci fototeodolitu, libely a planimetru a vylepšil tachymetrické početní pomůcky (neboli tabulky). Z čistě teoretického hlediska se snažil vylepšovat a zpřesňovat početní geometrické metody v geodézii a fotogrammetrii. Zajímala ho také

[22] Natur und Offenbarung 50(1904), 193–208.
[23] Natur und Offenbarung 55(1908), 257–273, 321–337.
[24] Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 5(1907), 102–106, 143–147, 7(1909), 12–13.

historie geodézie, zejména dějiny vývoje teodolitu, dějiny kartografie promítání a dějiny „praktické geometrie“ v Polsku.

5.3 Práce v astronomii

Ačkoli byl Václav Láska na počátku své kariéry rozhodnut stát se astronomem, po pražském zklamání byla astronomie pouze okrajovým tématem jeho odborného zájmu. Cenným dokumentem o jeho astronomických aktivitách jsou pravidelné referáty o pozorováních a měřeních na lvovské observatoři a odborné pojednání o zkoumání proměnných hvězd (vyšlo až roku 1917). Pravidelná měření, organizaci odborné práce lvovské observatoře a výuku na univerzitě doplnilo rozsáhlé a časově náročné přepracování druhého vydání německy psané učebnice astronomie *Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie* (Leipzig, 1906, 1913, 192 + 164 stran) a příprava polsky psané učebnice astronomie a geodézie *Astronomia sferyczna i geodesya wyższa* (Lvov, 1901, 88 stran).

5.4 Práce v meteorologii

Novým, ale okrajovým tématem Láskovy práce ve Lvově byla meteorologie, v níž se soustředil zejména na pozorování soumraku, zkoumání oblačnosti, měření srážek a popis závislosti meteorologických jevů na nadmořské výšce.

5.5 Význam Láskovy práce ve Lvově

Václav Láska kladl velký důraz na matematicky přesnou formulaci pojmů a vztahů. Domníval se, že matematické vyjadřování je nejlepší formou popisu pro všechny přírodní vědy. Požadoval logiku, objektivitu a přesnost pozorování, stručnost, jasnost, srozumitelnost a přesnost zpracování výsledků. Matematiku nechápal jako hlavní cíl svého studia, ale prostředek či cestu k řešení kvantitativních i kvalitativních problémů. Proto se v jeho učebnicích a studiích objevily přesné definice i v popisných vědách (geografie, geologie, balneologie). Jeho snaha vykládat pozorované děje fyzikálně, popisovat je pomocí vzorců a rovnic, matematicky přesně vyhodnocovat měření, jasně formulovat podmínky pokusů, stručně a přehledně analyzovat výsledky a poctivě uvést problematická místa plně zapadala do koncepce matematizace přírodních věd a byla v naprostém souladu se světovými trendy. Na konci 19. století a v prvních desetiletích 20. století Václav Láska zformuloval řadu základních zákonitostí tektoniky a geotektoniky, ačkoli v té době byly ještě poměrně chudé základy fyziky pevných látek. Předešel svoji dobu o více než 30 let a do jisté míry předjímal roli času v elastických, plastických a viskózních jevech v jednom hmotném systému při různých termodynamických podmínkách uvnitř Země.

Jeho nejdůležitějším výsledkem je pravděpodobně tzv. *Láskova formule*, která umožňuje přibližné stanovení vzdálenosti místa, kde bylo zemětřesení zaznamenáno, od jeho epicentra

$$D = [(S - P) - 1] \text{ megametr},$$

kde D je vzdálenost pozorovací stanice od epicentra v megametrech (1 megametr je 1 000 km), P je doba, kdy do pozorovací stanice dorazily podélné vlny P (*primae*), vyjádřená v minutách, a S doba, kdy do pozorovací stanice dorazily příčné vlny S (*secundae*), vyjádřená v minutách. Láskou experimentálně nalezená formule platí pro vzdálenosti menší než 10 000 km. Není absolutně přesná, vyžaduje provedení korekcí,[25] ale je citovaná a užívaná do současnosti.

5.6 Další Láskovy aktivity

Václav Láska byl členem redakčních rad prestižních mezinárodních časopisů: *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*, *Astronomische Jahresbericht* a *Internationales Archive für Photogrammetrie*. Podílel se také na geologickém průzkumu Haliče, který souvisel se snahou zahájit v této oblasti těžbu nafty, a na organizaci pravidelné haličské seismologické a meteorologické služby.[26]

6 Druhá pražská kariéra

Roku 1911 bylo V. Láskovi nabídnuto místo profesora na univerzitě ve Freiburgu (Švýcarsko), které však odmítl, neboť nechtěl vyměnit Lvov za jiné cizí město. Pomýšlel na přesun do Prahy. Toužil se věnovat geofyzice, učit ji na univerzitě a pokračovat ve vědecké práci započaté ve Lvově. Rakouské ministerstvo kultu a vyučování však bylo jiného názoru; domnívalo se, že Praze stačí jedna (německá) katedra geofyziky, na níž postupně působili A. Prey, R. Spitaler a L. W. Pollack. Roku 1911 však povolilo zřízení stolice aplikované matematiky na české univerzitě v Praze a na místo profesora jmenovalo Václava Lásku.

6.1 Profesor aplikované matematiky na univerzitě v Praze

Václav Láska převzal roku 1911 vedení katedry aplikované matematiky a řídil ji až do roku 1932. Byl víceméně přinucen se nově věnovat statistice a pravděpodobnosti, později vedl krátce i katedru statistiky a pojistné matematiky a katedru pro zemský magnetismus. Protože v aplikované matematice spatřoval základ geodézie, astronomie, geografie, petrochemie atd., zavedl nové výukové kurzy, snažil se dávat svým studentům nové podněty a přimět je ke studiu aplikace numerických metod, trigonometrie apod. Podporoval habilitace mladých kolegů z různých oborů aplikované matematiky, pojistné matematiky a statistiky. Prosazoval vysílání spolupracovníků do západní Evropy a USA, kde se měli zdokonalit v petrochemii, důlním průzkumu, výzkumu rud, nalezišť ropy a minerálů, průzkumu přírodních zdrojů a jevů apod. Jeho snem bylo vytvořit v Praze špičkové pracoviště aplikované matematiky celosvětového významu.

6.2 Práce pro nově vzniklé Československo

Po vzniku samostatného Československa se Václav Láska zapojil do budování nových vědeckých ústavů, ovlivnil práci statistického, geodetického, kartografického a geofyzikálního ústavu. V té době se jeho zájem soustředil především na geofyziku. Proto byl dne 20. prosince 1920 jmenován ředitelem *Československého geofyzikálního ústavu v Praze*. Krátkou dobu byl jeho jediným zaměstnancem, ale brzy z něho vytvořil špičkové výukové pracoviště spojené s centrem pro geomagnetický, seismologický a geofyzikální výzkum ČSR. Hlavní cíle jeho práce viděl jednak v oblasti výzkumu (gravitace, zemětřesení, geomagnetismus, geoelektřina, geotermika, radioaktivita, geofyzikální mapování státního území, zabezpečení pozorování neočekávaných výjimečných jevů – polární záře, lokální zemětřesení, povodně), jednak v praktických úkolech veřejného

[25] Tabulku základních korekcí sestavil český astronom, meteorolog a seismolog Rudolf Schneider (1881–1955).
[26] O Láskových odborných a pedagogických aktivitách v Polsku viz [4].

zájmu (konstrukce domů v seismicky aktivních oblastech, ochrana před povodněmi, technické konstrukce tunelů, využití dat pro letectví a civilní obranu, geofyzikální průzkum země, hledání vzácných kovů). Nezapomínal ani na výchovu nové generace a prohloubení mezinárodní spolupráce formou stáží pracovníků, výměny časopisů a monografií a především vytvářením mezinárodní sítě pozorovacích a měřicích stanic.

Díky těmto aktivitám se roku 1923 stal členem *Mezinárodní Unie pro geodézii a geofyziku* (IUGG) a zároveň prvním předsedou *Československého národního komitétu geodetického a geofyzikálního*. Z jeho podnětu se v tomto období zrodila česká síť dopisovatelů a pozorovatelů (pozorování lokálních zemětřesení, sběr nových dat, historie zemětřesení), a svoji činnost zahájil speciální vzdělávací seminář pro jejich potřeby. O rok později byla založena seismologická stanice v Praze, na níž byl instalován tzv. Wiechertův horizontální seismograf a která se roku 1927 začlenila do mezinárodní seismologické sítě. Po zahájení rutinního provozu se V. Láskovi podařilo pro ni získat mladé kvalifikované spolupracovníky: J. Liznar (geomagnetik), F. Čechura (geomagnetik), B. Kladivo (gravimetrik), V. Špaček (geodet), J. Špaček (hydrolog), J. Šplíchal (radiometr), B. Šalamon (kartograf), R. Běhounek (geomagnetik) a A. Zátopek (seismolog).

Roku 1932 byl Václav Láska ve věku sedmdesáti let penzionován; vedení geofyzikálního ústavu převzal jeho žák a kolega B. Šalamon (1880–1967), který ve spolupráci s ním již dříve budoval státní geofyzikální ústav, organizoval geofyzikální a seismologickou službu ČSR, podílel se na sestavení sítě stanic (Praha, Cheb, Stará Ďala – Ógyalla, Užhorod) a přispěl k uplatnění jejich výsledků ve světovém měřítku.[27]

6.3 Odborná publikace a učebnice

Václav Láska se ve spolupráci s Jaroslavem Pantoflíčkem (1875–1951) podílel na tvorbě *Statistického atlasu Republiky Československé* (vycházel v letech 1930 až 1935). Ovlivnil také základní koncepci zeměpisně-statistického mapování naší země. Jeho snahou bylo získat a jednotně zpracovat co největší množství dat o ČSR. Pokusil se prosadit svůj osvědčený pracovní postup – „měřit, mapovat, počítat, zobrazovat, vyhodnocovat a kontrolovat data". Díky svým nápadům, rychlosti a správnosti provádění náročných výpočtů, pečlivosti měření a vyhodnocování dat, vynikající znalosti měřicích metod a přístrojů a neobvykle rozsáhlém přehledu o literatuře měl úžasný respekt svých spolupracovníků.

Pro své univerzitní studenty sepsal učebnice *Počet pravděpodobnosti* (1921, 127 stran), *Počet graficko-mechanický* (I. díl, 1923), *Úvod do kosmické fysiky a matematické geografie* (1926), *Úvod do geofysiky* (1927, 73 stran), *Úvod do filosofie* (1939, 52 stran) a *Theorie a prakse numerického počítání* (1934, spoluautor V. Hruška) a statistickou příručku *Vybrané stati z matematické statistiky*. V rukopisech zůstaly jeho práce *Statistika všeobecná* a *Úvod do studia statistiky*.

7 Aktivity po penzionování

Ani po svém penzionování nepřestal V. Láska odborně pracovat. Začal se věnovat odborné, pedagogické, metodické a didaktické přípravě středoškolských učitelů mate-

[27] O geofyzikálním průzkumu Československa viz [3] a [5].

matiky. Snažil se organizovat kurzy a praktická cvičení z geometrie pro učitele z praxe. Účastnil se diskusí o reformách československého školství, ostře nesouhlasil s neustálým snižováním požadavků kladených na přípravu učitelů i na vědomosti žáků. Měl své vlastní názory na výuku a vlastní učební metody. Domníval se, že správné vzdělávání vede přes dokonalé zvládnutí základního učiva, které budou doplňovat zajímavé a podnětné problémové okruhy poskytující vhodné impulzy pro další samostatné studium a odbornou studentskou práci. Na základě vlastních zkušeností ukazoval, že nejlepších výsledků lze dosáhnout cílenou podporou talentovaných studentů, jejich dobrou motivací a uplatněním nenásilné cesty spočívající v zadávání drobných samostatných výzkumných úkolů, a tak studenty postupně přitahovat k odborné práci a začleňovat je do vědeckého týmu.[28] Tvrdil, že matematika je součástí každodenního života a je pro něj nezbytná. Ukazoval, že její význam může laická veřejnost pochopit jedině přes vhodně zvolené ukázky jejích četných aplikací, a tak může být přesvědčena, že má sama usilovat o rozvoj její výuky na všech typech škol.

Václav Láska zemřel 27. července 1943 v Řevnicích u Prahy.

Literatura

[1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

[2] Čupr K.: *Posmrtné vzpomínky*. Rozhledy matematicko-přírodovědecké 23(1944), 136–138.

[3] Pleskot V., Zátopek A.: *In memoriam profesora dr. Václava Lásky*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 89(1964), 247–249.

[4] Vetter Q.: *Profesor Dr. Václav Láska šedesátníkem*. Časopis pro pěstování matematiky 53(1924), 1–19.

[5] Zátopek A.: *Sixty years since the foundation of the (State) Institute of Geophysics at the Charles University in Prague*. Studia geophysica et geodaetica 25(1981), 296–312.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8*.

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

[28] O Láskových pedagogických metodách a názorech viz [2].

GAUSSOVA DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE – O ČEM SI GAUSS A SCHUMACHER PSALI?

MARIE BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ

Abstract: The aim of this paper is to point on Gauss' work in the letters between C. F. Gauss and H. C. Schumacher. It is focused on motivation and background of papers that are a base of the current differential geometry.

1 Úvod

Gaussova diferenciální geometrie sice není dnes nejcitovanějším dílem tohoto klasického německého matematika, přesto si zaslouží pozornost, neboť stála u zrodu nového pohledu na matematiku a pro druhou polovinu 19. století byla výchozím textem geometrie. Ve svém příspěvku se pokusíme za pomoci úryvků z korespondence mezi Gaussem a Schumacherem přiblížit okolnosti počátků Gaussovy teorie křivých ploch. Zaměříme se přitom především na práci *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*, kterou Gauss psal při udělení ceny Kodaňské královské společnosti věd. Okolnosti vzniku *Disquisitiones generales circa superficies curvas* totiž nejsou v korespondenci se Schumacherem důkladněji zachycené. Přesto toto hlavní pojednání diferenciální geometrie 19. století (a její dopad na další vývoj matematiky) nelze v úvahách o Gaussovi vynechat. Nejdříve však uvedeme některá fakta o obou pisatelích a rovněž se pokusíme postihnout novost Gaussova přístupu oproti do té doby známému stavu diferenciální geometrie.

2 Carl Friedrich Gauss a Henrich Christian Schumacher

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik, fyzik, geodet a astronom, je dodnes jedním z nejvýznamnějších matematiků, kteří v dějinách promluvili jak do oblasti teoretické vědy, tak i její aplikované formy. Právem si už za svého života zasloužil přídomku *princeps mathematicorum* (princ matematiky). Dokázal propojit teoretické poznatky s praxí a naopak pro vylepšení praktických měření vyvíjel a objevoval nové oblasti matematiky, fyziky, geodézie i astronomie. Stojí u počátku moderních dějin mnoha věd a dodnes jsou jeho poznatky (v téměř nezměněné podobě) součástí úvodních kurzů přírodovědných a technických oborů. Dílo ze všech oborů jeho působení bylo v průběhu let 1863 až 1929 postupně vydáno ve dvanáctisvazkovém souboru prací ([3]). O něm samém pak bylo sepsáno několik bibliografií. Za nejlepší je považovaná znovuvydaná kniha G. Walda Dunningtona s dodatky Jeremyho Graye ([1]).

Henrich Christian Schumacher (1780–1850) byl německo-dánský[1] astronom a geodet. Jeho cesta k astronomii nebyla však přímá. Vystudoval práva na univerzitách v Kielu a Göttingen. V době, kdy působil jako docent na univerzitě v Dorpatu, docházel na

[1] Schumacher se narodil v Bramstedtu, lázeňském městečku, nacházejícím se v dnešním Šlesvicku-Holštýnsku, které bylo v personální unií s Dánskem. Vycházím ze stručného životopisu [16].

hvězdárnu k profesoru Pfaffovi,[2] který ho uvedl do světa matematiky a astronomie. Na základě těchto podnětů a za pomoci královského stipendia vystudoval oba tyto obory na univerzitách v Kodani a Göttingen a k právní vědě se již nikdy nevrátil. V Göttingen se poprvé setkal s Gaussem. V zimním semestru 1808–1809 navštěvoval jeho přednášky z astronomie a geodézie. Od roku 1810 působil jako profesor astronomie a ředitel hvězdárny v Kodani. Od roku 1817 řídil triangulování Holštýnska a později geodetické proměřování celého Dánska. V roce 1821 v Altoně[3] založil hvězdárnu a o dva roky později dodnes nejvlivnější astronomický odborný časopis *Astronomische Nachrichten*.[4] Mezi jeho další práce patří třísvazková *Astronomische Abhandlungen,*[5] ročenky[6] a tabulky.[7] O možnosti přispívat do obou periodik svědčí oznámení z července roku 1821, které se od Schumachera dostalo i ke Gaussovi.[8]

Od roku 1808 až do své smrti si Schumacher s Gaussem hojně dopisoval.[9] O jejich přátelství a významu vzájemné korespondence mimo jiné svědčí úryvek ze Studničkova článku [11], str. 163:

Záhy poznal učitel při svém o 3 léta mladším žáku nejenom vědeckou horlivost, nýbrž i ducha pro vše ušlechtilé zaujatého; i vešel s ním v přátelství tak vřelé, že podobného sotva se nalezne ve světě učeném. Nejlepším svědectvím tohoto poměru jsou dopisy jejich, jdoucí od r. 1808 až do 1850, z nichž psal Schumacher Gaussovi 1297, Gauss pak Schumachrovi 1319, nepočítaje ztracené, a jichž sbírka představuje tištěných svazků 6. […] *Při každé příležitosti obrací se Gauss o radu k Schumachrovi ve světě více obeznámenému, o všech pracích podává mu zprávy, oznamuje sebe nepatrnější události rodinné a odpovídá na četné dotazy vědecké tak obšírně a důkladně, jakoby pro veřejnost psal.*

3 Geodézie jako nový impuls diferenciální geometrie

Nové uspořádání Evropy po napoleonských válkách vyžadovalo z vojensko-ekonomických důvodů také nové mapové podklady. Tento moment výrazně zasáhl i do vědeckého života Gausse a Schumachera. Od roku 1817 z nařízení dánského krále Friedricha VI. Schumacher vytyčoval meridiány v různých místech Holštýnska (a později Dánska), na což navázal Gauss v Hannoveru. Podle poznámek z Gaussovy pozůstalosti

---

[2] Johann Wilhelm Andreas Pfaff (1774–1835), německý matematik, fyzik a astronom. Založil hvězdárnu a působil na univerzitě v Dorpatu (dnes součást estonského města Tartu). Věnoval se teorii integrálu a parciálním diferenciálním rovnicím 1. řádu, které byly součástí teorie diferenciálních forem. V roce 1799 byl vedoucím Gaussovy disertační práce.

[3] Altona je dnes jedna z hamburských čtvrtí. Na začátku 19. století však šlo o dvě města. Altona byla součástí Holštýnska a Hamburg bylo hanzovní město (svobodný stát). Hvězdárna v Altoně byla jen 16 metrů odchýlena od místního poledníku (Gaussovy) hvězdárny v Göttingen, takže jak astronomická, tak i geodetická měření měli Gauss i Schumacher téměř srovnatelná.

[4] Přispěvateli byli Gauss, Bessel, Rümker, Olbers, Encke či bratři Herschelové. Schumacher vydával časopis až do roku 1850. Po jeho umrtí časopis nezanikl a vychází dodnes (http://www.aip.de/AN/).

[5] Vydaná v letech 1823–1825 v Altoně.

[6] *Astronomische Jahrbücher* z let 1836–1844, vydané v Tübingen.

[7] Schumacherovy *Astronomische Hilfstafeln* vycházely v Kodani v letech 1820–1829 v deseti svazcích. V těchto tabulkách publikoval (úhlové) vzdálenosti Jupiteru, Saturnu, Marsu a Venuše od Měsíce.

[8] Je součástí [8], sv. 1, str. 233.

[9] Korespondenci [8] uspořádal Schumacherův nástupce a pozdější ředitel hvězdárny v Altoně Christian August Friedrich Peters (1804–1854). Vyšla v 6 svazcích v letech 1860–1865. Peters pomáhal Schumacherovi také jako spolueditor *Astronomische Nachrichten*.

([3], sv. 4, str. 484) bylo jejich společnou ideou založení celoevropské geodetické triangulační sítě a na jejím základě podání nové (přesnější) kartografii.

K proměřování hannoverského království byl Gauss povolán roku 1818. Roku 1820 publikuje pojednání o vytyčení meridiánu v Göttingen a v roce 1821 Gauss vynalézá heliotrop – přístroj, pomocí něhož lze i na velké vzdálenosti nasměrovat sluneční paprsek do jistého vzdáleného bodu. Vlastní geodetická měření pak intenzivně řídil a prováděl v letech 1821 až 1826. V té době přednášel pouze v zimním semestru[10] a téměř nepublikoval.

Astronomická pozorování a postupy sloužily k vyšší přesnosti geodetických měření. Nově zakládané hvězdárny s vytyčeným meridiánem byly východiskem pro mapování přilehlého okolí. Na druhé straně geodézie vyžadovala také nový matematicko-teoretický základ, k němuž docházelo propojením poznatků matematické analýzy a geometrie v teorii křivých ploch.[11]

Vedle tohoto nového momentu vstupu teoreticko-geodetických úvah do geometrie stála tradice francouzské diferenciální geometrie. V jejím čele stojí švýcarský matematik Leonhard Euler[12] a Napoleonův generál Gaspard Monge.[13] Diferenciální geometrie před Gaussem uvažovala o křivé ploše jako o reprezentaci hranice nepravidelného tělesa, které je umístěné v (trojrozměrném) prostoru. Gauss však pojímal křivé plochy jako znázornění „nekončící“ (neomezené) okolní krajiny.

Gauss Eulera obdivoval. Ač v práci o křivých plochách *Disquisitiones generales* přímo nikoho necituje, Euler byl jediný, ke kterému se vztahuje.[14] Euler jako první rozvedl analytickou geometrii do třídimensionálního prostoru.[15] Stál u zrodu geometrických transformací a pojmu afinní transformace. Jako první se zabýval křivostí jiných než sférických ploch. V *Recherches sur la courbure des surfaces* (E333) z roku 1763 pokládá základy diferenciální geometrie (obecných) ploch. Vedle toho rozvíjí sférickou geometrii a trigonometrii.[16] Poznamenejme, že Gauss Eulerovy *Recherches*

---

[10] Vedl pouze přednášky z teorie pohybu nebeských těles, komet a použití počtu pravděpodobnosti v aplikované matematice. Soukromě vedl pro své studenty na hvězdárně v Göttingen také praktickou astronomii.

[11] Její výsledky se nazývají vnitřní geometrie, jindy se ponechávají jako součást diferenciální geometrie.

[12] Leonhard Paul Euler (1707–1783), švýcarský matematik a fyzik, který objevil mnoho nového z diferenciálního počtu a pozdější teorie grafů. Vedle matematických pojednání napsal i mnoho podnětných prací z mechaniky, optiky a astronomie. Jeho život je spjat s Basilejí, Petrohradem, Berlínem. Celé jeho dílo je postupně zpřístupňováno i elektronicky [12].

[13] Gaspard Monge (1746–1818), francouzský přírodovědec, matematik, ale také politik z doby francouzské revoluce. Je považován za zakladatele deskriptivní geometrie. Matematiku a později i fyziku vyučoval na dělostřeleckém učilišti v Lyonu. Od roku 1792 byl ministrem námořnictva. Vedle toho během francouzské revoluce stál u zavedení metrické soustavy a založení École normale supérieure. Přednášel rovněž na vojenské akademii v Mézières a École Polytechnique. Během Napoleonova tažení do Egypta vedl vědeckou část výpravy. Z jeho díla jsou nejvýznamnější knihy *Traité élémentaire de statique*, *Géométrie descriptive* a *Application de l'analyse à la géométrie*.

[14] Odvolává se na něj pak v abstraktu k *Disquisitiones generales*, viz [3], sv. 4, str. 343. V hlavní práci sice tento odkaz není, jak Karin Reichová ve svém článku [9] uvádí, přesto nelze s ní souhlasit, že by Gauss Eulerovy práce z diferenciální geometrie neznal, ani ho nijak neovlivnily. K tomu viz [1], str. 165.

[15] Více [5], str. 1.

[16] Hlavně Eulerovy práce z roku 1755 E214: *Principes de la trigonometrie spherique tires de la methode des plus grands et plus petits* a E215: *Elemens de la trigonometrie spheroidique tires de la methode des plus grands et plus petits*. Všechny jsou dostupné v Eulerově archivu [12].

(E333) patrně znal, není ale jasné, jak moc rozsáhle znal další Eulerovy práce z teorie ploch.[17]

K Mongeově francouzské škole se však Gauss příliš nevztahoval. Podle Dunningtona [1] uvedl pouze poznámku, že parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro plochy rozvinutelné do roviny „nebyly ještě dokázány s dostatečnou rigorositou." Zkoumání jeho speciálních tříd ploch nemělo na Gausse patrně žádný vliv stejně jako deskriptivní geometrie, kterou Gauss v recenzi z roku 1813 pochvaloval.[18] A to i přesto, že Monge a jeho žáci na Eulera navazovali. Za zmínku stojí Jean Baptiste Mesnieur (1754–1793), Mongeův žák v Mézières, který Eulerovo hlavní dílo E333 přímo zmiňuje.[19] Dodnes se v učebnicích diferenciální geometrie zmiňuje Mesnieurova věta.[20] Jiný Mongeův žák, Olinde Rodrigues (1794–1851), v roce 1815 popisuje použití sférického zobrazení plochy, poměr obsahů vzájemně si odpovídajících ploch a vyjadřuje veličinu, kterou dnes známe jako totální (nebo Gaussova) křivost, pro kterou ukázal, že je součinem hlavních křivostí.[21] Křivostí ploch se zabýval i další Mongeův žák, absolvent École Polytechnique a námořní důstojník Charles Dupin (1784–1873). Ten navázal na práce o geodetických křivkách na elipsoidu, které rozdělují elipsoid na třídy ploch druhého řádu se společným ohniskem. Při studiu křivosti normálových řezů ploch zavedl křivku indicatrix (známá jako Dupinova indicatrix), díky níž klasifikoval body na dané ploše do čtyř typů: planární, eliptický, hyperbolický a parabolický.

4 Od teorie gravitace ke konformnímu zobrazení

Vraťme se ke Gaussově práci. V roce 1812 se mu podařilo najít vyjádření gravitace (přitažlivosti) pro sféroid.[22] Se svým ještě nepublikovaným výsledkem na podzim zavítal k baronu von Zachovi na observatoř Seeberg,[23] kde si do svého deníku zapsal:[24] „Objevili jsme absolutně novou teorii gravitace eliptického sféroidu v bodech mimo těleso."

Při řešení teorie gravitace Gauss použil Legendreovo přiblížení sféroidu k rotačnímu elipsoidu. Vyjádření gravitace k bodům, které leží ve směrech hlavních os, před Gaussem našel Maclaurin a analyticky je zpracoval d'Alembert, Lagrange, Legendre a Laplace.[25]

---

[17] Jde o práce E392: *Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum*, E408: *De curva rectificabili in superficie sphaerica*, E419: *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet* a tři práce o mapových projekcích E409: *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, E491: *De proiectione geographica superficiei sphaericae* a E492: *De proiectione geographica Deslisliana in mappa generali imperii russici usitata*. (E490, E491 a E492 byly v roce 1898 souborně vydány v německém překladu *Drei Abhandlungen über Kartenprojection von Leonhard Euler* [13].)

[18] Recenze je součástí [3], sv. 4, str. 359–361.

[19] Článek *Mémoire sur la courbure des surfaces* je sice z roku 1776, ale publikovaný byl až v roce 1783. Více viz [9], str. 492.

[20] Středy oskulačních kružnic křivek na dané ploše, které procházejí daným bodem a které v tomto bodě mají společnou tečnu, leží na kružnici.

[21] Viz [5], str. 6.

[22] Jde o práci *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum*, kterou Gauss publikoval v roce 1813. Je zahrnuta ve *Werke* [3], sv. 5, str. 1–22. Resumé je ve stejném svazku na str. 279–286.

[23] Baron Franz Xavier von Zach (1754–1832) byl německý astronom, se kterým se Gauss přátelil od roku 1801, kdy poprvé spolupracovali na znovuobjevení planetky Ceres. Na Seebergu, které je dnes součástí Gothy, von Zach založil hvězdárnu, kde léta působil jako její ředitel. Srov. [1], str. 49–54.

[24] Viz [4], záznam č. 142, datovaný 26. září v Seebergu: „Theoriam attractionis sphaeroidis elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus."

[25] Viz rovněž abstrakt k teorii gravitace ve *Werke* [3], sv. 5, str. 279–286.

V matematickém vyjádření zavedl Gauss lokální prostor a dvojný integrál. Nové bylo, že odvodil také povrch rotačního elipsoidu, přes který pak integroval. Výsledkem jsou věty o nulovosti integrálu (dnešními slovy gravitačního potenciálu) přes uzavřenou plochu (tj. povrch elipsoidu). Co se jeví zajímavé, jsou techniky, v nichž pro diferenciály nových nezávislých souřadnic rozlišuje jednotlivé případy „infinitesimálně malých rovinných obdélníků“ o stranách p, q, $p + \mathrm{d}p, q$, $p, q + \mathrm{d}q$ a $p + \mathrm{d}p, q + \mathrm{d}q$. [26]

Novým úkolem, který před ním stál, bylo najít zobrazení nejkratších (geodetických) linií[27] na rotačním elipsoidu.[28] Gauss přitom pracoval s obecnou křivou plochou, na které zavedl kartézské souřadnice bodu jako funkce dvou libovolných veličin (dnes nazývané parametrizace).[29] V geodetických spisech[30] pro toto zobrazení zavádí Gauss označení *konformní*, tj. takové spojité zobrazení, které zachovává úhly.[31]

5 Příběh ceny Kodaňské královské vědecké společnosti

Na jaře roku 1816 se Gauss přihlásil do soutěže, kterou vyhlásil nově založený astronomický časopis *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*.[32] Jedním z úkolů bylo najít vzájemné zobrazení (projekci) dvou křivých ploch na sebe. Gauss již měl hotovu podobnou úlohu pro nejmenší části (kousky) těchto ploch, ale to součástí zadání nebylo. Projekci vyřešil pomocí rovnoběžných normál na jednotkovou sféru. Prohnutí či zakřivení plochy pak bylo speciálním případem tohoto zobrazení. Gauss vypracoval pojetí totální křivosti plochy a míru křivosti v každém bodě nezávisle na prohnutí plochy.

Ve stejné době se Henrich Christian Schumacher snažil získat pro Gausse geodetickou práci v Dánsku. O záměru získat grant dánského království za účelem jeho zmapování a proměřování psal v dopise z 8. června 1816. V tomto dopise zároveň píše o možnosti podat jeho teorii interpolace jako cenu kodaňské královské vědecké společnosti:[33]

V naději, že to bude pro Vás popudem ke zveřejnění Vaší teorie interpolace, kterou mám v rukopise, jsem formuloval zadání naší společnosti pro rok 1817 takto: „Rozvinout teorii interpolace, která se dosud týkala především periodických funkcí.“

Schumacher měl patrně na mysli práci *Theoria interpolationis methodo nova tractata*, kterou máme dochovanou jen z Gaussovy pozůstalosti v [3], sv. 3, str. 265–327. Interpolační

---

[26] [3], sv. 5, str. 15: „Concipiatur planum per infinitas rectas tum liniae abscissarum parallelas tum ipsi normales in elementa rectangula divisum: huiusmodi elementum, inter puncta quorum coordinatae sunt p, q; $p + \mathrm{d}p, q$; $p, q + \mathrm{d}q$; $p + \mathrm{d}p, q + \mathrm{d}q$ contentum, erit $= \mathrm{d}p.\mathrm{d}q$.“

[27] Ve smyslu „infinitesimálně krátkých úseček“.

[28] Podle Dunningtona [1], str. 163, šlo o linie na eliptickém sféroidu.

[29] Poznámku k vyjádření tohoto zobrazení pro nejkratší linie na rozvinutelných plochách najdeme v pozůstalosti, zahrnuté do [3], sv. 8, str. 457.

[30] Viz *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie I* (z let 1843 až 1844). Pojednání je součástí výboru [3], sv. 4, str. 262–348.

[31] Zobrazení $f: U \to V$ se nazývá konformní (úhlojevné) v bodě u_0, jestliže zachovává orientaci úhlů, které svírají křivky procházející bodem u_0.

[32] Zakladateli časopisu byli baron Bernhard August von Lindenau (1780–1854), německý právník, astronom a politik, a Johann Gottfried Friedrich von Bohnenberger (1765–1831), německý astronom, matematik a fyzik.

[33] [8], sv. 1, str. 128: „Ich habe in der Hoffnung, Sie würden dadurch Veranlassung finden, Ihre Theorie der Interpolation, die ich handschriftlich habe, bekannt zu machen, die Preisfrage unserer Gesellschaft für 1817 so abfassen lassen: „Theoriam interpolationis evolvere quae praesertim in functionibus periodicit adhuc manca videtur.““

metodu Gauss rozvádí i pro případ komplexní proměnné, v jehož vyjádření vystupují periodické funkce. Metodu (avšak bez komplexní proměnné) publikoval až Gaussův žák a německý astronom Johann Franz Encke (1791–1865) v roce 1830 [2] s poznámkou, že podklady získal od Gausse v roce 1812. Dnes je známá jako Newton–Gaussova interpolační formule.[34]

Gauss 5. července 1816 Schumacherovi odepsal. Proměřování Dánska odmítl, protože mezitím dostal nabídku zmapovat Hannoverské království. Odpověděl ovšem také k úloze spojené s udělením ceny:[35]

*Program s úlohou Vaší společnosti jsem ještě neviděl. Hovořil jsem s Lindenauem o jiné úloze, která má být zveřejněna v novém časopise s odměnou 100 dukátů. Napadlo mne další zajímavé zadání: „**Obecně** promítnout (zobrazit) jednu danou plochu na jinou (danou) tak, aby se obraz podobal originálu v nejmenších částech (kouscích).“*

K tomu Gauss dodal, že ve speciálním případě je jednou plochou koule a druhou rovina. V tomto případě je hledaným zobrazením stereografická projekce a Mercatorovo zobrazení. „Chce se ale takové **obecné** řešení pro jakýkoli druh plochy, které pojímá všechny kousky (částečky).“[36]

V roce 1820 tedy Schumacher požádal Kodaňskou královskou společnost věd, aby vyhlásila cenu k tomuto novému problému. O tom začíná i Schumacherův dopis Gaussovi z 11. ledna 1821. Uzpůsobení zadání podle Gaussova návrhu se Schumacherovi jeví vítězné: „Naše naděje přichází právě k Vám, můj velevážený příteli!“[37] Termín pro dodání práce byl stanoven na konec roku a odměnou měla být medaile v hodnotě 50 dukátů.[38]

Gauss v té době ovšem intenzivně pracuje na geodetickém proměřování Hannoveru a na teoretickou práci nemá příliš času. Protože žádná práce kodaňské společnosti nebyla doručena, cena se přesunula na rok 1822 se stejným zadáním. Teprve až 4. června 1822 se Schumacher s prací připomíná, na což Gauss 10. července 1822 odpovídá:[39]

---

[34] K historii interpolace viz např. [7]. Gaussova interpolační formule $f(x) \approx t_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f_k \zeta_k(x)$, kde $t_n(x)$ je trigonometrický polynom n-tého stupně takový, že $t_n(x_k) = f_k$ pro $k = 0, \dots, 2n$ a $\zeta_k(x) = \frac{\sin[\frac{1}{2}(x-x_0)] \cdots \sin[\frac{1}{2}(x-x_{k-1})]}{\sin[\frac{1}{2}(x_k-x_0)] \cdots \sin[\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})]} \frac{\sin[\frac{1}{2}(x-x_{k+1})] \cdots \sin[\frac{1}{2}(x-x_{2n})]}{\sin[\frac{1}{2}(x_k-x_{k+1})] \cdots \sin[\frac{1}{2}(x_k-x_{2n})]}$. Toto vyjádření je uvedeno v elektronické Wolframově knihovně matematických vzorců [14].

[35] [8], sv. 1, str. 131: „Das Programm mit der Preisfrage Ihrer Societät ist mir noch nicht zu Gesichte gekommen. Mit Lindenau habe ich auch über eine Preisfrage conferirt, die in der neuen Zeitschrift mit dem Preise von 100 Ducaten aufgegeben werden soll. Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nemlich: „**allgemein** eine gegebne Fläche so auf einer andern (gegebnen) zu proiiciren (abzubilden), dass das Bild dem Original in den kleinsten Theilen änhlich werde.““

[36] [8], sv. 1, str. 132: „Man will aber die **allgemeine** Auflösung worunter alle particulären begriffen sind, für jede Arten von Flächen.“

[37] [8], sv. 1, str. 202: Unsere Hoffnung ist jetzt, auf Sie gerichtet, mein vielverehrter Freund!

[38] K žádné deflaci ani úpravě měny nedošlo. Je si jen potřeba uvědomit, že ani Německo, ani jeho měna nebyly sjednocené, natož aby byly stejné jako měna v Dánsku. Hannover měl jinou hodnotu dukátu než Sasko, Dánsko mělo se Švédskem a Norskem v rámci monetární unie koruny. Při hrubých přepočtech těchto měn na říšský tolar měla marka (správněji marcka) v Hamburgu a Lübecku hodnotu 1/3 říšského tolaru, zatímco dánská (nebo berlínská) marka jen hodnotu 1/6 říšského tolaru. Tedy severoněmecká měna byla dvojnásobná oproti dánské (anebo berlínské). Odměny k úlohám byly tedy podobné.

[39] [8], sv. 1, str. 270: „Es thut mir leid die Wiederholung Ihrer Preisfrage erst jetzt zu erfahren. Im vorigen Winter hätte ich vielleicht einige Zeit dazu gefunden, aber so lange die praktischen Messungearbeiten dieses Jahres dauern, kann ich natürlich an eine subtile theoretische Ausarbeitung gar nicht denken.“

Je mi líto, že jsem se o zopakování Vašeho zadání dozvěděl až teď. Loňskou zimu bych snad nějaký čas k tomu našel, ale dokud v tomto roce trvají praktická měření, nemohu prostě na žádné podrobné (subtilní) teoretické zpracování ani pomyslet.

Gauss práci do konce roku zvládl dopsat a 25. prosince 1822 píše Schumacherovi:[40]

Pozdě jsem se dozvěděl, že Kodaňská společnost zopakovala zadání ke znázornění ploch. Přítel matematiky, který Vám nesmí být jmenován, právě sestavil základy řešení a předtím, než by neochotně ve svém ***velmi*** *omezeném čase obětoval zbytečnou práci, aby se zabýval kompletním dokončení, chce od Vás odpověď na následující otázky:*

1. *zda může být článek napsán v němčině;*
2. *zda by nebylo předsudkem, kdyby měla menší rozsah, než jaký má práce spojená s udělením ceny mít, tj. sotva dva plné archy, samozřejmě pokud je samotné zadání úplně vyřešené;*
3. *asi týden po přijetí Vaší odpovědi by mohla být stať dokončena a odeslána; ptám se, zda je to dostatečně včas?*

Své řešení Královské kodaňské společnosti věd zaslal a cenu převzal. Do roku 1825 však jeho práce nebyla uveřejněna. Uveřejnění mu zajistil až Schumacher v *Astronomische Abhandlungen.* Pojednání vyšlo v třetím (a zároveň posledním!) čísle. Gauss zde vypracoval obecnou formuli míry křivosti. Zobecnil tím Legendreovu větu o sférických trojúhelnících z roku 1787,[41] čímž propojil teorii nejkratších geodetických linií s teorií míry křivosti. V tomto světle se Gaussova věta o redukci malých geodetických trojúhelníků na rovinné jeví jako třešnička na dortu invariantů a rozvinutí plochy do roviny, o nichž uvažoval již od konce roku 1822.

6 Obecné pojednání o křivých plochách

Na konci roku 1825 se Gaussovi podařilo dokončit zobecnění teorie křivých ploch v *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Přednáška, na níž Gauss pojednání prezentoval, se konala dne 8. října 1827 před Královskou společností věd v Göttingen a v roce 1828 vyšla v göttingenském časopise *Commentationes recentiores*.[42]

---

[40] [4], sv. 1, str. 293: „Ich habe erst spät erfahren, dass die Copenhagener Societät die Preisfrage, wegen der Darstellung der Fläche wiederholt hat. Ein Freund der Mathematik, der sich Ihnen nicht nennen darf, hat die Hauptsachen der Auflösung jetzt geordnet und wünscht, ehe er die bei seiner **sehr** beschränkten Zeit ungerne zwecklos aufzuwendende Arbeit des vollständigen Ausarbeitens unternimmt, von Ihnen Anwort auf folgende Fragen:

1) ob der Aufsatz deutsch abgefasst werden kann,
2) ob es demselben nicht zum praejudiz gereicht, wenn er weniger Volumen hat als sonst gewöhnlich Preisschriften haben, d.i. schwerlich volle 2 Bogen, versteht sich in sofern die Fragen selbst erschöpfend beantwortet ist;
3) Etwa eine Woche nach Ankunft Ihrer Antwort würde der Aufsatz vollendet seyn und abgesandt werden können; fragt sich ob dies noch früh genug ist?

[41] Věta je součástí Legendreova pojednání *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre.*

[42] V tomto čísle časopisu vyšly zároveň další dvě Gaussovy práce – matematické zdůvodnění metody nejmenších čtverců (*Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. I.*) a dodatek k eliminaci chyb měření (*Supplementum theoriae combinationis obseruationum erroribus minimis obnoxiae*). Všechny byly inspirovány praktickým proměřováním Hannoveru.

To, čím je *Disquisitiones generales* přelomová, je následující známou větou (theorema egregium): Míra křivosti (Gaussova křivost) plochy závisí pouze na vyjádření kvadrátů lineárních členů ve dvouparametrickém rozvoji a jejich diferenciálních koeficientech. Neboli zhruba řečeno zakřivení plochy lze zjistit z naměřených úhlů a vzdáleností na této ploše – nezávisí na umístění plochy v prostoru. Důsledkem této věty je kritérium, jak zjistit, že jedna plocha je rozvinutelná do druhé (neboli kartografickou terminologií délkojevně (ekvidistantně) zobrazit) – musí mít stejnou Gaussovu křivost. Speciálně do roviny rozvinutelné plochy mají nulovou Gaussovu křivost. Moderní dějiny teorie ploch právě tuto práci dávají do svých počátků.

Ve zvláštním čísle Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, vydaného u příležitosti 100. výročí Gaussova narození, Karel František Edvard Kořistka [6], str. 182–183, toto dílo shrnuje slovy:

Na konec budiž mně dovoleno, vzpomenouti ještě čtvrtého geodaetického vynálezu, jejž Gauss uveřejnil v posledních dvou větších pojednáních „o předmětech geodaetických" r. 1843 a 1846 od něho vydaných, ačkoli předmět, o němž první z těchto pojednání jedná, částečné již ve spisu r. 1827 pod titulem „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ vyšlém, obsažen jest. Jestiť to theorie podobného zobrazení*, kterouž řeší se obecně platným způsobem úkol, jak by náleželo části kterékoli dané plochy zobraziti na všeliké jiné ploše, a sice tak, aby obraz nový obrazu původnímu i v nejmenších částcích stal se podobným. Takovým podobným zobrazením koule na rovině jest na př. tak zvaný průmět stereografický. Avšak v řečeném pojednání zanáší se Gauss se zvláštním případem podobného přenesení plochy ellipsoidu na plochu koule, případu to pro geodaesii zvláště důležitého, jelikož mathematická podoba země není koule nýbrž ellipsoid a tudíž přenesení geodetických čar z ellipsoidu na kouli poskytnouti musí podstatného zjednodušení úlohy, jen když vývin děje se tak, aby určitost v podobnosti tvarů, tedy také stejná podobnost úhlův nevzala újmy. I tento problém řešil Gauss s neobyčejným v pravdě důvtipem i není-li možná, krátkými slovy zásady nové jeho methody objasniti, tož vzpomenu co příkladu svrchované určitosti, jakéž skrze ni lze dosáhnouti, jen toho případu, že opravy v úhlech čili v redukcích směrův v onom trojúhelníku Hannoverské sítě, jenž od meridianu normálního nejvíce vzdálen jest, neobnášejí více než 0.0032 sekund, že tedy lze jich zcela pustiti mimo, spokojíme-li se s dvěma decimalkami jedné sekundy.*

7 Důsledky teorie křivých ploch pro diferenciální geometrii

Z obou Gaussových prací dodnes zbyly dva důležité přístupy. Prvním bylo systematické používání křivočarých souřadnic; druhým pak pojetí plochy jako dvouparametrického rozvinutí, nikoli pevného, ale pružného, a hledání jejích invariantů. Tímto novým uvažováním lze matematicky pojmout nové tvary, které získáme tak, že známé tvary bez natažení (dilatace) ohýbáme. Všechny plochy odvozené od dané plochy ohnutím jsou pak rozvinutelné do této dané plochy (ve speciálním případě do roviny). Gauss je přelomový tím, že těmto oběma pojetím dodal přísně rigorózní analytická kritéria.

Z hlediska dalšího ubírání se matematických dějin jsou *Disquisitiones generales* průkopnická ze dvou důvodů. Za prvé, Gauss přešel k (nepřímému) používání nekonečných grup (jak je zavedl později Sophus Lie), zatímco do té doby se v geometrii používaly pouze konečné grupy transformací. Druhý důvod je ten, že Gauss pojímal teorii křivých ploch jako (dnešní terminologií) geometrii dvourozměrné variety, která otevřela cestu obecné teorii vícerozměrných variet či *n*-rozměrného prostoru.

8 Prameny Gaussovy diferenciální geometrie

V Gaussových *Werke* jsou geometrické spisy zařazeny do 4. svazku [3]. Najdeme zde především práci k udělení ceny Kodaňskou královskou společností věd *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* z prosince 1822 (včetně dvou abstraktů) a pojednání *Disquisitiones generales circa superficies curvas* z října 1827. Protože Gaussem vybudované metody měly sloužit ke zlepšení geodetických měření, jsou zde zařazeny také výsledky četných geodetických měření z Gaussovy geodetické triangulace Hannoverského království z let 1821 až 1825 a z dalších lokalit po celém dnešním Německu (1828 až 1844). Zahrnuty jsou i jeho stěžejní díla z vyšší geodézie, která některé zavedené postupy lépe osvětlují. V tomto svazku jsou dále připojeny Gaussovy recenze k pracem Mollweideho, Herschela, Kriese, Schwaba, Müllera a Metternicha. Za pozornost stojí Gaussovo vyjádření se k vlivné knize Gasparda Monge *Géometrie descriptive* z 31. července 1813. Příslušné poznámky, dodatky z pozůstalosti a úryvky z vybrané korespondence jsou zařazeny do 8. svazku [3].

To, co zde ale chybí, je korespondence k teorii křivých ploch. K doložení okolností vzniku první Gaussovy práce z oblasti diferenciální geometrie, bylo potřeba prozkoumat vlastní korespondenci Gausse se Schumacherem [8], především 1. svazek. Jako podpora sloužila práce Schlesingera [10] a Dunningtonova monografie [1].

Další možnosti hledání původu diferenciální geometrie u Gausse jsou ve zkoumání jeho korespondence s Lindenauem, Olbersem a Besselem a/nebo v dalších přesazích do jiných Gaussových geometrických prací (geometria situs, astrální geometrie, neeukleidovská geometrie, pojetí rovnoběžnosti atd.).

Literatura

[1] Dunnington G. W.: *Carl Friedrich Gauss. Titan of Science*. Mathematical Association of America, New York, 2004.

[2] Encke J. F.: *Über Interpolation*. Berliner Astronomisches Jahrbuch, 55 (1830), 265–284. Uvedené také v *Gesammelte Mathematische und Astronomische Abhandlungen*, sv. 1, F. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Berlin, 1888, 1–20.

[3] Gauss C. F.: *Werke*. Bd. 1–12, Göttingen – Berlin, 1863–1929.

[4] Klein F.: *Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796–1814. Mit Anmerkungen*. Mathematische Annalen 57 (1903), 1–34.

[5] Kolmogorov A. N., Yushkevich A. P.: *Mathematics of the 19th Century. Geometry. Analytic Function Theory*. Birkhäuser Verlag. Basel 1996. Z ruštiny do angličtiny přeložil Roger Cooke.

[6] Kořistka K. F. E.: *O pracích a vynálezech Gaussových v oboru geodesie.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 6 (1877), No. 4, 174–183.

[7] Meijering E.: *A Chronology of Interpolation. From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing*. Proceedings of the IEEE, 90 (2002), No. 3, 319–342.

[8] Peters C. A. F. (ed.): *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*. Sv. 1–6, Gustav Esch, Altona, 1860–1865.

[9] Reich K.: *Euler's Contribution to Differential Geometry and its Reception*. In Leonhard Euler: Life, Work and Legancy, editor R. E. Bradley, Elsevier, Amsterdam–New York 2007, 479–502.

[10] Schlesinger L.: *Über Gauss Arbeiten zur Funktionentheorie*. Neubearbeitung des Aufsatzes aus Heft III der Materialien für eine wissenschaftliche Biografie von Gauss gesammelt von F. Klein und M. Brendel. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1912. Přepracovaná verze je součástí [3], sv. 10.2.

[11] Studnička F. J.: *O povaze Gaussově*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 6 (1877), No. 4, 162–169.

[12] *The Euler Archive*. A Digital Library Dedicated to the Work and Life of Leonhard Euler. [online]. [cit. 9. 6. 2011]

http://www.eulerarchive.org/

[13] Wangerin A. (ed.): *Drei Abhandlungen über Kartenprojection von Leonhard Euler*. Wilhelm Engelmann, Leipzig 1898.

[14] Weisstein E. W.: *Gauss's Interpolation Formula*. In MathWorld–A Wolfram Web Resource [online] Poslední revize 18. května 2011. [cit. 9. 6. 2011]

http://mathworld.wolfram.com/GaussInterpolationFormula.html

[15] Wikipedia (Die freie Enzyklopädie): *Bernhard von Lindenau* [online]. Poslední revize 11. dubna 2011 [cit. 29. 5. 2011].

http://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Gottlieb_Friedrich_von_Bohnenberger

[16] Wikipedia (Die freie Enzyklopädie): *Heinrich Christian Schumacher* [online]. Poslední revize 13. dubna 2011 [cit. 8. 6. 2011].

http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Christian_Schumacher

[17] Wikipedia (Die freie Enzyklopädie): *Johann Gottlieb Friedrich von Bohnenberger* [online]. Poslední revize 18. května 2011 [cit. 31. 5. 2011].

http://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_von_Lindenau

Poděkování

Práce vznikla za podpory grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*.

Adresa

Mgr. Marie Benediktová Větrovcová
Katedra filozofie
Fakulta filozofická
Západočeská univerzita v Plzni
Sedláčkova 19
306 14 Plzeň
e-mail: *marie.benediktova@gmail.com*, *vetrovc5@kfi.zcu.cz*

SIERPIŃSKI'S AND PÓLYA'S SPACE-FILLING CURVES in Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie

DANUTA CIESIELSKA

Abstract: The study of the problem of Space-Filling Curves goes to the original papers by Sierpiński and Pólya. Their results, which will be discussed, not only give a new example of the Space-Filling Curve but also open the new possibilities for investigation of the properties of such curves.

I will start with some basic facts about continuous curves which image is a plane square. The history of this problem started with monumental result by G. Peano. In *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane* [7] he presented a continuous real function which image is a plane square. Next, I will describe D. Hilbert's [2] and E. H. Moore's [5] results.

The main part of my talk will be focused on the Sierpiński's and Pólya's Space-Filling curves.[1] In *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A: Sciences Mathématiques*,[2] there were published two papers about Space-Filling Curves in 1912 *O pewnej nowej krzywej ciągłej, wypełniającej kwadrat. – Sur une novelle courbe continue qui remplit toute une aire plane* by Wacław Sierpiński [13] and in 1913 *O pewnej krzywej p. Peano – Über eine Peanosche Kurve* by George Polya (see [8]).

In the paper [13], Sierpiński showed that[3]

There is a bounded, continuous, and even function of a real variable t which satisfies the functional equations:

$$f(t) + f\left(t + \frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \textit{for all real } t \tag{1}$$

and

$$2f\left(\frac{1}{4}t\right) + f\left(t + \frac{1}{8}\right) = 1 \qquad \textit{for all } t \in [0, 1] \tag{2}$$

---

[1] The name 'Space-Filling Curves' probably is due to E. H. Moore, but in his paper [5] such curves are called *continuous surface-fillings curves.*

[2] *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*, until 1910 named *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau*, was the main Polish scientific journal published by the Academy of Arts and Sciences in Kraków in the XIX century and the first two decades of the XX century.

[3] The English translation of the formulation of the theorem by H. Sagan [12].

and that

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f\Big(t - \frac{1}{4}\Big) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 1$$

passes through every point of the square $[0,1]^2$.

In my talk, I will describe the construction and properties of this function and I will present the Sierpiński's way to obtain the geometric representation of the curve and approximation polygons (see figure [1]).

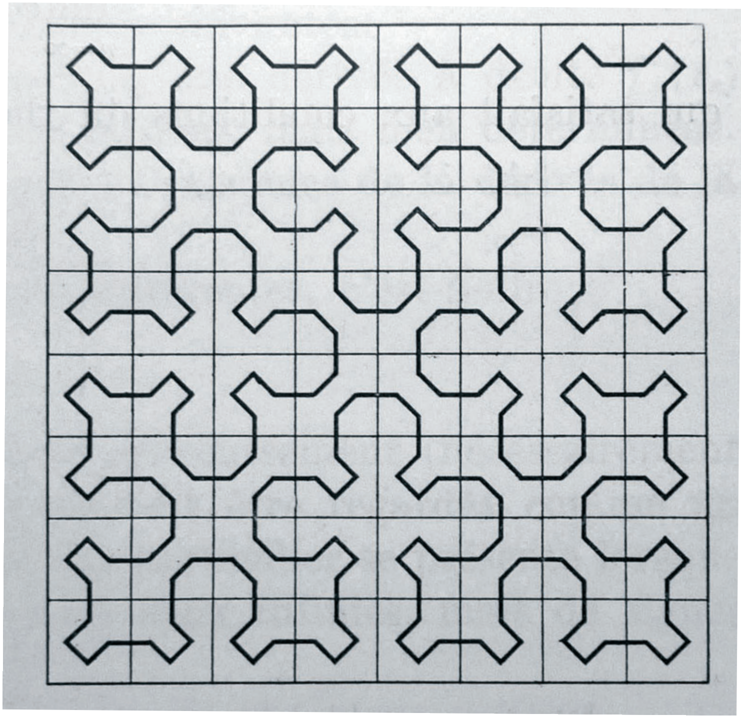


Figure 1: Fourth approximation polygons of the Sierpiński's Space-Filling Curve

Next, I will present the Pólya's Space-Filling Curve[4] starting with geometric idea (see figure 2) and showing geometric and arithmetic construction (see figures 3, 4).

[4] In the footnote 3 in [8] Pólya pointed out that the curve is a generalization of Sierpiński's Space-Filling Curve

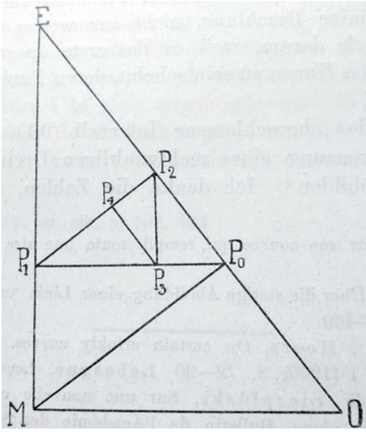


Figure 2: Geometric idea of the construction of the Pólya's Curve

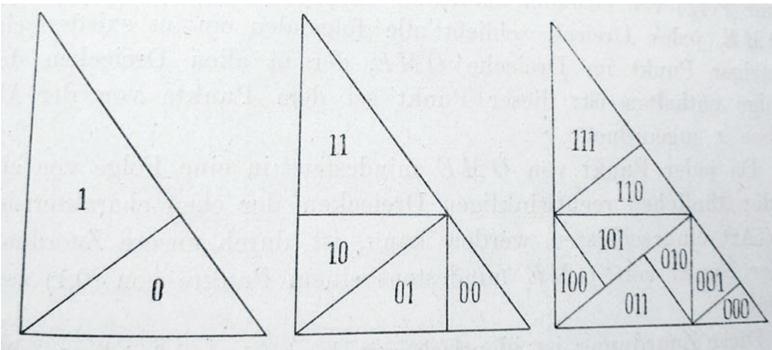


Figure 3: Numeration of the approximation polygons

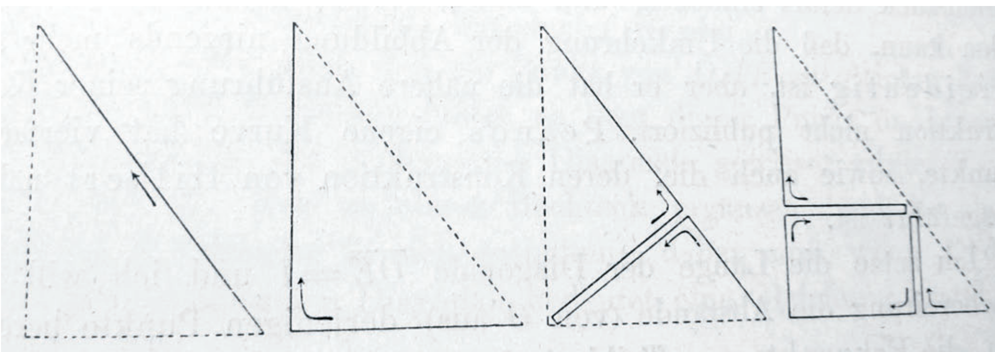


Figure 4: From first to fourth approximation polygons of the Pólya's Curve

At the end, I will discuss basic results on differentiability of the Pólya's Space-Filling Curve ([3], [8], [9], [11]).

References

[1] Cantor G., *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **84** (1878), 242–258.

[2] Hilbert D., *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Mathematische Annalen **38** (1891), 459–460.

[3] Lax P. D., *The Differetiability of Pólya's Function*, Advances in Mathematics **10** (1973), 456–464.

[4] Mazurkiewicz S., *O punktach wielokrotnych wypełniających obszar płaski*, Prace Matematyczno-Fizyczne **26** (1915), 113–120.

[5] Moore E. H., *On certain crinkly curves*, Transactions of the American Mathematical Society **1** (1900), 79–90.

[6] Netto E., *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **86** (1879), 263–268.

[7] Peano G., *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Mathematische Annalen **36** (1890), 157–160.

[8] Pólya G., *Über eine Peanosche Kurve*, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A: Sciences Mathématiques **9** (1913), 305–313.

[9] Prachar K., Sagan H., *On the Differentiability of the Coordinate Functions of Póyla's Space-Filling Curve*, Monatshefte für Mathematik **121** (1996), 125–138.

[10] Sagan H., *Nowhere Differentiability of Sierpiński's Space-filling Curve*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics **40** (1992), 217–220.

[11] Sagan H., *The Coordinate Function of Sierpiński's Space-filling curve are nowhere differentiable*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics **41** (1993), 73–75.

[12] Sagan H., *Space-Filling Curves*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1994.

[13] Sierpiński W., *Sur une novelle courbe continue qui remplit toute une aire plane*, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A: Sciences Mathématiques **8** (1912), 462–478.

Address

Dr. Danuta Ciesielska
Mathematical Institute
Faculty of Mathematics, Physics, and Technical Science
Pedagogical University of Cracow
Podchorążych 2
30–084 Cracow
Poland
e-mail: *smciesie@cyfronet.krakow.pl*

KURZOVÉ PREDNÁŠKY KARLA PELZA Z DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE 1906/7

JÁN ČIŽMÁR

Abstract: This paper presents the report on the litographic record of the curriculum lectures on descriptive geometry given by Karel Pelz at the Czech Technical University in Prague in the academic year 1906/7. Karel Pelz belonged to a group of eminent Czech geometers in the last quarter of the 19^{th} century. There are several objects and results in the descriptive geometry named after him.

1 Úvod

Karel Pelz (1845–1908) patril k skupine českých geometrov, ktorí v posledných 2–3 desaťročiach 19. storočia a na začiatku 20. storočia v rakúskej časti rakúsko-uhorskej monarchie významne prispeli k rozvoju deskriptívnej a projektívnej geometrie v ich klasickej podobe. Pelzov dvadsaťročný pobyt na technike v Grazi (1876–1896) a vyše jedenásťročný pobyt na pražskej českej technike (1896–1908) priniesol nielen pedagogické pôsobenie vrcholnej kvality, ale znamenal aj vedecký prínos k rozvoju metód a k objavu nových výsledkov v deskriptívnej geometrii ([1]). Pelzovo doplnenie teórie Steinerovej paraboly (Steinerova-Pelzova parabola) a rozvinutie jej konštrukčných aplikácií ([2]), zovšeobecnenie Queteletovej-Dandelinovej vety a viaceré vety o ohniskách obrysov plôch druhého stupňa, ich priemetoch a hodených tieňoch (Pelzove vety) ([3]) figurujú pod Pelzovým menom v klasickom obsahu deskriptívnej geometrie. Jeho prínos k ďalším závažným témam, akými sú dôkaz Pohlkeho vety, budovanie základov ortogonálnej axonometrie, problematika lesklých bodov, konštrukcia osí plôch druhého stupňa a i., bol už za jeho života všeobecne známy a vysoko hodnotený ([4]).

Sledované litografické vydanie rukopisného záznamu Pelzových prednášok základného kurzu deskriptívnej geometrie na Českej vysokej škole technickej v Prahe v akademickom roku 1906/7 uverejnené pod názvom *DESKR. GEOMETRIE – DLE PŘEDNÁŠEK V R. 1906/7* ([5]) šťastnou náhodou uniklo zničeniu, ktoré by pravdepodobne bolo malo za následok ochudobnenie možností poznávať históriu domácej vedy a vysokého školstva z originálnych prameňov. Pri klesajúcom záujme o štúdium deskriptívnej geometrie a rastúcej tendencii likvidovať tento predmet v programe výučby stredných škôl a technických fakúlt by neznalosť histórie vývoja tohto predmetu a jeho zástoja vo vysokoškolskej príprave technikov pred 100 rokmi ešte viac oslabila pozíciu zástancov náročnej teoretickej prípravy budúcich inžinierov v predmetoch matematicko-fyzikálnej základne inžinierskeho vzdelávania.

2 Obsah kurzu prednášok

Textová časť rukopisu zaznamenaných prednášok obsahuje 479 strán; 515 narysovaných obrázkov zaberá ďalších 104 strán formátu A4. Členenie textu nie je príliš prehľadné, zreteľne oddelené sú len tematicky výrazne odlišné kapitoly, číslovanie kapitol, paragrafov a odsekov fakticky neexistuje, len miestami sa sporadicky vyskytuje náhodné očíslovanie menších súborov úloh, typov klasifikácií a pod. Nasledujúci prehľad nie je vždy explicitne prítomný v publikácii, je len pokusom zvonku o čiastočnú systemizáciu umožňujúcu primerane vzdelanému čitateľovi orientovať sa v obsahu podľa neskorších prístupov k organizovaniu štruktúry učebníc a učebných textov. (Dnešné požiadavky na systemizáciu učiva sú podstatne vyššie.)

2.1 Prehľad kapitol, tematických celkov, tém, úloh atď.:

Úvodná kapitola (bez názvu) (str. 1–28): Determinácia; Premietanie; Zobrazovanie; Zobrazovanie roviny vo všeobecnej polohe; Priamka; Veta duality; Transformácia dvojnásobná; Použitie piatej priemetne; Uhol dvoch rovín; Niekoľko úloh o riešení odchýlky; O trojhrane.

Premietanie kótované čiže číselné (str. 29–63): Premietanie kótované čiže číselné; Skutočná dĺžka úsečky a odchýlka od priemetne; Interval; Spádová mierka; Vzájomná poloha dvoch priamok; Priemet roviny; Priamka a rovina; Rovina prechádzajúca priamkou; Dve roviny; Priesečník priamky s rovinou; Vzdialenosť bodu od roviny; Vzdialenosť bodu od priamky; Skutočná veľkosť uhla; Uhol dvoch rovín.

Ortogonálna axonometria (str. 64–119): Chýbajú strany 64–69.
Redukčné uhly; Špeciálne prípady axonometrie; Zobrazovanie základných útvarov; Stopníky priamky; Vzdialenosť bodu od axonometrickej priemetne; Zobrazenie roviny; Dve roviny; Priesečník priamky s rovinou; Axonometrická stopa roviny; Axonometrický stopník priamky; Skutočná dĺžka úsečky; Priamka kolmá na rovinu; Vzdialenosť bodu od roviny; Rovina kolmá na priamku; Skutočná veľkosť uhla; Axonometrický obraz kružnice a súvisiace úlohy; Axonometrické obrazy telies: rotačný kužeľ, rovinný rez kužeľa, osvetlenie kužeľa, osvetlenie dutého kužeľa, osvetlenie valca; guľa – bod na guľovej ploche, osvetlenie gule.

Centrálne premietanie (str. 121–187): Bod a priamka (základné pojmy stredového premietania); Priemet priamky; priamky v špeciálnej polohe; Zobrazenie bodu na priamke; Skutočná dĺžka úsečky a súvisiace úlohy (deliaci bod, deliaca kružnica); Odchýlka priamky od priemetne; Dve priamky; Zobrazenie roviny, špeciálne polohy roviny; Polohové úlohy o priamkach a rovinách; Odchýlka roviny od priemetne; Vzdialenosť bodu od roviny, vzdialenosť bodu od priamky; Priesečník priamky s rovinou; Os dvoch mimobežiek; Uhol dvoch rôznobežiek; Odchýlka priamky od roviny; Uhol dvoch rovín; Zobrazenie rovinného útvaru, otočenie roviny do priemetne; Vzdialenosť dvoch rovnobežiek; Rôzne spôsoby konštrukcie obrazu rovinného útvaru; Zobrazenie ihlana; Zobrazenie hranola a jeho osvetlenia.
Krivé čiary a plochy: Obraz kružnice: elipsa a hyperbola; stredový priemet dutého valca a jeho stredového osvetlenia; stredový priemet gule; niekoľko doplnkov k zobrazovaniu oblých telies.

Projektívna geometria (str. 187–338): Základné útvary 1., 2. a 3. rádu; Dvojice, trojice a štvorice bodov; deliaci pomer; dvojpomer; harmonické štvorice; vzťahy bodového radu, zväzku priamok a zväzku rovín.
Projektívnosť základných útvarov; perspektívnosť; perspektívnosť a projektívnosť rovnorodých a nerovnorodých útvarov; dualita; konštrukcie v projektívnosti.
Teória útvarov involučných: bodová involúcia; samodružné body; klasifikácia bodových involúcií; konštrukcie v involúcii; metrické aplikácie.
Priamková involúcia: konštrukcie; aplikácie.

Teória kužeľosečiek: Projektívny výtvor bodovej a dotyčnicovej kužeľosečky (duálne konštrukcie); Konštrukcie bodových a dotyčnicových kužeľosečiek z daných prvkov; Veta Pascalova a veta Brianchonova a ich aplikácie (vrátane metrických vlastností).
Projektívnosť bodových a dotyčnicových sústav na kužeľosečkách; aplikácia na lineárne útvary.
Teória pólov a polár: základné definície a konštrukcie; združené póly, združené poláry; involúcia združených polár indukovaná kužeľosečkou v bode; duálne: involúcia združených pólov indukovaná kužeľosečkou na priamke; aplikácie na konštrukcie kužeľosečiek (vrátane metrických vlastností); polárny trojuholník; priemer, združené priemery, asymptoty, osi; stred kužeľosečky; ohniská; aplikácie na konštrukcie kužeľosečiek; absolútna involúcia, kruhové body.
Priestorové útvary odvodené z projektívnosti: kužeľová plocha, valcová plocha, nerozvinuteľná plocha 2. stupňa (jednodielny hyperboloid, hyperbolický paraboloid)
Kolineácia: všeobecná, perspektívna; samodružné prvky, charakteristika; perspektívna kolineácia medzi kužeľosečkami a jej konštrukčné využitie; klasifikácie kužeľosečiek podľa polohy k úbežnici.
Oskulačná kružnica v bode kužeľosečky; stred krivosti; konštrukcie; hyperoskulácia; kružnice krivosti vo vrcholoch kužeľosečiek.
Afinita: všeobecná, perspektívna; charakteristika. Afinný obraz kužeľosečky. Aplikácie na rôzne konštrukcie bodov a dotyčníc elipsy, odvodené z konštrukcií pre kružnicu.
Perspektívna kolineácia a perspektívna afinita v priestore: základné pojmy
Teória plôch; krivé plochy: základné pojmy; algebrické plochy; stupeň plochy; polarita vzhľadom na (regulárnu) plochu druhého stupňa; afinná klasifikácia regulárnych plôch druhého stupňa.

Rotačné plochy druhého stupňa (str. 339–385): klasifikácia regulárnych plôch. Rotačný elipsoid: základné úlohy: zobrazenie bodu na ploche, dotyková rovina, rovinný rez, priesečníky priamky s elipsoidom, osvetlenie – rovnobežné a stredové; dotykové roviny idúce priamkou, rovnobežné s danou rovinou. Rotačný paraboloid: základné úlohy. Jednodielny hyperboloid: základné úlohy. Dvojdielny hyperboloid – len uvedenie.

Rotačné plochy stupňa vyššieho (str. 386–423): Anuloid: zobrazenie bodu na ploche, dotyková rovina v bode, rovinný rez, dotyčnica v bode rezu; rovnobežné osvetlenie.
Rovnobežné osvetlenie rotačných plôch vyšších stupňov; stredové osvetlenie. Spoločné dotykové roviny rotačných plôch. Prienik dvoch rotačných plôch: rôzne metódy riešenia úlohy v závislosti od vzájomnej polohy osí.

Všeobecné plochy druhého stupňa (trojosové) (str. 424–465): klasifikácia.
Trojosový elipsoid: zobrazenie bodu na ploche, dotyková rovina, rovnobežné osvetlenie, rovinný rez, stredové osvetlenie.
Eliptický paraboloid: štandardné základné úlohy, rovnobežné osvetlenie, stredové osvetlenie; priesečníky s priamkou, dotykové roviny prechádzajúce priamkou, kruhové rezy.
Dvojdielny hyperboloid: obraz rotačného dvojdielneho hyperboloidu v perspektívnej afinite; kruhové rezy. Kruhové rezy eliptického valca.
Jednodielny čiže nerozvinuteľný hyperboloid: obraz rotačného jednodielneho hyperboloidu v perspektívnej afinite; základné vlastnosti; rovnobežné osvetlenie; kruhové rezy. Jednodielny hyperboloid ako množina všetkých priečok troch po dvojiciach navzájom mimobežných priamok.

Hyperbolický paraboloid: výtvor plochy; zobrazenie priamok plochy; dotyková rovina; krivky na ploche; os, vrchol, hlavná rovina.

Plochy vznikajúce pohybom priamky (str. 461–465): rozvinuteľné, nerozvinuteľné; základné prvky nerozvinuteľných plôch; dotykové roviny pozdĺž priamky, Chaslesova veta (bez uvedenia autora), dotykový hyperboloid.

Konoid (str. 470–471): riadiace útvary, konštrukcia priamok; príklad: eliptický konoid.

Nerozvinuteľné skrutkové plochy (str. 472–476): riadiace útvary; klasifikácia; kolmý skrutkový konoid: dotyková rovina; osvetlenie; skrutka; šikmý skrutkový konoid.

Klenba šikmého priechodu (str. 477–478): riadiace útvary; konštrukcia tvoriacich priamok, dotyková rovina.

3 Komentár

3.1 Obsah

Podľa obsahu prednášok a ich štýlu je temer isté, že autor predpokladal u poslucháčov znalosť stredoškolskej deskriptívnej geometrie v rozsahu učiva reálok alebo aspoň reálnych gymnázií. Na takýto predpoklad možno usudzovať z niekoľkých faktov:

1. Autor úplne opomína čo aj len elementárny spôsob uvedenia Mongeovej metódy a riešenia základných úloh v nej. Po zavedení pravouhlej sústavy súradníc a stotožnení troch jej rovín s priemetňami pravouhlého premietania prechádza hneď k použitiu štvrtej a piatej priemetne a k racionalizácii riešenia niektorých zložitých metrických úloh pomocou týchto nových priemetní. Táto tematika spolu s podrobnou teóriou trojhranov je obsahom prvej kapitoly uvedenej bez názvu.

2. V zázname prednášok niet najmenšej zmienky o štruktúre ambientného priestoru úvah a konštrukcií. Bez najmenších pochýb je ním rozšírený reálny euklidovský priestor s náležitou komplexifikáciou v prípadoch kvadratických úloh s imaginárnymi koreňmi.

Druhá kapitola je venovaná tematickému celku kótovaného zobrazenia. Je v nej vyriešená séria základných úloh v tradičnom alebo mierne zmenenom usporiadaní. Osobitosťou kapitoly v porovnaní s ostatnými kapitolami alebo neskoršími prameňmi je pomerne silná väzba terminológie na topografiu zemského povrchu.

Tretia kapitola o stredovom premietaní obsahuje obšírny výklad tejto zobrazovacej metódy s podrobným riešením všetkých základných úloh aj ich jednoduchých aplikácií. Bijekcia bodového priestoru s výnimkou stredu premietania s množinou všetkých obrazov v priemetni je daná priradením usporiadanej dvojice (stredový priemet, pravouhlý priemet) k temer každému bodu priestoru. S týmto princípom zobrazenia pracujú aj neskoršie učebnice deskriptívnej geometrie pre technikov, ako napr. Jarolímek V., Procházka B.: *Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické,* Praha 1909, alebo [2]. V texte nie je žiadna zmienka o možnom výhodnom použití *metódy dvoch stôp* pri tejto zobrazovacej metóde na zobrazenie priamok a rovín. Štandardné aplikácie zahrnujú zobrazenie kružnice a jednoduchých telies, akými sú hranol, ihlan, valec, kužeľ, guľová plocha, a rovnobežné aj stredové osvetlenie týchto telies.

Rozsiahla štvrtá kapitola obsahuje elementárne základy projektívnej geometrie budované syntetickou metódou v rozšírenej euklidovském rovine a v rozšírenom euklidovskom priestore, pričom obe bodové množiny sú doplnené nevyhnutnou komplexifikáciou. Dôležitými tematickými celkami tejto kapitoly sú teória kužeľosečiek a teória polarity vzhľadom na kužeľosečky. Kapitolu zneprehľadňujú nesystematické prechody z teórie rýdzo projektívnej do teórie afinnej a metrickej bez jasného odlíšenia rozdielnej povahy týchto teórií. Kapitola je cenná množstvom vyriešených elementárnych i komplexnejších úloh, čo z hľadiska zamerania publikácie bolo u študentov zrejme vítané.

Nasledujúce tri kapitoly – Rotačné plochy druhého stupňa, Rotačné plochy stupňa vyššieho a Všeobecné plochy druhého stupňa (trojosové) – sú obsahom aj štruktúrou veľmi blízke spracovaniu aj v neskorších publikáciách podobného zamerania. Ako v priebehu celej publikácie, aj tu je väčšina úloh vyriešená veľmi podrobne.

Posledné štyri časti uvedené názvami (pre ich malý rozsah sotva ich možno nazvať kapitolami) sa zaoberajú problematikou nerozvinuteľných priamkových plôch. Teória s argumentáciou v nich zaberá minimálny priestor, skôr ich možno hodnotiť ako ilustračné príklady objektov s istým významom pre niektoré oblasti techniky.

3.2 Metodika

Text publikácie jasne potvrdzuje, že ide o záznam prednášok s vysokým komunikačným zámerom a zrejmým úsilím uľahčiť poslucháčom v maximálnej miere cestu k osvojeniu sprostredkovaných poznatkov. Svedčí o tom minimum exaktnej teoretickej zložky, ktorá pri individuálnom štúdiu poslucháčov, oboznamujúcich sa s tematikou po prvý raz, pôsobí obvykle retardačne. Úlohy – od najjednoduchších po najzložitejšie – sú vypracované detailne, pedantne, s pozvoľnou postupnosťou krokov, ktorá umožňuje sledovať postup riešenia aj čitateľom s menším nadaním, predbežným vzdelaním a slabšou erudíciou. Stručne vyjadrené – publikácia je napísaná pre študenta, ktorý sa z nej chce učiť a môže sa bez nadmerného úsilia naučiť. Je to kniha prvých kontaktov študenta s matériou, ktorú má zvládnuť na úrovni návykov. V tejto situácii a v takejto relácii kniha – čitateľ je stimulovanie tvorivého prístupu a podnecovanie intenzívnej samostatnej práce druhoradé.

V porovnaní s dvojdielnou učebnicou [2], [3] podobného zamerania, ale nepomerne väčšieho záberu i vyšších vedeckých a spoločenských ambícií, má posudzovaná publikácia značne nižší štandard systemizácie a rešpektovania logickej štruktúry sprostredkovaného učiva. V tomto ohľade treba brať do úvahy aj časový posuv vyše dvoch desaťročí medzi ich prvým uverejnením, ako aj skutočnosť, že učebnica svoj proklamovaný status nikdy reálne nenaplnila.

3.3 Terminológia

V používanej terminológii publikácie [5] sú v porovnaní s terminológiou učebnice [2] a [3] isté zreteľné rozdiely, čo je z mnohých dôvodov pochopiteľné. Za čas, ktorý uplynul medzi publikáciou prednášok a prvým vydaním spomenutej učebnice, sa prirodzeným spôsobom vyvíjala a doplňovala odborná terminológia deskriptívnej geometrie, vyvíjal sa prirodzený jazyk, pravopisné pravidlá a pokrok zaznamenala aj jazykoveda, čo všetko sa nesporne odrazilo aj na jazyku, štýle a terminológii odborných publikácií.

Zo zjavných terminologických rozdielov treba uviesť: *stopníky* priamky Pelz nazýva *stopami*, otočenie roviny do priemetne nazýva *sklopením* aj v prípade uhla rôzneho od pravého, hlavnú priamku v kótovanom zobrazení nazýva *vrstevnou priamkou* (vrstevnicou), termín *spádová priamka* nepozná, vágne narába s termínmi *priemet* a *obraz*, zamieňa veľmi často geometrický *objekt* s jeho *hranicou* (kruh – kružnica, hranol – hranolová plocha, ihlan – ihlanová plocha, valec – valcová plocha atď.), používa u niektorých autorov dodnes živý obsahovo nezmyselný termín *skutočná* (v jeho dikcii pravá) *veľkosť* (*dĺžka*) *úsečky* ako kalk z nemeckého (a dnes dávno opusteného) *die wahre Grösse* (vzťahuje sa aj na uhol); v projektívnej geometrie archaické názvy *dvojiny*, *trojiny*, ... nahradili dnešné *dvojice*, *trojice*, ... Rozkolísané tvary niektorých slov prirodzeného jazyka sa medzičasom stabilizovali, niektoré odborné termíny sa spresnili, nové termíny pribudli, niektoré staršie prirodzenou cestou zanikli. Pelzovmu textu však každý primerane vzdelaný čitateľ bez problémov rozumie aj dnes.

4 Záver

Pelzove prednášky v čase svojho vzniku boli napriek obvyklým dobovým obmedzeniam spoľahlivým a vysoko informatívnym prameňom štúdia základov deskriptívnej geometrie pre všetkých začínajúcich študentov technických odborov. Napriek storočnému odstupu by túto službu s istými úpravami mohli poskytnúť aj dnešnému študentovi v úvode jeho štúdia.

Literatúra

[1] Sklenáriková Z.: *Sto rokov od smrti Karla Pelza*. G – Časopis pre geometriu a počítačovú grafiku 5(2008), čís. 9, 31–44.

[2] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J.: *Deskriptivní geometrie I*. Nakladatelství ČSAV, Praha 1954, 49–55 (2. vydanie).

[3] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J.: *Deskriptivní geometrie II*. Nakladatelství ČSAV, Praha 1954, 442–443 (2. vydanie).

[4] Loria G.: *Storia della geometria descrittiva*. Milan, Ulrico Hoepli, 1921.

[5] Pelz K.: *Deskr. geometrie – Dle přednášek v r. 1906/7*. Praha, 1907.

Adresa

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4
P.O. BOX 9
918 43 Trnava
Slovenská republika
e-mail: *jan.cizmar@truni.sk, cizmar@fmph.uniba.sk*

ROLA STANISŁAWA ZAREMBY (1863–1942) W KSZTAŁTOWANIU SIĘ NOWOCZESNEGO OŚRODKA MATEMATYCZNEGO W KRAKOWIE

STANISŁAW DOMORADZKI

Abstract: In the paper, we present the silhouette of Stanislaw Zaremba, professor at the Jagiellonian University, as well as his impact on the development of mathematics in Kraków and in Poland. We emphasize his role in the dissemination of mathematical sciences and the creating foundations of the Kraków School of differential equations.

1 Informacje wstępne

Na Uniwersytecie Jagiellońskim od czasów Jana Śniadeckiego (1756–1830) funkcjonowały dwie katedry matematyki. Najwybitniejszym profesorem w XIX wieku był Franciszek Mertens (1840–1927), który w latach 1865–1884 kierował jedną z nich. Do przełomu wieków Uniwersytet czekał na dwóch wybitnych uczonych matematyków Kazimierza Żorawskiego (1866–1953)[1] i Stanisława Zarembę.

Portret S. Zaremby zamieszczony w czasopiśmie *Acta Mathmematica* (1916)

[1] Zob. artykuł Z. Pogody w tym tomie.

Stanisław Gołąb pisał:[2] *Impas o wahającym się nasileniu trwał przez okres prawie stu lat, od I rozbioru Polski,*[3] *aż do przełomu XIX i XX wieku, kiedy to matematyka* [polska – S. D.] *wkroczyła na arenę europejską.*

2 Biografia

Stanisław Zaremba urodził się 3 października 1863 w Romanówce (Ukraina) w rodzinie Hipolita, inżyniera, i Aleksandry z Kurzańskich. Szkołę realną – Gimnazjum św. Piotra z niemieckim językiem wykładowym ukończył w 1881 roku w Petersburgu, po czym rozpoczął studia w tamtejszym Instytucie Technologicznym, gdzie w 1886 uzyskał dyplom inżyniera technologa. Rok spędził u rodziców w Petersburgu, następnie jesienią 1887 roku wyjechał na studia matematyczne do Paryża. W 1888 roku uzyskał stopień licencjata (de Licence ès sciences mathématiques). Na jeden semestr r. a. 1888/1889 wyjechał do Berlina. Powrócił do Paryża, gdzie 30 listopada 1889 roku obronił rozprawę doktorską *Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps homogène indéfini.* Dyplom „de Docteur es Sciences mathématiques". Nazwa „dyplom doktora nauk matematycznych" jest ważna, dla cudzoziemców zazwyczaj zarezerwowany był „Doctorat de l'Université".

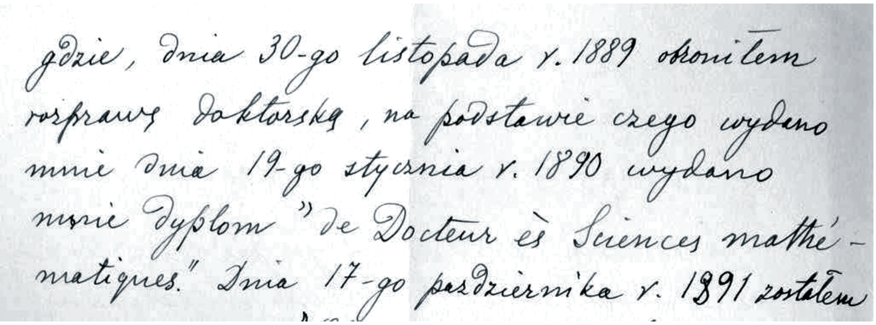
Recenzentami byli E. Picard (1856–1941) i G. Darboux (1842–1917).[4] Od października 1891 roku dostał nominację na profesora matematyki w liceach francuskich w Digne (do 1894), Nimes (do 1897) i Cahors (do 1900). Miał zaliczone 8 lat służby państwowej we Francji. Od 1 października 1900 roku dostał mianowanie na profesora nadzwyczajnego Uniwersytetu Jagiellońskiego, a od 1 kwietnia 1905 roku został profesorem zwyczajnym i kierownikiem II Katedry Matematyki. W r. a. 1914/15 był pełnił funkcję dziekana Wydziału Filozoficznego UJ. W 1902 został członkiem korespondentem Charkowskiego Towarzystwa Matematycznego, w 1903 – członkiem korespondentem Akademii Umiejętności, członkiem czynnym (1926), w 1920 został członkiem honorowym de la Societé de Sciences Agriculture et Arts du Bas – Rhin, w 1922 członkiem czynnym Lwowskiego Towarzystwa Naukowego, w 1923 – otrzymał godność „Officier de l'Instruction publique" – nadaną przez Ministra Oświaty Publicznej i Sztuk Pięknych Republiki Francuskiej, w 1925 z rąk Prezydenta Rzeczypospolitej Polskiej otrzymał Krzyż Komandorski Orderu Odrodzenia Polski, w 1925 r. został członkiem korespondentem Akademii Nauk ZSSR, w 1927 r. otrzymał nagrodę Paryskiej Akademii Nauk za prace naukowe, w 1927 r. został oficerem Legii Honorowej, którą to godność nadał Prezydent Republiki Francuskiej, w 1928 r. – otrzymał nagrodę Erazma i Anny Jerzmanowskich – nagrodę PAU za prace naukowe. W 1928 r. Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk nadało mu godność członka honorowego. Doktoraty honoris causa przyznały mu: Uniwersytet Jagielloński (1930), Uniwersytet w Caen (1932) oraz Uniwersytet Poznański (1934). Po przejściu na emeryturę (1935) został mianowany profesorem honorowym Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Zmarł w Krakowie 22 listopada 1942 roku.

[2] *Matematyka polska na tle matematyki światowej*, Studia i materiały z dziejów nauki polskiej, 1974, seria C, z. 19, s. 131–161.
[3] 1772 r.
[4] W dalszej części artykułu publikujemy fragmenty recenzji i ich tłumaczenia w całości.

3 Działalność naukowa

Doktorat Zaremby, co potwierdzają recenzje ukazywał go jako niezwykle uzdolnionego w zakresie badań naukowych, jako dojrzałego naukowca. Zaremba bardzo cenił swój dyplom doktorski, zawsze w cv wymieniał daty obrony i uzyskania stopnia, jak też nazwę: „de Docteur ès Science mathématiques”


gdzie, dnia 30-go listopada r. 1889 obroniłem
rozprawę doktorską, na podstawie czego wydano
mnie dnia 19-go stycznia r. 1890 wydano
mnie dyplom "de Docteur ès Sciences mathé-
matiques." Dnia 17-go października r. 1891 zostałem

z Archiwum UJ S II 619.

Poniżej prezentujemy po jednej stronie opinii Picarda i Darboux, które to materiały odnalezione zostały przez autora i dr Z. Pawlikowską-Brożek w Archiwum Narodowym Francji. Przed zdjęciami przedstawione zostały pełne tłumaczenia przedstawionych recenzji.[5]

Opinia o rozprawie p. Zaremby [E. Picarda]

Rozprawa Pana Zaremby jest poświęcona pytaniu postawionemu w 1858 roku przez Akademię Nauk w Paryżu. Pytano jaki powinien być stan cieplny ciała stałego jednorodnego i nieograniczonego, żeby układ izoterm w danej chwili pozostał takim układem po dowolnym czasie, tak żeby temperatura dawała się wyrazić jako funkcja czasu i dwóch innych zmiennych niezależnych. Riemann przysłał rozprawę na ten temat, gdzie tylko wskazał wyniki. Od tamtych czasów p. Weber podjął pytanie bardziej specjalne, mianowicie przypadek, gdzie temperatura wyraża się jako funkcja czasu i tylko jednej zmiennej. Pan Zaremba zaczyna od podjęcia tego ostatniego pytania i odnajduje wyniki pana Webera na zupełnie innej drodze. Abstrahując od przypadków bardzo prostych zagadnienie sprowadza się do następującego interesującego problemu znaleźć funkcje s trzech zmiennych x_1, x_2, x_3, *dla których:*

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial x_3}\right)^2 \; i \; \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2}$$

są funkcjami s; problemu którego rozwiązanie jest nadzwyczaj proste.

[5] Panu prof. dr hab. A. Schinzlowi serdecznie dziękuję za pomoc w tłumaczeniu recenzji.

Wróćmy teraz do zagadnienia przedstawionego przez Akademię. Riemann pokazał, że zagadnienie dzieli się na cztery różne problemy. Pewna liczba całkowita, którą Riemann oznacza przez m może przyjmować wartości 1, 2, 3 *i* 4. *Przypadki m* = 1, *m* = 4 *zostały w pełni rozpatrzone bądź przez Riemanna, bądź przez Webera. W swojej rozprawie Riemann daje tylko bardzo szczególne przypadki odnoszące się do m* = 2 *i m* = 3. *W przypadku m* = 3 *p. Zaremba rozwiązuje w pełni problem, przynajmniej w tym, co dotyczy szukania temperatury jako funkcji dwóch zmiennych* s_1, s_2 *od których ma zależeć i czasu.*

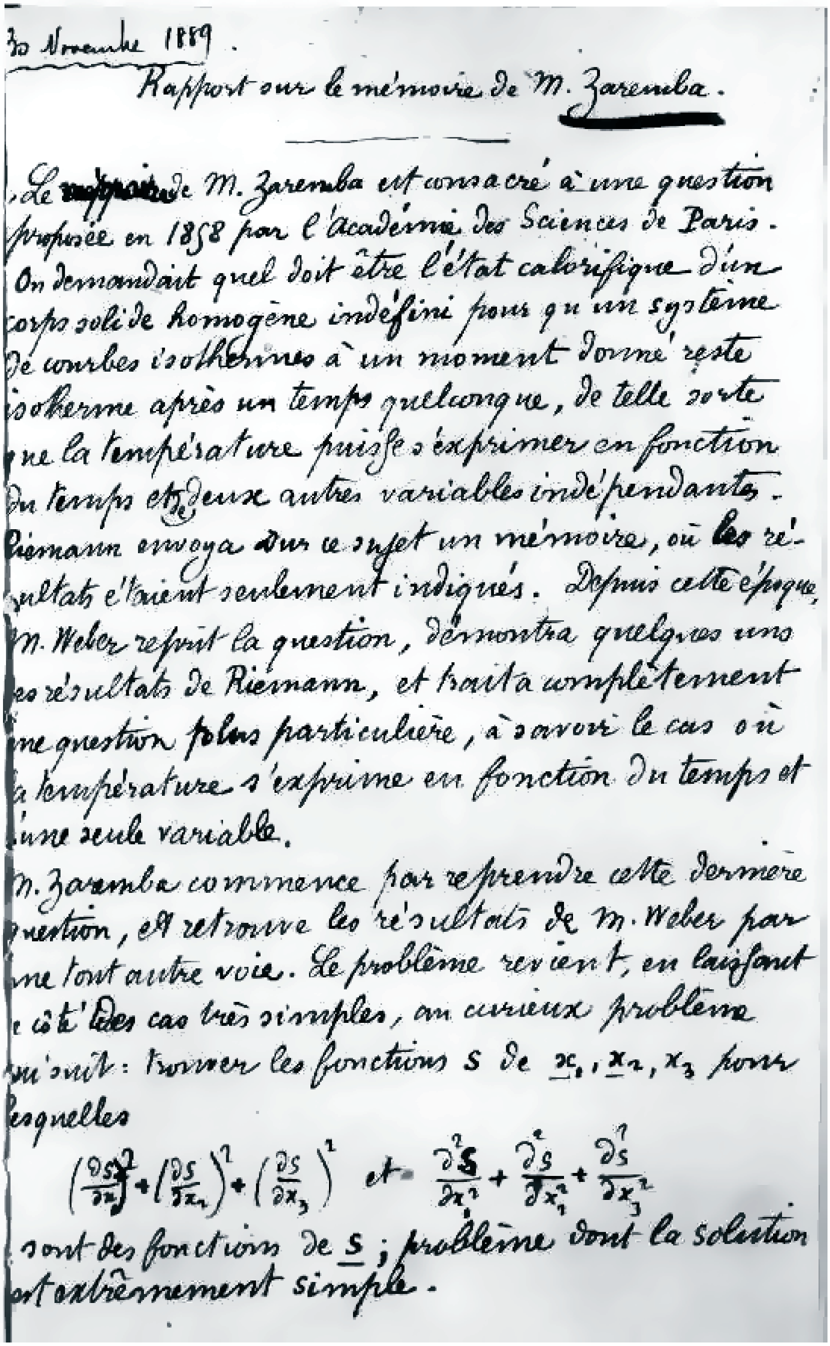
Czas wchodzi do wyrażenia temperatury tylko w postaci funkcji wymiernych i funkcji wykładniczych. Co do efektywnego znajdowania współczynników, które zależą od s_1, s_2, *wymaga ono całkowania układów równań różniczkowych.*

Pan Zaremba podaje liczne i interesujące przykłady, dużo obfitsze niż Riemann. Przypadek m = 2 *jest dużo trudniejszy, pan Zaremba przekracza znacznie punkt, gdzie zatrzymała się analiza Riemanna – przykłady które podaje stanowią rzeczywisty postęp w tym zagadnieniu. Nie można nie wspomnieć tu o szczegółach przekształceń.*

Cała ta praca jest długim szeregiem przekształceń rachunkowych wykonanych z bardzo wielkim mistrzostwem. Nie umielibyśmy zbyt pochwalić potęgi rachunkowej i cierpliwości, których pan Zaremba dał dowód w tej długiej pracy, którą poddaje pod osąd Wydziału i proponujemy przyjąć ją jako tezę doktorską.

Opinia G. Darboux

Wydział, co naturalne, przyjmuje zawsze z trochę większą wyrozumiałością prace, które są mu przedstawiane przez studentów obcokrajowców. Pan Zaremba nie skorzystał z tej dobrej (możliwości) propozycji. Jego teza byłaby przyjęta we wszystkich przypadkach, nawet przedstawiona przez Francuza. Nie dodam nic do opinii przedstawionej przez mojego konfratra p. Picarda, ale powinienem powiedzieć, że obrona potwierdziła nasze wrażenia. Pan Zaremba wytłumaczył bardzo jasno i zręcznie cel i plan swojej pracy. Pokazał również wiele talentu i wiedzy w wykładzie zagadnień teorii, które stanowiły przedmiot drugiej tezy. Wydział przyznaje mu więc bez wahania wszystkie kulki białe.



30 Novembre 1889.

Rapport sur le mémoire de M. Zaremba.

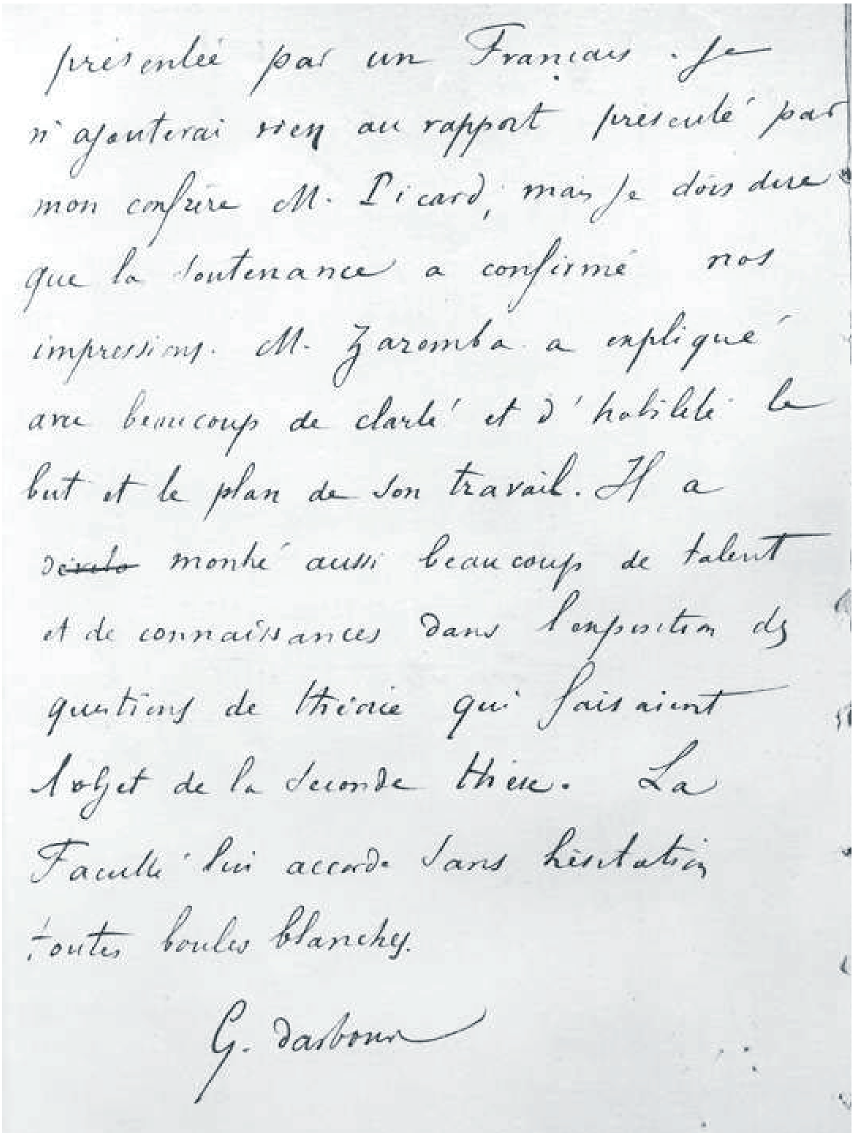
Le ~~mémoire~~ de M. Zaremba est consacré à une question proposée en 1858 par l'Académie des Sciences de Paris. On demandait quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes à un moment donné reste isotherme après un temps quelconque, de telle sorte que la température puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes. Riemann envoya sur ce sujet un mémoire, où les résultats étaient seulement indiqués. Depuis cette époque, M. Weber reprit la question, démontra quelques uns des résultats de Riemann, et traita complètement une question plus particulière, à savoir le cas où la température s'exprime en fonction du temps et d'une seule variable.

M. Zaremba commence par reprendre cette dernière question, et retrouve les résultats de M. Weber par une tout autre voie. Le problème revient, en laissant de côté des cas très simples, au curieux problème qui suit : trouver les fonctions s de x_1, x_2, x_3 pour lesquelles

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial x_3}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2}$$

sont des fonctions de s ; problème dont la solution est extrêmement simple.

Pierwsza strona recenzji doktoratu Zaremby napisanej przez E. Picarda
(Centre Historique Archives Nationales, Paris, AJ 16 5534)



présentée par un Français. Je
n'ajouterai rien au rapport présenté par
mon confrère M. Picard; mais je dois dire
que la soutenance a confirmé nos
impressions. M. Zaremba a expliqué
avec beaucoup de clarté et d'habileté le
but et le plan de son travail. Il a
montré aussi beaucoup de talent
et de connaissances dans l'exposition des
questions de théorie qui faisaient
l'objet de la seconde thèse. La
Faculté lui accorde sans hésitation
toutes boules blanches.

G. Darboux

Fragment opinii G. Darboux
(Centre Historique Archives Nationales, Paris, AJ 16 5534)

S. Zarmba opublikował ponad 100 prac naukowych. Przedmiotem jego badań były przede wszystkim równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Jego wyniki w zakresie równań liniowych typu eliptycznego miały fundamentalne znaczenie. W 1901 r. Poincaré opublikował analizę prac Zaremby w „Bulletin de Sciences Mathématiques”. Jego prace z teorii potencjału i funkcji harmonicznych cytowano w podręcznikach i monografiach tego przedmiotu. Zaproponował wprowadzenie nierówności różniczkowych do badania równań różniczkowych typu hiperbolicznego.

A. Pelczar (1937–2010), kontynuator dokonań naukowych Zaremby i Ważewskiego w pracy pt. *Stanisław Zaremba, 120th annivversary of abtaining Ph. D. at the Paris University*, Copernicus Center Reports no. 1, 2010[6] przedstawił dokonania naukowe i wkład Zaremby w rozwój Krakowskiej Szkoły Matematycznej. Od 1900 roku, kiedy Zaremba przybył do Krakowa stworzył wraz Kazimierzem Paulinem Żorawskim (1866–1953) krakowski ośrodek naukowy,[7] który w latach następnych szczycił się wybitnymi osiągnięciami szkół naukowych: równań różniczkowych Tadeusza Ważewskiego (1896–1972), analizy zespolonej Franciszka Leji (1855–1979) oraz geometrii Antoniego Hoborskiego (1879–1940) i Stanisława Gołąba (1902–1980).

Zainteresowania naukowe Stanisława Zaremby koncentrowały się wokół teorii równań różniczkowych cząstkowych, przede wszystkim rzędu drugiego, interesowały go związki z fizyką. Nazwisko Zaremby jest wielokrotnie cytowane w *Encyclopedia of Physics*,[8] w której używa się terminu „forma Zaremby-Jungermana" na określenie zasady niezmienniczości pewnego równania występującego w teorii lepkosprężystości. Jego wyniki są cytowane przy omawianiu kanonu wiedzy teorii równań eliptycznych w Enzyklopädie der Mathematischen Wissenchaften,[9] S. Zaremba uzyskał rezultaty, które weszły na trwałe do matematyki. Podał pierwszy przykład obszaru, dla którego klasyczny problem Dirichleta nie ma rozwiązania, zastosował metodę projekcji ortogonalnych w teorii problemu Dirichleta, co zostało zaliczone w *Development of Mathematics 1900–1950*[10] do osiągnięć wyznaczających *guidelinelines* rozwoju matematyki w pierwszym półwieczu XX stulecia. Wprowadził do teorii równań, którymi się zajmował, metody rachunku wariacyjnego. Był prekursorem teorii tzw. jąder samoreprodukujących się, co zostało niejako ponownie odkryte w latach 50-tych XX wieku.[11,12] S. Zaremba jest współautorem wspólnie z F. Kreutzem (1844–1910)[13] pracy o podstawach krystalografii geometrycznej *Sur les fondements de la Cristallographie géometrique*.[14]

Hugo D. Steinhaus (1887–1972), jedna ze sław Lwowskiej Szkoły Matematycznej przedstawił następującą charakterystykę S. Zaremby:[15] *Był to matematyk dużej miary, specjalista w teorii potencjału, pod wpływem szkoły francuskiej. Życie francuskie, formy polityczne Republiki, francuską kuchnię i francuskie obyczaje cenił tak wysoko, mówił po francusku i pisał o tyle lepiej niż po polsku, ze trzeba było się dziwić, dlaczego nie pozostał w przybranej ojczyźnie, lecz wrócił do prawdziwej.*

---

[6] Zob. strona internetowa Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, COPERNICUS CENTER REPORTS; http://www.copernicuscenter.edu.pl/images/stories/copercenter/report-e-book.pdf (13. VII. 2010).

[7] Dodajmy, że Wacław Sierpiński uzyskał doktorat w Krakowie w roku 1906, na UJ habilitował się też Stefan Mazurkiewicz w r. 1919, prace Steinhausa, Sierpińskiego, Janiszewskiego do publikacji w Biuletynie Akademii Umiejętności były prezentowane przez S. Zarembę.

[8] *Hanbuch der Physik* (S. Flüge, ed.), t. III.3., Berlin – Heidelberg – New York, 1965.

[9] Zob. A. Sommerfeld: *Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, Band II–I, Leipzig, 1907, 505–570.

[10] J.-P. Pier, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, 1994.

[11] Zob. N. Aronszajn: *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Mat. Soc. 68(1950), 337–404.

[12] Zob. również: T. Ważewski, J. Szarski: *Stanisław Zaremba* [w:] *Studia z dziejów Katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego*, Kraków 1964; A. Pelczar: Stanisław Zaremba (1863–1942), Kazimierz Paulin Żórawski, [w:] *Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki*, red. B. Szafirski, UJ, Kraków 2000, s. 313–328; *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węglowska, Tarnobrzeg, 2003, s. 286.

[13] Mineralog, współzałożyciel i prezes Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika we Lwowie, późniejszy rektor UJ.

[14] Bulletin International de l'Academie des Sciennces de Cracovie, 1917.

[15] Zob. H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Aneks, Londyn, 1992, s. 79.

Był niezmiernie wymagający i zdanie u niego egzaminu nauczycielskiego stanowiło niemałą sztukę. Niesłychanie uparty i bezkompromisowy ...

Potwierdzenie tych cech Zaremby znajdujemy, m. in. w satyrycznym artykule pisanym przez studentów w 1926 roku w „Gazecie matematycznej", zauważono, że ci co nie pracują solidnie powinni znaleźć się poza gmachem [matematyki uniwersyteckiej] .

hm! panie tego może będę za Wasze hm! hm! nieuctwo bardzo dobremi sypał!!! Hm! hm! Niedoczekanie!!! panie tego. Ja panie tego hm!hm!hm! wszystkich próżniaków, którzy hm! hm! panie tego nic tu korzystać nie będą, wygnam za ostatni próg tego gmachu panie,tak,tak. Ja panie i mój

Fragment kopii „Gazety Matematycznej" satyrycznego pisma studentów matematyki UJ z 1926 roku

Bezpośrednim uczniem Zaremby i twórcą krakowskiej szkoły równań różniczkowych był Tadeusz Ważewski (1896–?), który w latach 1914–1920 studiował na ówczesnym Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Rozpoczął studia od fizyki, a następnie – pod wpływem profesora Zaremby – zajął się matematyką.[16]

Poniżej prezentujemy fragment indeksu T. Ważewskiego z podpisami wybitych matematyków: K. Żorawskiego i S. Zaremby, J. Sleszyńskiego, A. Rosenblatta, A. Hoborskiego i fizyków: M. Smoluchowskiego , W. Natansona.[17]

16 A. Pelczar: *Tadeusz Ważewski – uczony i nauczyciel*, X Szkoła Historii Matematyki [materiały], Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Opolskiego, matematyka 30(1997), s. 131–139.
17 Scan indeksu otrzymałem od ucznia prof. Ważewskeigo A. Pelczara – prof. UJ.

4 Działalność S. Zaremby na rzecz środowiska

Mniej znana jest działalność S. Zaremby dotycząca reform nauczania matematyki, jego działalność wydawnicza dla nauczycieli, jego liczne refleksje o matematyce.

Profesor Zaremba był także pierwszym prezesem Towarzystwa Matematycznego powstałego w Krakowie w 1919, późniejszego Polskiego Towarzystwa Matematycznego.[18]

S. Zaremba uczestniczył w pracach Koła Krakowskiego Towarzystwa Nauczycieli Szkół Średnich i Wyższych. Przedstawił referat wprowadzający do zjazdu krakowskiego w 1918 roku na temat: *Pewne ogólne zasady, które należy uwzględnić przy organizacji oświaty publicznej w Polsce*. Wypowiadał się w sprawie sensowności egzaminu kwalifikacyjnego na nauczyciela szkoły średniej, sugerował sposób obsadzania stanowisk inspektorów szkolnych. Uważał, że powinni być przedmiotowi, nie jak dotąd „terytorialni". Proponował utworzenie Naczelnej Rady Szkolnej, zmianę sposobu i trybu obsadzania katedr uniwersyteckich, wnioskując, aby odbywało się to publicznie.

Warto podkreślić, że prof. Zaremba brał udział w działalności wprowadzenia matematyki polskiej w nurt międzynarodowy, w pracach Międzynarodowej Unii Matematycznej, m.in. opiniował polskich przedstawicieli. Sam uczestniczył w większości międzynarodowych kongresów matematycznych, które miały miejsce przed II wojną światową. Jest to mniej znana działalność profesora Zaremby, brał też udział w pracach mniej znanego gremium Matematycznego Komitetu Narodowego, którego konstytuujące zebranie również odbyło się w Krakowie w dniu 14 czerwca 1926 roku.[19] W 1932 roku był na Kongresie w Zurychu, kiedy dyskutowano wniosek o utworzenie Medalu Fieldsa.

Zaremba pisał skrypty i podręczniki, m.in. *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych* (1907), *Arytmetyka teoretyczna* (1912), *Wstęp do analizy* (1915, cz. 1; 1918, cz. 2). Był także autorem *Zarysu mechaniki teoretycznej* (1933, t. 1; 1939, t. 2; t. 3, opracowany później, pozostał w rękopisie).

Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych. był jednym z pierwszych podręczników, który ukazał się w Polsce z tej dziedziny i dedykowany przez przyszłym nauczycielom matematyki. Warty szczególnego podkreślenia i refleksji dydaktycznej jest rozdział XII podręcznika zatytułowany: *Pogląd na cechy ścisłości matematycznej. Trudności połączone z uczeniem i poznawaniem teorii matematycznych. Wskazówki natury pedagogicznej.* Dokonania S. Zaremby w kontekście dydaktyki matematyki i kultury matematycznej są jeszcze mało znane i docenione.

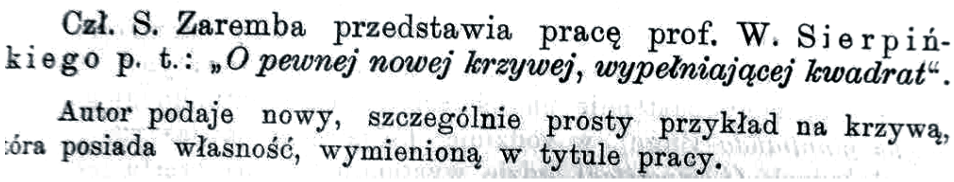
Godne podkreślenia i szerszego upowszechnienia jest prezentowanie przez prof. UJ, członka Akademii Umiejętności S. Zarembę wyników W. Sierpińskiego, czy Z. Janiszewskiego do publikacji w Akademii Umiejętności w Krakowie.

Dla przykładu S. Zaremba prezentował pracę o słynnym „dywanie Sierpińskiego".

---

[18] Zob. S. Domoradzki, A. Pelczar: *O założycielach Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Wiadomości Matematyczne 45(2009), nr 2, s. 217–240.

[19] Szczegółowe informacje w złożonej przez autora do druku pracy w wydawnictwie Polskiej Akademii Umiejętności.



Czł. S. Zaremba przedstawia pracę prof. W. Sierpińskiego p. t.: „*O pewnej nowej krzywej, wypełniającej kwadrat*“.

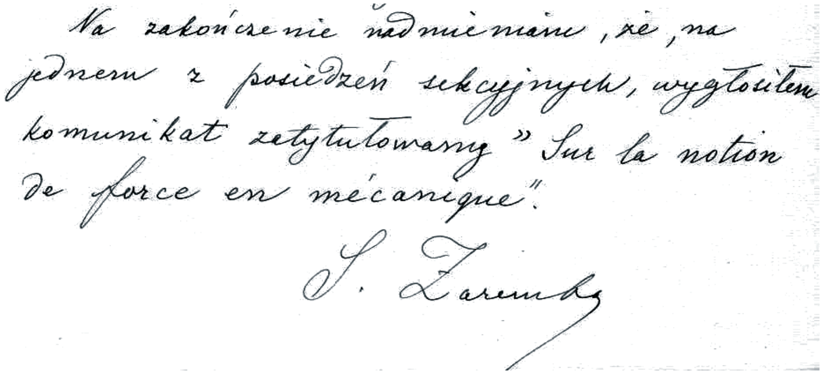
Autor podaje nowy, szczególnie prosty przykład na krzywą, óra posiada własność, wymienioną w tytule pracy.

5 Zakończenie

W 1930 roku Uniwersytet Jagielloński przyznał Zarembie godność doktora honoris causa. W uroczystości uczestniczyło, bądź przysłało list gratulacyjne wielu znakomitych matematyków. Wśród nich, m. in.: Blaschke, Borel, Bouligand, Cartan, Denjoy, Fréchet, Fubini, Hadamard, Lebesgue, Levi-Cività, Montel, Panlevé, Peano, Picard, Riesz, Tonelli, Volterra, z polskich matematyków: Banach, Knaster, Leja, Lichtenstein, Łukasiewicz, Mazurkiewicz, Sierpiński, Steinhaus i inni.

W. Wilkosz (1891–1941) i T. Ważewski uważają, że prof. Zaremba w historii matematyki polskiej stanowi epokę, od czasów objęcia przez niego katedry na UJ *rozpoczęła się nowoczesna era panowania precyzji nieznanej dotąd w Polsce*.[20]

Uczeń S. Zaremby Tadeusz Ważewski stworzył szkołę równań różniczkowych, znaną w świecie jako *krakowska szkoła równań różniczkowych*.



Na zakończenie nadmieniam, że, na jednem z posiedzeń sekcyjnych, wygłosiłem komunikat zatytułowany „Sur la notion de force en mécanique".

S. Zaremba

Fragment sprawozdania Zaremby z Kongresu w Zurychu (1932), ze zbiorów PAU

Adres

Stanisław Domoradzki
Uniwersytet Rzeszowski
Instytut Matematyki
35-959 Rzeszów
ul. Rejtana 16 a
e-mail: *domoradz@univ.rzeszow.pl*

[20] Zob. op. cit. A. Pelczar, *Złota Księga*, s. 319.

HILBERT'S THIRD PROBLEM

ZDENĚK HALAS, ANDREANA N. HOLOWATYJ

Abstract: We are dealing with the mathematical and historical background of Hilbert's Third Problem. Max Dehn solved it immediately in the year 1900, when it was formulated. Roots of this problem can be found in Elements of Euclid XII,5, where we can find proof of the two same height tetrahedra relation using the method of exhaustion. The question of the exhaustion method necessity led to the Hilbert's Third problem formulation: *to specify two tetrahedra of equal bases and equal altitudes which can in no way be split up into congruent tetrahedra.*

1 Formulation of the Third Problem

1.1 Hilbert's Twenty-three Problems

Hilbert addressed in the Second International Congress of Mathematicians, held in Paris in August 1900. His lecture on August 8 was not plenary; he spoke in one of six sections – in the section *History and Bibliography of Mathematics*. His lecture was published several times in German and French: twice in 1900 and twice in 1901. It's first publication contained only ten problems; the Third Problem was not included. The full version [7] which became canonical and which was the base for translation to English, Russian and other languages, was released in 1901.

1.2 The Third Problem

In early 1830's Farkas Bolyai[1] and Paul Gerwien independently proved the following theorem (known as Bolyai–Gerwein Theorem): *two polygons are equidecomposable*[2] *if and only if they have the same area.* In other words, the equidecomposability and the equality of area are equivalent for polygons in a plane. This means that we do not need the exhaustive method (or any other analogy of integration) for the definition of the area of polygons. Thus, roughly speaking, the area of polygons can be stated on the base of decomposition of any polygon to the triangles and on the requirement of additivity of the area. This approach we can already find in the Elements of Euclid.

In the plane the basic figure is the triangle, in the space it is a tetrahedron. If we want to build the theory of volume in the analogous way, we should be able to decompose any polyhedron to the tetrahedra[3] and to determine volume of any such tetrahedron. The second problem was solved in the twelfth book of the Elements of Euclid[4], but it is based

---

[1] Father of well-known Janos Bolyai – the inventor of non-Euclidean geometries.

[2] We say that two polygons P, P′ are equidecomposable if there exist nonoverlapping triangles $T_1, T_2, \ldots, T_n$ and $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ such that $P = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$ and $P' = T'_1 \cup T'_2 \cup \ldots \cup T'_n$, where for each $i = 1, 2, \ldots, n$ the triangle T_i is congruent to the triangle T'_i .

[3] Unfortunately, this is not generally possible. The proof was given by Nels Johann Lennes in 1911 and the elementary counterexample provided Erich Schönhardt in 1928 – Schönhardt polyhedron.

[4] Theorems XII,3 – XII,7; on the method of exhaustion, the theorem XII,5 is based: *Pyramids which are of the same height and have triangular bases are to one another as the bases.*

on the method of exhaustion. It seems to be a very strong and complicated technique for determining volumes of such basic polyhedra like tetrahedra. Hilbert points out that even C. F. Gauss (1777–1855) was surprised by using the method of exhaustion in *Elem.* XII,5 in his letters to his student Ch. L. Gerling (1788–1864).[5] This led him to the formulation of the Third Problem: *to specify two tetrahedra of equal bases and equal altitudes which can in no way be split up into congruent tetrahedra, and which cannot be combined with congruent tetrahedra to form two polyhedra which themselves could be split up into congruent tetrahedra.* For determining the volume of a tetrahedron, we need the fact that any two tetrahedra of equal bases and equal altitudes have the same volume. When this fact is proven, we can decompose a prism into three tetrahedra of the same volume, which immediately gives the fact that the volume of the tetrahedron is one-third of the product of area of the base and altitude.

2 Solution and the Solver

2.1 Maximilian Moses Dehn

Hilbert's Third Problem was solved immediately in 1900 by Max Dehn. He offered his solution even before the publication of the full list of the twenty-three problems, which contained this third problem.

Maximilian Moses Dehn, known better as Max Dehn, was born on the 13th of November, 1878, in Hamburg, Germany. After being educated in Hamburg and Freiburg, Dehn moved to Göttingen, where he received his doctorate degree in 1900. As a geometrist, Dehn's interests overlapped with those of Hilbert: Dehn wrote an unpublished paper that paralleled Hilbert's type of work. Dehn's paper used the proof that any continuous, closed curve that does not cross itself, lying in a plane, like a circle or polygon, has an inside and an outside. Dehn was able to prove that a simple closed polyhedron in three dimensions has a single inside and outside.

Dehn served in the German Army for three years beginning in 1915, first as a surveyor and then as a decoder. With lack of regard to some dignitaries in the service, Dehn ended up leaving the Army as a corporal and after the Great War returned to Breslau. In 1922, Dehn became a full professor at the University of Frankfurt. At this time in his career, Dehn shifted his interest in mathematics from geometry to algebraic topology. Briefly, algebraic topology involves folding and manipulating surfaces and drawing appropriate comparisons. Dehn had already previously contributed to this discipline in 1907 when, with Poul Heegaard, he published one of the first treatments of this subject in a paper to the Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Dehn's contributions to algebraic topology continued to "the word problem". Named after long strings of letters, the problem asked when two seemingly different "words" were actually the same.

Many mathematicians at the time were associated with Frankfurt's mathematics history seminar, some of whom included: Epstein, Hellinger, Szász, and Siegel. According to Siegel, "[We] did not necessarily strive to publish. The actual meaning of

[5] These letters were written in 1844; see [5], page 241 and 244. Gerling showed how to decompose two symmetrical tetrahedra into twelve congruent parts. However, this special result does not lead to a general proof; it does not show equidecomposability of *any* two tetrahedra with equal bases and equal altitudes.

the seminar laid in another direction, that is, to have a fertilizing effect on the student participants ... The seminar also gave us professors the enjoyment of observing the excellent achievements of long ago." Throughout the duration of the seminar, papers were avoided; this fact explains why there was no publication on the 1927 Dehn-Nielsen theorem.

Due to his status as a professor, Dehn was exempt from immigration quotas to the United States of America; however, to depart, Dehn needed to have a proof of employment. In 1940, the Dehns left Norway, traveled to Siberia, Japan, and across the Pacific. Upon his arrival to the United States in 1941, Dehn was posed with a problem. He was not famous at the time, and had only a year to find a new employer. He relocated within that time to Chicago, where he began teaching at the Illinois Institute of Technology, much to his dismay. In 1945, Dehn was offered a position at the Black Mountain College in North Carolina. Though the University disbanded in 1956, Dehn lived in that area for the rest of his life.

2.2 Solution and Dehn's Invariants

Dehn published his solution of the Third Problem in [3] and [4]. In the first paper he proposed two tetrahedra of the same base and altitude which are not interdissectable.[6] The original Dehn's proofs were very complicated. They were simplified by Russian mathematician V. F. Kagan (1869–1953) in [8]. The most simplified proof can be found in the monograph [1]. Generalization of Dehn's results for the spaces of dimension $n > 3$ is due to Swiss mathematician Hugo Hadwiger (1908–1981), see [6]. We can remark as a matter of interest that a nonsufficient proof of the Third Problem was delivered in 1896 before its formulation by D. Hilbert in the paper of French mathematician and engineer Raoul Bricard in [2].

Now we will present the main idea of Dehn's proof in the most simplified version. He defined a special invariant now called the *Dehn invariant,* which is an invariant under dissection, and proved that two interdissectable polyhedra must have equal Dehn invariants. Now it is easy to find two tetrahedra of the same base and altitude which are not interdissectable.

Dehn invariant[7] $D_f(P)$ is the function $D_f(P) = \sum_{e \in P} f(\alpha_e) \cdot |e|$ where e are edges of the polyhedron P, $|e|$ is length of the edge e, α_e is the angle of sides meeting in the edge e, and the f is *dihedral function*.[8] It is possible to prove that such function is "additive", more precisely if the polyhedron P is dissected into polyhedra P_1 and P_2 then $D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2)$. This is Dehn's theorem, which immediately follows the solution of the Third Hilbert's Problem: let be the polyhedra Q_1 and Q_2 such that for any dihedral function f the Dehn invariants $D_f(Q_1) \neq D_f(Q_2)$, then the Q_1 and Q_2 are not interdissectable.

Note that using Dehn's results, we can show that two polyhedra are *not* interdissectable. Concerning the converse, Swiss mathematician Jean-Pierre Sydler

6 We mean two polyhedra of the same volume which can be split into polygonal parts from which we can combine both the first polyhedron and the second one.

7 For example, for the unit cube C we have $\alpha_e = \pi/2$, $|e| = 1$, thus $D_f(C) = 12 \cdot f(\alpha_e) \cdot |e| = 12 \cdot f(\pi/2) \cdot 1 = 6 \cdot f(\pi) = 0$.

8 This function allows us to consider α up to rational multiples of π; the $f: R \to Q$ is such that for any $a, b \in R$ and $q \in Q$: $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(q \cdot a) = q \cdot f(a)$ and $f(\pi) = 0$.

(1921–1988) proved in [9] that polyhedra P_1 and P_2 are interdissectable if $D_f(P_1) = D_f(P_2)$ for every dihedral function *f*. Moreover, he proposed a pyramid inscribed in a cube which is interdissectable with a prism.

References

[1] Boltyanskii V. G.: *Tret'ya problema Gil'berta*. Nauka, Moskva, 1977.

[2] Bricard R.: *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres.* Nouvelles annales de mathématiques III, 15(1896), 331–334.

[3] Dehn M.: *Über raumgleiche Polyeder*. Nachrichten Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen f. d. Jahr 1900, 345–354.

[4] Dehn M.: *Über den Rauminhalt.* Math. Ann. 55(1902), 465–478.

[5] Gauss C. F.: *Carl Friedrich Gauss Werke. VIII*. Teubner, Leipzig, 1900.

[6] Hadwiger H.: *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder*. Math. Ann. 127(1954), 170–174.

[7] Hilbert D.: *Mathematische Probleme*. Archiv der Mathematik und Physik III, 1(1901), 44–63, 213–237.

[8] Kagan V. F.: *Über die Transformation der Polyeder.* Math. Ann. 57(1903), 421–424.

[9] Sydler J.-P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidean à trois dimensions*. Comment. Math. Helv. 40(1965), 43–80.

Acknowledgment

This paper was supported by Czech Science Foundation, project no. P401/10/0690 *Sources of the European Mathematics*.

Address

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *Zdenek.Halas@mff.cuni.cz*

Andreana N. Holowatyj
Department of Mathematics and Computer Science
Benedictine University
5700 College Road
Lisle, IL 60532
United States of America
e-mail: *Andreana_Holowatyj@ben.edu*

POČÁTKY ODBORNÉ KARIÉRY EMANUELA CZUBERA

MAGDALENA HYKŠOVÁ

Abstract: The paper brings information on the family of the mathematician and statistician Emanuel Czuber, his studies, pedagogical activities at the German Realschule and at the German Technical University in Prague, as well as on his publications that appeared before 1886 when he became professor at the German Technical University in Brno.

1 Úvod

Osobnost Emanuela Czubera, matematika a statistika českého původu, jistě není třeba představovat; základní biografické údaje jsou poměrně dobře známé a snadno dostupné (viz například [14], [15], [21], [27], [29] a [30]). V tomto článku se zaměříme na některé podrobnosti týkající se jeho rodinného života, studia a počátků odborné kariéry v období před rokem 1886, kdy získal profesuru na německé technice v Brně.

2 Dětství a studentská léta

2.1 Rodina

Emanuel Czuber se narodil 19. ledna 1851 v domě č. p. 283 v Lázeňské ulici na Malé Straně v Praze[1] v rodině Karla Czubera (1812–1898),[2] krejčovského mistra původem z Bělčic (dnes okres Strakonice), a jeho ženy Karoliny (1812–1864), dcery pražského truhláře Josefa Libory a jeho manželky Kathariny, roz. Čápové. Emanuelovo dětství bylo poznamenáno smrtí matky: Karolina zemřela,[3] když mu bylo 13 let, a celkem po sobě zanechala tři dospělé a tři nezletilé děti.[4] Nejstarší dcera Anna (narozena 5. 1. 1837) a o tři roky mladší Ludmilla (19. 9. 1840) byly tehdy švadlenami, v otcově krejčovském řemesle pokračoval rovněž syn Johann (13. 10. 1838); Karl (25. 3. 1847) byl v té době holičským tovaryšem, Emanuel a nejmladší Julia (24. 11. 1855) byli teprve školáky.[5] V manželství Karla a Karoliny se narodili ještě další čtyři chlapci, jeden však přišel na svět mrtvý[6] (10. 12. 1845) a další tři zemřeli v útlém věku na souchotiny: Franz (13. 7. 1842)

---

[1] Matrika narozených kostela sv. Mikuláše, MIK N20, str. 208.

[2] Karl se narodil 25. 5. 1812 v Bělčicích v krejčovské rodině: otec Franz Čżuber (sic!) byl krejčovský mistr, matka Barbara, roz. Modra byla dcerou bělčického krejčího – viz matrika narozených římskokatolického farního úřadu Bělčice, kniha 5, N 1801–1824, str. 46 (matrika je psaná česky, všechny matriky uvedené dále jsou s výjimkou ŠT O11 v němčině; tečka nad písmenem z dříve vyjadřovala změkčení a již v uvedené době byla zpravidla nahrazena háčkem). V matrice je uvedeno křestní jméno Karel, v matričních záznamech o narození jeho dětí (viz dále), na konskripčním listu (Národní archiv, Policejní ředitelství I, karton 83, obraz 131) i v dalších dokumentech kromě ŠT O11 je pak vždy Karl. Tvar příjmení se v různých zdrojích liší; ve zmíněné konskripci a v matričních záznamech o narození Emanuelových starších sourozenců je uvedeno bez diakritiky jako Czuber, záznam o narození Emanuela a Antona uvádí Čubr, záznam o narození Julie uvádí Čzubr, v pozůstalostním spise po Karlově první ženě je opět uvedeno Czuber, v záznamu o druhém sňatku je Čuber.

[3] Matrika zemřelých kostela sv. Mikuláše, MIK Z3, str. 381 (30. 9. 1864).

[4] Archiv hl. města Prahy, Okresní městský delegovaný soud civilní pro Malou Stranu a Hradčany, pozůstalostní spis č. 5, kart. 109, signatura IV 587/1864 (psán německy).

[5] Matrika narozených kostela P. Marie Vítězné, PMV N4, str. 385 a 451; matrika narozených kostela sv. Mikuláše, MIK N18, str. 132; MIK N19, str. 256; MIK N22, str. 22.

[6] Matrika zemřelých kostela sv. Mikuláše, MIK Z10, str. 119.

a Joseph (26. 3. 1844) zemřeli současně v únoru 1845,[7] Anton (13. 1. 1853) v únoru 1854.[8] Karl Czuber se šest let po smrti své první manželky oženil s Františkou Bachmannovou (24. 8. 1829).[9] V tomto manželství se narodila dcera Kamilla (1872), která však nedlouho po svých prvních narozeninách zemřela.[10] Karl zemřel 16. dubna 1898; Františka se pak živila jako posluhovačka a zemřela v chudobinci 4. března 1911.[11]

Ludmilla svou matku přežila o necelých pět měsíců; zemřela 2. února 1865 na zápal plic.[12] Anna se ve stejném roce provdala za obchodníka s nitěmi Josefa Gottwalda a o čtyři roky později se jí narodil syn Karl; v témže roce však ovdověla a o syna přišla, když mu bylo pouhých 10 let. Podle policejních konskripcí se pak již znovu neprovdala. Johann později pracoval jako účetní; zůstal svobodný, zemřel 10. listopadu 1892 v Praze.[13] Bratr Karl odešel do Vídně, kde se věnoval holičskému řemeslu. Julia se v 17 letech stala svobodnou matkou syna Antona; v roce 1875 se provdala za inženýra Antonína Makovského.[14]

2.2 Studium

Vzdělání Emanuel Czuber získal na pražských německých školách. V letech 1861/62 a 1862/63 navštěvoval farní školu při kostele Panny Marie Vítězné, potom tři třídy nižší reálky při Vzorové hlavní škole (Musterhauptschule; dříve Normální škola) v budově bývalého kláštera Karmelitánů a v letech 1866/67 až 1868/69 studoval na vyšší německé reálce v Mikulandské ulici.[15] Poznamenejme, že chemii v kvartě a kvintě Czubera učil Erwin Willigk, později profesor německé techniky v Praze a Emanuelův tchán, fyziku v kvintě a matematiku v sextě jej učil František Weyr, otec matematiků Emila a Eduarda.[16] V sextě se Czuber přihlásil k maturitní zkoušce, aby mohl pokračovat ve studiu na vysoké škole. Na podzim roku 1869 pak nastoupil na pražskou německou techniku,[17] kde v průběhu pěti let absolvoval s výborným prospěchem kurzy matematiky, geometrie, fyziky, statiky, mechaniky, chemie, geologie a geodézie a odborné předměty týkající se stavebnictví (v desetibodové stupnici měl průměrný prospěch 9,3). V letech 1872/73 až

---

[7] Matrika narozených kostela sv. Mikuláše, MIK N18, str. 256, a MIK N19, str. 58; matrika zemřelých kostela sv. Mikuláše, MIK Z10, str. 105 (22. 2. 1845).

[8] Matrika narozených, resp. zemřelých kostela sv. Mikuláše, MIK N21, str. 74; MIK Z10, str. 239 (6. 2. 1854).

[9] Matrika oddaných kostela sv. Štěpána, ŠT O11, str. 509 (7. 11. 1870).

[10] Matrika zemřelých kostela sv. Štěpána, ŠT Z8a, str. 569 (29. 8. 1873).

[11] Archiv hl. města Prahy, Okresní městský delegovaný soud civilní pro Malou Stranu a Hradčany, pozůstalostní spis č. 8, kart. 201, signatura AV 289/1911; Národní archiv, Policejní ředitelství I, konskripce, karton 83, obraz 127. Příjmení Františky je v těchto dokumentech zapsáno ve tvaru Čubrová.

[12] Matrika zemřelých kostela P. Marie Vítězné, PMV Z3, str. 388.

[13] Archiv hl. města Prahy, Okresní městský delegovaný soud civilní pro Malou Stranu a Hradčany, pozůstalostní spis č. 8, kart. 123, signatura IV 629/1893.

[14] Archiv hl. města Prahy, Soupis pražských domovských příslušníků 1830–1910 (1920), č. 263, karton 41; Národní archiv, Policejní ředitelství I, konskripce, karton 83, obraz 130.

[15] Katalogy posluchačů uvedených škol, uložené v Archivu hl. města Prahy; *Programm der k. k. deutschen Ober-Realschule in Prag*. Verlag der Anstalt, Praha, svazky z let 1867 až 1869. Podle ručně psaných katalogů farní, hlavní i reálné školy a podle tištěných výročních zpráv pražské reálky byl Emanuel zapsán jako Czuber; v seznamech se přitom objevují i příjmení zapsaná česky včetně diakritiky. Zdá se tedy, že s výjimkou několika publikací z počátku 70. let a aktivit spojených s Jednotou českých mathematiků Emanuel používal německý tvar příjmení již od dětství a jak bylo zmíněno výše, stejný tvar používal v řadě dokumentů i jeho otec (srov. [22] a [23]).

[16] Oba na této reálce také studovali; Eduard byl o jeden ročník výš než Czuber, Emil absolvoval ještě před jeho příchodem.

[17] Katalogy posluchačů německé techniky z této doby se nedochovaly; v seznamu zapsaných studentů uvedeném v knize [29] a vypracovaném podle původních katalogů je Emanuelovo příjmení ve tvaru Czuber, stejně je tomu i na osvědčení o absolutoriu z 1. října 1874 (Archiv TU Wien, osobní složka Emanuela Czubera).

1874/75, tedy od 4. ročníku studia, zde Czuber navíc působil jako asistent při stolici praktické geometrie u profesora Karla Kořistky.

3 Počátky odborné kariéry

3.1 Pedagogické působení

Ve školním roce 1874/75 Czuber nastoupil jako suplent na druhou německou státní vyšší reálku na Malé Straně v Praze;[18] učil zde geometrii, geometrické kreslení a fyziku v prvních čtyřech třídách (celkem 19 hodin týdně) a ve výroční zprávě za tento rok uveřejnil článek *Figur und Grösse der Erde* [5]. V létě roku 1875 Czuber složil zkoušku učitelské způsobilosti z matematiky a deskriptivní geometrie pro vyšší reálky s německým vyučovacím jazykem a v následujícím školním roce na malostranské reálce působil již jako skutečný učitel; v nižších i vyšších třídách vyučoval matematiku, deskriptivní geometrii, geometrii a geometrické kreslení (celkem 21 hodin týdně) a byl třídním učitelem v primě. Od školního roku 1877/78 vyučoval matematiku a deskriptivní geometrii ve vyšších třídách (20 hodin týdně); od následujícího roku na reálce působil jako profesor s úvazkem 18 až 19 hodin týdně. Kromě matematiky a deskriptivní geometrie v některých letech vyučoval také aritmetiku, geografii, geometrii a geometrické kreslení.[19]

V roce 1876 se Czuber habilitoval na německé technice v Praze; 5. srpna 1876 byl jmenován soukromým docentem pro obor *Teorie a praxe vyrovnávacího počtu* a v následujících letech zde pak konal výběrové přednášky *Principy počtu pravděpodobnosti* (později jen *Počet pravděpodobnosti*; zimní semestr) a *Metoda nejmenších čtverců* (letní semestr).[20] Tyto přednášky byly ve své době jediné, které souvisely s pravděpodobností a statistikou, a po Czuberově odchodu podobně zaměřené přednášky chyběly zcela.

Po smrti Lohanna Liebleina (1834–1881), profesora matematiky na pražské německé technice, se Emanuel Czuber zúčastnil konkurzu na uvolněnou stolici. Profesorský sbor jej však navrhl až jako *secundo loco*; na prvním místě byl navržen Moriz Allé (1837–1913), profesor matematiky na technice ve Štýrském Hradci, který byl v červnu roku 1882 také skutečně jmenován. O dva roky později profesorský sbor pražské německé techniky jednomyslně podpořil Czuberovu žádost o jmenování mimořádným profesorem; ministerstvo však tuto žádost zamítlo. V roce 1885 se Czuber přihlásil do konkurzu na obsazení stolice matematiky na technice v Brně, uvolněné po penzionovaném Karlu Prentnerovi (1823–1904). Tentokrát byl úspěšný, v březnu 1886 byl jmenován profesorem a ještě na jaře odešel do Brna. Na malostranské reálce jej od 16. dubna nahradil Karl Bobek (1855–1899). O pět let později byl Czuber jmenován profesorem matematiky na vídeňské technice,[21] kde pak působil téměř třicet let až do svého odchodu na odpočinek (v roce 1919 odešel na zdravotní dovolenou, o dva roky později byl řádně penzionován). Během této doby se mu dostalo řady ocenění; ve školním roce 1894/95 byl například zvolen rektorem vídeňské techniky, v roce 1902 mu byl udělen titul dvorního rady.[22]

---

[18] První čtyři třídy byly otevřeny na podzim 1873; školní rok 1874/75 byl první, kdy se začalo vyučovat v kvintě a škola se tak mohla začít nazývat vyšší reálkou.

[19] *Programm der zweiten deutschen Staats-Oberrealschule in Prag*. Verlag der Anstalt, Praha, svazky z let 1875 až 1886; *Diensttabelle* z roku 1893, Archiv TU Wien, osobní složka Emanuela Czubera.

[20] *Programm der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag*. Verlag der Anstalt, Praha, svazky z let 1879 až 1885 (předchozí svazky v Archivu ČVUT chybí).

[21] Podrobnosti o pražském, brněnském a vídeňském konkurzu lze nalézt v publikaci P. Šišmy [30].

[22] V publikacích [14] a [27] je uveden rok 1898; podle dopisu z Ministerstva kultu a vyučování na rektorát ze dne 12. září 1902 však ke jmenování došlo až v tomto roce. Archiv TU Wien, osobní složka Emanuela Czubera.

Emanuel Czuber zemřel na svém venkovském sídle v Gniglu u Salcburku dne 22. srpna 1925.

3.2 Spolkové aktivity

Již od prvního ročníku studia na technice byl Czuber členem Jednoty českých mathematiků (JČM); od letního semestru 1870 zde byl knihovníkem. Na slavnostní schůzi dne 17. března 1872, kdy se připomínalo desáté výročí založení Spolku pro volné přednášky z mathematiky a fysiky, Czuber pronesl přednášku *O determinantech*; řadu přednášek konal rovněž na týdenních schůzích.[23] V druhém až čtvrtém ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky z let 1873 až 1875 Czuber otiskl čtyři česky psané články ([1]–[4]; pojednání [2]–[4] navíc Jednota vydala i jako samostatné spisy), v prvním ročníku vědecky zaměřeného časopisu Archiv mathematiky a fysiky z roku 1876 Czuber vydal jeden český a jeden německý článek ([6], [7]).

Počátkem roku 1874 se Czuber stal členem Německého polytechnického spolku v Čechách (Der deutsche polytechnische Verein in Böhmen) a začal se aktivně podílet na jeho činnosti. Vystupoval na schůzích s odbornými přednáškami i v různých organizačních záležitostech, od roku 1876 až do svého odchodu do Brna působil jako redaktor spolkového čtvrtletníku Technische Blätter, kde uveřejnil články [8]–[11] a více než 20 recenzí. Poznamenejme, že členem spolku i redakční rady časopisu byl rovněž Czuberův budoucí tchán Erwin Willigk.

3.3 Osobní život

Dne 24. listopadu 1877 se Emanuel Czuber oženil s Adalbertou Willigk (narozena 22. 5. 1859), dcerou zmíněného profesora chemie pražské německé techniky Erwina Willigka a jeho ženy Wilhelminy, rozené Žemličkové.[24] Ještě v Praze se jim narodily tři děti: Bertha (5. 12. 1879), Erich (27. 10. 1881) a Elisabeth (7. 2. 1884). U všech rodiče dbali na vzdělání; dcery po absolvování obecné a měšťanské školy pokračovaly ve studiu na soukromé evangelické dívčí škole ve Vídni (Technikerstraße 15),[25] Erich absolvoval akademické gymnázium ve Vídni a poté vojenskou akademii ve Wiener Neustadt, mladší syn Emanuel, který se narodil dva roky po příchodu rodiny do Brna, studoval práva na vídeňské univerzitě.

Poznamenejme, že Elisabeth se později provdala za Leopolda Forsta, nadporučíka 1. husarského pluku. Erich projevoval značné hudební nadání a jako klavírní a varhanní virtuos a hudební skladatel (byl autorem Tatianina valčíku z roku 1900 a mnoha menších písní) se dostal do Lexikonu německých umělců a spisovatelů Rakouska-Uherska [20]. Povoláním však byl voják; v roce 1906, tři roky po ukončení vojenské akademie, působil jako kandidát učitelství a poručík 11. husarského pluku na německé jezdecké kadetní škole (Kavalleriekadettenschule) v Hranicích na Moravě. Po první světové válce žil v Litoměřicích, odkud pocházela i Marie Hajek (22. 2. 1894), s níž se již jako rytmistr v roce 1919 oženil.[26]

V širších kruzích je z celé rodiny patrně nejznámější Czuberova dcera Bertha, která okouzlila arcivévodu Ferdinanda Karla (1868–1915), mladšího bratra následníka trůnu

---

[23] Viz [17], [25] a [26]. V přehledech a zprávách o činnosti Jednoty je jako Emanuelovo příjmení uvedeno *Čubr*.
[24] Matrika oddaných kostela P. Marie Vítězné, PMV O5, str. 92.
[25] Vysvědčení se dochovala v osobní složce Emanuela Czubera v Archivu TU Wien.
[26] Matrika oddaných římskokatolického farního úřadu v Litoměřicích, O 98/167 Litoměřice, str. 277 (svatba se konala 25. srpna 1919 v Teplicích v Čechách).

Franze Ferdinanda (1863–1914) a synovce habsburského císaře Franze Josepha I. Podle [16] a [24] se dvojice seznámila na plese vídeňské techniky, nad nímž Ferdinand Karl převzal záštitu. V roce 1903 se arcivévoda obrátil na císaře s žádostí o svolení ke sňatku, ten však odmítl.[27] V následujícím roce Ferdinand Karl odešel ze zdravotních důvodů od vojska a s Berthou žil mimo Vídeň – v Badenu, na rodinném zámku Rottenstein u Merana či ve švýcarských lázních Chur; zde se 25. srpna 1909 dvojice nechala oddat a dva roky se jí dařilo držet sňatek v tajnosti před císařským dvorem. Odhalení pak vyvolalo velký rozruch;[28] Ferdinand Karl byl zbaven rodových práv a zbytek života prožil po boku své ženy jako Ferdinand Burg převážně v Mnichově, kde v roce 1915 zemřel. Bertha se pak již znovu neprovdala; zemřela v úctyhodném věku téměř 100 let v roce 1979 a je pohřbena po boku svého muže na Untermaiském hřbitově u Merana.

4 Publikace vydané v době pražského působení

4.1 Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Archiv mathematiky a fysiky

Podrobný seznam publikací Emanuela Czubera čítající 142 položek je uveden v Doležalově nekrologu [14], odkud jej převzal Einhorn [15]. Chybí zde však Czuberovy česky psané práce [1]–[4] otištěné v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky (v dalším jen ČPMF) (s výjimkou přetisku [4] jako samostatného spisu) i český a německý článek [6] a [7], které vyšly v Archivu mathematiky a fysiky. Podívejme se nyní v krátkosti, o čem tyto publikace pojednávají.

Charakter článků uveřejněných v ČPMF je vesměs popularizační a lze říci, že všechny velmi úzce souvisejí s Czuberovým působením u geodeta a kartografa Karla Kořistky na pražské technice. První práce nese název *Příspěvek k theorii nástrojů zrcadelných* [1] a je věnována teoretickému pozadí principů geodetických a astronomických měření pomocí optických přístrojů, jejichž hlavní součástí je pohyblivé zrcadlo. Czuber upozorňuje na to, že při zkoumání těchto principů se zpravidla předpokládá, že osa, kolem níž se zrcadlo otáčí, se nalézá v rovině odrážející světlo, a z toho se odvozuje, že úhel, o který se otočí obraz, je dvojnásobkem úhlu otočení zrcadla. V případě skleněných zrcadel je však uvedený předpoklad značně nereálný. Ve shodě s výsledky J. Wastlera[29] Czuber odvozuje, že tvrzení o dvojnásobném úhlu platí i bez ohledu na polohu osy otáčení.

Druhý článek nazvaný *O mírách původních* [2] pojednává o historii měření délek a snah o uzákonění pevných jednotek ve Francii, Anglii, Prusku a Rakousku-Uhersku od 17. do 19. století. Hlavní důraz je kladen na vědeckou stránku a na opatření, jejichž účelem byla stálost míry. Práce *Poloměr setrvačnosti a centrální ellipsa* [3] se zabývá existencí a polohou bodu s tou vlastností, že kdyby v něm byla soustředěna veškerá hmotnost tělesa, byl by jeho moment setrvačnosti roven momentu celého tělesa. Pro rovinné oblasti Czuber zkoumá geometrické místo těchto bodů a ukazuje, že je to vždy dvojice přímek, přičemž křivka, kterou přímky odpovídající různým polohám osy obalují, je elipsa.

Rozsáhlé pojednání *O měření země* [4] podrobně rozebírá více či méně úspěšné pokusy o určení tvaru a velikosti Země od starověku až do 19. století. Pozornost je přitom

---

[27] Podle [24] nebyl největším problémem Bertin měšťanský původ, ale pomluvy, podle nichž byla „ženou s minulostí“ – patrně kvůli přátelství se spisovatelem Robertem Musilem.
[28] Ve vídeňském archivu Haus-, Hof- und Staatsarchiv se dochoval celý karton (č. 14) s korespondencí různých diplomatů a politiků, novinových výstřižků apod.
[29] Hartner F.: *Handbuch der Niederen Geodäsie*. Seidel, Wien, 1876 [přepracováno J. Wastlerem].

věnována i matematickému a technickému pozadí těchto snah; Czuber například popisuje historii měřičství či vynález a využití logaritmů. O rok později byla zkrácená německá verze této práce otištěna ve výroční zprávě druhé německé státní vyšší reálky v Praze [5]. Na toto pojednání do určité míry navazuje článek *O zemském ellipsoidu* [6], který byl uveřejněn v prvním ročníku časopisu Archiv mathematiky a fysiky a který je věnován popisu zemského elipsoidu pomocí rovnic v zeměpisných a analytických souřadnicích.[30] Ve stejném ročníku Archivu vyšel ještě německy psaný článek *Über Erzeugnisse geometrisch verwandter Punktreihen* [7]. Základní problém, kterým se zde Czuber zabývá, je následující. Libovolný bod P přímky dané dvěma body $M_1 = (x_1, y_1)$ a $M_2 = (x_2, y_2)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$P = (x_0, y_0) = \left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda},\ \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} \right),$$

kde $\lambda \in \mathbf{R}$ udává vztah mezi úsečkami M_1P a M_2P; kladných hodnot přitom tento koeficient nabývá pro body ležící na úsečce M_1M_2, jinak je záporný. Pro dvě různé přímky M_1M_2 a $M_1'M_2'$ pak Czuber zkoumá souvislost mezi body P a P' ležícími na těchto přímkách, vyhovují-li koeficienty λ, λ' rovnici $\varphi(\lambda, \lambda') = 0$, a dále vyšetřuje rovnici $\psi(x, y, \lambda) = 0$, kde (x, y) je libovolný bod přímky procházející body P a P'.

Jak je patrné ze seznamu literatury, Czuberovo příjmení bylo u článků otištěných v českých časopisech uvedeno ve tvaru Čubr, popř. Čuber. Všechny pozdější publikace jsou psány výhradně německy a autor je vždy podepsán jako Czuber. K tomu poznamenejme, že například Karel Málek v článku [22] Czuberovi vyčítá, že si své české příjmení postupně zkomolil z Čubra přes Čubera až po Czubera, navíc až jako dospělý muž, který již není pod vlivem rodičů. Jak je však uvedeno v poznámce 15, v německém prostředí Czuber používal tento tvar příjmení již od dětského věku a stejně tak jej v řadě úředních dokumentů používal i jeho otec (viz pozn. 2).

4.2 Další práce

V době svého pražského působení Czuber uveřejnil řadu dalších prací popularizačního charakteru, a to v časopisech Technische Blätter a Archiv der Mathematik und Physik. V prvním případě se jednalo o prakticky zaměřené články, jejichž cílem bylo seznámit čtenáře z okruhu inženýrů se správným statistickým zpracováním výsledků měření a určováním chyb ([8], [9]), či s principy fungování nejnovějších planimetrů ([10], [11]). Druhý z uvedených časopisů byl určený především učitelům vyšších gymnázií a reálek. Zde Czuber v letech 1877 až 1883 uveřejnil celkem sedm článků věnovaných různým problémům z geometrie, řetězovým zlomkům a morální střední hodnotě. Seznam těchto prací lze nalézt v [14] a [15].

Ze všech ostatních prací vydaných ve sledovaném období zde uveďme již jen první monografii věnovanou geometrické pravděpodobnosti [12], která kromě shrnutí a vysvětlení výsledků dosažených francouzskými a anglickými předchůdci obsahuje i řadu originálních výsledků a zobecnění (viz [18], [28]). Další původní výsledky týkající se geometrických středních hodnot obsahuje rovněž pojednání [13], kde lze mimo jiné nalézt vztah mezi objemem V tělesa, jeho povrchem S a střední délkou tětivy $\mathbf{E}C$: $V = \frac{1}{4} S\, \mathbf{E}C$.

---

[30] Czuber zde vycházel ze spisu C. Bremikera: *Studien über höhere Geodäsie*, Weidmann, Berlin, 1869.

5 Závěr

Emanuel Czuber je proslulý především díky svým pracím z oblasti pravděpodobnosti a statistiky, kam se dostal poměrně přirozeně od svého prvotního zájmu o geodézii a s ní spojené vyhodnocování různých měření. Po celý život se zajímal nejen o teoretické problémy, filozofické otázky týkající se základů teorie pravděpodobnosti či vyučování na středních a vysokých školách, ale rovněž o praktické aplikace. Z tohoto pohledu lze snad trochu zalitovat, že se v pracích věnovaných geometrické pravděpodobnosti kromě jedné poznámky o rektifikaci křivky více nezabýval praktickým využitím. Z teoretických výsledků, které uvádí, totiž okamžitě plyne řada stereologických metod pro odhad různých geometrických charakteristik, například tzv. bodová metoda odhadu obsahu rovinné oblasti či objemu tělesa, jež hraje důležitou roli mj. v geologii či biomedicíně. Geologům tak trvalo téměř půl století, než se přes rozličné pracné postupy k této metodě dopracovali, a v oblasti biomedicíny to bylo ještě o další desetiletí později (viz [19]).

Literatura

[1] Čubr E.:[31] *Příspěvek k theorii nástrojů zrcadelných*. ČPMF 2(1873), 233–236.

[2] Čubr E.: *O mírách původních*. ČPMF 3(1874), 79–91. Vyšlo rovněž jako samostatný spis: JČMF, Praha, 1874.

[3] Čubr E.: *Poloměr setrvačnosti a centrální ellipsa*. ČPMF 3(1874), 108–113. Vyšlo rovněž jako samostatný spis: JČMF, Praha, 1874.

[4] Čuber E.: *O měření země*. ČPMF 3(1874), 228–260; ČPMF 4(1875), 21–26, 57–65, 134–139, 167–175, 209–216. Vyšlo rovněž jako samostatný spis: JČMF, Praha, 1874.[32]

[5] Czuber E.: *Figur und Grösse der Erde*. In: Programm der zweiten deutschen Staats-Oberrealschule in Prag. Verlag der Anstalt, Prag, 1875, 35–45.

[6] Čubr E.: *O zemském ellipsoidu*. Archiv mathematiky a fysiky 1(1876), 63–77.

[7] Čubr E.: *Über Erzeugnisse geometrisch verwandter Punktreihen*. Archiv mathematiky a fysiky 1(1876), 91–103.

[8] Czuber E.: *Bemerkungen über die mathematische Behandlung von Beobachtungs-Ergebnissen*. Technische Blätter 8(1876), 131–139.

[9] Czuber E.: *Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung durch 2 und mehrere Gerade*. Technische Blätter 10(1878), 65–88.

[10] Czuber E.: *Hohmanns Präzisions-Polarplanimeter*. Technische Blätter 15(1883), 37–42.

[11] Czuber E.: *Hohmanns freischwebendes Präzisionsplanimeter*. Technische Blätter 16(1884), 56–60.

[12] Czuber E.: *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelewerte*. Teubner, Leipzig, 1884.

[13] Czuber E.: *Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten*. Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften 90(1884), 719–742.

[14] Doležal E.: *Emanuel Czuber*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 37(1928), 287–297.

---

[31] Tvar příjmení je v tomto seznamu zapsán tak, jak je uveden v příslušné publikaci; přitom je ponecháno chronologické řazení Czuberových prací.

[32] Jako autor samostatného spisu a první části v ČPMF je uveden Čuber, u ostatních částí je Čubr.

[15] Einhorn R.: *Vertreter der Mathematik und Geometrie an den Wiener Hochschulen 1900–1940*. Dissertationen der Technischen Universität Wien 43/II, Verband der wissenschaftlichen Gesellschaften Österreichs, Wien, 1985.

[16] Hamann B.: *Die Habsburger. Ein biographisches Lexikon*. Carl Ueberreuter, Wien, 1988 [český překlad M. a M. Kouřimských: *Habsburkové. Životopisná encyklopedie*. Brána, Praha, 1996].

[17] Houdek F.: *Dějepis Jednoty českých mathematiků v Praze*. JČM, Praha, 1872.

[18] Hykšová M.: *Geometrické pravděpodobnosti na přelomu 19. a 20. století*. In Bečvářová M.: 28. mezinárodní konference Historie matematiky. Matfyzpress, Praha, 2007, 37–40.

[19] Hykšová M.: *Stereologie – poučení z historie*. In Lávička M., Šír Z., Šrubař J.: 30. konference o geometrii a počítačové grafice. Matfyzpress, Praha, 2010, 111–118.

[20] Kosel H. C. (ed.): *Deutsch-Österreichisches Künstler- und Schriftsteller-Lexikon. Zweiter Band: Biographien und Bibliographie der deutschen Künstler und Schriftsteller in Oesterreich-Ungarn ausser Wien*. Lechner & Sohn, Wien, 1906.

[21] Mačák K.: *Vývoj pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938*. Edice Dějiny matematiky, svazek 26, Prometheus, Praha, 2005.

[22] Málek K.: *Případ Emanuela Czubera*. Pojistný obzor 1(1922–23), 94–98.

[23] Marvan M. a kol.: *Dějiny pojišťovnictví v Československu. 1. díl*. Novinář, Praha, 1989.

[24] Nemec N.: *Die heimlichen Ehen der Erzherzoge Heinrich und Ferdinand Karl. Ein Vergleich*. Norbert Nemec, Wien, 2005.

[25] Pátý L.: *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků*. JČMF, Praha, 1987.

[26] Posejpal V.: *Dějepis Jednoty českých mathematiků*. JČM, Praha, 1912.

[27] Radon J.: *Emanuel Czuber zum Gedächtnis*. Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 5 (1951), Nr. 13, 11–13.

[28] Saxl I., Hykšová M.: *Origins of Geometric Probability and Stereology*. In Capasso V.: Stereology and Image Analysis. ECS10. Esculapio Pub., Bologna, 2009, 173–178.

[29] Stark F., Gintl W., Grünwald A.: *Die k. k. deutsche technische Hochschule Prag, 1806–1906. Festschrift zur Hundertjahrfeier*. Selbstverlag, Praha, 1906.

[30] Šišma P.: *Matematika na německé technice v Brně*. Edice Dějiny matematiky, svazek 21, Prometheus, Praha, 2002.

Poděkování

Práce vznikla za podpory grantu GAČR 401/09/1850 *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů*.

Adresa

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *hyksova@fd.cvut.cz*

MATEMATIKA A HUDEBNÍ LADĚNÍ V HISTORII

MARTINA KLÁPOVÁ

Abstract: Tuning in music means a proper selection of pitch of tones to make the sound pleasant to our feeling. Of course, it is a question not only for mathematics and physics but also for physiology, cultural habits and individual history as well. In this paper, we briefly describe Pythagorean tuning and some natural tunings on the one side and tempered tunings on the other side. At a sample of 25 musicians and 31 laics, a subjective perception of the fifth in Pythagorean and well-tempered tuning has been tested. It seems that the difference is mostly recognized and that, surprisingly, well-tempered tuning is judged as the more pleasant one.

1 Úvod

Již od dávných dob je známo, že hudba a matematika mají mnoho společného. Jedním z prvních matematiků, o nichž víme, že se hlouběji zabývali vztahem matematiky a hudby, byl Pythagoras (asi 570 – asi 495 př. n. l.). Vycházel z filosofické představy o významu čísel pro celkový popis světa a světového řádu a hledal harmonii čísel ve vesmíru. Tato harmonie spočívala zejména v tom, že, jak věřil, vše lze vyjádřit celými čísly, což se projevovalo i v hudbě. Vytvořil systém ladění, jež dnes známe jako *pythagorejské*. Je založeno na poměrech frekvencí dvou tónů v intervalu, které jsou ve tvaru součinů mocnin čísel 2 a 3, tedy obecně $2^n 3^k : 1$, kde n a k jsou v absolutní hodnotě co možná nejmenší celá čísla (mohou být i záporná).

Na zcela jiném principu je založeno nyní velice rozšířené *rovnoměrně temperované ladění*, které užívá jediný nejmenší interval $\sqrt[12]{2} : 1 \approx 1{,}059 : 1$ (bližší informace viz [1]).

2 Základní pojmy

2.1 Tón, výška tónu

Připomeňme z hudební nauky, že tón – základní hudební „stavební materiál" – je charakterizován čtyřmi vlastnostmi: svou výškou, hlasitostí, dobou trvání a barvou. Nadále si budeme všímat jen výšky. Ve fyzice popisujeme výšku tónu jeho kmitočtem (frekvencí) f, tj. počtem kmitů za danou dobu, a jeho hodnotu měříme v hertzech ($1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$). Člověk vnímá jako tóny s kmitočty zhruba od 16 Hz do 20 kHz (někdy se uvažuje o horní hranici jen 16 kHz).

2.2 Interval

Interval je vzdálenost mezi dvěma tóny. Ta se vyjadřuje nejčastěji pomocí poměru frekvencí těchto tónů. Interval může být buď melodický (znějí-li tóny po sobě), nebo harmonický (znějí-li tóny současně). Tři a více současně znějících tónů tvoří *akord*.[1] Řada tónů uspořádaných podle výšky se nazývá *stupnice*.

[1] Podle našich znalostí starověk harmonii neznal a zabýval se tedy melodickými vztahy. To v našem dalším popisu nebude příliš podstatné, je však nutné tuto informaci neopominout.

Významným faktem v hudbě je, že pro velikost intervalu není důležitý rozdíl dvou tónů, ale podíl jejich kmitočtů. Pro umělecké využití je podstatné, které intervaly nám znějí libě a které nikoli.

2.3 Ladění, ladění přirozená a temperovaná

Ladění stanovuje výšky tónů ve stupnici, a tím i velikosti intervalů (vzdáleností mezi tóny) použitelných v hudbě. Volba standardu (tzv. komorní a, nyní o kmitočtu 440 Hz) a z něj vyplývající absolutní výška tónů je jistě z praktického hlediska důležitá, nicméně pro umělecký dojem je podstatnější, jak již bylo řečeno, poměr dvou frekvencí (relativní výška), tedy vztah dvou tónů.

Dva tóny s poměry kmitočtů 2:1 tvoří *oktávu* a znějí spolu libě. Dokonce do té míry, že je často lidé ani nerozlišují, zejména mají-li různé barvy. Jsou však od sebe dosti vzdáleny. *Pythagoras* přibral k *oktávě* ještě *kvintu* s poměrem kmitočtů 3 : 2, a proto frekvence tónů v dané tónině vypočtené podle principu pythagorejského ladění jsou v poměrech typu $2^n 3^k : 1$.

Tím se toto ladění řadí do skupiny *přirozených ladění*; tóny v nich spolu souvisejí podobně a poměry jejich frekvencí jsou taktéž poměry celých čísel. Zpravidla se přibere ještě poměr 5:4 zvaný *velká tercie* a další z něj logicky plynoucí intervaly. Vzniknou tak poměry typu $2^n 3^k 5^m : 1$. Tvůrci přirozených ladění byli například Aristoxenes z Tarentu (kolem 335 před n. l.), Didymus z Alexandrie (1. st. před n. l.) či Klaudios Ptolemaios (asi 85 – asi 165).

Volba poměrů celých čísel souvisí s vyššími harmonickými ve Fourierově analýze periodických funkcí. Vyšší harmonické tvoří tzv. *alikvotní tóny*, jejichž frekvence jsou celočíselnými násobky frekvence základní. Tyto tóny znějí současně se základním tónem, většinou je však téměř nevnímáme, ovlivňují zejména barvu. Pokud chceme, aby dvojzvuk zněl co nejkonsonantněji, je třeba, aby dané dva tóny měly co nejvíce společných alikvotů, tedy společných násobků frekvencí. Docílíme toho volbou poměrů kmitočtů vyjádřených přirozenými čísly.

Zcela jinou skupinu ladění tvoří *ladění nerovnoměrně (částečně) temperovaná*, kde poměry některých kmitočtů nejsou poměry přirozených čísel, ale vzniknou aproximacemi s různou motivací (zpravidla rovnoměrné rozdělení daného většího intervalu; v případě celé oktávy se již jedná o ladění rovnoměrné).

Různá temperovaná ladění (rovnoměrné i nerovnoměrná) vznikala v průběhu vrcholného středověku a novověku (za všechny autory zmiňme jen Andrease Werckmeistera, působícího koncem 17. století, a Thomase Younga, žijícího o sto let později). Extrémním případem ladění je *rovnoměrně temperované ladění* dělící oktávu na dvanáct stejných *temperovaných půltónů* (nejmenší interval v diatonické – sedmitónové stupnici) o poměru frekvencí $\sqrt[12]{2} : 1 \approx 1{,}059 : 1$. V něm se nyní běžně ladí například klavíry a varhany (bližší informace viz [1]).

V níže uvedené tabulce jsou porovnány frekvence pythagorejského a rovnoměrně temperovaného ladění. Dále jsou zde ukázány i vzdálenosti tónů v *centech*. Jeden cent byl zvolen jako 1/1200 oktávy, tedy poměr frekvencí tónů vzdálených o půltón je $\sqrt[1200]{2} : 1 \approx 1{,}00057779... : 1$, což je na hranici rozlišitelnosti pro cvičené ucho (ladiči pian).

Interval	Poměr frekvencí		Vzdálenost v centech	
	Pythagorejské	Rovn. temp.	Pythagorejské	Rovn. temp.
Prima	1 : 1	1 : 1	0	0
Malá sekunda	256 : 243 ≈ 1,0535	$2^{1/12}$: 1 ≈ 1,0595	90,225	100
Velká sekunda	9 : 8 =1,125	$2^{1/6}$: 1 ≈ 1,1225	203,910	200
Malá tercie	32 : 27 ≈ 1,18519	$2^{1/4}$: 1 ≈ 1,18921	293,135	300
Velká tercie	81 : 64 ≈ 1,26563	$2^{1/3}$: 1 ≈ 1,25992	407,820	400
Kvarta	4 : 3 ≈ 1,33333	$2^{5/12}$: 1 ≈ 1,33483	498,045	500
Kvinta	3 : 2 = 1,5	$2^{7/12}$: 1 ≈ 1,49831	701,955	700
Malá sexta	128 : 81 ≈ 1,58025	$2^{2/3}$: 1 ≈ 1,58740	792,180	800
Velká sexta	27 : 16 = 1,6875	$2^{3/4}$: 1 ≈ 1,68149	905,865	900
Malá septima	16 : 9 ≈ 1,77778	$2^{5/6}$: 1 ≈ 1,78180	996,090	1000
Velká septima	243 : 128 ≈ 1,89844	$2^{11/12}$: 1 ≈ 1,88785	1109,765	1100
Oktáva	2 : 1	2 : 1	1200	1200

3 Nové výsledky

3.1 Subjektivní hodnocení

Nabízí se otázka, zda naše ucho přijímá opravdu výrazně liběji „poměry malých celých čísel“, nebo intervaly dané rovnoměrným dělením větších intervalů. Ve své práci jsem se soustředila na subjektivní srovnání pythagorejského ladění a ladění rovnoměrně temperovaného.

3.2 Měření subjektivní spokojenosti posluchače s různými laděními

V rámci diplomové práce jsem provedla výzkum na vzorku pětadvaceti hudebníků a jedenatřiceti nehudebníků, kteří si poslechli tři hudební ukázky. Každá z nich obsahovala tři po sobě jdoucí dvojzvuky (dva tóny vzdálené o kvintu) s frekvencemi buď pythagorejskými, nebo rovnoměrně temperovanými. Dvojzvuky byly vytvořeny v MatLabu. Po poslechu každé ukázky posluchač odpověděl na otázku, zda podle svého mínění slyšel tři stejné dvojzvuky, nebo dva stejné a jeden odlišný. V druhém případě pak ještě odpověděl, který byl odlišný a který se mu více líbil.

Nejprve jsem testovala hypotézu, že rozdíl mezi těmito dvěma laděními není vnímán, oproti hypotéze, že vnímán je. K testování jsem použila náhodnou veličinu (počet špatně rozpoznaných trojic dvojzvuků) s binomickým rozdělením. Jak skupina hudebníků, tak nehudebníků tento rozdíl vnímala, a to statisticky významným poměrem.

Dále jsem použila kontingenční tabulku k zjištění, zda platí hypotéza, která tvrdí, že počet správně rozpoznaných trojic závisí na tom, jestli je posluchač hudebník či nehudebník. Tato hypotéza se potvrdila a pravděpodobnost, že je ukázka správně rozpoznána (tedy je správně identifikován odlišný dvojzvuk v případě, že tam je), je vyšší, pokud je posluchač hudebník.

Jelikož se potvrdilo, že rozdíl mezi laděními je slyšet, dalším krokem bylo zjistit, jaké ladění se posluchačům líbilo více. Podle výsledků „vyhrálo“ rovnoměrně temperované ladění, které se více líbilo v 65% případů. Tento výsledek mi připadá překvapivý, neboť podle teorie by mělo vyhrát ladění, kde poměry kmitočtů jsou vyjádřeny poměrem přirozených čísel, tedy ladění pythagorejské.

4 Závěr

4.1 Shrnutí výsledků

Na základě výzkumu bylo zjištěno, že rozdíl mezi laděními je vnímán. Výzkum a výpočty dále ukazují, že na konkrétních vzorcích posluchačů laiků i odborníků je rovnoměrně temperované ladění vnímáno jako příjemnější než ladění pythagorejské.

4.2 Další perspektivy

Nabízejí se dva směry, jak pokračovat v práci. Extenzivní rozvoj představuje provedení většího počtu měření a zkoumání většího počtu respondentů. Lze též porovnávat i ostatní ladění přirozená včetně různě temperovaných. Intenzivní rozvoj by se pokusil zjistit možné příčiny toho, proč rovnoměrně temperované ladění zní liběji než přirozené. K tomu bude mj. žádoucí užít nejen jediný syntetizovaný interval, ale použít skutečný hudební nástroj či jeho co nejvěrnější imitaci alespoň na klasickou kadenci tónika – subdominanta – dominanta – tónika (první – čtvrtý – pátý – sedmý tón stupnice), ale ještě lépe na celý kus skladby a také zjistit vhodnost jistého ladění pro konkrétní hudební styl.

Literatura

[1] Benson D.: *Music: A mathematical offering* [online]. Poslední revize 14. prosince 2008 [cit. 30. 5. 2011].

http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/music.pdf

Poděkování

Děkuji RNDr. Tomášovi Fürstovi, Ph.D., z Katedry matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty UP a novému kolegovi doc. RNDr. Janu Obdržálkovi, CSc., z Ústavu teoretické fyziky MFF UK za plodné diskuse o uvedených tématech.

Adresa

Mgr. Martina Klápová
Pod Lihovarem 2232
256 01 Benešov
e-mail: *martina.klapova@seznam.cz*

ALOIS STRNAD

KAREL LEPKA

Abstract: This paper is devoted to the life and work of Alois Strnad, who was a teacher at Czech secondary schools. His curriculum vitae as well as his scientific and pedagogical publications will be mentioned here. Strnad played a leading role in the running of the mathematical competition organized by the Union of Czech Mathematicians; this activity will be discussed, too.

1 Úvod

26. května 2011 uplynulo 100 let od smrti c. k. vládního rady Aloise Strnada. Tento muž patřil ve své době k předním českým pedagogům. Kromě vlastní výuky byl i autorem několika učebnic a zejména byl dvorním dodavatelem úloh do korespondenční soutěže, kterou na stránkách Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky organizovala Jednota českých mathematiků. O životě a díle této osobnosti pojednávají následující řádky.

2 Život a dílo A. Strnada

2.1 Curriculum vitae

Dětství a mládí A. Strnada je spjato s hlavním městem království, Prahou. Zde se 1. října 1852 narodil, zde navštěvoval obecnou školu a později reálku v Panské ulici. Jelikož byl vždy znamenitým studentem, je nabíledni, že se nespokojil s maturitou a dal se zapsat na Český polytechnický ústav Království českého. Začal studovat obor pozemní a vodní stavitelství a i v něm byl úspěšný, takže si ho záhy povšiml profesor František Tilšer. Od roku 1873 se Strnad stal jeho asistentem a později za něj suploval i přednášky.

Strnadovy znalosti matematiky, zejména z oblasti geometrie, byly na špičkové úrovni; je tedy na místě otázka, proč nepůsobil jako učitel na vysoké škole. V roce 1893 se Strnad skutečně ucházel o profesuru po penzionovaném profesoru Tilšerovi, nebyl však úspěšný. Později pak dostal nabídku z brněnské německé techniky, tu však zase odmítl on, zřejmě z důvodů vlasteneckých.

Kariéru středoškolského učitele začal v roce 1876, když úspěšně složil zkoušky učitelské způsobilosti a začal vyučovat na reálce v Hradci Králové. Tam působil do roku 1891, kdy přesídlil do metropole a pět roků byl profesorem na české reálce v Ječné ulici. Učitelské působení završil jako ředitel reálky v Kutné Hoře, kde působil od roku 1896 až do své smrti v roce 1911.

2.2 Strnad a Olympiáda

Jak bylo zmíněno v úvodu, Strnad byl vůdčí osobností korespondenční soutěže, kterou na stránkách *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* (dále Časopis) organizovala Jednota českých mathematiků. Tuto akci budu v dalším nazývat Olympiáda, ačkoliv to není název oficiální. V letech 1884 až 1908 zde Strnad publikoval kolem půl tisíce úloh (viz [1]) a žádný jiný přispěvovatel se mu v tomto směru nemůže rovnat; některé ročníky obsahují i několik desítek jeho příkladů. Navíc je důležité, že začal publikovat v období, kdy předchozí hlavní dodavatel úloh, profesor František Josef Studnička, svou aktivitu v tomto směru prakticky ukončil. Podle mého mínění je to jeho zásluha, že Olympiáda se Studničkovým odchodem z vedení Časopisu neskončila.[1]

[1] Více se lze o Strnadových aktivitách spojených s Olympiádou dočíst v autorově článku [4].

Strnad publikoval úlohy ze všech oblastí matematiky, které byly tehdy vyučovány na středních školách. Prim hrála samozřejmě geometrie, a to všechny její oblasti, mnohé úlohy byly důkazové. Nevyhýbal se však ani algebře či teorii čísel. Navíc tyto úlohy byly šity na míru středoškolákům, což v prvních ročnících této akce nebylo.

Aby si čtenář mohl udělat představu o tom, před jaké problémy Strnad stavěl mladé čtenáře *Časopisu*, uveďme malou ukázku:

Pravidelný mnohoúhelník o lichém počtu stran otáčí se kolem své osy souměrnosti a vytvořuje těleso, jehož povrch (obsah) má se k povrchu (obsahu) vepsané koule jako 5 : 4. Kolik stran má onen mnohoúhelník? (Úloha 5, ročník 21)

Kruh rozděliti ve dvě části kružnicí dostřednou tak, aby vnitřní kruh měl se ku mezikruží jako toto ke kruhu celému. (Úloha 9, ročník 26)

Je-li n libovolné číslo celé, jest výraz $n(n^4 + 35n^2 + 24)$ *dělitelný* 60. *Proč?* (Úloha 1, ročník 25)

Řešiti jest rovnici $2\text{tg}\, x - 3\text{tg}\, x = 8$. (Úloha 18, ročník 32)

Do koncertu bylo prodáno 475 vstupenek za 424 zlatých. Sedadlo I. třídy stálo 1,60 zlatých, sedadlo II. třídy 1,10 zlatých a místo k stání 50 krejcarů. Kolik bylo kterých vstupenek, prodáno-li sedadel jen o málo víc než míst k stání? (Úloha 4, ročník 24)

K hyperbole rovnoosé dané rovnicí $xy = k^2$ *sestrojena v bodě n normála N protínající křivku v dalším bodě* n_1*; v tomto zřízena normála* N_1 *stanovící nový průsečík* n_2 *atd. Které jsou souřadnice těchto průsečíků.* (Úloha 39, ročník 33)

2.3 Strnad jako autor učebnic

Strnad byl autorem tří učebnic. Nemůžeme být překvapeni, že autor takového množství úloh se stal i spoluautorem *Sbírky úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol* [3]. Na tomto díle spolupracoval s Františkem Hromádkem; kniha vyšla v několika vydáních a podle mého názoru by mohla být používána na středních školách dodnes. Však také recenze na tuto učebnici byly veskrze kladné, a to v jeho době byli recenzenti velice nároční a kritikou nešetřili.

Kromě této sbírky byl Strnad autorem učebnic *Geometrie pro vyšší školy reálné* [6] a *Geometrie pro vyšší gymnasia* [7]. I tyto učebnice se dočkaly několika vydání a byly hodnoceny dobře. Druhá z nich byla dokonce přeložena do bulharštiny profesorem Šourkem (podrobnosti lze nalézt v knize [2]). V duchu tehdejších pedagogických zásad obsahovaly učebnice pouze teorii a řešené příklady, sbírky zase úlohy bez teorie a řešených příkladů. K sepsání sbírky úloh k učebnicím z geometrie se Strnad již nedostal.

2.4 Další publikace

Strnad také publikoval řadu článků, a to především na stránkách Časopisu. Jeho vědecké statě nebývají originální; většinou v nich reaguje na již publikované články, přináší k nim komentář, uvede jiný důkaz daného tvrzení a podobně. I tento způsob však měl v té době význam, ostatně rozvoj české odborné matematiky byl teprve na počátku.

Strnad měl poměrně dobrý přehled o dění ve světové matematice, a tak spolu s jinými matematiky seznamoval čtenáře Časopisu s pracemi zahraničních kolegů a na oplátku zasílal reference o výsledcích českých matematiků do ciziny. Publikoval také ve výročních zprávách škol, na nichž působil. V této souvislosti doporučuji kouzelné dílko *Mathematikové ve francouzské revoluci* [8]. Je rovněž autorem několika desítek hesel v *Ottově slovníku naučném*.[2]

3 Závěr

Dílo Aloise Strnada musíme hodnotit v kontextu doby, v níž žil a působil jako středoškolský učitel. Jeho vědecké výsledky sice nejsou oslňující, vyvažuje to však jeho působení pedagogické. Jak již bylo řečeno, v jeho době dochází k rozvoji matematického vzdělávání jak co do kvantity, tak i do kvality, a Strnad je jedním z těch, kteří se o to zasloužili. Využívám proto stého výročí jeho úmrtí, abych tuto osobnost připomněl.

Literatura

[1] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Ročníky 13 až 37.

[2] Bečvářová M.: *České kořeny bulharské matematiky*. Matfyzpress, Praha, 2009.

[3] Hromádko F., Strnad A.: *Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol*. Nákladem JČMF, Praha, 1896.

[4] Lepka K.: *C. a K. matematická olympiáda*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 52(2007), 211–218.

[5] Sobotka J.: *Alois Strnad (nekrolog)*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 41(1912), 552–557.

[6] Strnad A.: *Geometrie pro vyšší školy reálné*. F. Kytka, Praha, 1893.

[7] Strnad A.: *Geometrie pro vyšší gymnasia*. F. Kytka, Praha, 1893.

[8] Strnad A.: *Mathematikové ve francouzské revoluci*. Výroční zpráva obecních vyšších škol reálných v Hradci Králové, vlastním nákladem, Hradec Králové, 1889, 23–30.

Adresa

RNDr. Karel Lepka, Ph.D.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity
Poříčí 31
603 00 Brno
e-mail: *k.lepka@email.cz*

[2] Podrobnosti o životě a díle Aloise Strnada včetně seznamu jeho publikací lze nalézt v nekrologu [5].

POČÁTKY MODERNÍ STATISTIKY V PRACÍCH R. A. FISHERA A W. S. GOSSETA

VÍTĚZSLAV LÍNEK

Abstract: In 1908, an article *Probable Error of a Mean* published under the pseudonym "Student" appeared, whose true author, W. S. Gosset, undertook an exploration of small sample statistics. The subject was considered unimportant by that time, but the paper eventually changed the world of statistics, as it aroused the interest of R. A. Fisher, which flew into an extraordinarily productive cooperation of these famous scientists.

1 Úvod

Počátek 20. století byl svědkem bouřlivého rozvoje statistiky. V této době byla například odvozena metoda maximální věrohodnosti, analýza variance, byly odvozeny hustoty rozdělení označovaných dnes jako t a F a jejich použití ve statistických testech získalo dnešní podobu. Stěžejní postavou tohoto vývoje byl britský matematik a biolog Ronald Aylmer Fisher, který je dnes oprávněně považován za tvůrce moderní statistiky. Podstatným zdrojem inspirace mu ovšem byly práce jiného britského autora, Williama Sealy Gosseta, publikujícího pod pseudonymem „Student". Ty byly podnětem ke korespondenci, která vyústila v dlouhodobou spolupráci a přátelství obou mužů.

2 William Sealy Gosset

W. S. Gosset se narodil v roce 1876 jako první z pěti dětí. Vystudoval matematiku a chemii v Oxfordu a v roce 1899 nastoupil na místo sládka v pivovaru Guiness v Dublinu, kde zůstal po zbytek života. Management firmy v té době najal řadu mladých absolventů z Cambridge a Oxfordu s úmyslem zavést do výroby vědecké metody (viz [10]). Zaměstnanci pivovaru obecně neměli dovoleno publikovat své výsledky; Gossetovi však byla povolena výjimka pod podmínkou, že (kvůli utajení před ostatními zaměstnanci) bude publikovat pod pseudonymem (viz [13]). Byla zvolena přezdívka „Student", pod kterou Gosset publikoval většinu ze svých 21 článků. Jedním z prvních, kterým se ovšem nesmazatelně zapsal do dějin matematiky, bylo pojednání [11]. Mnoho zdrojů zdůrazňuje jeho vynikající charakter, pro který byl respektován svými současníky; o jeho skromné povaze, poctivosti a smyslu pro humor svědčí i dochovaná korespondence (viz [1], [2], [9] a [10]). Gosset zemřel v roce 1937 ve věku 61 let.

3 Ronald Aylmer Fisher

R. A. Fisher se narodil v roce 1890 jako nejmladší z osmi dětí. Jeho příchod byl překvapením – matka totiž čtvrt hodiny před ním porodila jeho mrtvého sourozence a další dítě nikdo neočekával. Fisher od dětství projevoval známky matematického nadání: při jedné příležitosti například opravil svou matku, že mu nejsou 3 roky, nýbrž 3 roky, 4 měsíce a 5 dní. Měl vynikající geometrickou představivost, údajně vytříbenou díky svému slabému zraku (viz [1]). Vystudoval matematiku v Cambridge, okruh jeho znalostí však byl mnohem širší – mimo statistiku proslul především jako biolog. Jeho bibliografie zahrnuje téměř 300 článků (matematických i biologických) a mnoho z nich lze považovat za zcela zásadní pro rozvoj statistiky; nejznámějším titulem je pravděpodobně [8]. Jeho dcera jej v knize [1] líčí jako zásadového idealistu, oddaného svým přátelům, ale nesmiřitelného vůči těm, kdo ho (byť jen domněle) zradili. To se zřejmě projevilo v jeho dlouholetém konfliktu s Karlem Pearsonem. R. A. Fisher zemřel v Adelaide v roce 1962 ve věku 72 let.

4 Gossetův článek *The Probable Error of a Mean*

Gosset při své práci v pivovaru často pracoval s náhodnými výběry malého rozsahu, na jejichž zpracování však tehdejší statistická teorie nenabízela žádný aparát. Dosavadní praxe se zabývala pouze výběry velkého rozsahu, u nichž se výběrová směrodatná odchylka s dala považovat za dostatečně přesný odhad směrodatné odchylky σ. Bylo tedy legitimní předpokládat, že rozptyl průměru x z výběru z normálního rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$ o rozsahu n je s^2/n, a tak testovat hypotézy o střední hodnotě μ. Gosset ovšem nechtěl ignorovat, že při malém rozsahu výběru je hodnota s zatížena chybou, která spolehlivost takových testů podstatně zkresluje. Ve své nejslavnější práci [11] se proto zaměřil na rozdělení náhodné veličiny

$$z = \frac{x}{s},$$

kde

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n, \quad s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 \Big/ n}$$

a $(x_1,\dots,x_n)$ je výběr z normálního rozdělení $N(0;\sigma^2)$ (z tedy představuje vzdálenost výběrového průměru od populačního průměru měřenou v jednotkách s).

V článku je nejprve odvozena hustota rozdělení s^2 a s, poté je dokázáno, že x a s jsou nekorelované, a pak je odvozena hustota rozdělení z. Následuje podrobný rozbor vlastností získaných rozdělení. V další části Gosset porovnává získané výsledky s výsledky experimentu, který podle svých slov provedl ještě dříve, než přistoupil k výpočtům. (Na str. 13 v práci [11] píše: *Before I had succeeded in solving my problem analytically, I had endeavoured to do so empirically.*) Experiment spočíval v tom, že na 3000 kartiček přepsal délky levého prostředníčku a výšky 3000 trestanců. Kartičky pak promíchal a rozdělil na 750 čtveřic. Tak získal 2×750 náhodných výběrů ze dvou rozdělení o známých parametrech (vypočtených z původního souboru 3000 měření). Pro každou čtveřici vypočítal z podle výše uvedeného vztahu (od x_i ovšem odečetl hodnotu populačního průměru) a získal tak dvě empirické frekvenční křivky, které v článku porovnává s teoretickými hustotami z; shodu shledává nanejvýš uspokojivou. Jak uvádí Zabell v [13], použití takovéto simulace bylo v té době velice neobvyklé. Práci uzavírá tabulka s vybranými hodnotami distribuční funkce z pro rozsah výběru $n = 4$ až 10 a čtyři příklady z praxe, ilustrující použití jeho „z-testu” při ověření hypotézy o střední hodnotě (tj. ekvivalence dnešního jednovýběrového t-testu).

Fisher v práci [7] upozorňuje na dva nedostatky textu. Gosset jednak rozdělení s^2 vlastně pouze odhaduje pomocí prvních čtyř centrálních momentů a tzv. Pearsonova systému frekvenčních křivek, jednak místo nezávislosti x a s^2, která je potřebná k odvození rozdělení z, dokazuje pouze jejich nekorelovanost. (První chyby si však byl Gosset vědom, sám ji v článku připouští.) Mimo to jsou v jednom z praktických příkladů chybně uvedeny názvy testovaných léků[1] a data použitá v tomtéž příkladu představují průměry z *různých počtů* původních měření; nepochází tedy ze stejných rozdělení, a tudíž nejsou pro daný test použitelná (viz [13]).

5 Fisherovo „Studentovo" rozdělení

Gossetův článek zpočátku v akademických kruzích nevyvolal téměř žádnou odezvu (viz [13]); jedinou výjimkou byl R. A. Fisher. Počátečním impulsem k jejich korespondenci zahájené v roce 1912 byla podle [1] neshoda ohledně správného jmenovatele ve vzorci pro směrodatnou odchylku.[2] Fishera však zjevně zaujaly Gossetovy výsledky, neboť mu už ve svém třetím dopise poslal důkaz jeho vzorců pro rozdělení *z,* uvedených v [11]. Tento dopis se nezachoval, ale z korespondence Gosseta s Karlem Pearsonem je zřejmé, že důkaz byl proveden pomocí geometrické reprezentace náhodného výběru v n-rozměrném prostoru; tento přístup mu později umožnil dosáhnout mnoha dalších pozoruhodných výsledků (viz [1]). Gosset přeposlal důkaz Karlu Pearsonovi, na kterého však tento neučinil žádný dojem: *I do not follow Mr Fisher's proof & it is not the kind of proof which appeals to me. (...) I do not see what the writer is doing at all. (...) Of course, if Mr Fisher will write a proof, in which each line flows from the preceeding one & define his terms I will gladly consider its publication* ([10], str. 47–48). Fisher publikoval geometrický důkaz rozdělení z až v práci [6] z roku 1923.

Korespondence pokračovala v roce 1915, kdy Fisher publikoval článek [5] o rozdělení korelačního koeficientu (viz [2]). I v tomto případě byl inspirován Gossetovými výsledky, konkrétně článkem [12] z roku 1908, a i zde uplatnil svůj vynikající geometrický vhled. Jedním z dílčích výsledků bylo, že je-li populační korelační koeficient ρ roven nule, má poměr $r/(1-r^2)^{1/2}$ stejné rozdělení jako Gossetova veličina z v případě výběru o rozsahu $n-1$.

V roce 1922 Gosset v dopise Fisherovi nadhodil problém rozdělení regresních koeficientů; Fisher mu obratem zaslal řešení, ve kterém se (k nemalé Gossetově radosti) ukázalo, že i zde je třeba použít jeho z-rozdělení. V souvislosti s těmito objevy zřejmě vykrystalizoval Fisherův komplexní pohled na celou problematiku, zahrnující kromě předešlého též testy rozdílu dvou průměrů a testy korelačních koeficientů pomocí „Studentova" rozdělení (viz [3]). Ten byl definitivně shrnut v jeho práci [7], kde však

---

[1] Fisher tento příklad převzal do své knihy [8], aniž by si původ dat ověřil. V roce 1934 si chyby v jeho knize povšiml Dr. Isidor Greenwald a napsal mu dopis, který cituje E. S. Pearson v [10]. V pozdějších vydáních knihy [8] již jsou léky označeny pouze jako A a B.

[2] Tato záležitost je poněkud nejasná. Gosset ve svém dopise Karlu Pearsonovi z 12. září 1912 citovaném v [1] líčí, že mu Fisher poslal důkaz, že správný vzorec pro směrodatnou odchylku je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Big/ n} \quad \text{a nikoli} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Big/ (n-1)}\,.$$

Fisher ve svém prvním článku [4] skutečně pomocí metody maximální věrohodnosti odvozuje vzorec pro odhad σ^2, kde je ve jmenovateli n. Jak je však patrno z výše uvedeného textu, Gosset v [11] používá rovněž n a není tedy jasné, proč mu Fisher své výsledky posílal. Jedině snad proto, že Gosset mj. uvádí, že střední hodnota výrazu

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Big/ n$$

je rovna $(n-1)\sigma^2/n$ (což je ovšem správně). Dopis navíc pokračuje zmínkou o dalším Fisherově dopise, ve kterém ukázal, že správný jmenovatel je nakonec přece jen $n-1$.

s ohledem na čtenáře postrádající jeho geometrickou představivost použil k odvozování algebraický přístup (viz [1]). Celá metodika byla zpopularizována také díky Fisherově knize [8], kde již bylo „Studentovo” rozdělení uvedeno v dnešní podobě, tj. po transformaci

$$t_{n-1} = z_n \sqrt{n-1}\,.$$

6 Závěr

Bez výsledků práce R. A. Fishera si dnešní statistiku nelze vůbec představit; je však patrné, že směr jeho bádání udával mnohdy právě W. S. Gosset, jehož článek [11] představuje významný milník ve vývoji moderní vědy. Spolupráce těchto dvou výjimečných osobností je pozoruhodnou kapitolou historie matematiky.

Literatura

[1] Box J. F.: *R. A. Fisher. The Life of a Scientist*. John Wiley & Sons, New York, 1978.

[2] Box J. F.: *Gosset, Fisher and the t Distribution*. The American Statistician 35(1981), 61–66.

[3] Eisenhart C.: *On the Transition From “Student’s” z to “Student’s” t*. The American Statistician 33(1979), 6–10.

[4] Fisher R. A.: *On an Absolute Criterion for Fitting Frequency Curves*. Messenger of Mathematics 41(1912), 507–521.

[5] Fisher R. A.: *Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples From an Indefinitely Large Population*. Biometrika 10(1915), 507–521.

[6] Fisher R. A.: *Note on Dr Burnside’s Recent Paper on Error of Observation.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 21(1923), 655–658.

[7] Fisher R. A.: *Applications of “Student’s” Distribution*. Metron 5(1925), 90–104.

[8] Fisher R. A.: *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1925 [odkaz v textu je na 6. vydání z roku 1936].

[9] McMullen L.: *“Student” as a Man*. Biometrika 30(1939), 205–210.

[10] Pearson E. S.: *“Student”. A Statistical Biography of William Sealy Gosset*. Clarendon Press, Oxford, 1990.

[11] “Student”: *The Probable Error of a Mean*. Biometrika 6(1908), 1–25.

[12] “Student”: *Probable Error of a Correlation Coefficient*. Biometrika 6(1908), 302–310.

[13] Zabell J. S.: *On Student’s 1908 Article “The Probable Error of a Mean”*. Journal of the American Statistical Association 103(2008), 1–7.

Adresa

Mgr. Vítězslav Línek
FZŠ Trávníčkova 1744
155 00 Praha 13
e-mail: *vitek.linek@seznam.cz*

VÝVOJ DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE OD STAROVĚKU DO 20. STOLETÍ

VLASTA MORAVCOVÁ

Abstract: The aim of the article is to remind the most important events related to formation and development of descriptive geometry. We mention some well-known persons who worked in this branch and also the beginning of Czech descriptive geometry.

1 Počátky promítání

Vznik deskriptivní geometrie jako vědy se datuje ke konci 18. století v souvislosti s vydáním *Géométrie descriptive* Gasparda Monge.[1] Hlavním úkolem deskriptivní geometrie je studium jednoznačných zobrazení prostoru do roviny. Různé způsoby, jak znázornit prostorové objekty v rovině, lze pozorovat již od starověku.

1.1 Pravoúhlé promítání ve starověku

Nejstarší známé dochované doklady o použití promítání pocházejí z období starověku. Jedná se o nákresy půdorysů chrámů, pravoúhlých průmětů soch nebo osových řezů sloupů.[2] Obrazce byly zpravidla tesány do kamene ve skutečné velikosti.

V prvním století př. n. l. popsal římský architekt Marcus Vitruvius Polio ve svém díle *De architectura libri decem* [*Deset knih o architektuře*][3] tři způsoby promítání prostorových útvarů do roviny, které nazval *ichnografia* (odpovídá dnešnímu půdorysu), *orthografia* (odpovídá dnešnímu nárysu) a *skenografia* (odpovídá dnešní perspektivě).

Tyto starověké konstrukce však postrádaly vzájemnou jednoznačnost promítání prostoru do roviny a zřejmě byly tvořeny jen na základě empirie.

1.2 Vznik lineární perspektivy

Vývoj lineární perspektivy (speciální případ středového promítání) byl úzce spjat s výtvarným uměním, jelikož použití perspektivy umožňuje malíři věrohodné znázornění prostoru. Pokusy o reálné zachycení prostoru (sbíhání rovnoběžných přímek, zmenšování vzdálenějších objektů apod.) byly patrné již na freskách a mozaikách vzniklých před naším letopočtem, avšak použití těchto prvků ještě nevycházelo z nějakých pravidel perspektivního zobrazování.

Snaha o cílené hledání zákonitostí perspektivy byla evidentní až v dílech pozdního středověku. Stále dokonalejší a propracovanější perspektivu používalo v období renesance mnoho malířů. Tento vývoj postupně vedl k vytvoření teoretického základu perspektivního promítání. Důkaz jedné ze základních vět lineární perspektivy, a sice že

[1] Gaspard Monge (1746–1818) byl francouzský matematik a fyzik. Působil nejprve jako profesor matematiky a fyziky na vojenské škole v Mézières, později vyučoval deskriptivní geometrii na École Normale a École Polytechnique v Paříži. Více o jeho životě viz [3].
[2] Několik takových nákresů ukazuje F. Kadeřávek v knihách [2] a [3].
[3] V češtině máme k dispozici překlad A. Otoupalíka *Deset knih o architektuře* (Praha, 2001) z latinského vydání *De architectura libri decem* (Leipzig, 1912). Původní práce vznikla asi v letech 32–22 př. n. l.

„rovnoběžky se sbíhají v obraze v jediném bodě (úběžníku)“, podal italský matematik Guidobaldo del Monte (1545–1607) v díle *Perspectivae libri sex* [*Šest knih o perspektivě*] (Pisa, 1600), viz [3], str. 21.

1.3 Rozvoj rovnoběžného promítání

Z období středověku se dochovalo množství velmi pečlivě propracovaných rysů sestrojených v pravoúhlém promítání, ve kterých již bývaly nárys a půdorys (popřípadě jiné dva kolmé průměty) spojovány do jednoho obrázku. Konstrukce průmětů byly provedeny správně, stále se však jednalo o speciální případy umístění konstruovaných objektů vůči průmětnám. Nákresy sloužily pouze k zachycení prostoru do roviny, nikoli k řešení prostorových úloh v rovině.[4]

Za zmínku stojí práce Albrechta Dürera[5] *Vnderweysung der Messung …*, v níž je několik konstrukcí provedených v pravoúhlém promítání na dvě navzájem kolmé průmětny. Dürer však konstruuje pouze konkrétní případy, nepodává návod k postupům v obecných situacích.

Vedle pravoúhlého promítání se v 16. století ještě objevil specifický případ kosoúhlého promítání, tzv. *vojenská* (též *kavalírní*) perspektiva. Toto promítání se využívalo především k zobrazení plánů měst a opevnění pro vojenské účely. Jeho výhodou bylo spojení nárysu a půdorysu do jednoho průmětu a současné zachování základních rozměrů (šířky, délky, výšky) v daném měřítku.

2 Vznik deskriptivní geometrie jako vědy

2.1 Gaspard Monge, jeho předchůdci, současníci a přímí pokračovatelé

Výraznější pokusy o zobecňování zákonitostí rovnoběžného promítání byly patrné až od konce 16. století a především pak v 17. století, kdy se začala objevovat teoreticky propracovanější díla v oblasti stereotomie (Philibert Delorme,[6] Mathurin Jousse,[7] Girard Desargues[8] aj.). K zákonům zobrazování výrazně přispěl také Amédée François Frézier.[9]

[4] Ze zajímavých dochovaných materiálů z našich zemí uveďme například rysy Chrámu svatého Víta v Praze ze 14. století (nyní uložené v knihovně Akademie výtvarných umění ve Vídni) nebo půdorys a řez Místodržitelského letohrádku ve Staré královské oboře v Praze z roku 1726 (rys je uložen v Archivu Pražského hradu).

[5] Albrecht Dürer (1471–1528) byl německý malíř, který se zajímal o matematické principy v umění. Studoval Eukleida a Vitruvia, zabýval se geometrií v malířství, především pak teorií lidských proporcí. Kromě mnoha významných obrazů je znám svými dvěma teoretickými pracemi *Vnderweysung der Messung mit dem Zirckel uñ Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* [*Pojednání o měření kružítkem a pravítkem na přímkách, v rovinách a tělesech*] (Nürnberg, 1525) a *Vier Bücher von menslicher Proportion* [*Čtyři knihy o lidských proporcích*] (Nürnberg, 1528).

[6] Philibert Delorme (?1514–1570), též de l’Orme, byl francouzský renesanční architekt. Sepsal rozsáhlý spis *Premier tome de l’architecture* (Paris, 1567) věnovaný architektuře, ve kterém se mimo jiné zabýval stereotomií.

[7] Mathurin Jousse (1575–1645) byl francouzský architekt a teoretik. Stereotomii se věnoval v práci *Les secrets d’architecture* (La Flèche, 1642).

[8] Girard Desargues Lyonnais (1591–1661) byl francouzský matematik, architekt a inženýr, jeden z tvůrců projektivní geometrie. Stereotomií se zabýval ve spisu *Brouillon project d’une exemple d’une maniere universelle du S. G. D. L.* [Sieur Girard Desargues Lyonnais] *touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l’architecture* (Paris, 1640).

[9] Amédée François Frézier (1682–1773), francouzský důstojník, inženýr a matematik, byl autorem práce *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autre parties des bâtimens civils et militaires, ou Traité de stéréotomie à l’usage de l’architecture* (Strasbourg, 1738), ve které se vedle návodů k jednotlivým konstrukcím objevila i teoretická odůvodnění.

Veškeré snahy popsat obecné zákonitosti promítání završil Gaspard Monge již zmíněným dílem *Géométrie descriptive*.[10] Práce je rozdělena do pěti částí – v prvních třech se Monge věnoval výkladu deskriptivní geometrie, ve čtvrté aplikacím popsané metody pro konstrukce řezů křivých ploch a v poslední části křivosti dvojitě zakřivených čar a ploch. Od čtvrtého vydání (Paris, 1820) byly doplněny další dvě části věnované teorii stínů a teorii perspektivy, které zpracoval Barnabé Brisson.[11]

Vedle Gasparda Monge se o rychlý rozvoj deskriptivní geometrie v první polovině 19. století zasloužili Sylvestre François Lacroix,[12] Jean Nicolas Pierre Hachette[13] a Charles François Antoine Leroy.[14]

2.2 Rozvoj deskriptivní geometrie v 19. století

V průběhu 19. století se deskriptivní geometrie postupně rozšířila z Francie do dalších evropských zemí. K významnému rozvoji došlo zejména v Itálii, Německu, Rusku a Rakousku-Uhersku. S tím souvisí zakládání polytechnických škol (první školou tohoto typu byla již zmíněná École Polytechnique (1795) v Paříži, po jejím vzoru vznikly polytechniky v Praze (1806), Neapoli (1808), Štýrském Hradci (1811), Vídni (1815) atd.), na nichž se postupně systemizovaly katedry deskriptivní geometrie.[15]

Na rozvoj deskriptivní geometrie v našich zemích mělo vliv především založení techniky v Praze. Základy deskriptivní geometrie zde byly vykládány poprvé ve školním roce 1829/30 Karlem Wiesenfeldem (1802–1870). Výuka probíhala v německém jazyce, často jen pro potřeby jiného předmětu či jako doplnění znalostí studentů, kteří přicházeli ze středních škol nedostatečně vybaveni. V roce 1850 zde byla zřízena profesura deskriptivní geometrie a deskriptiva byla vyhlášena povinným předmětem pro studenty mechaniky a stavitelství. Prvním profesorem byl jmenován Rudolf Skuherský,[16] který studoval ve Vídni u profesora Johanna Höniga.[17] Výuka deskriptivní geometrie probíhala především podle Hönigovy a Leroyovy učebnice.

---

[10] Práce vycházela nejprve v roce 1795 v *Séances des Écoles Normales* pod názvem *Textes des leçons de géométrie descriptive donées á l'École Normale*, o čtyři roky později vyšla znovu v knižní podobě jako *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la Republique* (Paris, 1799).

[11] Barnabé Brisson (1777–1828) studoval na École Polytechnique, kde byl Mongeovým žákem. V roce 1808 si vzal za ženu Anne-Constance Huart de l'Enclose, neteř G. Monge. Pracoval jako stavební inženýr, zabýval se především aplikacemi deskriptivní geometrie při stavbě plavebních kanálů.

[12] Sylvestre François Lacroix (1765–1843) byl žákem Gasparda Monge, od roku 1794 mu pomáhal s přípravou materiálů pro kurz deskriptivní geometrie. Je autorem práce *Essai d'géométrie sur les plans et les surfaces* (Paris, 1795), která během 19. století vycházela opakovaně pod názvem *Complément des élémens de géométrie.*

[13] Jean Nicolas Pierre Hachette (1769–1834) byl nejprve asistentem a poté nástupcem Gasparda Monge na pařížské École Normale. Mongeovu *Géométrie descriptive* rozšířil o dva dodatky *Supplémens á la Géométrie descriptive de Monge* (Paris, 1811, 1818).

[14] Charles François Antoine Leroy (1780–1854) působil jako profesor deskriptivní geometrie na École Polytechnique. Je autorem velmi rozšířeného spisu *Traité de géométrie descriptive suivi de la méthode des plans cotes, et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques* (Paris, 1837). Tato práce vyšla také v německém překladu pod názvem *Die darstellende Geometrie* (Stuttgart, 1838).

[15] O systemizaci kateder deskriptivní geometrie na školách v Rakousku-Uhersku viz [4].

[16] Rudolf Skuherský (1828–1863) studoval na polytechnických ústavech v Praze a ve Vídni. Zde vydal dvě vlastní práce z deskriptivní geometrie: *Die orthographische Parallelperspective* (1850) a *Die Theorie der Theilungspunkte als Beitrag zur Lehre von der freien Perspektive* (1850). Těmito pracemi si zajistil asistentské místo u profesora Höniga při katedře deskriptivní geometrie ve Vídni. Od roku 1852 působil jako provizorní (od roku 1854 jako řádný) profesor deskriptivní geometrie na polytechnice v Praze.

[17] Johann Hönig (1810–1886) byl profesorem deskriptivní geometrie na vídeňské polytechnice (1843–1870). Je autorem rozšířené učebnice *Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie* [*Úvod do studia deskriptivní geometrie*] (Wien, 1845).

3 Vznik české deskriptivní geometrie

3.1 První české přednášky a učebnice

První přednášky deskriptivní geometrie v češtině na pražské polytechnice zahájil Rudolf Skuherský ve školním roce 1861/62. Ve stejném roce začal učit deskriptivní geometrie v češtině také Dominik Ryšavý[18] na První české reálce v Praze. V souvislosti s tím bylo třeba vydat nové české učebnice. Autorem první středoškolské učebnice[19] je Dominik Ryšavý, první vysokoškolskou učebnicí je *Deskriptivní geometrie promítání parallelního* (Praha, 1906) od Jana Sobotky.

4 Závěr

Rozkvět deskriptivní geometrie v českých zemích (stejně jako jinde v Evropě) trval přibližně do třicátých let 20. století. Po válce lze pozorovat určitý odklon ovlivněný také reorganizací středního i vysokého školství. Deskriptivní geometrie jako věda o zobrazovacích metodách a jejich aplikacích je v podstatě uzavřenou disciplínou a její současný vývoj souvisí s dalšími odvětvími geometrie, zejména s počítačovou geometrií.

Literatura

[1] Chmelíková V.: *Z historie výuky deskriptivní geometrie na středních školách*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21.–25. 8. 2009, Matfyzpress, Praha, 2009, 120–123.

[2] Kadeřávek F.: *Geometrie a umění v dobách minulých*. Jan Štenc, Praha, 1935.

[3] Kadeřávek F.: *Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk*. ČSAV, Praha, 1954.

[4] Sklenáriková Z.: *Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku*. In Bečvář J., Fuchs E. (ed.): Matematika v proměnách věků II, Prometheus, Praha, 2001, 14–45.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*, rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8* a projektu *Specifický vysokoškolský výzkum* 2011-261-315.

Adresa

Mgr. Vlasta Moravcová
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *morava@karlin.mff.cuni.cz*

[18] Dominik Ryšavý (1830–1890), absolvent pražské techniky, působil jako učitel matematiky a deskriptivní geometrie na První české reálce v Praze na Novém Městě.

[19] O výuce deskriptivní geometrie na reálkách a prvních českých středoškolských učebnicích viz [1].

PEDAGOGICKÉ PRÁCE JAKUBA FILIPA KULIKA (1793–1863)

LUBOŠ MORAVEC

Abstract: The aim of the article is to show publications connected with pedagogical and teaching activities of Jakub Filip Kulik. The most known one is the university textbook of advanced mathematics which he published in two quite different editions. Besides this work he also wrote a textbook of physics and prepared tables intended for students of mathematics.

1 Připomenutí

1.1 Život a dílo Jakuba Filipa Kulika

Jakub Filip Kulik se narodil dne 1. května 1793 ve Lvově, kde posléze vystudoval gymnázium a filosofickou fakultu. Následné studium práv nedokončil a věnoval se matematické práci. Postupně působil na vysokých školách v Olomouci, ve Štýrském Hradci a v Praze. Zemřel dne 28. února 1863 v Praze.

Věnoval se především aplikované matematice a teorii čísel. Známé jsou jeho rozsáhlé tabulky prvočísel a nejmenších dělitelů přirozených čísel. Sepsal dvě učebnice, necelé dvě desítky monografií a obdobný počet odborných pojednání.[1]

1.2 Pedagogická činnost

Roku 1814 se J. F. Kulik stal profesorem elementární matematiky na lyceu v Olomouci. Po dvou letech odešel do Štýrského Hradce, kde získal místo profesora fyziky a aplikované matematiky nejprve na lyceu, později vyučoval také astronomii na štýrskohradecké polytechnice. V roce 1826 nastoupil na stolici vyšší matematiky na pražské univerzitě, kde přednášel až do své smrti.[2]

Jako studijní materiál k jeho přednáškám v Olomouci byla určena kniha Ignaze Appeltauera,[3] ve Štýrském Hradci pak Döttlerova učebnice[4] a v prvních letech jeho působení na pražské univerzitě byl podkladem pro jeho výuku dvoudílný spis Andrease von Ettingshausena.[5]

Soudobé učebnice však J. F. Kulikovi příliš nevyhovovaly. Vadilo mu především povrchní zpracování infinitesimálního počtu a vyšší geometrie křivek a ploch, stejně jako nedostatečný důraz na aplikace těchto témat v praxi. Rozhodl se proto sepsat vlastní výukové materiály.

---

[1] Pro více informací o Kulikově životě a díle viz [8] a [10].
[2] Pro více informací o Kulikově pedagogické činnosti viz [9].
[3] Appeltauer I.: *Elementorum matheseos pureo*. Vindobona et Trieste, 1814 až 1817, 344 + 414 stran.
[4] Döttler R.: *Elementa Physicae mathematico-experimentalis in usum auditorum suorum conscripta*. Vindobona, 1815, 529 stran.
[5] Ettingshausen A.: *Vorlesungen über die höhere Mathematik*. Wien, 1827, 443 + 495 stran.

2 Kulikovy učební materiály

2.1 Učebnice vyšší analýzy

Kulikova *Lehrbuch der höheren Analysis* [3] je pravděpodobně jeho nejznámější a nejrozšířenější knihou. Vyšla ve dvou poměrně rozdílných vydáních a měla být především studijním materiálem doplňujícím jeho přednášky na pražské univerzitě.

První vydání čítající 470 stran vyšlo již roku 1831, oficiálně doporučenou literaturou pro Kulikovy přednášky se však stalo teprve v akademickém roce 1839/40.

Jakub Filip Kulik v knize vysvětlil, že pojem *vyšší analýza* chápal jako opak *algebry* (jejíž výklad neměl být náplní knihy a do níž zahrnoval i eukleidovskou geometrii). Téma vyšší analýzy rozděloval na dvě základní části. První z nich byla *vyšší aritmetika*, do níž řadil výklad vlastností funkcí spolu s diferenciálním a integrálním počtem. Druhou částí byla *vyšší geometrie*, jež obsahovala křivky jednoduché křivosti, křivky dvojité křivosti a práci s plochami. Za křivky jednoduché křivosti J. F. Kulik považoval rovinné křivky, křivkami dvojité křivosti nazýval křivky prostorové.[6]

Knihu rozdělil na čtyři základní kapitoly, kterým předcházel úvod obsahující např. binomickou větu, práci s řetězovými zlomky či způsoby řešení rovnic. Na závěr pak uvedl různé pomocné tabulky (v nichž bylo možné nalézt mocniny čísel 2, 3 a 5, druhé mocniny některých řetězových zlomků apod.) a dvě strany s geometrickými nákresy.

V první základní kapitole – *Methode der unbestimmten Koeffizienten* – mj. probral funkce, včetně exponenciálních, logaritmických a goniometrických. Dále upřel pozornost k základům práce s posloupnostmi (aritmetickými a rekurentně zadanými) a k řešení rovnic, včetně rovnic vyšších řádů.

Obsah druhé kapitoly byl patrný z jejího názvu – *Differential- und Integralrechnung*. Pokrývala učivo od základů infinitesimálního počtu až po diferenciální rovnice a sčítání řad. J. F. Kulik se zde odvolával na Leibnitze, pojem limity vůbec nedefinoval a výklad prováděl přímo pomocí diferenciálů definovaných přes nekonečně malé veličiny. Kromě derivací základních funkcí jedné proměnné ukázal také derivace vyšších řádů či souvislost derivace s průběhem funkce. Nezapomněl ani na některé pokročilejší partie, jakými byly Taylorův polynom nebo parciální derivace funkcí dvou proměnných. U integrálů samozřejmě uvedl primitivní funkce k vybraným elementárním funkcím a základní pravidla pro integraci, vysvětlil také metodu per partes či využití parciálních zlomků, které používal již u derivací. Pro další studium dané problematiky odkázal na práce Thomase Johanna Mayera (1723–1762),[7] Leonharda Eulera (1707–1783)[8] a Ephraima Salomona Ungera (1789–1870).[9]

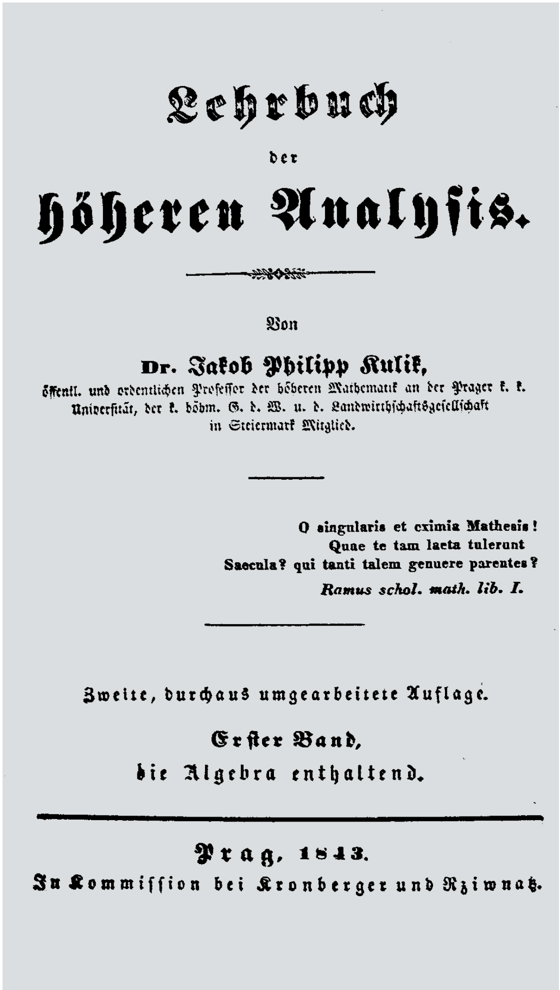
---

[6] Přesná Kulikova definice je následující: Křivka první křivosti je taková křivka, jejímiž všemi body lze proložit jedinou rovinu. Naopak, leží-li body křivky v různých rovinách, jedná se o křivku dvojité křivosti.
[7] Mayer T. J.: *Vollständiger Lehrbegriff der höheren Analysis*. Göttingen, 1818, 356 + 526 stran.
[8] Euler L.: *Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Integralrechnung*. Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von Joseph Salomon, Wien, 1828 až 1830, 439 + 424 + 520 stran.
[9] Unger E. S.: *Lehrbegriff der Differentialrechnung*. Erfurth und Gotha, 1826. Unger E. S.: *Die Integralrechnung und ihre Anwendung*. Erfurth und Gotha, 1827, 528 stran.

Ve třetí kapitole pojmenované *Die Kurven mit einfacher Krümmung* se J. F. Kulik věnoval základní práci s rovinnými křivkami. Obecně křivky rozdělil na algebraické (jejichž rovnicí je polynom) a transcendentní (u nichž v předpisu vystupují například goniometrické či logaritmické funkce). Ukázal práci s přímkami, trigonometrické vztahy v rovině a podrobně rozebral kuželosečky, které často používal v příkladech v dalším výkladu. Dále se věnoval polárním souřadnicím, výpočtu tečen a normál křivek, evoluci, rektifikaci a kvadratuře křivek. Kapitolu zakončil popisem křivek vyšších stupňů (např. konchoidy) a transcendentních křivek – grafů logaritmů, logaritmické spirály nebo cykloidy.

Poslední část opět nese vypovídající titul – *Flächen und Kurven mit doppelter Krümmung*. Po krátkém úvodu o souřadnicích v prostoru J. F. Kulik připojil pojednání o transformaci souřadnic a sférické geometrii. Poté věnoval pozornost práci s přímkami v prostoru, plochám prvního a druhého stupně, středově souměrným plochám (válcové plochy, elipsoidy, hyperboloidy apod.), kuželosečkám v prostoru, středově nesouměrným plochám (eliptický paraboloid, eliptický konoid apod.) a křivkám dvojité křivosti. Na závěr zmínil možnosti výpočtu objemů těles ohraničených zakřivenými plochami a metody práce s polárními souřadnicemi.

V celé knize se J. F. Kulik snažil o přehledný a jasný výklad dané problematiky s přihlédnutím k praktickému použití při různých výpočtech, především při dalším studiu mechaniky. Všechny vztahy ihned ilustroval na konkrétních příkladech, teorii však vykládal poměrně stručně.


Lehrbuch

der

höheren Analysis.

Von

Dr. Jakob Philipp Kulik,
öffentl. und ordentlichen Professor der höheren Mathematik an der Prager k. k. Universität, der k. böhm. G. d. W. u. d. Landwirthschaftsgesellschaft in Steiermark Mitglied.

O singularis et eximia Mathesis!
Quae te tam laeta tulerunt
Saecula? qui tanti talem genuere parentes?
Ramus schol. math. lib. I.

Zweite, durchaus umgearbeitete Auflage.

Erster Band,
die Algebra enthaltend.

Prag, 1843.
In Kommission bei Kronberger und Rziwnatz.

Obrázek 1: *Titulní list druhého vydání Kulikovy učebnice vyšší analýzy.*

Pro druhé vydání učebnici zcela přepracoval. V předmluvě uvedl několik důvodů pro tento krok. Za první z nich považoval přílišnou stručnost a z ní pramenící obtížnou srozumitelnost výkladu, kterou se snažil odstranit zvýšením důrazu na didaktičnost textu. Dále usoudil, že vhodnou součástí učebnice by mělo být i přehledné shrnutí algebry. Jako třetí důvod uvedl nové matematické poznatky, které chtěl do učebnice zapracovat (jednalo se především o rozličné způsoby numerického řešení rovnic). Protože přepracovaná kniha měla v porovnání s prvním vydáním téměř dvojnásobný objem, rozdělil ji do dvou svazků – *Lehrbuch der höheren Arithmetik und Algebra* a *Die Integralrechnung und die analytische Geometrie*, každý z nich pak rozčlenil na tři základní kapitoly.

V první kapitole – *Arithmetik* – J. F. Kulik započal výklad metodami písemného výpočtu základních aritmetických operací a dále se věnoval hledání největšího společného dělitele, periodickým desetinným číslům a dělitelnosti vybranými prvočísly, nejvyšší z nich bylo 9091! Následně svou pozornost upřel k práci se zlomky (včetně aplikací na výpočty úroků), k řetězovým zlomkům a mocninám společně s binomickou větou. Kapitolu zakončil statí o logaritmech a metodách písemného odmocňování.

Ve druhé kapitole nesoucí název *Algebra* pracoval s polynomy (kromě základních operací zde vysvětlil také Malou Fermatovu větu či primitivní odmocniny), s rovnicemi (včetně reciprokých a rovnic vyšších stupňů), aritmetickými a geometrickými posloupnostmi. Pro podrobné studium základů algebry však odkázal na svého kolegu Josefa Ladislava Janderu.[10]

V poslední části prvního svazku – *Algebraische Analysis* – nejprve pojednal o funkcích, především o polynomiálních a goniometrických, u nichž nezapomněl ani na Moivrovu větu. Následně obdobně jako v prvním vydání vyložil diferenciální počet, téma ovšem doplnil numerickými metodami řešení rovnic a problematikou konvergence řad.

Ve čtvrté kapitole – *Integralrechnung* – J. F. Kulik vyložil toto téma od integrace elementárních funkcí, přes různé integrační metody až po diferenciální rovnice.

V páté kapitole – *Geometrie zweiter Koordinaten* – popsal různé druhy křivek (kuželosečky i křivky vyšších stupňů – např. kardioidu, konchoidu, také transcendentní křivky jako logaritmickou spirálu či epicykloidu), charakterizoval jejich základní vlastnosti a věnoval se jim především z pohledu analytické geometrie.

V závěrečné kapitole nazvané *Geometrie dreier Koordinaten* se zaměřil na výklad prostorové geometrie. Hlavním tématem je sférická trigonometrie včetně aplikací v astronomii či geografii, následovaná problematikou ploch a křivek dvojité křivosti v obdobném rozsahu, jako v prvním vydání.

I ve druhém vydání své učebnice se J. F. Kulik soustředil především na praktické použití matematických poznatků. Nepoužíval nejmodernějších prostředků, držel se eulerovské koncepce nekonečně malých veličin a nové poznatky zařazoval jen zřídka. Přesto však vytvořil učebnici, která si získala velkou oblibu a kterou dnes můžeme nalézt ve fondech knihoven po celém světě.[11]

---

[10] Jandera J. L.: *Beiträge zu einer leichteren und gründlichen Behandlung eineger Lehren der Arithmetik*. Prag, 1830, 289 stran.

[11] Obě vydání knihy lze nalézt v elektronické podobě na internetu; první díl je dostupný na službě Google Books, druhý v systému Kramerius Národní knihovny v Praze:
http://books.google.com/books?id=ZQcAAAAAMAAJ&dq=kulik%20lehrbuch%20der%20analysis&hl=cs&pg=PR1#v=onepage&q&f=false
http://kramerius.nkp.cz/kramerius/MShowMonograph.do?id=16849

2.2 Základy vyšší mechaniky

Jakub Filip Kulik se při psaní učebnic nevěnoval pouze matematice. Druhou vysokoškolskou učebnici nazvanou *Anfangsgründe der höheren Mechanik* [1] věnoval fyzice, konkrétně vyšší mechanice, kterou přednášel na pražské univerzitě. Uvedl, že v průběhu let třikrát kompletně přepracoval své přípravy podle potřeb a připomínek posluchačů i podle aktuálního vývoje vědy.

Obdobně jako u učebnice analýzy se snažil vytvořit pomůcku pro studenty, která je přehledně a srozumitelně seznámí se základy dané problematiky. Nekladl si za cíl zapojit do výkladu nejnovější poznatky či dokonce vlastní vědecké výsledky. Výjimku však učinil u teorie stavby zavěšených (řetězových) mostů, kterou považoval za velmi důležitou.[12]

V knize objasnil pět základních témat – statiku pevného tělesa, aplikace statiky, dynamiku, hydrostatiku a hydrodynamiku společně s hydraulikou. Výklad na závěr doplnil sadou názorných obrázků.

2.3 Další pedagogické práce

Kromě dvou výše zmíněných učebnic J. F. Kulik publikoval i další spisy, které měly, resp. mohly sloužit jako studijní pomůcka pro studenty. Jednalo se především o různorodé soubory tabulek, které byly nezbytné pro provádění složitých výpočtů. Již jeho první publikace [2] z roku 1824 obsahuje právě tabulky prvočísel, mocnin a odmocnin, goniometrických funkcí, logaritmů apod. Později vydal knihu *Sammlung von Tafeln zur Erleichterung des Studiums der Mathematik* [4], která použití při studiu matematiky dostala přímo do svého názvu a byla pomůckou zejména při stanovování obsahů různých ploch, objemů těles atd.

Jakub Filip Kulik nesoustředil svou pozornost pouze na přírodní vědy. V průběhu života se snažil různými způsoby podporovat školství jako celek. Za jeho pedagogickou práci tak můžeme považovat i pomůcku pro výuku kreslení [5], kterou na své náklady vydal a distribuoval do škol po celé rakouské monarchii. Jednalo se o soubor předloh sestávající ze stovky listů. Čtyřicet je věnováno kreslení lidského těla a jeho částí, devětadvacet různým metodám stínování a zbytek je zaměřen na zachycení krajiny a starožitných předmětů.

3 Závěr

Přestože Kulikovy pedagogické práce nepřinášely nové vědecké výsledky, což ostatně ani nebylo jejich účelem, byly velmi hodnotné z didaktického hlediska. Jeho vysokoškolské učebnice pravděpodobně byly mezi studenty oblíbené, o čemž svědčí jejich velké rozšíření. Ostatně J. F. Kulik byl jako učitel také kladně hodnocen.

Literatura

[1] Kulik J. Ph.: *Anfangsgründe der höheren Mechanik*. Friedrich Flescher und Kronberger und Rziwnass, Leipzig und Prag, 1846, 751 stran.

[2] Kulik J. Ph.: *Handbuch matematischer Tafeln*. Christoph Penz, Graz, 1824, 148 stran.

[12] J. F. Kulik publikoval na toto téma ve třicátých letech dva články v *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* [Pojednání Královské české společnosti nauk] ([6] a [7]).

[3] Kulik J. Ph.: *Lehrbuch der höheren Analysis*. Kronberger und Weber, Prag, 1831, 470 stran; 2. rozšířené vydání: Kronberger und Rziwnass, Prag, 1843, 390 + 399 stran.

[4] Kulik J. Ph.: *Sammlung von Tafeln zur Erleichterung des Studiums der Mathematik*. J. L. Eggenberger, Prag, 1833, 240 stran.

[5] Kulik J. Ph.: *Sammlung von Zeichnungen zum Behufe des Selbstunterrichts für die studierende Jugend*. Prag, 1843, 100 stran.

[6] Kulik J. Ph.: *Theorie und Tafeln der Kettenlinie*. Abhandlungen der königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften, Neuer Folge, Bd. III., 1832, 51 stran.

[7] Kulik J. Ph.: *Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie*. Abhandlungen der königliche böhmische Gesellschaft de Wissenschaften, 5. Folge, Bd. I., 1838, 35 stran.

[8] Moravec L.: *Seznámení s Jakubem Filipem Kulikem*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2009, 156–163.

[9] Moravec L.: *Jakub Filip Kulik v Olomouci, Štýrském Hradci a Praze*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 31. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2010, 187–198.

[10] Porubský Š.: *Jakob Philipp Kulik – ein vergessener Rechenkünstler*. Tagung zur Geschichte der Mathematik, Augsburg, 2004, 307–328.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*, rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8* a projektu *Specifický vysokoškolský výzkum* 2011-261-315.

Adresa

Mgr. Luboš Moravec
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *moravec@karlin.mff.cuni.cz*

JAKOB STEINER A JEHO PŘÍNOS K POZNATKŮM O KRUŽNICI

TAMARA NEDEVOVÁ

Abstract: The text is devoted to Jakob Steiner, a great mathematician of the 19th century, who dedicated his life to both synthetic and projective geometry. Firstly, it describes his life and path to mathematics, and then it deals with his activities in the professional society and his publications. Finally, it characterizes his contribution to the theory of circles.

1 Úvod

Jakob Steiner byl významnou postavou v historii geometrie díky hloubce a originalitě své geometrické práce. Přestože lidé zabývající se geometrií určitě znají Steinerovu křivku či Steinerovu elipsu, v české literatuře se o tomto muži takřka nedočteme. Informace o jeho životě a působení v odborných kruzích jsou čerpány ze zdrojů [5], [6], [8]. Steinerova práce týkající se geometrie je velmi rozsáhlá, a proto je na závěr zmíněno jen několik nových poznatků týkajících se hlubších vlastností kružnice.

2 Mládí

Jakob Steiner se narodil 18. března 1796 v Utzenstorfu poblíž Bernu jako osmé dítě Anny Barbary Weber a Nicholase Steinera. Mládí strávil na farmě rodičů, kde vypomáhal. Do svých čtrnácti let se nenaučil číst ani psát. Rodiče také trochu podnikali, díky čemuž se Jakob naučil počítat. Jeho početní zručnost byla pro podnik velkým přínosem. Steiner chtěl však od života více a přes odpor rodičů odešel v osmnácti letech do Yverdonu, kde byl přijat do školy vzdělávacího reformátora Johanna Heinricha Pestalozziho. Tento reformátor chtěl vyzkoušel své výchovné metody i na chudých, a proto nemusel Steiner platit školné, jež by nebyl schopen splácet. Pestolozziho škola měla významný vliv na Steinerův postoj jak k výuce matematiky, tak k jeho metodice matematického výzkumu. Po letech přiznal, že zrovna zde si vybudoval svůj vztah k matematice a objevil touhu najít „hlubší základy" matematických vět.

Na podzim roku 1818 se Steiner přestěhoval do Heidelbergu, kde si vydělával soukromými lekcemi matematiky. Na tamní univerzitě zároveň navštěvoval přednášky z kombinatorické analýzy, diferenciálního a integrálního počtu a algebry. V roce 1821 odcestoval do Berlína, kde bylo těžké se soukromými lekcemi uživit, a proto se rozhodl získat kvalifikaci nutnou pro výuku na gymnáziu. Kvůli problémům se znalostmi jiných oborů dostal pouze omezené povolení učit, což mu však stačilo k práci na Werder Gymnasium v Berlíně. Po krátkém čase byl po hádce s ředitelem gymnázia propuštěn. Rozdílný názor měli účastníci sporu na způsob vedení výuky. Steiner se držel Pestalozziho metod, avšak ředitel gymnázia je považoval za vhodné pouze pro základní kurzy a vyžadoval používání učebnic, které sám napsal. Podobné problémy ho později potkaly i na průmyslové škole, kde působil jako asistent.

3 Život v odborných kruzích

I přes neúspěchy v zaměstnání stačil Steiner navštěvovat kurzy na univerzitě v Berlíně, kde se spřátelil s Carlem Jacobim, později i s dalšími významnými matematiky jako Augustem Crellem či Nielsem Abelem. Jejich společné nadšení pro matematiku vedlo k založení věstníku známého jako *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle´s Journal*), který byl prvním časopisem věnovaným výhradně matematice. Již v roce 1826, v prvním čísle tohoto časopisu, vydal Steiner první příspěvek *Einige Geometrische Betrachtungen* [*Geometrické úvahy*, [3]]. Je významný díky historicky první formulaci pojmu mocnost bodu ke kružnici. V roce 1832 publikoval první knihu *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander* [*Systematický rozvoj závislosti geometrických útvarů*]. Položil v ní základy moderní syntetické geometrie, protože představil jednotlivé geometrické útvary a objasnil vztahy mezi nimi. Rozebíral hlavně vlastnosti kuželoseček a kvadrik. Poprvé uvedl princip duality, který považoval za základní vlastnost ploch, přímek i bodů. Další slavný výsledek je Ponceletova-Steinerova věta (viz níže), jejíž důkaz je hlavní náplní Steinerovy druhé knihy *Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises* [*Geometrické konstrukce prováděné pomocí přímky z pevné kružnice*, [4]]. Významné jsou rovněž jeho výsledky týkající se algebraických křivek a ploch, zmiňme především krátký článek *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* [*Obecné vlastnosti algebraických křivek*], jenž však obsahuje pouze závěry bez udání způsobu, jakým byly získány. Nicméně Steiner zasáhl svými výzkumy i do jiných oblastí matematiky, kupříkladu kombinatoriky.

Steiner byl brzy za své matematické příspěvky oceněn. V dubnu 1833 mu byl (na doporučení Jacobiho) udělen čestný doktorát na univerzitě v Königsbergu a v červnu 1834 byl zvolen za člena Pruské akademie věd. Tentýž rok byl také jmenován mimořádným profesorem geometrie na univerzitě v Berlíně.

Mezi kolegy byl Steiner vysoce uznáván. V projektivní geometrii předčil všechny své současníky a dosud je považován za největšího „čistého geometra“ od dob Apollónia z Pergy. Všechny problémy řešil pouze syntetickou geometrií, tedy bez použití analytických výpočtů, které téměř nenáviděl. Steiner tvrdil, že výpočet nahrazuje myšlení, zatímco geometrie myšlení stimuluje (viz [8]), a že by také byla ostuda pro syntetickou geometrii, kdyby se metodami analytické geometrii získaly stejné nebo dokonce lepší výsledky (viz [6]).

Posledních deset let života Steinera sužovalo chatrné zdraví. Vzhledem k problémům s ledvinami trávil většinu roku v rodném Švýcarsku a do Berlína jezdil jen v zimě kvůli svým přednáškám. Nakonec byl zcela upoután na lůžko. Poněvadž se nikdy neoženil, přešla po jeho smrti v roce 1863 třetina dědictví na založení *Steinerovy ceny na Akademii věd v Berlíně*. Zbytek si rozdělili příbuzní a škola v jeho rodném městě. Steinerovo poslední přání bylo, aby chudé děti v jeho rodném městě měly lepší možnost vzdělávat se, než měl ve svém mládí on sám.

4 Nové poznatky o kružnici

Jak již bylo zmíněno výše, v roce 1826 ve svém prvním větším příspěvku s názvem *Einige Geometrische Betrachtungen* Steiner historicky poprvé zavedl pojem „mocnost bodu“ [*Potenz des Puncts*]. Svoji pozornost věnoval tětivě AC dané kružnice procházející daným bodem E a vysvětlil, proč součin $|AE|\cdot|EC|$ je pro libovolnou polohu tětivy AC konstantní. Tuto neměnnou hodnotu nazval mocností bodu E ke kružnici. Uvědomoval si, že mocnost daného bodu je veličina, jež popisuje vlastnost všech sečen, které daným bodem procházejí. Definoval přitom mocnost zvlášť pro body ležící ve vnější a vnitřní oblasti kružnice. Pro vnější bod je mocnost dána jako čtverec nad úsečkou, jejíž krajními body jsou daný bod a bod dotyku tečny kružnice vedené z uvažovaného bodu. Pro vnitřní bod je mocnost dána jako čtverec nad polovinou délky nejmenší tětivy jdoucí daným bodem. Steiner tyto poznatky využíval k odvození řady dalších vět a zabýval se také body se stejnou mocností k více kružnicím. Tyto body tvoří chordály kružnic. Nejdůležitější části Steinerovy práce jsou vyloženy v [7].

Kružnici využíval Steiner i pro rozbor euklidovských konstrukcí a ve své druhé knize [4] dokázal významnou větu, která říká, že pro provedení euklidovských konstrukcí je potřebné pouze pravítko a pevně daná kružnice. Toto tvrzení bylo vysloveno již dříve J. V. Ponceletem, avšak bez důkazu, proto se dnes nazývá Ponceletova-Steinerova věta podle obou tvůrců.

Jeden z významných Steinerových nepublikovaných objevů, který popsal až o mnoho let později ve svém díle Cantor, je konstrukce, podle níž je každému bodu P z vnitřní oblasti kružnice $k(O, r)$ přiřazen bod P' z vnější oblasti kružnice k, který leží na polopřímce OP a splňuje vztah $|OP|\cdot|OP'|= r^2$. Dnes zobrazení nazýváme *kruhovou inverzí*. Steiner své výsledky nikdy nepublikoval nejspíše proto, že mu přišlo paradoxní tvrdit, že ve vnitřní oblasti kružnice je o bod více než ve vnější oblasti, protože středu kružnice není popsaným zobrazením přiřazen žádný bod (viz [1]).

Z teorie křivek je známá tzv. *Steinerova křivka*, což je prostá hypocykloida se třemi vrcholy. Vytvoříme ji tehdy, necháme-li kružnici kutálet po vnitřní straně jiné kružnice s trojnásobným poloměrem a zakreslíme-li trajektorii libovolného bodu kutálející se kružnice.

Steiner také pracoval na teorii extrémů v geometrii. Popsal bod mající minimální součet vzdáleností od vrcholů daného trojúhelníku (*Steinerův bod*) či plošné útvary (resp. tělesa) mající za daných podmínek nejmenší povrch (resp. objem). K nejznámějším z těchto útvarů patří tzv. *Steinerovy elipsy* (elipsy opsané či vepsané danému trojúhelníku, které mají nejmenší, resp. největší obsah). Oceňované jsou Steinerovy důkazy extremálních vlastností kruhu a koule, jako je například tvrzení, že ze všech těles se stejným objemem má nejmenší povrch právě koule. Podrobný rozbor daných vět a také jejich důkazy nalezneme v knize [2].

5 Závěr

O Jakobu Steinerovi bychom mohli napsat mnoho dalšího, o jeho díle, o jeho budování syntetické geometrie i o jeho přínosu mechanice. Steinerovi se podařilo prostřednictvím jednoduchého schématu dosáhnout komplexního pohledu na množství geometrických vět, jež byly do té doby považovány za vzájemně nesouvisející. Steiner byl významnou osobností historie geometrie a bezesporu by se jeho dílem měla česká odborná literatura více zabývat.

Literatura

[1] Suzuki J.: *A History of Mathematics*. Prentice Hall, New Jersey, 2002.

[2] Dorrie H.: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, New York, 1965, 381–389.

[3] Steiner J.: *Einige geometrische Betrachtungen*. Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1901.

[4] Steiner J.: *Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises*. Ferdinand Dümmler, Berlin, 1833.

[5] Smith D. E.: *History of Mathematics*. Dover Publications, New York, 1958, 524–525.

[6] Wikipedia (The free encyclopedia): *Jakob Steiner* [online]. Poslední revize 4. května 2011 [cit. 20. 5. 2011].

http://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner

[7] MathDL (The MAA Mathematical Sciences Digital Library): Fried M. N.: *Mathematics as the Science of Pattern* [online]. Copyright 2011 [cit. 20. 5. 2011].

http://mathdl.maa.org/mathDL/

[8] MT (The MacTutor History of Mathematics archive): O'Connor J. J., Robertson E. F.: *Jakob Steiner* [online]. Copyright duben 2009 [cit. 20. 5. 2011].

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steiner.html

Adresa

Mgr. Tamara Nedevová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: *151372@mail.muni.cz*

BAROKNÍ MATEMATIKA A JEJÍ PODOBY U JANA CARAMUELA Z LOBKOVIC

MIROSLAVA OTAVOVÁ

Abstract: Jan Caramuel de Lobkowitz was one of the last European polymaths, versatile thinker who lived and worked in Prague in the years 1646–1656. He was a theologian, philosopher, mathematician, and logician. His late encyclopedic work *Mathesis biceps* is the compendium of various branches of mathematics, including their historical evolution. The author introduces also his individual advancement, especially in combinatorics and numeration systems.

1 Spojení starého a nového, profánního a posvátného

Nedávné čtyřsté výročí narození Jana Caramuela z Lobkovic (1606–1682) by mělo být stálou výzvou věnovat se odkazu všestranného myslitele, jehož kořeny jsou spojeny ještě s rudolfínskou Prahou a který v Praze již barokní strávil vrcholnou dekádu svého života a představoval významné obohacení zdejší intelektuální komunity. Jan Caramuel se narodil roku 1606 v Madridu, kam jeho rodiče přišli z Prahy, kde jeho otec léta působil jako císařský matematik a astronom na dvoře Rudolfa II. (Po něm následovali Tycho Brahe a Jan Kepler.) Caramuelova matka byla vnučkou Jana Popela z Lobkovic a Jan Caramuel po španělském zvyku používal tento šlechtický přídomek. Otec rozpoznal a od útlého dětství podporoval synovo matematické nadání. V deseti letech zahájil Jan studium filosofie na universitě v Alcale. Ve dvanácti vydal první knihu – astronomické tabulky. Po absolutoriu filosofie přešel na universitu do Salamanky, kde se věnoval teologii.

Roku 1625 vstoupil do cisterciáckého řádu. Po letech strávených vyučováním na řádových školách se roku 1635 objevil na teologické fakultě v nizozemské Lovani a získal zde doktorát teologie. Vynikal všestranným nadáním, schopností kritického úsudku a přesné logické argumentace, jeho španělský temperament a určitá okázalost projevu se však někdy u chladných seveřanů setkávaly s nevraživým přijetím. V roce 1641 na sebe upozornil v universitní disputaci, kdy excelentním způsobem zasáhl do sporu mezi žáky Cornelia Jansena, kteří způsobem blízkým protestantismu vykládali Augustinovu nauku o vztahu svobody a milosti, a jejich oponenty z jezuitské koleje v Lovani. Protože spor s jansenisty měl i závažnou politickou dimenzi – Evropa byla již více než dvacet let sužována válkou mezi katolíky a protestanty – vystoupení mladého profesora se setkalo s ohlasem i v diplomatických kruzích. S Caramuelem navázal korespondenci apoštolský nuncius z Kolína nad Rýnem Fabio Chigi (pozdější papež Alexandr VII. v letech 1655 až 1667). Projevoval zájem o jeho vědeckou práci a vyzval ho k rozpracování probabilismu, nauky morální theologie, která obhajuje svobodu rozhodování o morální dovolenosti jednání na základě posouzení míry pravděpodobnosti, kde mohl Caramuel uplatnit svoji erudici matematika a formálního logika.

Caramuelův záběr byl však mnohem širší. Sledoval a zasvěceně komentoval dění ve všech oblastech poznání a reagoval na nové podněty (např. korespondoval s Descartesem o jeho *Meditacích*). Již v prvním roce svého lovaňského pobytu vzbudil pozornost knihou *Steganographiae nec non claviculae Salomonis Germani, Ioannis Trithemii Abbatis Spanheimensis Ordinis S. Benedicti genuina, facilis dilucidatio, declaratio etc.* [1]. Pod barokně košatým názvem se skrývá starý renesanční text benediktinského opata Jana Trithemia (†1516) opatřený Caramuelovým komentářem. Díky Caramuelově obratné argumentaci (aplikace probabilistické nauky) se odborná veřejnost mohla začít legitimně zabývat dílem, které jeho autor za svého života raději nepublikoval a jež bylo po vydání z pozůstalosti (pod názvem *Polygraphia* v roce 1606) zařazeno na index zakázaných knih. Pouhé nahlédnutí do původního Trithemiova textu v Caramuelově *Steganografii* (výtisk z roku 1635 je v Praze v majetku klášterní knihovny strahovských premonstrátů) vysvětluje odsudek církevního magisteria. Spis má výrazně magickou dikci, pasáže formálního charakteru (využití kombinatoriky) střídá vzývání démonů, autor na mnoha místech otevřeně deklaruje svoji inspiraci židovskou kabalou. Caramuel jako zkušený teolog byl schopen oddělit obsah a dráždící exaltované podání příznačné pro dobu vzniku, která určitou tajemnost a užívání archaické symboliky přímo vyhledávala. (Podobná atmosféra panovala ještě o sto let později v Praze na dvoře císaře Rudolfa, kde se bez žánrového rozlišení pěstovala astronomie i astrologie, zkoumání přírody a přirozenosti prolínalo s alchymií a tajnými naukami – a v tomto prostředí se pohyboval i Caramuelův otec.) Stěžejní myšlenkou steganografie je koncepce šifrovacího klíče. Šifrování v 17. století již nebylo věcí neznámou a potřeba utajeného předávání informací především v diplomacii a vojenství narůstala (připomeňme kardinála Richelieu (1585–1642), prvního ministra francouzského krále). Caramuelovi se podařilo nejen zrušit tabu, které dosud bránilo volnému šíření spisu, ale jeho uchopení tématu matematickými prostředky otevřelo nové možnosti vývoje. I když neužívá dnešní terminologii, ve svém výkladu rozlišuje šifrovací algoritmy, obecné procesy, které lze specifikovat konkrétní volbou šifrovacího klíče. Prostředky kombinatoriky pak lze popsat, kolik různých šifrovacích klíčů algoritmus poskytuje. Podle jejich počtu je možno posoudit „kvalitu“ utajení zprávy, tj. jak velké je riziko, že šifrovaný text bude dekódován. Nepřekvapí, že Caramuela zajímal i opačný problém – dešifrování, tzv. anoigografie (z řeckého *anoigó* – odhaluji vs. *steganos* – neproniknutelný). Je pozoruhodné, že otázku porozumění, odhalení smyslu zašifrovaného textu pojímal ve větší obecnosti, která ho v dalších spisech vedla až k úvahám o možnosti vytvoření umělého jazyka [2].

Není divu, že Caramuelovo jméno mělo v Evropě dobrý zvuk jak v církevních, tak světských kruzích. Dosáhl prestižního postavení koadjutora arcibiskupa mohučského, ovšem vzhledem k bojům třicetileté války spíše působil jako vojenský inženýr (později publikoval i v oboru pevnostního stavitelství). Byl v kontaktu s českými zeměmi, udržoval korespondenci např. s místodržícím Ignácem Bernardem z Martinic (věnoval mu jeden ze svých fyzikálních spisů). Díky jeho doporučení jej roku 1646 povolal Ferdinand III. do Prahy. Byť cisterciák, stal se opatem starobylého Emauzského kláštera, který tehdy obnovovali montserratští benediktini. Příležitost uplatnit se jako teolog Caramuel dostal hned v následujícím roce, kdy ve Vestfálsku probíhala mírová jednání mezi katolíky a protestanty. Císař Ferdinand, jehož země byly válkou nejvíce postiženy, měl zájem uzavřít mír i za cenu značných ústupků protestantské straně, zástupci Svatého stolce v čele s Caramuelovým příznivcem Fabiem Chigim odmítali kompromis ve věcech víry jako mravně nepřijatelný. Caramuelovy argumenty podložené probabilistickou naukou se ukázaly natolik přesvědčivé, že roku 1648 byl vestfálský mír podepsán. Tento moment sice znamenal konec přízně římské kurie, v Čechách se však Caramuel roku 1650 stal generálním vikářem pražského arcibiskupa kardinála Harracha. Jako jeho nejbližší spolupracovník měl velkou zásluhu na normalizaci napjatých vztahů mezi arcibiskupem a universitou ovládanou jezuity. Intenzivně se účastnil života pražské intelektuální komunity, podporoval aktivity řádových učilišť a především pokračoval ve vlastní odborné práci. Roku 1652 vydal spis, kde dále rozvinul probabilistickou nauku až do podoby tzv. laxismu, která byla později církví odsouzena.

Nejzávažnějším dílem Caramuelova pražského působení je *Theologia rationalis* [2]. Jde především o spekulativní gramatiku, analýzu jazyka prováděnou prostředky matematiky a logiky, která připomíná metody logického positivismu 19. a 20. století a umožňuje úvahy o vytvoření umělého jazyka. Snahy o to byly v 17. století motivovány potřebou přesných a jednoznačných formulací při řešení politických problémů i rozvojem formálních disciplín a matematické přírodovědy (z Caramuelových současníků např. Komenský nebo o generaci mladší Leibniz). Ukázkou Caramuelova přístupu je *Grammatica audax* (Odvážná mluvnice), kde prostředky kombinatoriky zjednává hlubší vhled do logické struktury soudobé latiny a adaptuje ji pro potřeby vědeckého zkoumání, vytváří tzv. metafyzický dialekt. Pracuje jednak prostředky čistě logickými (zjemnění významu kvantifikátorů), na úrovni sémantické precizuje významy zaváděním uměle „kombinatoricky" vytvořených sloves, která mají přirozenou flexi a snadné užívání a rozlišují přesně definované mody existence např. pro potřeby teologického diskursu.

2 Mathesis biceps

Jako vikář pražského arcibiskupa musel Caramuel řešit i choulostivé otázky týkající se rekatolizace a ne vždy si počínal politicky obratně. Na odpor někdy narážel i jeho španělský původ a poněkud výstřední osobnost. Po volbě Fabia Chigiho papežem roku 1655 kosmopolitně založený Caramuel projevil zájem o změnu. Papež si byl vědom jeho výjimečného nadání a navzdory osobním výhradám kvůli vestfálskému kongresu mu vyhověl a jmenoval jej roku 1657 biskupem Satrijsko-Campagneské diecéze v jižní Itálii. Zde strávil Caramuel dalších šestnáct let. Kromě řízení duchovní správy vyučoval, založil vlastní tiskárnu a ani v tomto zapadlém kraji nepolevoval ve vědecké práci. Ideje steganografie rozvinul roku 1665 ve spisu *Apparatus philosophicus*. Uvádí zde nové neznámé možnosti šifrování a studuje možnosti konstrukce umělého jazyka, kde se inspiruje čínskými znaky (ve stejném roce publikuje také učebnici základů čínské mluvnice).

V letech 1667 a 1669 vychází v Campanii postupně ve dvou svazcích „čistě" matematický spis *Mathesis biceps* [3], [4] v rozsahu 1711 stran textu a 52 stran obrazových příloh. Dílo má již výrazně novověké parametry – podrobný obsah a věcný rejstřík. V textu najdeme přesné citace, pokud to charakter odkazu umožňuje i s rokem vydání. Jde vlastně o kompendium všeho, co tehdejší doba pod pojem matematiky zahrnovala. Caramuel se neomezuje pouze na současnou podobu příslušných disciplín, i když komentuje aktuální novinky a často uvádí svoje vylepšení. S velikým zaujetím referuje o historickém vývoji, včetně etymologie pojmů, a uplatňuje své znalosti řečtiny, hebrejštiny, arabštiny – příslušná slova jsou vysázena alfabetou, resp. hebrejskými písmeny. (Připomeňme, že kvůli konstrukci umělého jazyka se od obchodníka, rodilého mluvčího, naučil i čínsky.) Neuvěřitelná je šíře jeho znalostí literatury k tématu včetně mytologických souvislostí a povědomí o pouze ústně tradovaných „tajných" naukách.

Z bohatého obsahu zmiňme aritmetiku. Hned v úvodu Caramuel klade otázku, zda je pouze jedna nebo jich je mnoho, a pokud mnoho, čím se navzájem liší. Odpověď i výklad jsou překvapivě moderní. Postupně předvádí binární, ternární, kvaternární, obecně *n*-ární aritmetiku pro $n = 2, 3, \ldots, 10, 12, 60$ a ukazuje, že k reprezentaci čísla v příslušné číselné soustavě je třeba právě *n* navzájem různých znaků (místo číslic užívá písmena *o, a, b, c, …*). Barokní mentalita se projeví v tom, že uvádí i motivace pro existenci jednotlivých aritmetik, v případě kvaternární aritmetiky např. tetragram a fakt, že i v řečtině, latině a arabštině slovo označující Boha obsahuje čtyři písmena. Caramuelova aritmetika má tři části – proaritmetiku, jakýsi úvod, kde definuje pojem čísla a v kapitole *De arithmeticis Notis* referuje o historickém vývoji číselných systémů u různých národů. Synaritmetika, *techné arithmetiké*, je naukou o základních aritmetických operacích. Metaritmetika je disciplína vlastně již „za" aritmetikou. Jejím předmětem jsou čísla „hypotetická" čili „artificiální", jako třeba odmocniny nebo logaritmy. Nauku o nich Caramuel nazývá algebrou, v případě logaritmů navrhuje speciální pojmenování logaritmika. Náznaky logaritmů nalézá už u Pythagory, srovnává pojetí Napierovo, Briggsovo a navrhuje svoji vlastní alternativu, kterou považuje za výhodnou pro usnadnění výpočtů v kombinatorice, která je dále těžištěm jeho zájmu.

Výklad kombinatoriky je obsažen ve druhém svazku [4] z roku 1669. Je patrná Caramuelova obeznámenost s židovskou kabalou, s kterou přišel do styku již v mládí během svého studia na universitě ve španělské Alcale. Uvádí, z jakých historických kořenů vyrostla, a přináší zajímavé etymologické interpretace a jazykové souvislosti nejen hebrejské, ale i arabské. V odstavci *De Combinationibus Rerum, penes differentiam Substantiae, Positionis et Repetitionis* řeší otázku, kolik dvojic, trojic, atd. lze vytvořit z daného počtu prvků, přičemž rozlišuje, zda v *n*-ticích (ne)záleží na pořadí, resp. zda se prvky mohou opakovat. Situaci vždy vyloží na konkrétním příkladě, uvede tabulku pro daný počet prvků a v podstatě odvozuje indukcí přechod k počtu vyššímu. Samozřejmě neužívá kombinační čísla ani faktoriály, ale v jeho tabulkách lze zahlédnout strukturu Pascalova trojúhelníku a v textu popisuje vztahy v něm, včetně návodů k výpočtu. Tato problematika se dále zpracovává v kapitole s řeckým názvem *Kybeia* o hazardních hrách a pokračuje v *Arithmomantice,* již lze etymologicky vyložit jako schopnost odhalovat skryté věci pomocí kombinace čísel.

Literatura

[1] Caramuel z Lobkovic J.: *Steganographiae facilis dilucidatio, declaratio etc*. Coloniae Aggripinae, 1635.

[2] Caramuel z Lobkovic J.: *Theologia rationalis sive in auream angelici doctoris summam meditationes, notae et observationes etc*. Francofurti, 1654.

[3] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis biceps vetus et nova*. Campaniae, 1667.

[4] Caramuel z Lobkovic J.: *Mathesis nova*. Campaniae, 1669.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky VŠE
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *otavova@vse.cz*

DĚLITELNOST V UČEBNICÍCH Z LET 1948 AŽ 1989

KAREL PAZOUREK

Abstract: In our paper, we survey the position of divisibility in Czech secondary school textbooks published between the years 1948 and 1989. We show that divisibility disappeared from the curriculum in the 1950's because of the changes in the education system. But divisibility reappeared later in a new context, more precisely as a tool for teaching some modern mathematical views such as set theory or mathematical logic.

1 Úvod

Celá česká (československá) společnost prošla mezi lety 1948 a 1989 bouřlivým vývojem. Školství se proměňovalo s ní, působily na něj zejména politické tlaky, ale i tlaky odborné. Hlavním odborným tlakem byl proces tzv. modernizace vyučování matematice, který vyvrcholil v sedmdesátých a osmdesátých letech minulého století. Postavení dělitelnosti v učebnicích se v této době silně měnilo, nejprve ze středních škol poskytujících vyšší všeobecné vzdělání dělitelnost téměř vymizela, poté se vrátila jako prostředník budování množinového pohledu na matematiku, výuky logického myšlení a logické stavby matematiky. Další informace o historii školství v tomto období lze nalézt ve statích [5] a [4].

Připomeňme, že od roku 1951 převzala vydávání učebnic jediná organizace, Státní pedagogické nakladatelství.

2 Dělitelnost v učebnicích z let 1948 až 1989

2.1 Učebnice po roce 1948

Idea jednotné střední školy se silně prosadila po roce 1948. Po pěti ročnících národní školy vzdělávání pokračovalo na čtyřleté jednotné střední škole. Na čtyřletých gymnáziích, která navazovala na jednotné střední školy, se dělitelnost učila v prvním ročníku. V učebnici [1], kterou připravil autorský tým pod vedením Eduarda Čecha, je dělitelnost zahrnuta do výkladu zlomků, jsou jí věnovány zhruba dvě strany. Zjevně se předpokládá předchozí znalost dělitelnosti. Pojem nesoudělných čísel je vysvětlen v odstavci o zlomcích v základním tvaru. Samotný text oddílu *Dělitelnost přirozených čísel* začíná definicí prvočísla a následuje věta:

> *Je-li součin bc dvou přirozených čísel dělitelný prvočíslem p, musí aspoň jeden z obou činitelů b, c býti dělitelný prvočíslem p.* ([1], str. 23)

Tato věta je posléze rozšířena pro součin více než dvou čísel. Dále se zavádí složené číslo a jeho rozklad na prvočinitele, přičemž se ihned uvádí, že rozklad daného složeného čísla je jednoznačný. Zdůvodnění se opírá o opakované vyhledávání příslušných prvočíselných dělitelů. Následuje devět příkladů k procvičení, vesměs důkazů vět o dělitelnosti. Výklad dále pokračuje sčítáním a odčítáním zlomků.

2.2 Učebnice po roce 1953

Po zavedení Jedenáctileté střední školy roku 1953 byly cyklické osnovy nahrazeny osnovami lineárními, což se neblaze projevilo na přípravě žáků.

V učebnicích pro devátý, desátý a jedenáctý ročník se dělitelnost jakožto samostatné téma neprobírá. Předpokládá se znalost žáků z předchozího studia. V učebnici pro devátý ročník najdeme jediné významnější použití dělitelnosti v důkazu iracionality odmocniny ze dvou a posléze iracionality čísla $\sqrt{m}$, kde m není druhá mocnina. V kapitole o n-tých odmocninách je dokázána věta:

> *Jestliže přirozené číslo m není n-tou mocninou žádného přirozeného čísla, potom $\sqrt[n]{m}$ je číslo irracionální.* ([3], str. 56)

Všechny důkazy jsou charakteristické vyhýbáním se pojmům dělitelnosti, místo nich se používají zlomky v základním tvaru a jmenovatel zlomku.

2.3 Učebnice po roce 1960

Reforma školství z roku 1960 zavádí základní devítiletou školu, na kterou navazuje střední všeobecně vzdělávací škola (SVVŠ). Osnovy se znovu mění na cyklické. Dělitelnost však v učebnicích pro SVVŠ přímo nenajdeme.

Po roce 1969 byla opět zavedena gymnázia, ale pouze čtyřletá. Navazovala na osmiletou základní školu. K dosavadním učebnicím pro SVVŠ byly vydány komentáře. Komentáře však dělitelnost nezmiňují.

2.4 Učebnice po roce 1976

Po další dílčí reformě byly vydány nové učebnice. Dělitelnost najdeme v učebnicích pro první ročník, avšak není jí věnována samostatná kapitola.

První díl učebnice pro první ročník

První sešit [6] učebnice sepsali J. Šedivý, J. Lukátšová, S. Richtáriková a S. Židek. Učebnice předpokládá, že žáci si znalosti a dovednosti spojené s dělitelností přinesli ze základní školy. V kapitole *Čísla přirozená, celá a racionální* je dělitelnost pouze okrajově, pouze v závěrečném opakování je uvedena jedna slovní úloha:

> *Doba oběhu Merkura kolem Slunce je 88 dní, doba oběhu Venuše 224 dní. Po jakém nejmenším počtu dní se opakuje vzájemná poloha těchto těles? (Údaje i výsledek jsou ovšem jen přibližné.)* ([6], str. 59) [1]

Dělitelnost je v mnohem větší míře použita ve druhé kapitole *Proměnné, zápisy výroků pomocí proměnných.* Na zápisu čísla podle zbytkových tříd po dělení daným přirozeným číslem se přechází od čísel k výrazům s proměnnými. Uveďme desátý příklad k procvičení z této kapitoly:

> a) *Zopakujte si, která přirozená čísla nazýváme prvočísly a která nazýváme složenými čísly. Patří mezi ně číslo* 1*?*
> b) *Zapište pomocí proměnné* k *libovolná přirozená čísla větší než pět, která při dělení šesti dávají zbytek* 0*,* 1*,* 2*,* 3*,* 4 *či* 5.

---

[1] Téměř totožné zadání najdeme ve *Sbírce úloh z matematiky pro IV. – VIII. třídu středních škol* [2] B. Bydžovského a kol.

c) *Pokuste se v zápise vytknout a napsat součin; je tak zapsané číslo prvočíslo?*
d) *Jaký zbytek při dělení šesti dávají všechna prvočísla větší než* 5*?* ([6], str. 36)

Části c) a d) bez dalšího výkladu učitele mohou žáky uvést v omyl, že všechna čísla tvaru $6k+1$ a $6k+5$ jsou prvočísly, je proto třeba zde určité opatrnosti. Rovněž v oddílu o výrocích se setkáváme s dělitelností, především s prvočísly, složenými čísly a zbytkovými třídami. Negace výroků jsou ilustrovány na příkladech: *Číslo* 1 *je prvočíslo.* ([6], str. 38) *Číslo* 1 *je složené číslo.* ([6], str. 38) *Aspoň jedno prvočíslo je zapsané samými jedničkami.* ([6], str. 40) *Nejvýš pět prvočísel lze zapsat jednou číslicí.*([6], str. 40) Pravdivostní hodnota třetího výroku není nijak komentována. K procvičení výroků s proměnnými je uvedena následující úloha:

Následující věty o prvočíslech jsou vysloveny ledabyle; zpřesněte jejich formulaci tím, že uplatníte proměnnou p *označující libovolné prvočíslo a použijte kvantifikátorů:*
a) Nějaké prvočíslo je sudé. b) Číslicový zápis prvočísel nekončí nulou. c) Vyskytují se i taková prvočísla, že číslo o dvě větší než ona jsou též prvočísly. d) Jednociferných prvočísel se nenajde víc než pět. e) Dvě sudá prvočísla nenajdeme. f) Nejedno prvočíslo je zapsáno několika stejnými číslicemi. ([6], str. 46)

V úlohách opakujících látku kapitoly se pracuje s následující hypotézou: *Odčítejte od prvočísel větších než* 211 *číslo* 210 *a posuďte, zda rozdíly jsou opět prvočísla. Jsou důvody k vyslovení obecné hypotézy pro všechna* $p > 211$*?* ([6], str. 47) V problémových úlohách pod tímto příkladem je položena otázka: *Nesouvisí zajímavá vlastnost čísla* 210 [...] *s tím, že* $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$*, tj. součinu prvočísel menších než* 10*?* ([6], str. 47) Návaznost jednotlivých úloh v učebnici je častá.

V oddíle *Důkazy a vyvracení hypotéz* se mimo jiné dokazují či vyvrací následující hypotézy: *Pro každé celé číslo* k *platí:* k^2+k+11 *je liché číslo. Pro každé celé číslo* k *platí:* k^2+k+11 *je prvočíslo.* ([6], str. 47) V úlohách stejného oddílu se podobně zkoumají čísla tvaru k^2+k+41. Celkem v osmi úlohách z deseti uvedených se pracuje s hypotézami o dělitelnosti, používají ciferný součet, společné dělitele nebo zbytky po dělení. Zbylé dvě úlohy jsou geometrické.

V úlohách k opakování v závěru druhé kapitoly je opět osm úloh z deseti postaveno na teorii čísel. Objevují se sudá a lichá čísla, prvočísla, Mersennova čísla (termín není přímo uveden), dělitelnost součtu a rozdílu, prvočíselná dvojčata.

Ve čtvrtém oddíle *Rozklady mnohočlenů a úpravy zlomků* páté kapitoly se setkáváme se základy dělitelnosti polynomů, ovšem předpokládá se, že si její znalost žáci již přinesou z předchozího studia. Žáci jsou vyzýváni, aby si uvědomili analogie mezi pojmy dělitelnosti (přirozených) čísel a dělitelnosti polynomů. Setkáme se zde s hledáním největšího společného dělitele dvojic a trojic polynomů (pomocí vytýkání a vzorců) i s příkladem hledání nejmenšího společného násobku (polynomů $35xy^2z$, $75x^3yz^3$ a $21x^2z$; další úlohy jsou uvedeny ve cvičeních).

V kapitole o množinách se dělitelnost příliš nevyskytuje, přesto i zde nalezneme úvahy o podmnožině čísel dělitelných pěti, anebo zda množina všech prvočísel je podmnožinou množiny všech lichých čísel.

Druhý díl učebnice pro první ročník

I v druhém dílu [7] učebnice, pod kterým jsou podepsáni J. Šedivý, J. Blažek, J. Lukátšová, S. Richtáriková a J. Vocelka, se setkáváme s dělitelností, a to podstatněji.

Již v druhé kapitole *Operace s množinami* se setkáme s disjunktními množinami sudých a lichých čísel. První úloha k procvičení dichotomického třídění je zadána následovně:

a) Proveďte dichotomické třídění množiny N všech přirozených čísel podle jejich dělitelnosti dvěma. Na číselné ose barevně vyznačte prvky množiny $D = \{n \in N;\ 2 \text{ dělí } n\}$.

b) Pokračujte tříděním na prvočísla a ostatní přirozená čísla. Lze ta druhá nazvat složená čísla?

c) Pokračujte tříděním na jednociferná a ostatní; jak nazvete tato „ostatní"? ([7], str. 16)

V kapitole o výrocích a důkazových metodách opět nalezneme řadu aplikací dělitelnosti. Je zde rozebrán i důkaz iracionality odmocniny ze dvou, rozepsaný do několika dílčích tvrzení. Ve cvičeních se dokazuje iracionalita $\sqrt{3}$ nebo $\sqrt{7}$. Opět devět z deseti úloh k procvičení se věnuje dělitelnosti.

Samostatné místo má dělitelnost v *Nepovinných dodatcích*, konkrétně ve čtvrtém a pátém. Ve čtvrtém dodatku se mimo jiné dokazuje (resp. žáci jsou návodnými otázkami vyzýváni k důkazu) existence prvočíselného rozkladu, viz následující ukázka výkladu:

d) Každé složené číslo n má alespoň jednoho dělitele n_1*, pro který platí* $1 < n_1 < n$.

Co platí dále o čísle n_1*? Lze mu přiřadit* n_2 *s obdobnými vlastnostmi? Lze vytvořit skupinu čísel* $n_1,\ n_2, n_3,\ \ldots$*? Kolik nejvýš může mít čísel? Mohou to být jen složená čísla?*

e) Každé přirozené číslo $n > 1$ *je dělitelné aspoň jedním prvočíslem.*

Jaký důsledek má právě dokázané tvrzení, aplikujeme-li je na každého činitele v součinu rovném číslu n?

f) Každé přirozené číslo $n > 1$ *lze vyjádřit jako součin, ve kterém každý činitel je prvočíslem.*

Která základní věta o násobení přirozených čísel umožňuje přeskupení činitelů tak, že lze zapsat součin mocnin prvočísel? ([7], str. 223–224)

Samotné tvrzení o existenci prvočíselného rozkladu je vysloveno následovně: *Každé přirozené číslo* $n > 1$ *lze zapsat pomocí všech prvočísel* $p_1, p_2, \ldots, p_r \leq n$ *jako součin* $n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot \cdots \cdot p_r^{k_r}$*, kde mocnitelé* $k_i \in N_0$. ([7], str. 224) Formulace věty je poměrně nešťastná. Na jedné straně se snaží o preciznost a stručnost (zápis $k_i \in N_0$), na druhé straně o přístupnost (zapsání prvních několika nejmenších prvočísel v rozkladu *n*), výsledek však působí zmatečně. Jednoznačnost prvočíselného rozkladu není probírána. Zbytek čtvrtého dodatku se zabývá odůvodňováním znaků dělitelnosti.

Pátý dodatek *O aritmetice a teorii čísel ve starověku* je historický, zmiňuje vedle pýthagorejské školy, Eudoxa, Eukleida a Diofanta také Fermata, Eulera, Gausse a Čebyševa.

2.5 Učebnice po roce 1984

Nové učebnice byly sepsány po roce 1984, kdy proběhla další reforma gymnázií. V učebnici [8] pro první ročník, kterou sepsal autorský tým J. Smida, J. Lukátšová, J. Šedivý a J. Vocelka, najdeme čtvrtou kapitolu věnovanou přímo teorii čísel, rozdělenou do pěti oddílů: *Zápisy přirozených čísel, Dělitelnost kladných přirozených čísel, Prvočísla a složená čísla, Největší společný dělitel, nejmenší společný násobek, Důkazové úlohy o dělitelnosti.* Ke každému oddílu jsou přidány úlohy k procvičení, na závěr kapitoly je zadáno pět úloh, každá se třemi variantami, označené *Vyzkoušejte se*.

Po úvodní historické poznámce první oddíl připomene uspořádání přirozených čísel (včetně nuly) a zápis čísel podle zbytkových tříd, což je shrnuto větou:

> *Každé přirozené číslo n lze pomocí přirozeného čísla* $b > 1$ *vyjádřit jedním z výrazů* $k \cdot b, k \cdot b + 1, \ldots, k \cdot b + (b-1)$, *kde* $k \in N$. ([8], str. 103)

Druhý oddíl zavádí dělitelnost obdobným způsobem jako učebnice před rokem 1948. Zavádí se pojmy dělitel, násobek, soudělná čísla, společný dělitel. Poté se odůvodňují znaky dělitelnosti deseti, pěti a dvěma a poté i znaky dělitelnosti čtyřmi, dvaceti, dvaceti pěti a padesáti; třemi a devíti; šesti a dvanácti. Poslední dva znaky jsou zapsány i symbolicky.

Třetí oddíl zavádí prvočísla a složená čísla, prvočíselný rozklad složeného čísla. Je uveden seznam prvočísel menších než 100, bez spojení s Eratosthenovým sítem. Pomoci hledat prvočíselný rozklad má věta: *Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p, pro které platí* $p \leq \sqrt{n}$. ([8], str. 111) Věta je použita k hledání rozkladu čísel 1147 a 947. Na závěr je vyslovena Základní věta aritmetiky (tak je zde přímo nazvána), která však není nijak zdůvodněna. Následuje sedm cvičení.

Ve čtvrtém oddílu se připomíná největší společný dělitel a nejmenší společný násobek, a to hned tří čísel.

Závěrečný pátý oddíl *Důkazové úlohy o dělitelnosti* je rozdělení do tří částí: *Důkazy vytknutím dělitele*, *Nepřímé důkazy vět* a *Důkazy sporem.* Jednotlivé věty si žáci nejprve sami zformulují („objeví" si je), a teprve pak je dokazují. V první části se tak dokazuje, proč 3 dělí $n^3 + 2n$, $n \in N$, pomocí zbytkových tříd po dělení třemi. Poté se ukazuje dělitelnost polynomu $n^3 - n$ šesti rozkladem tohoto polynomu. Ve druhé části se osvětluje (i pomocí množin) nepřímý důkaz, a to dvou tvrzení: *Jestliže* n *je násobkem šesti, pak* n *je násobkem tří* ([8], str. 119); *jestliže* 5 *dělí* $n^2 + 1$, *pak* 5 *nedělí n* ([8], str. 120). Třetí část předkládá dva důkazy sporem, jednak nekonečnosti počtu prvočísel, jednak iracionality odmocniny ze dvou. Na závěr oddílu je přiloženo devět příkladů k procvičení a pět příkladů se třemi variantami sjednocené pod název *Vyzkoušejte se*. Kapitola je zakončena jednoduchou hrou se šachovnicí.

V páté kapitole je krátce zmíněna dělitelnost celých čísel.

3 Závěr

Postavení dělitelnosti v učebnicích pro střední školy poskytující vyšší všeobecné vzdělání (gymnázia, vyšší ročníky JSŠ, SVVŠ, znovu gymnázia) se v druhé polovině dvacátého století výrazně měnilo. Na začátku padesátých let dělitelnosti v učebnicích ubývalo, poté vinou zavedení lineárních osnov z učebnic vymizela. Předpokládalo se její zvládnutí v předchozím studiu.

Po návratu k cyklickým osnovám a díky rozbíhající se tzv. modernizaci školské matematiky se však plně vyjevila možnost použít dělitelnost pro výuku množin, výroků a důkazových metod. Dělitelnost tak neměla v učebnicích přímo určenou kapitolu, ale byla použita k výuce uvedených témat. Vedle využití jednoduchých vět (dělitelnost součtu a rozdílu atp.) se dokazovala jednoznačnost a existence prvočíselného rozkladu. Jednotlivé učebnice se pak liší v prezentaci těchto tvrzení a jejich důkazů. Využívá se intuice žáků v různé míře, je otázkou, zda stupeň rozvinutí matematického myšlení žákům umožňuje pochopit, kdy je tvrzení opravdu jednoduché, kdy se opírá o složitější principy (induktivní charakter přirozených čísel, jejich dobré uspořádání), a kdy je intuitivní řešení problému ve skutečnosti nesprávné. Je třeba důrazné podpory učitele pro dobré zvládnutí látky.

Literatura

[1] Balada F. a kol.: *Matematika pro I. třídu gymnasií*. 2. vydání, SPN, Praha, 1952.

[2] Bydžovský B. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol*. SPN, Praha, 1948.

[3] Holubář J. a kol.: *Algebra pro devátý postupný ročník*. 3. vydání, Praha, SPN, 1956.

[4] Hrubý D.: *Postavení matematiky na gymnáziích*. In Bečvářová M. (ed.): O škole a vzdělávání. Matfyzpress, Praha, 2007, 47–70.

[5] Mikulčák J.: *Jak se vyvíjela pedagogika matematiky ve druhé polovině 20. století*. In Bečvářová M., Bečvář J. (ed.): Matematika v proměnách věků V, Matfyzpress, Praha, 2007, 249–315.

[6] Šedivý J. a kol.: *Matematika pro I. ročník gymnázia*. Sešit 1, 1. vydání, SPN, Praha, 1977.

[7] Šedivý J. a kol.: *Matematika pro I. ročník gymnázia*. Sešit 2, 2. vydání, SPN, Praha, 1979.

[8] Smida J. a kol.: *Matematika pro I. ročník gymnázií*. Dotisk 1. vydání, SPN, Praha, 1985.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8*.

Adresa

Mgr. Karel Pazourek
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *pazourek@karlin.mff.cuni.cz*

HISTORIE KAPESNÍCH VÝPOČETNÍCH POMŮCEK

MAREK POMP, ZUZANA VÁCLAVÍKOVÁ

Abstract: There will be described history of selected mechanical calculators from the school's adding and multiplication calculators to the first pocket electronic calculators, and principles of their construction in this paper.

1 Úvod

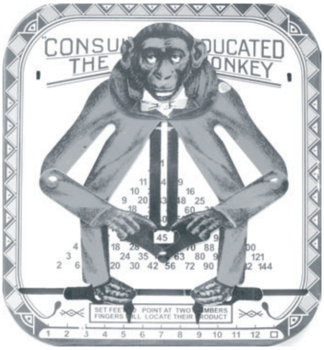
Historické mechanické kapesní výpočetní pomůcky se dají rozdělit do dvou hlavních skupin. Do první patří výpočetní strojky založené na předem sestrojených tabulkách, přičemž jejich pohyblivé části jsou obvykle nadbytečné a prohledávání tabulek by bylo možné i bez nich. Funkce mechanické části spočívá spíše v zatraktivnění pomůcky. Používání „kouzelného přístroje", který „sám" provádí výpočty, mělo svůj půvab od nepaměti. Druhou skupinu tvoří strojky, které elementární aritmetické operace (zpravidla pouze sčítání a odčítání) převádějí na pohyby mechanických částí. Jednoduché kapesní varianty vznikaly paralelně s „velkými" mechanickými počítacími stroji. Svými možnostmi sice nedosahovaly jejich kvality, ale jejich konstrukční principy byly velmi zajímavé. Násobilkové, sčítací a odčítací strojky byly vyráběny i po nástupu elektronických kapesních kalkulátorů a uplatňovaly se zejména jako názorné školní pomůcky.

2 Pomůcky využívající multiplikační tabulky

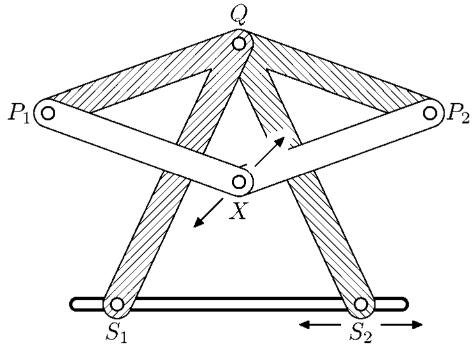
2.1 Princip soustavy pák

Velmi hezkým příkladem mechanické pomůcky je *Consul the Educated Monkey* (viz obr. 1), který byl patentován 27. června 1916 Williamem Robertsonem (Belmont, Ohio) a vyráběn v USA. Jedná se o pomůcku umožňující rychlé násobení, která užívá mechanismus založený na pantografu, tj. přímkový pohyb koncového bodu jednoho ramene (S2) je převáděn na přímkový pohyb vrcholu pantografu (X), přičemž obě trajektorie svírají úhel 135° (viz obr. 2). Základní deska pomůcky je tvořena multiplikační tabulkou, pootočenou o 45° proti směru hodinových ručiček. Pohybem nohou znázorněné opičky se nastaví čísla, která se násobí, a výsledek se objeví ve čtverečku pohybujícím se nad tabulkou. Obráceným postupem se dá také dělit. Multiplikační tabulka je doplněna jedním sloupcem tvořeným druhými mocninami čísel. Součástí původního balení byla též sčítací tabulka, která se mohla vložit na základní desku a pomůcka potom sloužila pro sčítání a odčítání.

Poznamenejme, že výše popsaná pomůcka získala název a design podle slavné cvičené opice Consul, která byla předváděna na mnoha místech v Americe – opice kouřila cigarety, uměla jíst nožem a vidličkou nebo jezdit na kole. Později bylo na stejném principu vyráběno mnoho jiných obdobných strojků také v Evropě, např. *Mr. Smart*, *Recnomatic* a další.



Obr. 1



Obr. 2

2.2 Rotační mechanismy

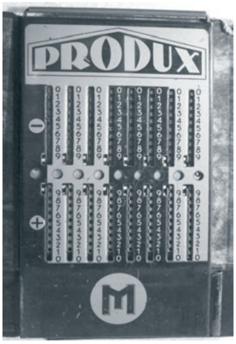
Druhou skupinou mechanických pomůcek jsou rotační násobilkové pomůcky. První jejich modely – tzv. *diametry* – se objevovaly kolem roku 1846. Mezi klasické rotační mechanismy patří *Darnleyho kalkulátor* (patentovaný roku 1920 a vyráběný v Anglii). Jedná se o pouzdro na psací potřeby tvořené dvěmi souosými válci s různými průměry. Na vnitřním válci je umístěna multiplikační tabulka, z níž je viditelné pouze záhlaví řádků. Záhlaví sloupců je na otočném, vnějším válci, s otvory v příslušném sloupci. Rotací otočné části lze nastavit vedle sebe dvojici násobených činitelů a součin se pak objeví v otvoru vedle nich. Později byl tento model vyráběn také německou firmou Roka. Patentu využily i další firmy a pomůcky založené na výše popsaném principu se vyrábí prakticky dodnes.

Obr. 3

3 Sčítací mechanické stroje

3.1 Kapesní sčítací strojky

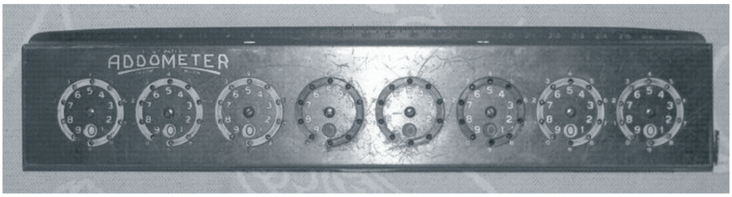
Speciální kategorii mechanických strojů tvoří kapesní sčítací stroje (viz obr. 4). Byly přenosné a levné, a tedy relativně finančně dostupné. Jejich tělo je zpravidla rozděleno na dvě části – jedna pro sčítání a jedna pro odčítání, uprostřed jsou umístěny výsledkové okénka. Výpočet se provádí posouváním pohyblivých částí jen na základě jednoduchého algoritmu pro sčítání. Sloupce s otvory odpovídají jednotlivým řádům v dekadickém zápisu čísla. Při sčítání se v prvním kroku do výsledkového pole nastaví jeden ze sčítanců. Druhý sčítanec přičítáme po jednotlivých řádech posunem šoupátka v daném sloupci o příslušný počet jednotek. Pokud při počítání dochází k přechodu přes desítku, musí počtář provést zpětný pohyb šoupátka přes zoubek, který propojuje tento sloupec se sloupcem s vyšším řádem, a tím dojde k načtení čísla jedna k následující cifře. V Evropě byly vyráběny tyto stroje v mnoha variantách. Za zmínku stojí u nás známý *Rychlopočtář* od firmy Znak (České Budějovice, 50. až 60. léta 20. století) nebo stroje *Produx M*, *Efzet* a *Tarema* produkované německými firmami.



Obr. 4

3.2 Addometer

Jiným typem sčítacích strojů jsou tzv. *addometery* (viz obr. 5) založené na principu Pascalíny – jednoho z prvních mechanických kalkulátorů navržených B. Pascalem. Na rozdíl od předchozích kapesních sčítacích strojů byl přechod přes desítku realizován automaticky pomocí převodů ozubených kol. Při sčítání se otáčelo posuvnými kotoučky po směru hodinových ručiček, při odčítání pak proti směru. V dolním otvoru se zobrazoval výsledek. Klasický addometer byl vyráběn v několika desítkových i nedesítkových verzích v období 1928 až 1950 firmou Reliable Typewriter and Adding Machine Co. (Chicago, Illinois, U.S.A.).



Obr. 5

4 Nástup elektroniky

4.1 První kapesní elektronické kalkulačky

Vývoj elektronických kalkulaček (stolních variant napájených ze sítě) v padesátých letech minulého století komplikoval problém se vzrůstajícím počtem součástek, a tím i s finanční náročností výroby a nebezpečím poruch. Inženýr Jack Kilby z firmy Texas Instruments přišel s prvním integrovaným obvodem obsahujícím jediný tranzistor. Vynález si nechal v roce 1964 patentovat pod číslem 3 138 743, avšak kvůli vysoké ceně nešel výrobek na odbyt. Aby firma ukázala jeho výhody, uvedla v roce 1969 na trh elektronický kalkulátor do kapsy založený na integrovaném obvodu, který uměl sčítat, odčítat, násobit a dělit. Tento přístroj zvýšil zájem jiných firem o integrovaný obvod, především však odstartoval éru kapesních elektronických kalkulaček.

První vědecká kalkulačka byla uvedena na trh v roce 1972, programovatelná kalkulačka TI-58 se objevila v roce 1976 a ve stejném roce začaly být zaváděny LCD displaye, které umožnily grafický výstup.

5 Závěr

Mechanické výpočetní pomůcky a stroje sice s nástupem elektroniky ustoupily do pozadí, ale konstrukční principy na kterých jsou založeny se objevují i dnes u různých didaktických pomůcek pro výuku elementární matematiky.

Literatura

[1] Tomšů S.: *Počítací stroj a jeho dokonalé využití v praxi*. SNTL, Praha, 1957.

[2] Václavíková Z.: *Historické výpočetní pomůcky a netradiční metody aritmetických výpočtů*. In Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 31. mezinárodní konference Historie matematiky, Praha, Matfyzpress, 2010, 275–278.

[3] Dobové návody k mechanickým počítacím strojům.

Poděkování
Tento příspěvek vznikl za podpory grantu FRVŠ 2232/2011.

Adresy

RNDr. Marek Pomp, Ph.D.
Katedra matematiky s didaktikou
Pedagogická fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě
Mlýnská 5
701 03 Ostrava 1
e-mail: *marek.pomp@osu.cz*

RNDr. Zuzana Václavíková, Ph.D.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě
30. dubna 22
701 03 Ostrava
e-mail: *zuzana.vaclavikova@osu.cz*

Z HISTORIE POPULAČNÍ DYNAMIKY

ANTONÍN SLAVÍK

Abstract: This contribution focuses on selected episodes from the history of population dynamics which are less known among mathematicians. We describe the life table of Edmund Halley, Daniel Bernoulli's work on the inoculation of smallpox, and finally a model of the spread of malaria devised by Ronald Ross.

1 Úvod

Populační dynamika spojuje poznatky z matematiky, biologie, demografie a medicíny. Pokouší se nalézt přibližné matematické modely, které popisují různé typy populací (lidé, zvířata, mikroorganismy), jejich časový vývoj a strukturu. Používají se různé typů modelů, jako např. diferenciální rovnice, diferenční rovnice, integro-diferenciální rovnice apod. Často se setkáme nejen s deterministickými, ale i se stochastickými modely. Většina informací v tomto příspěvku je čerpána z knihy [1], která popisuje nejdůležitější okamžiky v historii populační dynamiky.

Téměř v každé současné učebnici věnované diferenciálním rovnicím nalezneme jednoduché příklady, jako je např. exponenciální růstový model, logistický model nebo Lotkův-Volterrův model. Výsledky získané na základě těchto modelů je vždy potřeba kriticky zhodnotit a posoudit rozsah jejich platnosti. O tom se zmiňuje již Euler ve své slavné učebnici infinitezimálního počtu [2]. Jedna z úloh řešených v této knize má poněkud spekulativní charakter a pokouší se objasnit, zda údaje v biblické knize Genesis mohou mít reálný základ: Jak rychle by se Noemovi potomci museli po skončení potopy světa rozmnožovat, aby během 200 let dosáhl počet obyvatel jednoho milionu? Euler ukazuje, že roční přírůstek by musel činit přibližně 6 %, což podle něj není zcela nereálné. Vzápětí však poznamenává, že exponenciální růst je v dlouhodobém časovém horizontu absurdní, neboť Země poskytuje dostatečné zdroje pouze pro omezený počet lidí. I složitější modely populační dynamiky pracují s řadou zjednodušujících předpokladů a nemůžeme proto očekávat, že vypočtené hodnoty budou přesně odpovídat skutečnosti. Smysl těchto modelů spočívá v tom, že mohou pomoci objasnit kvalitativní chování zkoumané populace a vysvětlit např. existenci oscilací, příčiny vyhynutí jistého druhu apod.

2 Halleyova úmrtnostní tabulka

Matematické modely populační dynamiky obvykle zahrnují jeden nebo více parametrů, jejichž číselné hodnoty stanovujeme na základě zjištěných údajů o sledované populaci. Chceme-li např. modelovat chování lidské populace, potřebujeme znát počet obyvatel žijících v dané oblasti a jejich věkovou strukturu.

Pravděpodobně první tabulky tohoto typu vyšly tiskem v Londýně roku 1662, údaje v nich však byly značně nepřesné, neboť v té době bylo zvykem zveřejňovat pouze příčiny úmrtí osob, avšak nikoliv věk zemřelého. Teologu Casparu Neumannovi se ve

Wrocławi v letech 1687–1691 podařilo shromáždit data o zemřelých osobách včetně jejich věku. Tyto údaje zaslal tajemníkovi Royal Society Henrymu Justelovi, který však krátce poté zemřel a informace se dostaly do rukou Edmundu Halleyovi. Ten si při pečlivé analýze kromě jiného povšiml, že ve zkoumaném období byl počet narozených přibližně stejný jako počet zemřelých. Pro jednoduchost dále předpokládal, že i věková struktura obyvatel Wrocławi zůstává neměnná.

Označíme-li P_0 počet narozených dětí a P_k počet obyvatel ve věku k let, pak platí $P_{k+1} = P_k - D_k$, kde D_k je počet zemřelých ve věku k let. Halley vypočítal hodnoty P_k a jejich sečtením odhadl počet obyvatel tehdejší Wrocławi na 34 000 osob. Přestože hodnoty P_k byly specifické právě pro Wrocław, dalo se očekávat, že podíly P_{k+1}/P_k budou podobné i v jiných městech (jde o podmíněnou pravděpodobnost, že se osoba dožije $k+1$ let za předpokladu, že se již dožila k let). Halleyova úmrtnostní tabulka publikovaná v článku [3] proto byla používána a citována v řadě dalších prací z populační dynamiky.

3 Daniel Bernoulli a očkování proti neštovicím

V roce 1796 objevil Edward Jenner očkování kravskými neštovicemi jako účinnou a bezpečnou prevenci před pravými neštovicemi. Do té doby se místo vakcinace používala tzv. variolizace, tj. očkování pravými neštovicemi. Tato metoda byla poměrně úspěšná, objevovaly se však i případy, kdy očkovaná osoba onemocněla a zemřela (viz např. článek [4]). Daniel Bernoulli se roku 1760 pokusil vypočítat, nakolik je variolizace i přes jisté riziko výhodná (své výsledky publikoval v pracech [5] a [6]). Jako model použil soustavu diferenciálních rovnic pro následující funkce:

- $P(x)$ = celkový počet osob sledované populace ve věku x
- $S(x)$ = počet osob ve věku x, které dosud nebyly nakaženy
- $R(x)$ = počet osob ve věku x, které se z nemoci úspěšně zotavily (a získaly tak doživotní imunitu)

Bernoulli dále předpokládal, že:

- Člověk nakažený neštovicemi zemře s pravděpodobností p.
- Pravděpodobnost nákazy v období života mezi roky x a $x+dx$ je qdx.
- Pravděpodobnost úmrtí z jiných příčin v čase mezi roky x a $x+dx$ je $m(x)dx$.

Z těchto předpokladů plynou rovnice

$$\frac{dS}{dx} = -qS - m(x)S\,, \qquad \frac{dR}{dx} = q(1-p)S - m(x)R\,, \qquad \frac{dP}{dx} = -pqS - m(x)P\,,$$

kde poslední vztah dostaneme sečtením prvních dvou rovnic. Kombinace prvního a třetího vztahu vede na jistou diferenciální rovnici pro $S(x)/P(x)$, jejíž řešení nalezl již dříve Jakob Bernoulli (dnes ji nazýváme Bernoulliho diferenciální rovnicí). Můžeme tak dospět ke vzorci pro podíl počtu osob ve věku x, které dosud nebyly nakaženy:

$$\frac{S(x)}{P(x)} = \frac{1}{(1-p)e^{qx} + p}$$

Hodnoty $P(x)$ převzal Bernoulli z již dříve zmíněné Halleyovy tabulky, pravděpodobnosti p a q zvolil tak, aby odpovídaly dostupným údajům. Podobnou úvahu pak zopakoval pro situaci, že lidé budou při narození očkováni pravými neštovicemi, a porovnal očekávané délky života v obou případech. Předpokládejme, že pravděpodobnost úmrtí při očkování je p'. Bernoulli zjistil, že očekávaná délka života se prodlouží, pokud p' nepřekročí 11 %. Číselnou hodnotu této pravděpodobnosti Bernoulli neznal, ale odhadoval, že je menší než 1 %.

4 Ronald Ross a šíření malárie

Ronald Ross (1857–1932) byl britský lékař, který v žaludku jistého druhu komára objevil původce malárie, a prokázal tak teorii Patricka Mansona o tom, že nemoc přenášejí právě komáři. Za svůj objev získal roku 1902 Nobelovu cenu. Ross prosazoval myšlenku, že k zastavení šíření malárie není nutné úplné vyhubení komárů (což by bylo obtížně proveditelné), ale pouze snížení jejich počtu pod jistou kritickou mez. Aby o tom přesvědčil své odpůrce, sestavil matematický model popisující šíření nemoci a publikoval jej v knize [7]. V tomto modelu vystupují následující hodnoty:

- N = počet osob ve sledované oblasti
- $I(t)$ = počet osob, které jsou v čase t infikovány malárií
- n = počet komárů (předpokládá se, že je konstantní)
- $i(t)$ = počet komárů, kteří jsou v čase t infikováni
- b = počet lidí napadených jedním komárem za jednotku času
- p a p' = pravděpodobnosti přenosu nemoci z člověka na komára a obráceně během jednoho bodnutí
- a = rychlost, s jakou se lidé zotavují z malárie
- m = úmrtnost komárů

Z těchto předpokladů dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{dI}{dt} = bp'i\frac{N-I}{N} - aI\,, \quad \frac{di}{dx} = bp(n-i)\frac{I}{N} - mi\,.$$

Ross hledal stacionární body této soustavy, tj. konstantní řešení, která odpovídají rovnovážnému stavu. Zjistil, že kromě nulového řešení existuje další kladné konstantní řešení této soustavy, avšak pouze v případě, že je splněna podmínka $n > amN/b^2pp'$. Z toho plyne, že k zastavení šíření nemoci stačí snížit počet komárů n pod nalezenou kritickou hodnotu.

5 Závěr

Uvedené příklady z historie populační dynamiky mohou posloužit jako ilustrace významu matematického vzdělání při řešení problémů z jiných disciplín (pro zajímavost poznamenejme, že Ronald Ross získal potřebné matematické znalosti samostudiem) a ukazují, že i jen přibližné matematické modely mohou být užitečné pro praxi.

Literatura

[1] Bacaër N.: *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer, 2011.

[2] Euler L.: *Introductio in analysin infinitorum, Tomus primus*. Bousquet, Lausanne, 1748.

[3] Halley E.: *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*. Phil. Trans. Roy. Soc. London 17(1693), 596–610.

[4] Havlík J., Machala L.: *200 let očkování proti pravým neštovicím*. Vesmír 75(1996), 633.

[5] Bernoulli D.: *Réflexions sur les avantages de l'inoculation*. Mercure de France (1760), 173–190.

[6] Bernoulli D.: *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*. Mém. Math. Phys. Acad. Roy. Sci. Paris (1760), 1–45.

[7] Ross R.: *The Prevention of Malaria*. 2nd edition, John Murray, London, 1911.

Adresa

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *slavik@karlin.mff.cuni.cz*

ŽIVOTNÍ PŘÍBĚH PROF. GUSTAVA SKŘIVANA (1831–1866)

JIŘÍ SLAVÍK

Abstract: This year we commemorate the anniversary of birth and death of Professor Gustav Skrivan. He is inextricably linked with the revival of Czech mathematical science in the 19th century. The paper deals with Skrivan's short life and career fairs. It shows his family life, social background, including his teaching activities in Vienna and at the Prague Polytechnic.

1 Úvod

Prof. Gustav Skřivan patří k předním představitelům náramně činorodé generace českých středoškolských a vysokoškolských pedagogů, kterými ve druhé polovině 19. století vyvrcholilo obrození české matematické vědy na národním principu. Podobně jako tomu bylo u jiných oborů, směřovala tato obrodná tendence především k jazykové samostatnosti, k vytvoření a ustálení vlastní jednotné matematické terminologie, sepsání prvních českých odborných učebnic, k aktualizaci učebních osnov, rozšíření a zkvalitnění veřejných vědeckých knihoven a vůbec k celkové reorganizaci středního a vysokého školství ku prospěchu a konkurenceschopnosti české společnosti, vědy a průmyslu.

Skřivanovo jméno, spojené dnes hlavně s působením na Polytechnickém ústavu Království českého v Praze (první řádný profesor elementární a vyšší matematiky s českou vyučovací řečí), sice není historikům matematiky neznámé, ucelená biografická monografie, přibližující širší odborné veřejnosti Gustavovu krátkou životní a profesní pouť, mnohostranné aktivity a dílo, však doposud chybí.[1] Kulturně-historicky zaměřený příspěvek by měl, na základě dosud nezveřejněné osobní pozůstalosti, doplnit dosavadní souhrn informací o Skřivanově životě, poodhalit některé zajímavé útržky z matematikova soukromí, a napomoci tak k budoucímu detailnímu rozboru a zhodnocení jeho vědecké a pedagogické činnosti.[2] Bez povšimnutí nemůže zůstat ani fakt, že si právě letos připomínáme 180. výročí od narození a 145. výročí od úmrtí prof. Gustava Skřivana.

2 Skřivanovo studium

Gustav Skřivan se narodil 11. dubna 1831 v Krucemburku na Českomoravské vrchovině jako jediný syn ze sedmi dětí váženého koželužského mistra Augustina Skřivana ml. a jeho manželky Karolíny, rozené Jettelové, dcery hutního ředitele na

[1] O působení Gustava Skřivana na pražské polytechnice viz [1], [4], dále též Němcová M.: *František Josef Studnička 1836–1903*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998; Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*. Československá akademie věd, Praha, 1961.

[2] V polovině 20. století byla pietně uchovávaná písemná pozůstalost po Gustavu Skřivanovi, vlivem neklidných společensko-politických událostí, částečně zničena a částečně rozdrobena na několik míst (Státní oblastní archiv Zámrsk. *Fond Augusta Skřivana dědic, továrna na kůže v Krucemburku*; Státní okresní archiv Havlíčkův Brod. *Fond Skřivan August, Krucemburk*; soukromé archivy potomků rodiny Skřivanových-Binkových). Samostatná osobní složka Gustava Skřivana se nachází též v Archivu Českého vysokého učení technického v Praze.

nedalekém Starém Ransku a v Polničce.[3] Mezi lety 1838 až 1843 Gustav navštěvoval *farní školu* v Krucemburku (čtení, psaní latinkou, kurentem, pravopis a psaní dle diktátu, čeština, němčina, latina, počítání ve čtyřech základních výkonech a katechismus), poté přešel na c. k. krajskou *hlavní školu* v Kutné Hoře,[4] kde bydlel u zdejšího měšťana Václava Šafránka. Zde v listopadu 1844 vážně onemocněl, podle docházejícího lékaře se jednalo o silnou *„rheumatickou horečku"*.[5] Ačkoliv se Skřivan nakonec uzdravil,[6] jeho plíce už od té doby zůstávaly natrvalo oslabené.

Po úspěšném absolvování hlavní školy v roce 1846 se mladý Gustav vrátil do rodného městečka, kde se začal *učit koželužskému řemeslu* v rodinné manufaktuře, kterou měl jednoho dne slavnostně převzít. V této souvislosti si jistě dovedeme představit otcovy smíšené pocity a zklamání, když se od jediného pokračovatele rodu dozvěděl pevné rozhodnutí, navždy zanechat tradiční obživy svých dědů a pradědů a pokračovat místo toho v poněkud nejistém a velice nákladném vysokoškolském studiu, *„bych sobě šťastnou budoucnost vydobyl a Vás v stáří podporovat mohl"*.[7] Rodiče po roce přemlouvání nakonec svolili a Gustav Skřivan se zapsal od akademického roku 1847/1848 na *vídeňskou polytechniku* (posluchač technologie a elementární matematiky), odkud přestoupil v revolučním roce 1848 na *pražský polytechnický ústav* (posluchač přírodních věd, všeobecné chemie, přednášky o světle a teple). Ještě ve Vídni se stal členem *studentských legií* a jako rodák z dietrichsteinského polenského panství byl od knížete Františka Josefa Dietrichsteina obdarován příspěvkem na zakoupení kabátu, vázanky, vojenské kravaty a rukavic k uniformě v ceně 21 zl. 48 kr.[8] V dopisech rodičům Gustav popisuje přímé události z květnové revoluce, varuje před možným propadem bankovek a informuje o radikalizaci a útocích zdejší městské lůzy. Po zdárném odbytí posledních zkoušek odjíždí do Prahy, kde měl se svým kolegou již od začátku roku pronajatý byt. O nákladech na jeho vybavení (od zubního kartáčku, mycí soupravy, až po výhodně nakoupený starší nábytek), pořízení nového šatstva, odborných knih, předepsaných učebnic, drahých rýsovacích potřeb a jiných pomůcek, jsme podrobně zpraveni z korespondence otci, který nesl po celé roky podstatnou část finančního břemene za synovo městské studium. Poutavé a někdy až trochu úsměvné jsou dnes Gustavovy zážitky z cestování vlakem mezi Vídní a Prahou (trať *Severní státní dráhy*), nebo do Pardubic, kam mu rodiče posílali k návštěvě Krucemburku podle situace bryčku,

---

[3] Základní biografické informace k osobnosti, vědecké a publikační činnosti prof. Gustava Skřivana viz [2], dále Riegrův *Slovník naučný XI.* Praha, 1874, heslo: Skřivan Gustav, s. 611–612 (uveden chybný měsíc narození, který pak přejímá i mladší literatura); *Ottův slovník naučný XXIII.* Praha, 1905, heslo: Skřivan Gustav, s. 313–314. Životopis prof. Gustava Skřivana se edičním nedopatřením nedostal do řádného 8. dílu Riegrova *Slovníku naučného* z roku 1870, takže byl zařazen až k pozdějším dodatkům (1874). Srov. SOkA Havlíčkův Brod. *Fond Skřivan August, Krucemburk* (dopis Antonína Skřivana bratrovi Augustinu Skřivanovi z 15. ledna 1869).

[4] Vysvědčení Gustava Skřivana a jiné dokumenty k jeho studiu. Archiv autora.

[5] Korespondence Václava Šafránka s Gustavovými rodiči. Archiv autora.

[6] Začátkem prosince 1844 píše třináctiletý školák opět po dlouhé době domů (úhledný dopis s vlastní narýsovanou biedermeierskou dekorací): *„Nejdražší rodiče! Já Vám ruce líbám a již jsem zdravější, ale všecko nesmím ještě jíst, hrách, čočku, chleba, maso jen telecí. Do školy nepůjdu, až tak ale 10. dez.*[embra]. *Skrz ty Vánoce já ostanu raděj v* [Kutné] *Hoře, skrz tu nemoc, ale ne aby Jste si drahý rodiče myslely skrz ty peníze a to si můžete hned pomyslet, že bych já domů stokrát raděj jel, neb je mi po té nemoci hrozně po domově smutno, ale myslím si, že musím odvyknout. Tu sobotu před Štědrým večerem budem mít odpoledne Feryen* [prázdniny] *až do Třech králů. Dobrý rodiče, pošlete mi z 3. klassy* [třídy] *Schrift* [sešit]. *Aufsätze* [slohové úlohy] *jak z I. tak z II. kursu. Pak ty vraní brky a pak ve veškostnu* [komodě] *tatínkovým dole v šupleti je zeychnung* [kresba, výkres] *v dece jedný, a pak v tatínkový jarmárce* [skříňce] *mám nějaký zeychnunky a dole v jarmaře co jsou nože a talíře v těch šuplatech mám také nějaké* [...]*"*. Dopis uzdraveného Gustava Skřivana rodičům ze 7. 12. 1844. Archiv autora.

[7] Dopis Gustava Skřivana rodičům ze 17. 2. 1851. Archiv autora.

[8] Korespondence Gustava Skřivana. Archiv autora.

nebo formanský vůz, jelikož železniční trasa z Německého (nyní Havlíčkova) Brodu do Pardubic tehdy ještě nestála.[9]

Ze studia na pražském polytechnickém ústavu, i opětovného návratu na vídeňskou techniku (podzim 1850), se dochovaly Skřivanovy imatrikulační listy, písemná hodnocení a frekventační vysvědčení, plná podpisů od tehdejších profesorů a vědců, i některé školní výkresy.[10] Velká váha byla při výuce kladena na praktické vzdělávání, *„musíme mašiny si sami vyměřit a kreslit, ve fabrikách, neb ledas kde, kam kdo je poslán, to jest ale na jedno místo nejsou nikdy dva poslaný. Já rejsuju teď každý den, kde to 14 dní trvat bude, v železnici* […] *divně mě bylo, když jsem první den na železnici od profesora* [Karla Wersina] *poslán byl, měřítko, olůvko a papír dostal.* [Lezl jsem na pražském nádraží po lokomotivě] *a než jsem se do toho vpravil, bylo to velké Curiosum, ono je něco jiného to rejsovat z předlohy a něco jiného, když to má jeden před sebou“*.[11]

V Praze se Gustav Skřivan přihlásil k *technické kohortě* studentských legií, jež měla vykonávat pravidelnou noční stráž v ulicích města a udržovat pokoj a pořádek při masových shromážděních lidu. Ozbrojené studentské sbory se roku 1848 hrdě hlásily k tradici pražských studentských legií z let 1648, 1741, 1744 a 1800.[12] Údajně z revolučního roku je v rodině dodnes uchováván Skřivanův odznak s českým lvem a královskou korunkou.[13] Na konci roku 1849, kdy už byl jasně patrný nový vládní kurs, směřující k neoabsolutismu, se mladý Gustav připletl do zbytečné potyčky studentů a bývalých členů rozpuštěných legií s pražskou policejní stráží a za urážku hlídky slovem byl dne 8. února 1850 *odsouzen vojenskou komisí* na Pražském hradě ke čtrnáctidennímu vězení u profousa.[14] Koželužské rodině způsobil incident mnoho nepříjemností, neboť Gustavovi hrozilo vyloučení z techniky a povinný odchod k vojsku. V pozdější literatuře z 20. století byl výklad celé události zkomolen a Gustav Skřivan označen za aktivního účastníka bojů na pražských barikádách v roce 1848, což je i z důvodů studentova umírněného politického, liberálně orientovaného přesvědčení naprosto vyloučeno.[15] Tento fakt potvrzuje i německy psaný dopis od Skřivanova radikálně demokratického spolužáka z chorvatského Záhřebu, Mirko Hàrvata, ze srpna 1848.[16]

---

[9] Když například začátkem listopadu 1848 přijížděl po železnici na pražské nádraží (dnešní Masarykovo), *„Páni Pražáci* [již] *v zástupech velkých očekávali train* [vlak]*, by* [čerstvé porevoluční] *noviny vídeňské vyzvěděli. Vzal jsem můj kufr, který mi ani od stráže prohlížen nebyl a odebral jsem se k* [strýci] *Antonovi* [Skřivanovi]*, kdežto jsem vlídně přijat byl* […]*“*. Dopis Gustava Skřivana rodičům ze 4. 11. 1848. Archiv autora. Že v noci nebývalo na cestách nejbezpečněji dosvědčuje jiný dopis rodičům, v němž Gustav ohlašuje čas vlaku, kterým má dorazit na sestřinu krucemburskou svatbu s Eduardem Binkem: *„Poněvadž zde kufr u dědečka* [Václava Jettela ve Vídni] *nechám, a sobě jen kožený kufr vezmu, tedy bych Vás prosil místo vozu jen naši, neb pastorovu pryčku pro mě odeslat. Já myslím, abych hned z Pardubic vyjel a nikde žádný nocleh nedělal (co by mě velmi nemilé bylo), totiž abych as v ½ noci domů přijel. Neb když od Vás kůň v sobotu vyjede v časně ráno, může na poledne v Pardubicích být, a také sobě dost odpočne, když 5 hodin tam postojí, pak za druhé žádný náklad nebude mít.* […] *Těšilo by mě, kdyby Edvard mě mohl v Pardubicích očekávat. Jestli to možné bude, prosím Vás odpuste ho* [z práce]. *Zastavovat se nebudem nikde. Kdyby nemohl Edvard, odešlete mi nějakou silnou hůl, neb něco, kdyby večer někdo na mě chtěl kabát“*. Dopis Gustava Skřivana rodičům z 29. 7. 1851. Archiv autora.

[10] SOkA Havlíčkův Brod. *Fond Skřivan August, Krucemburk*; Dokumenty k životu Gustava Skřivana. Archiv autora.

[11] Dopis Gustava Skřivana rodičům z 10. 5. 1850. Archiv autora.

[12] Více viz [4].

[13] Odznak s českým lvem. Archiv autora.

[14] Viz *Zprávy z Prahy*. Pražský večerní list, 15. 2. 1850, č. 27, s. 186.

[15] Srov. Binko J.: *Paměti koželužny v Krucemburku* (strojopis). Krucemburk-Křížová, 1956, s. 3; Janáček J.: *700 let Krucemburku-Křížové* (vázaný strojopis). Krucemburk-Křížová, 1966, s. 78, 105.

[16] *„Milý Gustave! Tvůj dopis mě velmi potěšil. Je mi velmi podivno, že nerozumíš událostem pražským. Já jsem od Prahy tak vzdálen, ale přesto je chápu. Revoluce v Praze byl boj demokracie proti aristokracii, byl to boj*

Po zvládnutí zkoušek na pražské polytechnice se Gustav Skřivan vrací od akademického roku 1850/1851 ke studiu na *vídeňském polytechnickém institutu* (mechanika, nauka o strojích, o stavbě, vodních dílech a stavebním účetnictví, praktická geometrie, vyšší matematika, astronomie, logika, atd. – poslední tři přednášky též na *vídeňské universitě*). O proměně klimatu ve společnosti a mezi studentstvem sděluje domů otcovi, že se zde již *„stříhají dlouhé vlasy demokratické a holšteinské klobouky berou, žádné študentské známky se nesmějí nosit"*.[17] V průběhu dalších let se Skřivan stává oblíbeným žákem a později pilným vědeckým spolupracovníkem významného matematika, konstruktéra optiky a vynálezce vysoce světelného, fotografického portrétního objektivu, profesora *Josefa Maxmiliána Petzvala* (1807–1891).[18] V Gustavově studentském bytě píše v roce 1853 svoji novou odbornou publikaci blízký přítel, dřívější spolužák, nyní nastávající řádný profesor deskriptivní geometrie na pražské polytechnice a pozdější nadějný politik *Rudolf Skuherský* (1828–1863).[19]

3 Působení ve Vídni

Ještě během studia se Gustav Skřivan přihlásil v roce 1854 ke zkoušce kandidátů na úřad učitele matematiky a nauky o strojích pro vyšší reálné školy, obdržel však pouze oprávnění k výuce na nižších reálkách. Tento prvotní neúspěch byl ctižádostivému Skřivanovi silným podnětem k horlivému samostudiu a vzorným výsledkům na vídeňské technice. Ve volném čase si Gustav přivydělával soukromými přednáškami (např. *Ueber Differential- und Integral- rechnung und ihre Anwendung auf höher Geometrie*), tematickými výklady z různých technických oborů a vyučováním matematiky na proslulém privátním *výchovném ústavu Petra Bílky*, na kterém se vzdělávali potomci z předních vídeňských a šlechtických rodin (Kaunicové, Jabloňovští, Lobkovicové a další), a kde si Skřivan získal u žáků i jejich rodičů velkou oblibu a zároveň osvojil praktické didaktické dovednosti, jichž pak využil při sepisování svých prvních učebnic. V roce 1857 vypomáhá profesoru Josefu Petzvalovi s odbornou korekturou nového vědeckého díla, určeného pro tisk,[20] a na počátku roku následujícího je Gustavovi, po úspěšně vykonané zkoušce (dochováno její zadání), povoleno vyučovat na vyšších reálkách.[21]

---

svobody s absolutismem. Aristokracie myslela, že Slovanský sněm bude jejím orgánem proti svobodě, ale zmýlila se. Slovanský sněm jako prvý orgán slovanského národa měl před očima svobodu, nejen vládu, národ, nikoli však aristokracii. Byl myšlen demokraticky, a proto se musel zhroutit. Píšeš o pražských studentech, že dělali příliš mnoho. Kéž by jen byli pražští studenti více vykonali, věc by byla lépe dopadla. Proč Jsi mi nenapsal, jak je u Vás v zemi, jak smýšlí lid? Co očekáváte? My Chorvaté a Srbové, žijící v Chorvatsku, Slavonii a Uhrách, stojíme v otevřené válce s Maďary. Na jednom místě naši sedláci porazili jeden prapor pěchoty a jednu eskadronu husarů, na jiném místě jednu eskadronu hulánů. Chceme být svobodným národem ve svobodném Rakousku. Chceme se sjednotit se všemi Slovany monarchie. Vaše armáda byla nyní proti Vám. Naše celá armáda je pro nás. Máme nyní 50 000 k boji připravených mužů – hraničářů a za týden může náš nejmilejší bán Jelačič mít 80 000 mužů u hranic […]*"*. Dopis Mirko Hàrvata Gustavu Skřivanovi z 22. 8. 1848. Archiv autora. Český překlad dopisu viz Janáček J.: *700 let Krucemburku-Křížové*, s. 78–79.

[17] Dopis Gustava Skřivana rodičům ze 17. 2. 1851. Archiv autora.

[18] Viz Scheufler P.: *Historické fotografické techniky*. IPOS ARTAMA, Praha, 1993, s. 13; Korespondence Gustava Skřivana. Archiv autora.

[19] Skuherského text nesl název: *„Über die wissenschaftliche Darstellung der Perspektive"*. Dopis Gustava Skřivana rodičům z 24. 3. 1853. Archiv autora.

[20] Dopis Gustava Skřivana rodičům z 15. 2. 1857. Archiv autora. Ve stejném roce vyšla Josefu Petzvalovi kniha: *Berichte über optische und dioptrische Untersuchungen*. Wien, 1857.

[21] Jednalo se o již zmiňované učitelské obory: matematika pro vyšší reálné školy a nauka o strojích.

Poté, co dosáhl v přípravných učitelských hodinách velmi dobrých pedagogických výsledků na tzv. „Vídeňce“ (vyšší reálná škola na předměstí Wieden),[22] byl vládou v průběhu roku 1858 jmenován, ve dvaceti sedmi letech života, prozatímním a nakonec řádným ředitelem (1859) čtvrté vyšší reálky ve Vídni na Bauernmarktu (Selský trh v centru města), s úkolem vypracovat její organizační plán.[23] Škola, kterou od jejího vlastníka Karla Schelivského dokonce odkoupil (1860), a stal se tak jejím majitelem a ředitelem v jedné osobě, dosáhla pod Skřivanovým vedením chvalného jména, vysokého počtu uchazečů o studium a byla ve své době považována za vzorovou pro ostatní vznikající ústavy tohoto typu a zaměření. O cenné rady a dlouholeté zkušenosti se tehdy s Gustavem podělil jeho pražský strýc *Antonín Skřivan* (1818–1887), zakladatel vyhlášené obchodní školy, tzv. „Skřivanky“ (1856), jemuž náleží zásluha za vytvoření českého účetnického a směnkářského názvosloví, za významné překlady (v letech 1852 až 1853 dva díly počtářství pro nižší reálné školy od matematika Franze Močnika) a sepsání celé řady původních českých a německých učebnic.[24]

V roce 1861 se Gustav Skřivan oženil se svou půvabnou sestřenicí, Vídeňačkou *Hedvikou Jettelovou* (1839–1864).[25] Ke sňatku druhého stupně pokrevenství dala svolení (dispens) konsistoř vídeňského arcibiskupství. Otcem jednadvacetileté Hedviky byl ranský rodák Ladislav Hugo Jettel, hutní podnikatel ve Štýrsku, matkou Žofie, rozená Buchtová, dcera majitele železných hutí ve Vříšti u Nového Města na Moravě. V kruzích vysoké společnosti se rodina ve Vídni, až na dědečka Václava Jettela, poněmčila. Ačkoliv byli bohatí příbuzní mladému Skřivanovi vždy nápomocní, za svých studií často trapně pociťoval, že mu nemohl jeho otec Augustin poskytovat takové finanční prostředky, aby se mohl mezi Jettelovými a jejich přáteli volně pohybovat.[26] Dva bratři Hedviky byli umělecky nadaní, akademicky školení krajináři. Vedle staršího Vladimíra Jettela, u něhož se stalo malování spíše koníčkem ve volných chvílích, se ve světě proslavil hlavně *Eugen Jettel* (1845–1901), žijící několik let v Paříži, kde se scházel s některými mistry barbizonské školy a odkud pořádal časté cesty na francouzský, holandský a italský venkov.[27]

---

[22] Viz Gustavův stříbrný upomínkový pohár ve stylu druhého rokoka s věnováním z roku 1858. Soukromá sbírka.

[23] Srov. [2], s. 12.

[24] K osobnosti *Antonína Skřivana* (1818–1887) více viz [3].

[25] Daguerrotypie a rané vizitkové fotografie mladých manželů (1863). Archiv autora.

[26] Viz Binko I.: *Krucemburští koželuhové a významní členové rodu Skřivanových* (strojopis). Krucemburk-Křížová, 1966, s. 2. Byly to především plesy ve strýcově vídeňském domě: *„Dne 13-ho tohoto měsíce jsem obdržel od pana strýce Jettela pozvání na jeho domácí ples. Chtěl jsem se z toho vykroutit, však žádné výmluvy nebyly nic platné, kde jsem musel pozvání přijmout. Narazil jsem se do mého nového fraku, vypůjčil jsem si bílou vestu a botky, pak jsem si koupil rukavice a šel jsem. Celá společnost byla tůze veselá, bylo asi 17 ženských a as 16 mužských. Jídla a pití jsme měli hojnost, zkrátka tůze dobře jsme se bavili* […] *Včera v sobotu dával pan strýc ples, který o mnoho skvostnější byl, než prvnější. Hostů bylo více než na prvním. Včera bylo 28 ženských a 31 mužských. Společnost byla veselá. Ten ples mohl pana strýce včera 100 fl. stříbra stát, neb bylo tůze mnoho drahých jídel, hojnost dobrého vína a piva. Já jsem byl až do 5-ti hodin do rána, a též větší díl společnosti pohromadě“.* Dopisy Gustava Skřivana rodičům z 15. 1. a z 15. 2. 1852. Archiv autora. Krásnými zážitky byly také návštěvy opery, koncertů a divadel: *„Včera jsme se tam až do 6 hodin dobře bavili, kde pan dědeček tam ostal a já se strýcem Moricem* [Jettelem] *do Concertu šel. Takový koncert jsem ještě neslyšel, a potom co náhoda nechtěla mít, – dostal jsem od pana strýce lístek, kde jsem zrovna vedle ministra Tunfelda seděl* [Ferdinand v. Thinnfeld, exministr nerostného bohatství a těžby]*“.* Dopis Gustava Skřivana rodičům z 11. 11. 1859. Archiv autora. Gustav Skřivan hudbu miloval, ve volných chvílích byl vášnivým klavíristou.

[27] V metropoli moderního umění poznal Eugen Jettel také české malíře Brožíka, Hynaise, Marolda, Muchu a Zdeňku Braunerovou, dceru advokáta a politika Františka Augustina Braunera. Jettelova žena stála kolegovi Vojtěchu Hynaisovi modelem při práci na oponě pro pražské Národní divadlo (mladá vdova s dětmi). Viz Mžyková M.: *Vojtěch Hynais.* Odeon, Praha, 1990, s. 102. Koncem 19. století se Eugen Jettel přihlásil k hnutí

Společenská prestiž Gustava Skřivana od počátku šedesátých let 19. století strmě vzrůstala. K novomanželům jezdívaly do Vídně na delší pobyty Skřivanovy sestry, které si zde procvičovaly němčinu a po boku Hedviky poznávaly každodenní život velkoměsta s jeho bohatou kulturou. V roce 1860 byl Gustav jmenován řádným členem vídeňské *c. k. Geografické společnosti*, v lednu 1863 dopisujícím (zakrátko mimořádným) údem *Královské české společnosti nauk*, a v následujícím roce členem *Měšťanské besedy v Praze* a *Jednoty ku povzbuzení průmyslu v Čechách* (v obou jednatelem bratranec JUDr. Antonín Mezník).[28] Vděční žáci VI. třídy z Bauernmarktu mu v roce 1861 věnovali do ředitelny jeho vlastní litografickou podobiznu.[29] Ve stejnou dobu se rozvíjí i Skřivanova publikační činnost (*Die Grundlehren der Zahlentheorie*. Wien, 1862)[30] a úzká spolupráce s německými matematickými časopisy (*Zeitschrift für Mathematik und Physik* Oscara Xaviera Schlömilcha; *Archiv der Mathematik und Physik* Johanna Augusta Grunerta). V říjnu 1862 dokončuje česky psaný spis *K theorii řad bezkonečných*, u něhož promýšlí tehdy ještě neexistující, nebo pojmově značně neustálené, české matematické názvosloví: *„Monografie má patří do oboru vyšší mathematiky, a jest* [to] *v historickém ohledu první publikace z vyšší mathematiky, co naše česká literatura proukáže. Doufám, že se brzo v českém jazyku utužím. Neb, když sobě pozor dám, tedy snadno nechybím. Druhou malou práci v českém jazyku mám takřka hotovou, jest to ta samá, kterou jsem o prázdninách měl v Krucemburku“*.[31] Někdy v první polovině šedesátých let se ve Skřivanově rodném koželužském domě objevil, coby letní host, Gustavův opěvovaný vídeňský profesor, již zmiňovaný hornouherský rodák (Slovák) Josef Petzval. Za jeho pobytu zde vzniklo několik, dnes již bohužel ztracených, snímků na skleněných negativech (využití želatiny z kůží při takzvaném mokrém fotografickém procesu).[32]

4 Gustav Skřivan v Praze

V roce 1862 zaslal Gustavovi věhlasný drážďanský matematik *Oscar Xavier Schlömilch* (1823–1901) plnou moc k přeložení svých právě vydaných odborných studií do češtiny (*„znamenité dílo o vyšší analisis“*).[33] Ještě téhož roku byl Gustav Skřivan pobídnut Františkem Ladislavem Riegrem, Rudolfem Skuherským, Antonínem Skřivanem, ale i dalšími přáteli, aby se navrátil do Čech a ucházel se, v souvislosti s uzákoněním rovnoprávnosti obou zemských jazyků na pražském polytechnickém ústavu, o nově vypsané vysokoškolské místo. Mladý matematik neváhal a s kandidaturou, k otcově velké radosti, souhlasil, neboť to pro něho znamenalo návrat k vědecké práci, od které byl v posledních letech odpoutáván a zdržován složitou a nezáživnou

Vídeňské secese. Zemřel náhle v Terstu (jiný údaj hovoří o Velké Losinji), odkud měl podniknout s arcivévodou Karlem Štěpánem a jeho přáteli námořní výlet podél italského pobřeží k Sicílii. Srov. Slavík J.: *Josef Binko – přítel umění a fotograf* (první magisterská diplomová práce). Seminář dějin umění FF MU, Brno, 2007, s. 10–11, 13, 58.

[28] Jmenovací diplomy Gustava Skřivana a dokumenty ke členství ve spolcích. Archiv autora.

[29] Litografická podobizna Gustava Skřivana, 39,7 x 31,3 cm, autor: *Eduard Kaiser* (1820–1895), tisk: *J. Haller*, Vídeň, 1861. Soukromá sbírka; srov. [4], s. 475; *Poznámky Ing. Bohuslava Melichara a Ing. Marie Melicharové z Hradce Králové*. Archiv autora.

[30] Tato Skřivanova prvotina obsahuje, v rámci elementárních výkladů teorie čísel, učební látku od dělitelnosti a kongruencí čísel až po výklad kvadratických forem. Viz Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd*, s. 236.

[31] Menší, ve Skřivanově dopise podotknutá studie nesla patrně název: *„Základy kalkulu infinitesimálního“*. Dopis Gustava Skřivana otci Augustinovi ze 16. 10. 1862. Archiv autora.

[32] Srov. Binko J.: *Paměti koželužny v Krucemburku*, s. 3; Scheufler P.: *Josef Binko*. Edice FotoTORST, svazek č. 24, Torst, Praha, 2006, s. 29; Slavík J.: *Josef Binko – přítel umění a fotograf*, s. 16 a [3], s. 70.

[33] Dopisy Gustava Skřivana otci Augustinovi z 21. 11. 1862 a z 8. 2. 1863. Archiv autora.

administrativou při vedení vyšší reálky na Bauernmarktu. Během audience na ministerstvu kultu a vyučování ho v tomto rozhodnutí osobně podpořil i Gustavovi značně nakloněný baron *Josef Alexander Helfert* (1820–1910). Z deseti uchazečů na pozici docenta elementární matematiky *s českou vyučovací řečí* vybrali členové pražského profesorského sboru koncem roku 1862 jednomyslně *primo loco* právě Skřivana. Dne 17. února 1863 bylo rozhodnutí definitivně stvrzeno zemským výborem a Gustav Skřivan se stal nakonec vůbec prvním (provisorním, od roku 1864 řádným) *profesorem* [sic!] *pražské polytechniky*, přednášejícím elementární a vyšší matematiku v mateřském jazyce.[34]

Obr.: *Gustav a Hedvika Skřivanovi, foto Carl Herberth – Wien, 1863. Archiv autora.*

V dubnu se Gustav s chotí Hedvikou a jejich služebnou Louiskou stěhují z Vídně do Prahy, kde si pronajímají byt v Rohrsově domě č. p. 356 v ulici Na Perštýně (Staré Město). Skřivan si zde rozvrhuje přesný systém výuky, přičemž mluvnickou správnost svých českých vět a slovních obratů pečlivě konzultuje se svým příbuzným, JUDr. Antonínem Mezníkem (od roku 1864 honorovaný docent na pražské polytechnice, přednášel česky směnkové a obchodní právo).[35] Počátkem května, tedy ještě v rámci druhého semestru [sic!] akademického roku 1862/1863, začíná s českým výkladem *o analytické geometrii v rovině*, s kterým si okamžitě získává uznání jak od studentstva, tak od českých i německých profesorů. V pražské společnosti je záhy přemlouván ke vstupu do politiky, což ovšem vehementně odmítá, neboť se chce plnohodnotně zabývat vědeckou a pedagogickou činností.

[34] Ke konkurzu na pozici docenta elementární matematiky s českou vyučovací řečí blíže [4], s. 406–407, dále Korespondence Gustava Skřivana. Archiv autora. Gustav Skřivan upravil stávající učební osnovy pro elementární matematiku způsobem, že přidal rovnice třetího a vyšších stupňů, sférickou trigonometrii, analytickou geometrii v rovině a v prostoru, dále základy diferenciálního a integrálního počtu. Viz [1], s. 28.

[35] *Antonín Mezník* (1831–1907), syn křižanovského koželuha Tomáše Mezníka a Augustinovy sestry Alžběty Skřivanové (tety Gustava), měl za choť *Rosalii Ratzenbeckovou* (1860), jež byla rodem spřízněna se slavným matematikem a filosofem *Bernardem Bolzanem* (1781–1848). K osobnosti JUDr. Antonína Mezníka více [3].

Štěstí v kariéře bohužel neznamenalo přízeň osudu ve Skřivanově manželském životě, který spěl k neodvratné rodinné tragédii. Brzy po sňatku totiž onemocněla drobná mladičká Hedvika souchotinami, a Gustav Skřivan, sám se sklonem k plicním onemocněním, se od milované ženy za krátký čas nakazil.[36] Po Hedvičině smrti dne 10. srpna 1864 strávil Skřivan zbytek léta u rodiny v Krucemburku, kde se v kruhu nejbližších poněkud zotavil, aby se mohl se začátkem podzimního semestru opět oddat studentstvu, vědecké práci a společně budované reorganizaci pražské polytechniky (reforma výuky a studijního systému, institucionálního uspořádání, úplná jazyková rovnoprávnost, zamýšlená stavba nové budovy). Jako řádný profesor měl tehdy roční plat 2000 zl.

V lednu 1865 byl Gustav Skřivan zvolen *přednostou odboru (vedoucím katedry) pro vodní a silniční stavby* a *jednatelem nadace ku podělování chudých techniků obědem* (tzv. Skuherského nadání). Pro ústav tehdy objednává či věnuje celou řadu moderních, či k bádání nezbytných cizojazyčných publikací, slovníků a odborných časopisů, které v technické knihovně doposud chyběly (např. tzv. Crellův *Journal für Mathematik*). Od roku 1864 vydává pro české studenty knižně své vysokoškolské přednášky (*Základové analytické geometrie v rovině*. Praha, 1864; *Přednášky o algebraické analysi*. Praha, 1865). Třetí díl o počtu diferenciálním a integrálním už bohužel kvůli zhoršenému zdravotnímu stavu nedopsal (rukopis zachován). Jeho původní záměr tak dokončil až Skřivanův nástupce na pozici řádného profesora matematiky s českou vyučovací řečí, *František Josef Studnička* (1836–1903).[37]

„Ač lékař nedovolil, abych v mojí nemoci mnoho mluvil a vůbec i návštěvy přijímal, přece nebylo možno zameziti příchodu známých – tak že jsem v 19 dnech přes 60 visit měl (mimo lékaře). Co se v polytechnice dělo vím do podrobna, neboť mě docházeli od tam tud denní zprávy. Též i pan Sladkovský 4 kráte mě navštívil. Pan Dr. Rieger se vždy v besedě ptal jak se mě daří [...][38] *Zotavil jsem se tak dalece, že již mohu, je-li totiž příznivé počasí – vycházeti ven* […] *bude snad ještě as 14 dní trvati, než-li lékař dovolí, abych v přednáškách svých pokračoval* […] *Včera mne poctil návštěvou pan Dr. Brauner* […] *Dnes v neděli jsme se představili co* [nově zvolení] *akademický přednostové polytechniky, rektor Kořistka, přednostové odborů prof. Balling, Schmidt, Zítek a já, u místodržitele pana hraběte Belcrediho. As ½ hodiny jsme s ním mluvili o záležitostech školních, zvlášť co se našich reálek, gymnasií, atd. týká.“*[39] Zajímavý je i další Skřivanův dopis do Krucemburku, v němž otci podrobně líčí své přijetí u nejvyššího zemského maršálka, hraběte *Karla Rothkircha-Panthen* (1807–1870).[40]

---

[36] *„Byl zde ze Žďáru* [na Moravě, dnes Žďár nad Sázavou] *pan Dr. Filip, žádal jsem ho, by Hedvigu navštívil – on byl u nás a pravil mě, že prý to vůbec skvěle nestojí, že Hedviga nějaký defekt na plicích má a co nejvíce opatrná býti bude muset být, aby se jí něco náhle nestalo. Dr. Podlipský zase mne ubezpečuje, že plíce jsou zdravé, ač prý jsou srostlé s pohrudnicí, co však po čase zase zajde, jen když nemocný přísnou dietu zachovává. Hedviga jest nyní velmi slabá a nevím jestli za 14 dní bude s to z postele vstáti. Jsem nad vším celý mrzutý“.* Dopis Gustava Skřivana otci Augustinovi z 20. 12. 1863. Archiv autora.

[37] Více viz [1], [4], dále Němcová M.: *František Josef Studnička*, s. 28–29; Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd*, s. 244.

[38] Dopis Gustava Skřivana otci Augustinovi z 26. 2. 1865. Archiv autora.

[39] Dopis Gustava Skřivana otci Augustinovi ze 4. 3. 1865. Archiv autora. Srov. [4], s. 452–454.

[40] *„Jak jsem Tobě psal, pozval nás Jeho Excellence nejvyšší maršálek zemský, pan hrabě Rothkirch k ‘Soirée‘ na úterek večer o 8 hodině. Byl jsem tam též. Večer o 7-mé hodině jsem počal zříditi sobě potřebnou toilettu a o ¼ 9 mne přivezl fiakr před palác pana maršálka. Vstoupil jsem do paláce, kde množství portýrovaného služebnictva otevíralo jedny dvéře po druhých až posléze i u šatnice, kde jsem svrchník odložil – a ubíral jsem se do Entrée – Salonu, kdež mne tak zvaný ‘Büchsenspauer en parade’ u pravého Salonu dvéře otevřel. V tom již bylo mnoho pánů, vesměs v černých frakách (tak i já), černých vestách, bílých kravatách a rukavicích, lakovaných botech,*

V květnu 1865 zavítal stárnoucí Augustin Skřivan na synovo velké přání na svatojánskou pouť do Prahy, kde se společně setkali jak s rozvětveným příbuzenstvem, tak s dávnými přáteli. Nikdo ze zúčastněných si tehdy patrně nemyslel, že je to poslední symbolická sešlost. O prázdninách pobýval Gustav tradičně v rodném městečku, kde měl klid na psaní a kde nabíral na čerstvém vzduchu sílu pro dlouhé zimní měsíce, *„neb bych předc jen ještě rád několik roků na světě pobyl, abych mohl své vlasti veškery síly věnovati a v mnohém prospěšný se státi. Nevím však jak to půjde – možná, že jsem hypochondr, ale nebude tomu tak, neboť od času k času mne upomíná neduh na plicích – co mne velice znepokojuje"*.[41] Dočasnou letní změnu adresy Skřivan uveřejňoval, kvůli korespondenci, vždy v předstihu v českém i německém tisku. Po jedné z podzimních přednášek v listopadu 1865 se u Gustava náhle dostavilo silné chrlení krve a třicetičtyřletý profesor matematiky byl znovu upoután na lůžko, z kterého již tentokrát nevstal. O Vánocích se přijel rozloučit se svým jediným synem jeho otec, dne 6. ledna 1866 Gustav Skřivan zemřel. O smutné zprávě psaly na prvních stranách všechny významné noviny.[42] Mimo kolegů z techniky pronesl při pohřbu *na Olšanských hřbitovech v Praze* smuteční řeč i František Palacký.[43]

5 Poznámka na konec

Máme-li se v závěru příspěvku zamyslet nad Skřivanovým odkazem a místem v historii české matematiky, jeho hlavní přínos patrně nebudeme hledat v původní vědecké činnosti a badatelské originalitě, ale především ve svědomité, navzdory těžké nemoci a osobním ztrátám, neúnavné práci na zvelebení technicky zaměřeného školství, a v Gustavově přímém podílu na rozvoji české matematiky jako takové (průkopnické vysokoškolské přednášky v mateřštině, účastenství na ustálení nejednotné české odborné terminologie, metodiky, sepisování chybějících učebnic, popularizace vědy pro širší veřejnost, atd.). Byl to dobově podmíněný úděl většiny tehdejších profesorů a docentů, prvně přednášejících v českém jazyce, že se spíše než vlastnímu výzkumu a objevným poznatkům museli věnovat nezbytným organizačním, pedagogickým a celospolečenským záležitostem. Gustav Skřivan se sice nedožil slavnostního rozdělení utrakvistické pražské polytechniky na samostatný český a německý ústav (1869), nedočkal se plánované výstavby nové reprezentativní budovy na Karlově náměstí (1872–1874, arch. *Vojtěch Ignác Ullmann*), ani jiných důležitých změn (např. zřízení zkušební komise pro kandidáty

---

atd. – v rukou klobouky držíce, hovořili v menších a větších skupeninách. Při vstoupení do salonu učinil jsem officielní poklonu na všechny strany a přiblížil jsem se ke skupeninám pánů mne již povědomých. Přítomní byli: pan místodržitel hrabě Belcredi, jeho náměstek hrabě Lažanský, několik šlechticů, všickni radové z místodržitelství, členové výboru zemského, přednostové úřadů zemských a úřadů vyšších státních, všickni členové sboru professorského na polytechnice, radové zemského výboru, direktoři banky, a.j. panstvo. Pan maršálek měl tu úlohu, aby vyhledával osobnosti jemu vzácnější, kteréž by oslovil a s nimi pohovořil, zkrátka jim 'Couru' dělal. Došlo i na mojí nepatrnou osobnost, že jsem byl vyhledán od pana maršálka, ptal se na moje zdraví, a pak se obrátil náš hovor až na poměry v chotěbořském okresu […]*"*. Dopis Gustava Skřivana otci Augustinovi z 9. 3. 1865. Archiv autora.

[41] Dopis Gustava Skřivana otci Augustinovi ze 7. 6. 1865. Archiv autora.

[42] Viz *Gustav Skřivan* (celostránkový nekrolog). Národ, 8. 1. 1866, č. 7, s. 1.

[43] Dodnes stojící *náhrobek Gustava a Hedviky Skřivanových* (Olšanské hřbitovy III, oddělení X, hrob č. 253) tvoří zinková plastika anděla z karlínské umělecké slévárny *Josefa Branislava Mencla* (odlitá před rokem 1864) a pískovcový podstavec s vloženou, nahoře půlkruhově zakončenou nápisovou deskou. Symbolicky shodný pomník byl později vybrán i pro krucemburský hrob Gustavova otce, koželuha a starosty *Augustina Skřivana ml.* († 1869).

učitelství na reálkách v roce 1867 – doposud byla jen ve Vídni), spolu se svými kolegy však stál u samotných počátků realizace těchto myšlenek.

Literatura

[1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

[2] Binko I.: *Krátký život profesora Gustava Skřivana*. Krucemburk-Křížová (nedatovaný strojopis z 60. let 20. století).

[3] Slavík J.: *Krucemburk a život koželužské rodiny Skřivanových-Binkových 1623–1948* (druhá magisterská diplomová práce). Historický ústav FF MU, Brno, 2009.

[4] Velflík A. V.: *Dějiny technického učení v Praze*. Díl I., Praha, 1906.

Poděkování

Za milé přizvání na 32. mezinárodní konferenci *Historie matematiky* děkuji paní doc. RNDr. Martině Bečvářové, Ph.D. Základní text písemného příspěvku vznikl jako součást autorovy magisterské diplomové práce z historie na FF MU v Brně [3].

Adresa

PhDr. Jiří Slavík
Seminář dějin umění
Filosofická fakulta, Masarykova universita v Brně
Arna Nováka 1
602 00 Brno
e-mail: *64261@mail.muni.cz*

PELLOVA ROVNICE VE STARÉ INDII

IRENA SÝKOROVÁ

Abstract: European mathematicians started to deal with Pell's equation in detail in the 17th century. However, Indian scholars had solved this equation several centuries before. The aim of this paper is to present remarkable medieval Indian results.

1 Úvod

Neurčitá rovnice $ax^2 + 1 = y^2$, kde a je přirozené číslo, které není druhou mocninou, se nazývá Pellova rovnice. Její řešení hledáme v oboru celých čísel. Pellova rovnice má nekonečně mnoho řešení, zřejmá jsou (0,1) a (0, –1), kterým se říká triviální.

Někdy uvažujeme i zobecněnou Pellovu rovnici, tj. rovnici $ax^2 + b = y^2$, kde a je přirozené číslo, které není druhou mocninou, a b je celé číslo.

V Indii se řešením Pellovy rovnice zabývali zejména v 7. století Brahmagupta a ve 12. století Bhāskara. Přestože staří Indové počítali i se zápornými čísly, řešení Pellovy rovnice i zobecněné Pellovy rovnice uvažovali pouze v oboru přirozených čísel**.**

2 Indická řešení

2.1 Terminologie

Pro výše zmíněnou rovnici $ax^2 + b = y^2$ používali staří indičtí učenci název *varga-prakrti* nebo *krti-prakrti*.[1] Číslo x nazývali prvním kořenem (*adya-mula*), číslu y pak říkali druhý kořen (*antya-mula*). Někdy také užívali výrazy menší kořen (*kamistha-pada*) pro x a větší kořen (*jyestha-pada*) pro y, přičemž nemuselo platit $x<y$. K označení koeficientu a užívali termín *prakrti,* někdy též *gunaka* či zkráceně *guna,* pro absolutní člen b měli názvy *ksepa* nebo *praksepa*; pokud byl absolutní člen záporný, říkali mu odčítací prvek (*sodhaka*). Při popisu rovnice označovali po řadě neznámé x, y a koeficienty a, b zkratka-mi *ka, jye, pra, kse*.

2.2 Brahmaguptovo řešení

Brahmagupta (598–670) ve své knize *Brahma-sphuta-siddhanta* uvedl několik pravidel, která pak využil při řešení Pellovy rovnice. Svá tvrzení nedokazoval, jen je doplnil několika příklady. Sloka 65 ve 12. kapitole obsahuje toto pravidlo (viz [2]):

Kořen [urči] *dvakrát a* [další] *z vhodného čtverce násobeného násobitelem* [koeficientem *a*] *zvětšeným nebo zmenšeným o vhodnou veličinu. Součin prvních násobený násobitelem s přičteným součinem druhých je druhý kořen. Součet součinů křížem je první kořen. Součin přičtených nebo odečtených veličin je přičtený. Kořeny* [takto nalezené] *vydělené* [původní] *přičtenou nebo odečtenou veličinou jsou* [kořeny] *pro přičtenou jedničku.*

[1] *Varga* nebo *krti* je výraz, kterým se označovala druhá mocnina, *prakrti* vyjadřuje podstatu či základ.

V Indii bylo zvykem zapisovat kořeny rovnice a její absolutní člen vždy do řádku; při úvahách o dvou rovnicích byly v prvním řádku veličiny týkající se první rovnice ve druhém řádku odpovídající veličiny druhé rovnice. Pak je zřejmý i „součin křížem:

$$\begin{matrix} x_1 & & y_1 & b_1 \\ & \times & & \\ x_2 & & y_2 & b_2 \end{matrix}$$

Protože původní formulace nejsou příliš srozumitelné, vyjádříme je současnou symbolikou ve tvaru lemmat. Tato tvrzení platí pro libovolná reálná řešení, staří Indové však uvažovali racionální řešení.

Lemma 1 (viz [2]): Nechť (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$ a (x_2, y_2) je řešením rovnice $ax^2 + b_2 = y^2$. Pak dvojice $(x_1y_2 + x_2y_1,\ ax_1x_2 + y_1y_2)$ je řešením rovnice $ax^2 + b_1b_2 = y^2$.

Následující důkaz provedl až v 16. století komentátor Brahmaguptova díla Kršna.

Důkaz: Je-li (x_1, y_1) řešením rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$ a (x_2, y_2) řešením rovnice $ax^2 + b_2 = y^2$, je $ax_1{}^2 + b_1 = y_1{}^2$ a $ax_2{}^2 + b_2 = y_2{}^2$. Když první rovnici vynásobíme $y_2{}^2$, dostaneme $ax_1{}^2 y_2{}^2 + b_1 y_2{}^2 = y_1{}^2 y_2{}^2$, ve druhém členu za $y_2{}^2$ dosadíme z druhé rovnice, tj. $ax_1{}^2 y_2{}^2 + b_1(ax_2{}^2 + b_2) = y_1{}^2 y_2{}^2$, po roznásobení $ax_1{}^2 y_2{}^2 + b_1ax_2{}^2 + b_1b_2 = y_1{}^2 y_2{}^2$. Pak b_1 ve druhém členu nahradíme z první rovnice, $ax_1{}^2 y_2{}^2 + (y_1{}^2 - ax_1{}^2)ax_2{}^2 + b_1b_2 = y_1{}^2 y_2{}^2$, a rovnici převedeme do tvaru $a(x_1{}^2 y_2{}^2 + x_2{}^2 y_1{}^2) + b_1b_2 = a^2 x_1{}^2 x_2{}^2 + y_1{}^2 y_2{}^2$. Nakonec k oběma stranám rovnice přičteme výraz $2ax_1x_2y_1y_2$ a získáme rovnici $a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 + b_1b_2 = (ax_1x_2 + y_1y_2)^2$, tedy $(x_1y_2 + x_2y_1,\ ax_1x_2 + y_1y_2)$ je řešením rovnice $ax^2 + b_1b_2 = y^2$.

Indičtí matematikové nazývali tuto metodu *princip skládání* (*bhavana*). Jestliže takto „složili“ dvě stejné rovnice se stejnými kořeny, užili termín *skládání stejných* (*tulya bhavana*) na rozdíl od *skládání nestejných* (*atulya bhavana*).

Využívali i následující důsledek lemmatu 1.

Důsledek 1 (viz [2]): Je-li (x_1, y_1) řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$, pak $(2x_1y_1, ax_1{}^2 + y_1{}^2)$ je řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$.

V případě b=1 se jedná o Pellovu rovnici. Pokud známe jedno její celočíselné řešení (x_1, y_1), můžeme pomocí důsledku 1 nalézt další celočíselné řešení. Brahmagupta ve svých příkladech však uváděl vždy jen jedno řešení. Ukázal také postup, podle něhož se řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ získalo pomocí řešení zobecněné Pellovy rovnice $ax^2 + b = y^2$.

Lemma 2 (viz [2]): Nechť (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$. Pak dvojice $\left(\frac{2x_1y_1}{b}, \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}\right)$ je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Důkaz: Tvrzení plyne z lemmatu 1 a jeho důsledku. Čísla $x = 2x_1y_1$ a $y = ax_1^2 + y_1^2$ jsou řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$. Tuto rovnici stačí vydělit b^2 a dvojice čísel $\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right)$, tj. $\left(\frac{2x_1y_1}{b}, \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}\right)$, je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Brahmagupta předvedl popsaný postup na řešení úloh, které byly vyjádřeny rovnicemi $92x^2 + 1 = y^2$ a $83x^2 + 1 = y^2$.

Při řešení první rovnice nejdřív uvažoval $x_1 = 1$ a $y_1 = 10$ jako řešení rovnice $92x^2 + 8 = y^2$. Užitím důsledku 1 získal čísla $x = 2x_1y_1 = 20$ a $y = 92x_1^2 + y_1^2 = 192$ jako řešení rovnice $92x^2 + 64 = y^2$. Pak podle lemmatu 2 dopočítal řešení $x_2 = \frac{2x_1y_1}{b} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ a $y_2 = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b} = \frac{192}{8} = 24$ rovnice $92x^2 + 1 = y^2$. Protože však toto řešení nebylo celočíselné, použil ještě jednou důsledek 1, a tím získal celočíselné řešení původní rovnice $x = 2x_2y_2 = 120$ a $y = 92x_2^2 + y_2^2 = 1151$.

Ve druhém příkladě nejprve místo dané rovnice uvažoval rovnici $83x^2 - 2 = y^2$, kde změnil absolutní člen tak, aby získal celočíselné řešení $x_1 = 1$ a $y_1 = 9$. Podle důsledku 1 pak platí, že dvojice čísel $x = 2x_1y_1 = 18$ a $y = 83x_1^2 + y_1^2 = 164$ je řešením rovnice $83x^2 + 4 = y^2$. Nakonec podle lemmatu 2 nalezl řešení původní rovnice $x = \frac{2x_1y_1}{b} = \frac{18}{2} = 9$ a $y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b} = \frac{164}{2} = 82$.

Při řešení Brahmaguptovy rovnice nebylo nutné využívat lemma 1, resp. důsledek 1, můžeme přímo aplikovat lemma 2 na pomocnou rovnici, jejíž řešení známe. Brahmagupta však neodděloval jednotlivé části pravidla, procházel vždy všemi kroky.

Rovnice $ax^2 + b = y^2$ je důležitá zejména pro $b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, protože v těchto případech je řešení Pellovy rovnice nalezené pomocí lemmatu 2 celočíselné:

Pro $b = 1$ jde přímo o Pellovu rovnici, pro $b = -1$ užitím lemmatu 2 a odmítnutím záporných kořenů jsou kořeny $x = 2x_1y_1$ a $y = ax_1^2 + y_1^2$. Pro $b = 2$ je řešením dvojice čísel $x = x_1y_1$ a $y = y_1^2 - 1$, pro $b = -2$ je celočíselné řešení Pellovy rovnice ve tvaru $x = x_1y_1$ a $y = y_1^2 + 1$. Je-li $b = 4$, pak lze řešení vypočítat jako $x = \frac{x_1(y_1^2 - 1)}{2}$

a $y=\frac{y_1\left(y_1^{\ 2}-3\right)}{2}$, a v případě, že $b=-4$, je celočíselným řešením $x=\frac{x_1y_1\left(y_1^{\ 2}+1\right)\left(y_1^{\ 2}+3\right)}{2}$ a $y=\left(y_1^{\ 2}+2\right)\frac{\left(y_1^{\ 2}+1\right)\left(y_1^{\ 2}+3\right)-2}{2}$. Odvození těchto vztahů je možné nalézt např. v [3].

Výše uvedené vztahy Brahmagupta znal, některé z předchozích vzorců ve své práci popsal slovy. Nepodal však žádné odvození ani jakékoliv zdůvodnění svých návodů.

Brahmagupta tedy řešil Pellovu rovnici $ax^2+1=y^2$ tak, že nejprve nalezl přirozená řešení pomocné rovnice $ax^2+b=y^2$, nejlépe takové, kde $b\in\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, a pak podle lemmatu 2 nalezl řešení Pellovy rovnice. Nedokázal však obecně vysvětlit, jak zvolit pomocnou rovnici.

2.3 Bhaskarovo řešení

Na Brahmaguptovy výsledky navázal indický matematik Bhaskara II (1114–1185), který popsal tzv. *cyklickou metodu* (*cakravala*). Podle ní se postupně hledala celočíselná řešení rovnic $ax^2+b_1=y^2$, $ax^2+b_2=y^2$ atd., až se získala rovnice, v níž byl absolutní člen b_k roven ± 1, ± 2 nebo ± 4. Užitím Brahmaguptova principu skládání se pak získalo celočíselné řešení Pellovy rovnice $ax^2+1=y^2$.

Lemma 3 (podle [3]): Nechť (x_1, y_1) je celočíselné řešení rovnice $ax^2+b_1=y^2$, kde b_1 je celé číslo. Pak dvojice $\left(\frac{x_1m+y_1}{b_1}, \frac{ax_1+y_1m}{b_1}\right)$ je celočíselným řešením rovnice $ax^2+\frac{m^2-a}{b_1}=y^2$ pro vhodné celé číslo m.

Důkaz: Výrazy $x_2=\frac{x_1m+y_1}{b_1}$ a $y_2=\frac{ax_1+y_1m}{b_1}$ získáme podle Brahmaguptových lemmat. Použijeme-li lemma 1 na řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2+b_1=y^2$ a řešení $(1, m)$ rovnice $ax^2+(m^2-a)=y^2$, dostaneme, že $x=x_1m+y_1$ a $y=ax_1+y_1m$ je řešením rovnice $ax^2+(m^2-a)\,b_1=y^2$. Pak je $x_2=\frac{x_1m+y_1}{b_1}$ a $y_2=\frac{ax_1+y_1m}{b_1}$ řešením rovnice $ax^2+b_2=y^2$, kde $b_2=\frac{m^2-a}{b_1}$.

Bhaskara ještě poznamenal, že číslo m je třeba volit tak, aby číslo $x_2=\frac{x_1m+y_1}{b_1}$ bylo celé a rozdíl $\left|m^2-a\right|$ co nejmenší. Pravidlo však uvedl bez důkazu.

Můžeme předpokládat, že čísla x_1, y_1, a b_1 jsou nesoudělná, protože po zkrácení bychom dostali rovnici s menší hodnotou b_1. V tomto případě jsou čísla $y_2=\frac{ax_1+y_1m}{b_1}$

a $b_2 = \dfrac{m^2 - a}{b_1}$ také celá. Bhaskara to věděl, ale ve své práci žádný důkaz tohoto tvrzení neuvedl.

Bhaskarova cyklická metoda spočívala v tom, že se nejprve místo řešení dané rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ hledalo celočíselné řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$, kde číslo b_1 bylo v absolutní hodnotě co nejmenší. Možná volba je taková, aby $\dfrac{y_1}{x_1} \approx \sqrt{a}$. Pokud $b_1 \notin \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, nalezlo se podle lemmatu 3 celočíselné řešení (x_2, y_2) rovnice $ax^2 + b_2 = y^2$. Tento proces se opakoval tak dlouho, dokud se nedošlo k rovnici, kde $b_k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Dále se postupovalo podle Brahmaguptova principu skládání.

Bhaskara věděl, i když asi jen na základě bohatých početních zkušeností, že postup popsaný jeho metodou jednou skončí. Po konečném počtu kroků vždy dospěl k rovnici $ax^2 + b_k = y^2$, kde $b_k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Ve své práci popsal řešení několika takových příkladů. Pro ilustraci uvedeme jeden z nich: úkolem je nalézt celočíselné řešení rovnice $67x^2 + 1 = y^2$.

Bhaskara nejprve uvažoval čísla $x_1 = 1$ a $y_1 = 8$ jako řešení rovnice $67x^2 - 3 = y^2$, tj. $b_1 = -3$. Podle lemmatu 3 pak hledal takové číslo m_1, pro něž je řešení rovnice $67x^2 + \dfrac{m_1^2 - 67}{-3} = y^2$ celočíselné. Toto řešení má podle lemmatu 3 tvar $x_2 = \dfrac{1 \cdot m_1 + 8}{-3}$ a $y_2 = \dfrac{67 \cdot 1 + 8m_1}{-3}$. Aby byly splněny výše uvedené podmínky, volil Bhaskara $m_1 = 7$. Tím získal $x_2 = 5$ a $y_2 = 41$ jako řešení rovnice $67x^2 + 6 = y^2$, tj. $b_2 = 6$. Jednotlivé kroky jsou uvedeny v následující tabulce.

$x_1 = 1$	$y_1 = 8$	$67x^2 - 3 = y^2$	$b_1 = -3$	$m_1 = 7$
$x_2 = 5$	$y_2 = 41$	$67x^2 + 6 = y^2$	$b_2 = 6$	$m_2 = 5$
$x_3 = 11$	$y_3 = 90$	$67x^2 - 7 = y^2$	$b_3 = -7$	$m_3 = 9$
$x_4 = 27$	$y_4 = 221$	$67x^2 - 2 = y^2$	$b_4 = -2$	

Tím Bhaskara dostal rovnici s absolutním členem $b_4 = -2$, proto dál postupoval podle Brahma-guptova principu skládání. Řešením původní Pellovy rovnice $67x^2 + 1 = y^2$ jsou tedy čísla $x = \dfrac{2 \cdot 27 \cdot 221}{2} = 5\,967$ a $y = \dfrac{67 \cdot 27^2 + 221^2}{2} = 48\,842$.

3 Závěr

V Evropě vzbudil zájem o řešení Pellovy rovnice Pierre de Fermat (1601–1665), který v roce 1657 zveřejnil výzvu k nalezení nejmenšího celočíselného řešení rovnice

$61x^2 + 1 = y^2$. Touto rovnicí se zabýval už Bhaskara II, který uvedl její nejmenší celočíselné řešení $x = 226\,153\,980$ a $y = 1\,766\,319\,049$ (viz např. [5]).

Leonhard Euler (1707–1783) položil základ řešení Pellovy rovnice pomocí řetězových zlomků. Kompletní teorii řešení pak vypracoval a v roce 1771 publikoval Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). Dokázal, že Pellova rovnice má nekonečně mnoho řešení pro každé přirozené číslo a, které není druhou mocninou. Při řešení využil vyjádření čísla $\sqrt{a}$ řetězovými zlomky.

Pellova rovnice dostala své jméno omylem. Zasloužil se o to L. Euler, který ji chybně přisoudil anglickému matematikovi Johnu Pellovi (1611–1685), přestože není prokázáno, že by se J. Pell jejím řešením někdy podrobněji zabýval (viz [4] a [1]).

Literatura

[1] Barbeau E. J.: *Pell's equation*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] Colebrooke H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. John Murray, London, 1817.

[3] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics (Part II)*. Lahore: Molital Banarsidass, 1938.

[4] Dickson L. E.: *History of the Theory of Numbers. Vol. II Diophantine Analysis*. AMS Chelsea Publishing, 1992.

[5] O'Connor J. J., Robertson E. F.: *Pell's equation* [online]. [cit. 12. 4. 2011]. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pell.html.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8*.

Adresa

RNDr. Irena Sýkorová
Katedra matematiky
Fakulta informatiky a statistiky, Vysoká škola ekonomická
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *sykorova@vse.cz*

NÁSTUPCI EDUARDA WEYRA

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Abstract: Czech mathematician Eduard Weyr published his famous results in the matrix theory in the 1880s. Expositions of Weyr's theory have been given by many mathematicians all over the world. We describe works which were written by Czech mathematicians Otakar Borůvka, Jiří Čermák and Miroslav Novotný. They interpreted, extended and generalized Weyr's theory. Moreover, we introduce works on the matrix theory which were published by Bohumil Bydžovský in the first half of the 20th century.

1 Úvod

1.1 Weyrova teorie charakteristických čísel a její postavení v kontextu doby

V druhé polovině osmdesátých let 19. století publikoval pražský matematik Eduard Weyr (1852–1903) několik prací, v nichž vyložil svoji teorii charakteristických čísel, kterou aplikoval v problematice kanonických tvarů matic. Jeho přístup byl diametrálně odlišný od způsobu řešení těchto problémů jinými matematiky té doby.[1] Prostudujeme-li práce, které jsou datovány přibližně do stejného časového období a jsou věnovány teorii kanonických tvarů, nenalezneme v nich ani náznak myšlenek obdobných Weyrovým. Jedním z důvodů je patrně skutečnost, že Weyr byl jedním z prvních matematiků na světě, kteří užívali maticovou řeč. Ta vedla k zavedení nových pojmů a ke zcela novému pohledu na danou otázku. Ostatní algebraici vyjadřovali své „maticové" výsledky v druhé polovině 19. století ještě v řeči determinantů a bilineárních a kvadratických forem.[2] Weyrovy výsledky však byly do jisté míry známé a uznávané, poukazoval na ně například James Joseph Sylvester, jedna z největších osobností teorie matic. K jejich rozpracování za Weyrova života nedošlo a ani dnes není Weyrův způsob při výkladu kanonických tvarů matic používán. V českých zemích byl Eduard Weyr tehdy jedinou osobností zabývající se teorií matic.[3] Jeho výsledky byly u nás rozpracovány až po šedesáti letech.

Než přistoupíme k rozboru prací, které se po Weyrových výsledcích staly dalšími články vývojové linie teorie matic u nás, shrňme stručně základní myšlenky Weyrovy teorie (viz [19], [20], [21], [22]). Klíčovým pojmem jeho teorie je tzv. *nulita matice* (jedná se o rozdíl řádu a hodnosti čtvercové matice). Vedle *charakteristických kořenů matice*, což jsou v dnešní řeči její vlastní čísla, zavedl Weyr pro komplexní matici A n-tého řádu i svůj pojem *charakteristické číslo*. Je-li λ s-násobný charakteristický kořen matice A, potom existuje přirozené číslo r, pro které platí mezi nulitami matic vztah

$$n\,(A-\lambda E) < n\,(A-\lambda E)^{2} < \cdots < n\,(A-\lambda E)^{r} = n\,(A-\lambda E)^{r+1} = \cdots .$$

---

[1] Nejvýraznějšími matematiky, kteří budovali teorii kanonických tvarů, byli René Descartes (1596–1650), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), James Joseph Sylvester (1814–1897), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), Charles Hermite (1822–1901), Leopold Kronecker (1823–1891), Camille Marie Ennemond Jordan (1838–1922) a Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917).

[2] K přijetí maticové terminologie a symboliky došlo ve větší míře až v prvních třech desetiletích 20. století. Vedle Eduarda Weyra užívali řeč matic v osmdesátých letech 19. století v podstatě jen britští matematikové Arthur Cayley (1821–1895), James Joseph Sylvester a Arthur Buchheim (1859–1888).

[3] Teorií matic se u nás v druhé polovině 19. století krátce před smrtí zabýval rovněž Ludvík Kraus (1857–1885).

Vyjádříme-li nulity matic pomocí součtů jistých přirozených čísel, lze vztah prezentovat ve tvaru

$$\alpha_1 < \alpha_1 + \alpha_2 < \cdots < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r.$$

Uvedená přirozená čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ jsou charakteristická čísla příslušná k charakteristickému kořenu λ. Jsou tedy rovna přírůstkům nulit matic

$$(A - \lambda E), (A - \lambda E)^2, \ldots, (A - \lambda E)^r.$$

Platí vztahy

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = s.$$

Systém všech charakteristických kořenů a příslušných charakteristických čísel tvoří úplný systém invariantů podobnosti matic a ke každé přípustné volbě těchto invariantů je přidružena třída podobných matic. Soubor všech charakteristických čísel příslušných ke všem charakteristickým kořenům se nazývá *Weyrova charakteristika*. Weyr popsal konkrétní matici M řádu n mající dané charakteristické kořeny a charakteristická čísla. Všechny matice X patřící do stejné třídy podobných matic lze pak vyjádřit ve tvaru $X = Q^{-1}M\,Q$. Matice M má přitom jednoduchý tvar. Až na drobné změny v uspořádání prvků se jedná o Jordanovu matici. Weyr ji nazval *typickým tvarem*. Podrobnější výklad celé teorie viz např. [21], [8] nebo pro dnešního čtenáře přístupnější [1], [2], [3] a [18].

2 První práce z teorie matic u nás v první polovině 20. století

Po zveřejnění Weyrových výsledků nastalo v českých zemích čtyřicet let trvající období, v němž nebyly práce z teorie matic psány. Tuto etapu ukončil ve třicátých letech 20. století Bohumil Bydžovský (1880–1969).

2.1 Práce Bohumila Bydžovského

Bohumil Bydžovský byl na univerzitě žákem Eduarda Weyra, při studiích se setkal rovněž s Františkem Josefem Studničkou (1836–1903), který se intenzivně zabýval teorií determinantů, a Karlem Petrem (1868–1950). Sedm let působil jako středoškolský učitel, později se výrazně zapojil do školských reforem. Od roku 1909 vyučoval na české univerzitě v Praze, kde přednášel až do svých sedmdesáti sedmi let. V letech 1911 až 1917 vyučoval i na české technice. V roce 1946 byl zvolen rektorem Karlovy Univerzity.

Svůj vědecký zájem soustřeďoval především na algebraickou geometrii (s důrazem na teorii rovinných algebraických křivek), analytickou a diferenciální geometrii, teorii nekonečných grup a teorii konfigurací. Je autorem či spoluautorem několika učebnic pro vysoké a střední školy.

V roce 1930 publikoval B. Bydžovský knížku *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* [9], jejíž druhé vydání z roku 1947 nese název *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*. Je první česky psanou knihou se slovem „matice“ v názvu a jednou z nejstarších knih této vlastnosti na světě. První taková kniha vyšla roku 1913.[4]

V předmluvě k prvnímu vydání B. Bydžovský zdůraznil nedávné přijetí teorie matic světovou matematickou komunitou a poukázal na její výhody:

[4] Jedná se rozsáhlou třídílnou monografii *Matrices and determinoids*, kterou sepsal Cuthbert Edmund Cullis [11] (1875?–1954). Její díly vyšly v letech 1913, 1918, 1925. Je v nich obsažena celá tehdejší teorie matic a determinantů. Dílo však nemělo velký ohlas, neboť použitá terminologie byla příliš složitá.

Od běžných učebnic jednajících o determinantech se liší tato tím, že obsahuje základy počtu maticového; je to odůvodněno velkou důležitostí, které nabyl tento počet v posledních letech svou účinnou a hospodárnou symbolikou. ([9], str. iii)

Kniha je rozdělena na dvě části: *Teorie determinantů a jich užití* a *Teorie matic a jich užití*. Po nich následuje desetistránkový historický přehled, který je však věnován takřka výhradně teorii determinantů. V přehledu je rovněž zahrnut seznam několika učebnic k danému tématu. V historické části se objevuje jméno Eduarda Weyra, z jeho prací je zmíněn spis *O theorii forem bilineárných* [21][5]. Ačkoliv B. Bydžovský označil teorii matic za nadřazenou teorii determinantů, věnoval první části 140 stran, druhé pouze 56 stran. Zajímavé je zavedení pojmu determinant. Nejprve je v partii věnované soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých definován determinant druhého řádu jako výraz $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, který se při řešení této soustavy vyskytl. Teprve poté je mu přiřazeno čtvercové schéma prvků, tj. matice. Dále je v paragrafu o soustavě tří rovnic o třech neznámých zaveden determinant třetího řádu a teprve poté determinant n-tého řádu (již pomocí matice), a to jako součet $n!$ výrazů opatřených znaménkem příslušné permutace. Právě při zavedení determinantu obecného řádu se v knize poprvé vyskytuje pojem matice (již na straně 22). Rovněž kapitola *Hodnost matice* je v první části, tento pojem je definován pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. Je tam též vyložena teorie soustav lineárních rovnic, v níž je nutná a postačující podmínka řešitelnosti soustavy uvedena nejprve v řeči determinantů a ihned poté pomocí rovnosti hodností matice soustavy a rozšířené matice soustavy. Souhrnně se tedy dá říci, že první část pojednává sice primárně o determinantech, ale uvážil-li autor, že je vhodnější v daném místě použít matici, učinil tak.[6]

V druhé části je nejprve prostor věnován základům maticového počtu. Bydžovský zdůraznil výhody vnímání matic jako celku:

V úlohách, v nichž vystupují matice, … se mluví o určitém výkonu, jehož předmětem je matice jako celek. Dospíváme tak zvláštního způsobu symbolického počítání maticemi, jímž se důkazy i znění některých vět velmi zjednodušují a jenž obdržel název počtu maticového (počítáme maticemi). ([9], str. 141)

Poté následují kapitoly věnované lineárním, bilineárním a kvadratickým formám a jejich souvislostem s maticemi. Zajímavé rovněž je, že zatímco matice jsou v první části knihy značeny bez jakýchkoli závorek nebo čar, v druhé dvojicemi svislých čar na každé straně schématu. V poznámce pod čarou je podotknuto, že k označení matice lze použít i kulaté závorky.

V roce 1936 publikoval Bohumil Bydžovský článek *Sur les matrices orthogonales symétriques* [10]. V něm nejprve dokázal, že je-li p hodnost matice $C+J$, kde C je symetrická ortogonální matice řádu n a J jednotková matice, potom hodnost matice $C-J$ je právě $n-p$. Dále dokázal, že násobnost kořene 1 charakteristické rovnice

[5] Právě v této knize z roku 1889 Eduard Weyr poprvé obsáhle vyložil svoji teorii charakteristických čísel.

[6] Pro nezasvěceného poznamenejme, že zrod teorie determinantů (1750) předešel vznik teorie matic (1858) o více než sto let. Jak již bylo řečeno, teprve v prvních třech desetiletích 20. století se teorie matic osamostatnila z nadvlády teorie determinantů a kolem roku 1930 dosáhla svého uznání. Začátkem 30. let vyšly první knihy o teorii matic. Z těch nejvýznamnějších jmenujme alespoň tyto: Herbert Western Turnbull (1885–1961) a Alexander Craig Aitken (1895–1967): *An introduction to the theory of canonical matrices* z roku 1932, Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961): *The theory of matrices* z roku 1933 a Joseph Henry Maclagen Wedderburn (1882–1948): *Lectures on matrices* z roku 1934.

matice C je $n-p$ a kořene –1 je p, a proto můžeme charakteristickou rovnici psát ve tvaru

$$(x+1)^p (x-1)^{n-p} = 0 .$$

Bydžovský využil tohoto vztahu a teorie elementárních dělitelů k odvození tvaru čtvercového schématu, kterým je možno reprezentovat každou symetrickou ortogonální matici C. Uvedený tvar, který závisí na hodnosti p matice $C+J$, autor dále upravoval na součin jednodušších matic. Ukázal, že každou takovou matici C lze psát jako součin buď $n-p$ nebo p ortogonálních symetrických matic ve tvaru $J-2aa'$, kde a jsou sloupce vhodně zvolené ortogonální matice A (a' značí vektor transponovaný k vektoru a). V případě p součinů dále představil velmi snadný způsob nalezení vektorů a_i, …, a_p. Jedná se o vektory, které jsou řešením soustavy rovnic $(C-J)\,a_i = 0$ a navíc a_i jsou lineárními kombinacemi sloupců matice $C+J$.

3 Reakce na Weyrovu teorii v českých zemích

Bohumil Bydžovský se konkrétními výsledky Weyrovy teorie nezabýval. Pozornost jí věnovali až další čeští matematikové. Weyrovu teorii se snažili zobecnit a aplikovat ji v jiné problematice. Jak již bylo řečeno v úvodu tohoto článku, reakce od české matematické komunity na Weyrovy výsledky přišly se značným zpožděním.

Roku 1936 vyšla vedle článku B. Bydžovského další francouzsky psaná práce českého matematika s maticovou tématikou. Byl to krátký článek *Sur les matrices singulières* [5] Otakara Borůvky (1899–1995).

3.1 Práce Otakara Borůvky

Otakar Borůvka byl žákem Matyáše Lercha a Eduarda Čecha. Mezi jeho učitele patřili též Élie Cartan (1869–1951, Paříž) a Wilhelm Blaschke (1885–1962, Hamburk). Borůvkův život je neodmyslitelně spojen s Masarykovou univerzitou a brněnskou pobočkou Matematického ústavu ČSAV v Brně, kde se stal jednou z nejvýraznějších osobností vědeckého života. Soustředil kolem sebe skupinu dalších vynikajících matematiků. Otakara Borůvku řadíme mezi ty, kteří se zasloužili o rozvoj matematiky v Československu.

Odborné zaměření Otakara Borůvky je rozmanité. Zahrnuje především klasickou analýzu, diferenciální geometrii, algebru, teorii diferenciálních rovnic a topologii. Z jeho výsledků je nejznámější algoritmus pro nalezení minimální kostry grafu, který Borůvka publikoval v roce 1926, v době, kdy ještě teorie grafů neexistovala.

Borůvkův zvýšený zájem o algebru lze zaznamenat od třicátých let 20. století. Ve výše uvedeném krátkém článku není sice jméno Eduarda Weyra zmíněno,[7] v úvodu je však podán výklad jednoho z klíčových vztahů teorie charakteristických čísel. Borůvka sestrojil neklesající posloupnost hodností matic X^1, X^2, X^3, ... a napsal, že existuje matice X^α taková, že matice X^α, $X^{\alpha+1}$, ... mají stejnou hodnost j a zároveň všechny předcházející matice mají hodnost větší. Číslo α nazval *l'indice de la matrice X*. Vztah sice vyložil pomocí hodností matic, ale ve zbývajících odstavcích dával přednost pojmu *de genre*, přirozenému číslu $n-j$ (nulita matice).

[7] Teprve v dodatečné krátké poznámce ([5], str. 762) se Borůvka zmínil o tom, že dokázal větu Ed. Weyra.

Dva roky po skočení druhé světové války vydal Otakar Borůvka skripta *Matice*[8]. V následujícím roce 1948 vyšlo jejich druhé a v roce 1966 třetí, doplněné vydání[9].

Přibližně v polovině století přešel Otakar Borůvka ke studiu diferenciálních rovnic,[10] kde plně využil svých algebraických znalostí. Článek *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* [7] publikoval roku 1954. Práce je rozdělena do čtyř částí. V první autor uvedl principy jiných způsobů řešení daného problému, Weierstrassovu a Peano-Bakerovu metodu. V další části se pochvalně vyjádřil o Eduardu Weyrovi, o jeho teorii a poznamenal, že *... Weyrova práce nenalezla ve světové literatuře ono místo, které jí přináleží.* ([7], str. 152). O Weyrově teorii otištěné ve spise *O theorii forem bilinearných* [21] Borůvka napsal:[11]

V ní vyvinul originálním a důmyslným způsobem novou theorii matic, která se co do obsažnosti vyrovná proslulé Weierstrassově theorii elementárních dělitelů a co do jednoduchosti a průhlednosti ji předčí. ([7], str. 152)

Třetí, nejobsáhlejší část věnoval Borůvka vysvětlení samotné Weyrovy teorie. Zopakoval především partii věnovanou tzv. *normální soustavě vektorů příslušné ke kořenu a* matice *A* řádu *n*. Vyjádřil ji schématem

$$
\begin{array}{l}
a_{11}, \ldots, a_{1,\alpha_r}, \\
a_{21}, \ldots, a_{2,\alpha_r}, a_{2,\alpha_r+1}, \ldots, a_{2,\alpha_{r-1}}, \\
a_{31}, \ldots, a_{3,\alpha_r}, a_{3,\alpha_r+1}, \ldots, a_{3,\alpha_{r-1}}, a_{3,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, a_{3,\alpha_{r-2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r1}, \ldots, a_{r,\alpha_r}, a_{r,\alpha_r+1}, \ldots, a_{r,\alpha_{r-1}}, a_{r,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, a_{r,\alpha_{r-2}}, \ldots, a_{r,\alpha_1}
\end{array}
$$

a rovněž vztahy $(A-aE)a_{\rho\sigma} = a_{\rho+1,\sigma}$ pro $1 \le \rho \le r-1,\ \sigma = 1,\ldots,\alpha_{r-\rho+1}$,

$(A-aE)a_{\rho\sigma} = 0$ pro $\rho = r$.

Písmenem *r* přitom Borůvka označil nejmenší mocninu matice $(A-aE)$, která má maximální nulitu (tj. číslo značené ve zmíněném francouzsky psaném článku písmenem α, které zde naopak značí násobnost charakteristického kořene), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ jsou charakteristická čísla. V posledním řádku bylo tedy uvedeno α_1 vektorů, které se vynásobením maticí $(A-aE)$ zleva transformují na nulové vektory a které mají ve sloupci nad sebou své „vzory“. Celkový počet uvedených vektorů je roven násobnosti kořene *a*. Souhrn všech těchto soustav (pro všechny charakteristické kořeny) je lineárně nezávislá množina *n* vektorů, tzv. *normální soustava vektorů příslušná k matici A*.

Ve čtvrté, stěžejní části práce Borůvka dokázal, že integrálem (dnes bychom řekli řešením) soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty $y' = Ay$ jsou vektory tvaru

---

[8] Název skript koresponduje se jménem předmětu, který Borůvka vyučoval.
[9] Třetí vydání připravil k tisku Josef Škrášek, který text doplnil řadou příkladů a cvičení.
[10] Roku 1946 založil vědecký seminář věnovaný diferenciálním rovnicím, který vedl až do vysokého věku.
[11] Obdobný citát použil Borůvka rovněž v předmluvě ke své knize z roku 1971 (viz dále).

$$y_{\rho\sigma} = \mathrm{e}^{ax}.(a_{\rho\sigma} + \frac{x}{1!}a_{\rho+1,\sigma} + \ldots + \frac{x^{r-\rho}}{(r-\rho)!}a_{r\sigma}), \quad \rho = 1, \ldots, r, \quad \sigma = 1, \ldots, \alpha_{r-\rho+1}.$$

Dále napsal, že sestrojíme-li tyto vektory pro každý kořen matice, obdržíme *n* nezávislých řešení, tj. fundamentální systém řešení dané soustavy.

Roku 1971 vyšla Borůvkova učebnice *Základy teorie matic* [8], v níž je Weyrova[12] teorie poprvé zpracována knižně. Vznikla přepracováním jeho vysokoškolského textu *Matice* [6].[13] V knize je přehledně představena teorie matic od definice matice a jejích speciálních typů, přes hodnost matice, vektory, lineární transformace, vektorové prostory, charakteristickou rovnici matice, nulitu matice až po zmíněnou Weyrovu teorii. Té jsou věnovány čtyři kapitoly (17. až 20., celkem 31 stran) z celkových dvaceti čtyř. Poté následuje kapitola věnovaná soustavám lineárních diferenciálních rovnic, která je takřka kopií[14] Borůvkova článku z roku 1954. Dále je čtenáři předložena (bez důkazů) i Weierstrassova teorie elementárních dělitelů, na této teorii založený způsob řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a rovněž klasifikace regulárních párů matic.

Otakar Borůvka byl též uznávaným pedagogem, vychoval několik generací matematiků. Jedním ze studentů, kteří pod jeho vedením zpracovali své rigorózní práce, byl Miroslav Novotný (1922).

3.2 Práce Miroslava Novotného

Miroslav Novotný byl jednou z vůdčích osobností poválečné brněnské i československé matematiky. Mezi jeho učitele patřil také Eduard Čech. Stejně jako O. Borůvka byl i M. Novotný členem Matematického ústavu ČSAV v Brně, svůj život spojil s brněnskou univerzitou. V počátcích své kariéry pracoval rovněž na Vysoké škole technické v Brně a na Vojenské technické akademii v Brně.

Oblast zájmů Miroslava Novotného byla ovlivněna jeho učiteli. Řešil problémy, které přirozeně vyvstaly v kolektivu brněnských matematiků. Zabýval se topologií, zaměnitelnými homomorfismy, úplně i částečně uspořádanými množinami, teorií gramatických kategorií nebo monounárními algebrami.

Roku 1950 vyšel Novotného článek *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel* [16], který obsahuje hlavní myšlenky příspěvku předneseného v roce 1949 na společném 3. sjezdu československých a 7. sjezdu polských matematiků v Praze. Dvoustránková poznámka je věnována zobecnění pojmu nulita a charakteristické číslo. Jedná se o stručné nastínění možného, od Weyrova způsobu zcela odlišného přístupu k dané problematice. O Novotného uchopení dané otázky mnohé prozrazuje věta uvedená na začát-

---

[12] Eduard Weyr je v knize několikrát zmíněn. V dataci jeho úmrtí se však Borůvka dopustil omylu, neboť uvedl rok 1894, který je rokem úmrtí Eduardova bratra Emila, rovněž významného matematika.

[13] Porovnáním obou textů můžeme nahlédnout, jak se ustalovala česká terminologie teorie matic. Například matice nazvaná v roce 1947 *sdruženou s danou maticí*, byla v roce 1971 pojmenována dnešním způsobem matice *transponovaná* (termín sdružená se zde vyskytuje pouze v definici jako alternující možnost). Termín matice *inverzní k dané matici* se ve starším textu nevyskytuje vůbec, místo něj je užíváno označení matice *reciproká.* V mladší, knižní verzi je sice stále používán spíše přívlastek *reciproká*, nicméně možnost nazývat matici známých vlastností inverzní zde již uvedena je.

[14] Ponechána je struktura článku i značení. Příslušná část knihy je navíc obohacena o konkrétní příklad a jeho řešení.

ku textu: *Matici můžeme chápati jako deformaci*[15] *vektorového prostoru do sebe*. Nulity a charakteristická čísla jsou zavedeny pomocí pojmů *A-kolineace* a *A-prostor* (viz dále).

Tato problematika je podrobněji[16] rozvinuta v práci z roku 1953 nesoucí jméno *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic* [17], v jejíž předmluvě Novotný napsal:

Prof. Borůvka mi položil problém, jaká část Weyrovy theorie charakteristických čísel se dá vybudovat v abstraktním prostoru bez zavedení algebraických operací. V této práci se dokazuje, že lineární prostor se dá nahradit t. zv. A-projektivním prostorem a lineární zobrazení t. zv. A-deformací. Tyto dva pojmy postačí k definici charakteristických čísel a tato čísla podrží ty vlastnosti klasické theorie, jež jsou popsány ve větě 1. Na druhé straně se mi nepodařilo nalézti vhodný ekvivalent k pojmu kořen lineárního zobrazení ani zobecnit systémy normálních vektorů. ([17], str. 41)

A-prostor je definován jako množina P, jejíž každý podsystém $x_1, x_2, ..., x_p$ je buď *závislý* (značí se $A\,[x_1, x_2, ..., x_p]$) nebo *nezávislý* (značí se $U\,[x_1, x_2, ..., x_p]$). Dále jsou uvedeny axiomy závislosti, číslo p je nazváno *délkou systému* $x_1, x_2, ..., x_p$. Prostor, jehož délky nezávislých systémů jsou ohraničeny, se nazývá *A*-prostor *o konečné hodnosti*. Pro $T \subset P$ je definován pojem *hodnosti množiny* T jako maximum délek jeho nezávislých systémů (značí se $R(T)$). Pro systém S skládající se z prvků $x_1, x_2, ..., x_p$ je zavedena množina $L(S)$ všech prvků $y \in P$ takových, že $A\,[x_1, x_2, ..., x_p, y]$ a je nazvána *podprostorem* (*uzavřenou množinou*), symbolem $L(T)$ se značí *uzávěr množiny* T, což je minimální podprostor obsahující T, *A-projektivním prostorem* se rozumí *A*-prostor o konečné hodnosti, *A-vlastním prvkem* vzhledem k F prvek $x \in P$, pro který platí $R[(x)] = 1$ a $F(x) \in L[(x)]$, *A-endomorfismem* *A*-projektivního prostoru P endomorfismus F, v němž je obrazem uzavřené množiny opět uzavřená množina a platí $F[L(T)] \subset L[F(T)]$. Endomorfismus jistých vlastností je nazýván *silným* a jiných daných vlastností *úplným*, silný a úplný endomorfismus pak *A-deformací*. Poznamenejme ještě, že se v práci objevil analogický termín pro nulitu, a to *defekt*.

Po definování potřebných pojmů přistoupil M. Novotný k formulaci výsledků. Je-li P *A*-projektivní prostor, F jeho *A*-deformace, N podprostor speciálních vlastností (tzv. *kořenový podprostor*), S_1 množina všech *A*-vlastních prvků v N, potom lze rekurentně definovat množiny S_k jako množiny všech prvků $x \in N - L(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1})$, pro které $F(x) \in L[S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup (x)]$. Označíme-li $\gamma_1 = R(S_1)$, $\gamma_2 = R(S_1 \cup S_2)$, ..., $\gamma_k = R(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k)$, ..., $\gamma_r = R(N)$, potom čísla $\alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \gamma_2 - \gamma_1$, ..., $\alpha_r = \gamma_r - \gamma_{r-1}$ nazveme *A-charakteristickými čísly patřícími* k *A-kořenovému podprostoru N*. *A*-charakteristická čísla, která patří ke všem *A*-kořenovým podprostorům uvažované *A*-deformace F, se nazývají *A-charakteristickými čísly A-deformace F*. Dále jsou v článku zapsány příslušnou řečí vlastnosti čísel α_1, α_2, ..., α_r dobře známé z Weyrovy teorie, konkrétněji, že součet všech *A*-charakteristických čísel *A*-kořenového podprostoru je roven *hodnosti* tohoto *podprostoru* a celkový součet všech *A*-charakteristických čísel dané *A*-deformace F je roven *hodnosti prostoru P*. V závěru práce je uvedena věta, k níž M. Novotný po celý text spěl: *A*-charakteristická čísla lineárního zobrazení *n*-rozměrného

---

[15] V dnešní terminologii rozumíme deformací endomorfismus, resp. lineární zobrazení nebo také operátor.
[16] Definování základních pojmů (*A*-kolineace, projektivní *A*-prostor, uzávěr množiny apod.) je však provedeno zcela jinou řečí. Starší článek vůbec nepracuje s pojmy závislost a nezávislost systémů.

lineárního prostoru nad tělesem komplexních čísel jsou identická s Weyrovými charakteristickými čísly.

3.3 Práce Jiřího Čermáka

Rovněž Jiří Čermák patřil k brněnské matematické komunitě. Weyrově teorii se věnoval ve své disertační práci, kterou obhájil roku 1958. Již dříve publikoval v letech 1953 až 1956 čtyři práce o diferenciálních a diferenčních rovnicích, v nichž již Weyrovu teorii využil.

První ze svých článků J. Čermák nazval *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic* [12]. V úvodu zdůraznil, že ho k problematice Weyrovy teorie přivedl Otakar Borůvka. Jeho vliv je v práci snadno čitelný a jeho výsledky hojně využívány.

Idea této metody náleží p. prof. O. Borůvkovi, který ve svých přednáškách na Masarykově universitě podobným způsobem odvodil obecné řešení homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Prof. Borůvka mě také upozornil na Weyrovu theorii a možnosti jejího požití v různých částech matematické analysy. ([12], str. 338)

Jiří Čermák nejprve zopakoval úvodní pojmy teorie matic a uvedl základy Weyrovy teorie nutné k dalšímu výkladu. Pro α-násobný nenulový charakteristický kořen a matice A řádu n sestrojil matici

$$\frac{1}{a}(A - aE)$$

a k jejímu α-násobnému kořenu 0, ke kterému přísluší stejná charakteristická čísla jako k charakteristickému kořenu a matice A, nalezl s využitím normální soustavy pro kořen a matice A novou normální soustavu, kterou nazval *normální redukovanou soustavou příslušnou ke kořenu a matice A*. Pro matici, jejíž kořeny jsou nenulové, utvořil očekávaným způsobem (tj. sestrojením redukované soustavy pro každý kořen) soustavu n vektorů, kterou nazval *redukovanou normální soustavou vektorů příslušnou k matici A*. S využitím tohoto pojmu a Weyrovy teorie poté explicitně vyjádřil fundamentální tvar řešení soustav diferenčních a diferenciálních rovnic. V článku tak prezentoval všechny hlavní výsledky tzv. *Floquetovy theorie*, která je však většinou postavena nikoli na Weyrově teorii, ale na Weierstrassově teorii elementárních dělitelů.

Roku 1954 Čermák publikoval článek *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty* [13]. V něm rozšířil výsledky Tomlinsona Forta[17] pojednávající o řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic 2. řádu s periodickými koeficienty. K odvození výsledků opět použil Weyrovu teorii.

V pořadí další Čermákovou prací obdobného charakteru je článek *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients* [14], který vyšel rovněž roku 1954. Autor v něm pomocí metody, kterou použil O. Borůvka v článku [7], odvodil explicitní vzorce pro obecné řešení homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

[17] Fort T.: *Finite differences and difference equations in the real domain*, Clarendon Press, Oxford, Oxford University Press, London, 1948.

Na tuto práci a na Borůvkův článek [7] úzce navázala poslední z prací Jiřího Čermáka týkající se řešení soustavy diferenciálních a diferenčních rovnic na podkladě Weyrovy teorie. Byla publikována roku 1956 pod názvem *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální* [15]. Jak název napovídá, hlavní náplní je otázka, zda při limitním přechodu od diferenčních rovnic k diferenciálním se také řešení soustav diferenčních rovnic transformuje na řešení soustav rovnic diferenciálních. J. Čermák se přitom omezil na homogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty.[18] Vyšel ze soustavy diferenčních rovnic a ukázal, že za určitých předpokladů fundamentální řešení diferenčních rovnic skutečně přejde při limitním přechodu na tvar fundamentálního řešení diferenciálních rovnic, který odvodil roku 1954 Otakar Borůvka.

4 Závěr

Po Eduardu Weyrovi, velké osobnosti teorie matic, nevzešel na dlouhou dobu z české matematické obce matematik, který by se maticím soustavněji věnoval. Některé výsledky teorie matic publikoval až ve třicátých letech 20. století Bohumil Bydžovský. Přímé reakce na Weyrovu teorii však byly sepsány až v padesátých letech. Všichni autoři těchto prací byli soustředěni v Brně, kde klíčovou roli pro zvýšení zájmu o danou problematiku sehrál Otakar Borůvka.

Vedle českých matematiků reagovali na Weyrovy výsledky rovněž matematikové světoví. Za všechny zmiňme alespoň jména G. F. Frobenius, H. W Turnbull, A. C. Aitken a C. C. MacDuffee.

Literatura

[1] Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*. Edice Dějiny matematiky, 2. svazek, Prometheus, Praha, 1995.

[2] Bečvář J.: *Z historie lineární algebry*. Edice Dějiny matematiky, 35. svazek, Matfyzpress, Praha, 2007.

[3] Bečvář J.: *Lineární algebra*. Matfyzpress, Praha, 2000, 2. vydání: 2002, 3. vydání: 2005, 4. vydání: 2010.

[4] Bečvář J.: *Eduard Weyr and Linear Algebra*. Image 44(2010), 20–21.

[5] Borůvka O.: *Sur les matrices singulières*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 203(1936), 600–602, 762.

[6] Borůvka O.: *Matice* (skripta). Brno, 1947, 2. vydání: 1948, 3. doplněné vydání: Vyškov na Moravě, 1966.

[7] Borůvka O.: *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty*. Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), 151–155.

[8] Borůvka O.: *Základy teorie matic*. Academia, Praha, 1971.

[9] Bydžovský B.: *Základy teorie determinantů a matic a jich užití.* JČMF, Praha, 1930, 2. vydání: *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití.* JČMF, Praha, 1947.

[18] Podobný problém podrobněji studoval Alvin Walter (1898–1967) v práci *Zum Grenzübergange von Differenzengleichungen in Differentialgleichungen*. Mathematische Annalen 95(1926), 257–266.

[10] Bydžovský B.: *Sur les matrices orthogonales symétriques.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 65(1936), 189–194.

[11] Cullis C. E.: *Matrices and Determinoids I, II, III*. Cambridge University Press, Cambridge, 1913, 1918, 1925.

[12] Čermák J.: *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic*. Práce moravskoslezské akademie věd přírodních 25(1953), 337–356.

[13] Čermák J.: *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty*. Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), 141–150.

[14] Čermák J.: *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients*. Annales Polonici Mathematici 1(1955), 195–202.

[15] Čermák J.: *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální*. Časopis pro pěstování matematiky 81(1956), 224–228.

[16] Novotný M.: *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel matic.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 74(1950), 239–241.

[17] Novotný M.: *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic.* Spisy vydávané Přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, 1953, 41–51.

[18] Shapiro H.: *The Weyr characteristic.* The American Mathematical Monthly 106(1999), 919–929.

[19] Weyr Ed.: *Sur la théorie des matrices*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 100(1885), 787–789.

[20] Weyr Ed.: *Repartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 100(1885), 966–969.

[21] Weyr Ed.: *O theorii forem bilinearných*. Spisův poctěných jubilejní cenou Královské české společnosti nauk v Praze č. II, Praha, 1889.

[22] Weyr Ed.: *Zur Theorie der bilinearen Formen.* Monatshefte für Mathematik und Physik 1(1890), 163–200, 201–236.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky* a rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8*.

Adresa

Mgr. Martina Štěpánová
Katedra informatiky v dopravě
Dopravní fakulta Jana Pernera, Univerzita Pardubice
Studentská 95
532 10 Pardubice
e-mail: *martinastepanova@centrum.cz*

OD PROBLÉMU MOMENTŮ K MODERNÍM ITERAČNÍM METODÁM

MARTIN TŮMA

Abstract: In the last 150 years, there were many books and scientific articles written about the problem of moments. In this contribution, the short historical review about the study of the problem of moments is given. There is also shown how many different topics in mathematics are closely connected with the help of the problem of moments.

1 P. Čebyšev

Podle známých historických pramenů [13] byl P. Čebyšev první, kdo začal systematicky zkoumat problém momentů. V roce 1855 publikoval sérii článků [4], v níž formuloval následující problém – nalezení funkce $f(\lambda)$, která splňuje rovnici

$$\int_a^b f(\lambda)\lambda^k \, d\lambda = \xi_k, \quad k = 0,1,2,\dots,$$

pro zadanou posloupnost $\{\xi_k\}$. Číslům $\{\xi_k\}$ se říká momenty. P. Čebyšev se zajímal o následující dvě otázky.

1.

Do jaké míry daná posloupnost momentů určuje vlastnosti funkce $f(\lambda)$? Přesněji řečeno, pokud uvážíme následující rovnici

$$\int_a^b f(\lambda)\lambda^k \, d\lambda = \int_a^b e^{-\lambda^2}\lambda^k \, d\lambda, \quad k = 0,1,2,\dots,$$

můžeme z ní vyvodit, že $f(\lambda) = e^{-\lambda^2}$? To by znamenalo, že distribuční funkce určená funkcí $F(t) = \int_a^t f(\lambda)\, d\lambda$ odpovídá normálnímu rozdělení.

2.

Jaké vlastnosti mají polynomy $\omega_n(z)$, tj. jmenovatelé postupných aproximací řetězového zlomku, který je rozvojem integrálu $\int_a^b f(\lambda)\lambda^k \, d\lambda$

$$\cfrac{a_0^2}{z - b_0 - \cfrac{a_1^2}{z - b_1 - \cfrac{a_2^2}{z - b_2 - \cfrac{a_3^2}{z - b_3 - \cfrac{a_4^2}{\dots}}}}}$$

Takové řetězové zlomky se dnes v matematické literatuře obvykle nazývají J-zlomky. Polynomy $\omega_n(z)$ tvoří soustavu ortogonálních polynomů.

Díky Čebyševově výzkumu momentů, který byl primárně zaměřen na otázky kolem normálního rozdělení, vznikla nová matematická teorie – obecná teorie ortogonálních polynomů. Pouze Legendreovy, Jacobiovy, Abelovy-Laguerreovy a Laplaceovy-Hermiteovy ortogonální polynomy byly známy před P. Čebyševem. V jeho práci můžeme dále nalézt aplikaci teorie ortogonálních polynomů na interpolaci, kvadraturní aproximaci, rozvoj funkcí v řady, teorii nejlepší lineární aproximace, pravděpodobnost a matematickou statistiku. Detailní přehled historie výzkumu obecných ortogonálních polynomů s důrazem na problém momentů lze nalézt například v [3].

Jeden z Čebyševových studentů, A. Markov, pokračoval v činnosti svého učitele. Jeho hlavním zájmem byla teorie pravděpodobnosti a aplikace metody momentů na důkaz centrální limitní věty. Jedním z významných výsledků je důkaz tzv. Čebyševových nerovností, který A. Markov podal ve svém článku [11] v roce 1884. Tyto nerovnosti se poprvé objevily v Čebyševově práci [5] v roce 1874; uvedl je však bez důkazu. V roce 1896 se A. Markov ve svém díle [12] zabýval zobecněným problémem momentů

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\lambda^{\mathrm{k}}\, d\lambda = \xi_k, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad 0 \le \mathrm{f}(\lambda) \le \mathrm{L}.$$

Dalším, kdo se ve své práci z roku 1861 dotknul problému momentů, byl H. E. Heine (viz [7]). Jeho studie byla motivovaná vlastnostmi řetězového zlomku odpovídajícího následujícímu integrálu

$$\int_a^b \frac{f(y)dy}{x-y},$$

kde daná funkce $\mathrm{f(y)}$ je nezáporná na intervalu $(\mathrm{a,b})$. Dále se H. E. Heine zabýval také aplikací teorie ortogonálních polynomů na kvadraturní aproximaci.

2 T. J. Stieltjes

Skutečný průlom ve studiu problému momentů udělal brilantní matematik T. J. Stieltjes v díle [14]. Důrazem kladeným na souvislosti mezi jednotlivými metodami se jednalo o mimořádnou práci. T. J. Stieltjes kompletně vyřešil problém momentů v následující formě: úkolem je nalézt neklesající funkci $\omega(\lambda)$ na intervalu $[0,\infty)$ tak, aby se její momenty

$$\int_0^{\infty} \lambda^{\mathrm{k}}\, d\omega(\lambda), \quad k = 0,1,2,\dots,$$

rovnaly předepsané posloupnosti čísel

$$\int_0^{\infty} \lambda^{\mathrm{k}}\, d\omega(\lambda) = \xi_k, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

V této formulaci problému momentů T. J. Stieltjes zavedl vlastní koncept integrálu, který je dnes znám jako „Riemann-Stieltjesův integrál“. Použitá terminologie má kořeny v mechanice. Pokud uvážíme takovou distribuční funkci $\omega(\lambda)$, že integrál $\int_0^x d\omega(\lambda)$ odpovídá rozložení hmoty přes polopřímku $[0,\infty)$, potom integrály

$$\int_0^{\infty} \lambda\, d\omega(\lambda), \int_0^{\infty} \lambda^2\, d\omega(\lambda)$$

reprezentují první a druhý statický moment hmoty rozložené podél polopřímky $[0,\infty)$.

T. J. Stieltjes problém momentů kompletně vyřešil a ukázal, že jednoznačnost řešení závisí na vlastnostech řetězového zlomku, takzvaného S-zlomku, který odpovídá rozvoji následujícího integrálu

$$I(z,\omega) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega(y)}{z-y}.$$

Například v knížce [2] je ukázáno, že S-zlomek se dá pomocí jednoduché transformace převést na řetězový zlomek, kterým se zabýval ve své práci P. Čebyšev a v principu se tedy jedná o to samé.

3 Pokračovatelé a další souvislosti

Po práci T. J. Stieltjese byl problém momentů z neznámých důvodů na dlouhou dobu opuštěn. Trvalo 20 let, než se znovu objevil v matematické literatuře. Byli to například H. Hamburger, R. Nevanlinna, M. Riesz, T. Carleman a F. Hausdorff, kteří opět o problém momentů projevili zájem. Například H. Hamburger v roce 1920 v díle [6] formuloval a vyřešil problém momentů rozšířený na celou reálnou osu. Zájemci o podrobnější informace o dílech těchto autorů mohou sáhnout například po [1] nebo [13].

V roce 1965 se objevila práce ruského matematika Y. V. Vorobyeva *Method of moments in applied mathematics* [16]. Tato kniha zůstala do dnešní doby téměř zapomenuta, a to i přesto, že myšlenky v ní obsažené jsou stále aktuální a velmi moderní. Y. V. Vorobyev problém momentů zobecnil a navrhnul jeho formulaci v Hilbertově prostoru. Využil jej při řešení diferenciálních a integrálních rovnic, a také při úloze nalezení spektra omezeného operátoru v Hilbertově prostoru. Sám Y. V. Vorobyev upozornil a ukázal souvislosti své úlohy, práce A. N. Krylova o problému vlastních čísel a metody sdružených gradientů, která se v matematické literatuře objevila poprvé v roce 1952 v článku M. R. Hestenese a E. Stiefela (viz [8]).

Souvislost problému momentů a metody sdružených gradientů byla dále studována a srozumitelně ukázána Z. Strakošem v roce 2008, který v článku [15] podrobně vysvětlil souvislost problému momentů a některých iteračních metod – Lanczosovy metody a metody sdružených gradientů pro symetrické i nesymetrické matice. Aby ukázal souvislosti v nesymetrickém případě použil Vorobyevův problém momentů.

V roce 1979 R. E. Kalman v článku [9] zavedl metodu částečné minimální realizace do elektrotechnické literatury, které se užívá dále k redukci modelu u lineárních dynamických systémů. Později bylo ukázáno, že má velmi blízko k problému momentů a že její kořeny jsou tedy již v polovině 19. století – v časech P. Čebyševa a T. J. Stieltjese. Touto skutečností se ve svém díle zabývali J. Liesen a Z. Strakoš (viz [10]).

Problém momentů je starý už přes 150 let, stále je však aktuálním tématem v různých oblastech matematiky. Je tomu tak především díky velkému množství souvislostí a mostů, jež byly s jeho pomocí nalezeny mezi jednotlivými odvětvími matematiky. Problém, který na počátku vypadal jako technická záležitost v důkazu centrální limitní věty, se ukázal jako společný jmenovatel matematické statistiky, pravděpodobnosti, moderních iteračních metod a také redukce modelu v elektrotechnice.

Literatura

[1] Akhiezer N. I.: *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Translated by N. Kemmer. Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[2] Assche W. V.: *The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials*. Em J. Comput. Appl. Math. 65(1995), 2–3.

[3] Brezinski C.: *History of continued fractions and Padé aproximants*. Volume 12 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 213–224.

[4] Čebyšev P.: *Sur les fractions continues*. Oeuvres I., Tome 11, 1855.

[5] Čebyšev P.: *Sur les valeurs limites des integrales.* Journal des Mathématiques pures et appliquées 19(1874), 157– 160.

[6] Hambuger H.: *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*. Math. Ann. 81(1920), 235– 319.

[7] Heine E.: *Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen. Band I, II.* Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Thesaurus Mathematicae, No. 1. Physica-Verlag, Würzburg, 1861.

[8] Hestenes M. R., Stiefel. E.: *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. J. Research Nat. Bur. Standards 49(1952), 409–436.

[9] Kalman R. E.: *On partial realizations, transfer functions, and canonical forms*. Acta Polytech. Scand. Math. Comput. Sci. Ser. 31(1979), 9–32.

[10] Liesen J., Strakoš Z.: *Principles and Analysis of Krylov Subspace Methods*. In preparation, 2010.

[11] Markov A.: *Démonstration des certaines inégalités de M. Tchébychev*. Math. Ann. 24(1884), 172–180.

[12] Markov A.: *Sur une question de maximum et de minimum*. Acta Math. 9(1887), 81– 88.

[13] Shoat J. A., Tamakin J. D.: *The problem of moments*. American Mathematical Society Mathematical surveys, vol. II. American Mathematical Society, New York, 1943, 9.

[14] Stieltjes T. J.: *Recherches sur les fractions continues*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. 8(1894), J1– J122.

[15] Strakoš Z.: *Model reduction using the Vorobyev moment problem*. Numer. Algorithms 51(2009), 363–379.

[16] Vorobyev Y. V.: *Method of moments in applied mathematics*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1965.

Adresa

Mgr. Martin Tůma
Ústav automatizace a měřicí techniky
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
e-mail: *tuma.martin@gmail.com*

JOSEF ÚLEHLA (1852–1933) A JEHO DĚJINY MATHEMATIKY

LUKÁŠ VÍZEK

Abstract: Josef Úlehla (1852–1933) was Czech teacher of primary and secondary schools. His subject was mainly mathematics and nature sciences, but he interested in many other areas and also wrote about them. This text analyzes the context, historical background as well as reviews of his monograph titled *Dějiny mathematatiky*.

1 Úvod

Mezi českými středoškolskými učiteli matematiky byli vždy výrazní ti, jenž svými aktivitami přesahovali obvyklé hranice svých povolání. Ve druhé polovině 19. století mezi ně patřili například Augustin Pánek, Josef Smolík nebo Josef Lošťák, další uvádí [1] (str. 185–248). Ke jmenovaným bezpochyby také náleží Josef Úlehla, neboť i on měl široké zájmy, sepsal množství učebnic, monografií, článků a recenzí, vykonával rozsáhlou spolkovou činnost jdoucí nad rámec každodenní výuky. Jeho osobnost navíc doplňuje a charakterizuje i fakt, že po celý život působil „jen“ jako učitel národních a měšťanských škol.

V nedávné době bylo o jeho životě napsáno několik málo článků.[1] Současné historii matematiky však zatím chybí celkové zmapování a zhodnocení jeho díla. Protože se o Josefu Úlehlovi na předchozích konferencích zatím nehovořilo, první část následujícího textu přináší jeho stručný životopis, druhá se již zaměřuje na jeho odbornou činnost, konkrétně hodnotí jeho dvoudílnou monografii o dějinách matematiky.

2 Osobnost Josefa Úlehly

Josef Úlehla se narodil 16. března 1852 v moravském Podivíně. Jeho prarodiče pocházeli ze Slovenska, měli jedenáct dětí, z nichž nejmladší Ludvík se stal otcem Josefa Úlehly. Jeho matka, Rosalie, rozená Soglová, byla německé národnosti a pocházela z Drnholce u Mikulova. Rodina žila střídavě z mlynářského, pohostinského nebo truhlářského řemesla.

2.1 Studia

Josef Úlehla byl sice čiperný hoch, avšak do svých čtyř let nemluvil. Přesto se již v útlém věku naučil číst nejen česky, ale díky matce i německy. Obecnou školu navštěvoval v Boršově a v Hustěnovicích. Ve čtvrté třídě přestoupil na hlavní školu v Kyjově, která byla pokračovatelem původně latinského gymnázia založeného piaristy a vyučovalo se na ní německy. Studium na této škole mu přineslo vedle důležitých zkušeností i zajímavou možnost, aby v roce 1865 přešel na piaristické gymnázium ve Strážnici. Absolvoval zde tři třídy, školu však nedokončil. Na podzim 1868 pokračoval ve školní docházce na slovanském gymnáziu v Brně. Studiu v moravské metropoli předcházel rok strávený doma. Rodinné zázemí totiž stihl požár, vzniklá finanční ztráta rodičů synovu učení nepřála, proto musel ze

[1] Viz [2] a [12].

Strážnice odejít. Již v patnácti letech byl natolik motivovaný, že svůj volný čas věnoval četbě. Jeho samostudium nepochybně ovlivnilo budoucí profesní život, což nejlépe dokládají jeho pozdější učebnice pro samouky. Maturitní zkoušky se nakonec ani na brněnském gymnáziu nedočkal. Studia ukončil v létě 1872 jako absolvent učitelského ústavu v Brně, kam přestoupil o rok předtím. Změna školy souvisela jednak s nespokojeností s výukou na gymnáziu, jednak s úvahami o budoucím povolání. Oprávnění k výuce na obecných školách, které uzavřením studia získal, mu otevíralo cestu k jeho budoucí pedagogické kariéře.

2.2 Výuka

V roce 1872 Josef Úlehla obdržel místo podučitele v Tvrdonicích. I přes náročnost práce na malé „nevýznamné“ škole, kde bydlel ve studeném školním kabinetě, se nevzdával svého dalšího vzdělávání. Studoval cizí jazyky, společenské vědy a především matematiku, v níž dosahoval již v gymnaziálních letech vynikajících výsledků.

V následujícím období vystřídal řadu učitelských míst na moravských školách. V roce 1873 nastoupil do Bystřice pod Hostýnem, dále učil na jednotřídce v Rozvadovicích (1874), ve Vsetíně (1878), v Bilanech (1882) a Velké Oslavici (1888). V Příboru (1892) působil již jako učitel měšťanské školy, načež roku 1897 přešel do Klobouk, kde se stal na tamní měšťanské škole ředitelem. Stejné místo zastával ještě půl roku v Jaroměřicích nad Rokytnou (1905) a ve Strážnici (také 1905), odkud dne 1. října 1912 odešel do důchodu.

Do první světové války Josef Úlehla vykonával ještě funkci inspektora českých škol spolku Komenského ve Vídni (1912 až 1914). V prvorepublikovém období se dočkal důstojného věku. Roku 1922 dovršil sedmdesát let, přesto se však angažoval v Lipově při zřizování nové měšťanské školy a neváhal ve svém věku ani cestovat po Evropě. Vydal se přes Švédsko do Londýna, na slovanský Jadran, putoval do italských Benátek nebo na Slovensko, kde udržoval styky s tamními učiteli.

K osmdesátému jubileu se Josefu Úlehlovi dostalo řady uznání formou blahopřání otištěných v různých časopisech a oficiálních ocenění od zemské školní rady v Brně. Jeho život se uzavřel po necelých dvou letech. Po fraktuře kyčle se značně zhoršovala jeho tělesná kondice, zemřel 22. prosince 1933.[2]

2.3 Dílo

V úvodu bylo naznačeno, čím Josef Úlehla vynikal nad rámec své každodenní práce. Věnoval se především matematice, jeho zájmu však neunikl rozvoj přírodních věd, vývoj tehdejší filozofie, historie, politiky nebo směrů soudobé reformní pedagogiky. Jeho odborný rozhled, mimoškolní aktivity nebo další zájmy dokládá mnoho článků i monografií, které napsal od 70. let 19. století. Zpětnou vazbu potom přinášely recenze jeho tvorby, které se objevovaly od 90. let a bývaly tištěny především v odborných pedagogických časopisech.

Své články Josef Úlehla publikoval v časopisech *Komenský*, *Pedagogické rozhledy*, *Učitel*, *Věstník Ústředního spolku učitelských jednot na Moravě* apod. Psal různá metodická a didaktická pojednání, prezentoval reformně-pedagogická pojednání i recenze prací našich a zahraničních autorů. Vyšlo mu a několik textů z jiných zájmových oblastí.[3]

Během celé pedagogické praxe se Josef Úlehla věnoval překladatelské práci. České veřejnosti přiblížil několik textů anglických myslitelů H. Spencera, A. Baina nebo T. H. Huxleyho. Od přelomu 19. a 20. století vydával učebnice – početnice pro obecné, měšťanské, chlapecké i dívčí školy, a pro stejný stupeň také učebnice přírodopisu, na nichž spolupracoval s J. Groulíkem, A. Veselým nebo R. Hamplem. Přestože Josef Úlehla během své kariéry nikdy nepůsobil na vysokých školách, publikoval roku 1906 učebnici vyšší

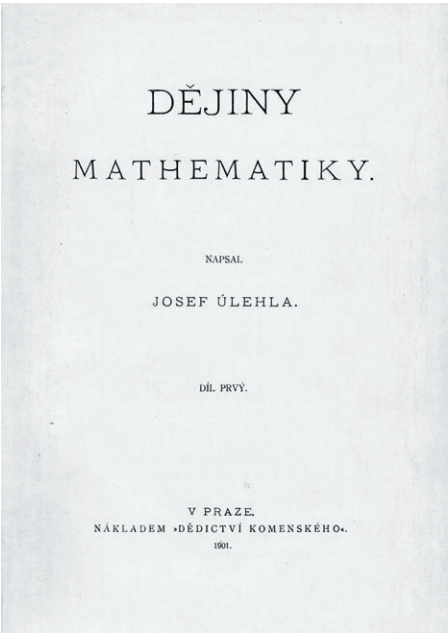
[2] O životě a díle J. Úlehly viz Havelka E.: *Josef Úlehla*. Věstník ÚSJUM 11(1912), č. 24 ze dne 16. března 1912, str. 624–657; Kopáč J.: *Josef Úlehla a moravské učitelstvo*. Universita J. E. Purkyně, Brno, 1967, atd.

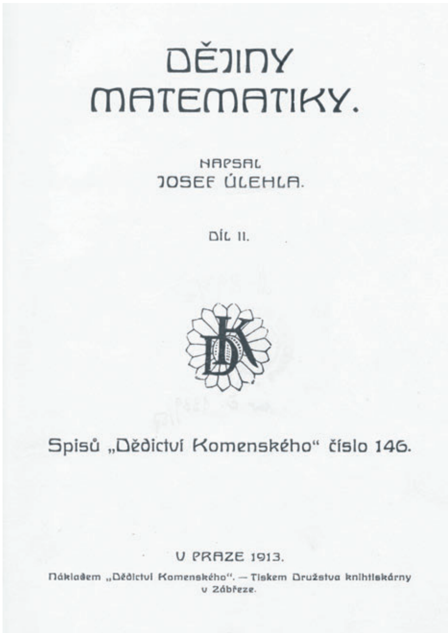
[3] Např. článek *O automatech* pojednávající o mechanických hracích strojích. In Komenský 10(1882), č. 5 ze dne 3. února 1882, str. 73–74, č. 6. ze dne 10. února. 1882, str. 87–89, č. 8 ze dne 24. února 1882, str. 122–124.

matematiky nazvanou *Počet infinitesimální*. Roku 1944, v době německé okupace, se dočkala i druhého vydání, které mělo při uzavření českých vysokých škol usnadnit samoukům studium diferenciálního a integrálního počtu.

3 Dějiny mathematiky I. a II.

Koncem 19. století se Josef Úlehla zasloužil o zřízení oblíbené a úspěšné edice *Encyklopaedická knihovna „Dědictví Komenského"*, pod jejíž hlavičkou vycházela řada pedagogických spisů i monografií. Josef Úlehla v této edici publikoval knihu *Listy pedagogické* (1899), v níž shrnul některé své starší myšlenky a práce, vydal již zmíněnou učebnici infinitezimálního počtu a knihu *Dějiny mathematiky*. Její první díl vyšel v roce 1901, druhý se k veřejnosti dostal na jaře 1913.





3.1 Obsah

Josef Úlehla v knize *Dějiny mathematiky* podal souvislý a ucelený výklad historie matematiky v kontextu širšího kulturního vývoje. V prvním díle nejprve popsal první matematické objevy a zaznamenal myšlenkové pochody nejstarších národů. V jednotlivých kapitolách se pak hlouběji zabýval mezopotámskou a egyptskou matematikou, objevy a výsledky řeckých myslitelů a dalším vývojem matematiky v období Římské říše. Knihu ukončil rozborem historie indické a čínské matematiky a analýzou role matematiky v arabské kultuře a zejména jejího vlivu a přesahu do vědy středověké Evropy.

Josef Úlehla svůj text napsal jako poutavý příběh, v němž jednotlivé postřehy zasadil do rozmanitých souvislostí. Tehdejší exaktní myšlení porovnal s politickou situací, filozofií, náboženskými směry a matematické úvahy doplnil řadou konkrétních ukázek historických příkladů a každodenních problémů. Čtenáře seznámil například s vývojem zápisu čísel, způsoby provádění elementárních výpočtů i složitějších početních operací a připomněl také jednoduché matematické pomůcky. Přiblížil rovněž matematické znalosti obchodníků, řemeslníků a především architektů a stavitelů. Na nich ukázal roli matematiky v každodenním životě a naznačil, jak její praktické aplikace ovlivnily rozvoj tehdejší geometrie.

Druhý díl Josef Úlehla začal delším pojednáním o vývoji matematiky ve středověké Evropě. Její znalosti a dovednosti porovnal s úrovní v předcházejících obdobích a kulturách. Ukázal vliv arabských matematiků a jejich objevů na rozkvět evropského matematického myšlení. K nejvýznamnějším osobnostem, které se zasloužily o oživení evropského zájmu o matematiku, zahrnul Leonarda Pisánského, o němž napsal:[4]

Cestoval mnoho let po východních krajinách a když se vrátil, napsal učebnici aritmetickou i algebraickou, nejstarší v Evropě, která měla všecek vliv na všecek další rozvoj počtářské vědy.

Další kapitoly Josef Úlehla nazval podle jmen nejdůležitějších matematických disciplín. Ukázal jejich vývoj na objevech, výsledcích a dílech nejlepších matematiků. K jejich životním osudům se vrátil na konci druhého dílu monografie v rozsáhlé biografické části, která zabírá téměř polovinu knihy. Předložil v ní stručné životopisy tvůrců od 16. do 19. století, v závěru dospěl až ke svým současníkům.

3.2 Hodnocení a recenze

V předmluvě prvního dílu Josef Úlehla zmínil důvody, které ho vedly k sepsání pojednání o historii matematiky, svoji motivaci pro tuto práci a svůj cíl:[5]

Encyklopaedická knihovna naše předně obsahovati musí dějiny věd exaktních vůbec, mathematických zvláště. Bez takových dějin by byla kusá, a nikterak by jí pak název encyklopaedie nepříslušel.
… že se na původní a samostatnou práci dnes v Čechách nechystá nikdo, a bude-li později taková práce napsána, že sotva hoditi se bude pro naše učitelstvo a do rámce naší encyklopaedické knihovny.

Zasvěcený čtenář si jistě povšimne, že se Josef Úlehla ani krátce nezmínil o již existujících českých textech o historii matematiky. Poznamenejme, že v té době se tímto tématem zabýval například F. J. Studnička, J. S. Vaněček nebo V. Lavička,[6] ačkoliv tito autoři zpracovávali jen dějiny jednotlivých oborů a ne celou historii matematiky. Velmi zarážející je také Úlehlova skepse, že by se případné jiné práce sotva učitelům hodily.

Při sepisování prvního i druhého dílu čerpal poznatky, náměty a inspiraci z rozsáhlé a kvalitní Cantorovy knihy *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik.*[7] Uvedl také

[4] II. díl II., str. 12.
[5] Str. 2 nečíslované předmluvy I. dílu.
[6] Například Studnička F. J.: *O původu a rozvoji nauky o číslech.* Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 4(1875), str. 1–20; Vaněček J. S.: *O dějinách geometrie*. Pardubice, 1882; Lavička V.: *Historie deskriptivní geometrie*. Praha, 1878.
[7] Cantor M.: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*. B. G. Teubner, Lipsko, 1. vyd., I. díl, 1880, II. díl, 1892, III. díl, 1894 a IV. díl, 1908.

další, především sekundární cizojazyčné zdroje.[8] V již zmiňované předmluvě si však stěžoval na nedostatek kvalitní literatury a problémy s jejím sháněním:[9]

Než učiteli na škole obecné nebo měšťanské nedopřeje se ani těch knih, jež v našich universitních knihovnách jsou. Knihovny tyto půjčují jenom profesorům ze středních škol, a učitel obdrží knihu jenom tenkráte, když mu ji vypůjčí ochotný přítel professor.

Tyto okolnosti a pravděpodobně i prostředí, v němž působil, se promítaly do stylu jeho práce. Text je psán živým a čtivým způsobem, z něhož cítíme autorovu snahu vyložit vše tak, aby to bylo srozumitelné pro běžné učitele, tj. jeho kolegy na stejných typech škol. Dnes bychom mu oprávněně vytkli absenci citací použité literatury a odkazů, které by navedly čtenáře na další zdroje informací. Některé přímé závěry bez odkazů na prameny a primární literaturu proto působí velmi nevěrohodně.[10] Druhý díl je již po této stránce „dokonalejší", neboť v úvodu obsahuje stručný soupis rozšiřující literatury a v závěru věcný a jmenný rejstřík.

3.2.1 Krejčího recenze prvního dílu

Na oba díly Úlehlových *Dějin mathematiky* byly napsány zajímavé recenze. K prvnímu dílu se váže polemika Augustina Krejčího. Jedná se o velmi kritickou reakci, která byla roku 1903 otištěna v *Listech filologických*,[11] tedy v nepedagogickém odborném filologickém časopise. To sice jistým způsobem podtrhuje význam Úlehlovy knihy a naznačuje její znalost v širším okruhu čtenářů, ale současně také vypovídá o námitkách v ní vznesených. Z těch nejvýraznějších je nutno zmínit Úlehlovu nelibost vůči Řekům. A. Krejčí se opírá o Úlehlova slova a v recenzi píše:[12]

Zvláště má spisovatel namířeno – což nás opravdu naplňuje podivením – na klassický starověk řecký a římský. Je ovšem nyní jaksi módní vystupovati proti klassicismu, a p. spisovatel dojde možná pochvaly v širokých kruzích za to, že, abych tak řekl, posvítil na to, jaké zbytečnosti a „pověry" se vštěpují do hlav mládeže gymnasijní; avšak způsob, kterak p. spisovatel paušálně zlehčuje a vlastně neuznává veškerých vědeckých snah starých Římanů a zvláště Řeků, jest povážlivou měrou nesprávný. Z celého díla patrna jest snaha, nepřiznati hlavně Řekům a Římanům žádné zásluhy o rozvoj vědy vůbec a mathematiky zvlášť. „Pověrou" jest p. spisovateli (str. 19, 52), „že věda mathematická jest emanací popředně (!) ducha řeckého."

Josef Úlehla svoji nelibost k dobovému zveličování a přeceňování řeckých výsledků obhajuje například tvrzením, že řečtí matematikové mnohé výsledky převzali od předchozích civilizací velkých řek a Blízkého Východu. Mnoho výsledků nese právě řecká jména, přičemž sami Řekové neuvádějí původní objevitele tvrzení. Skutečnost, že právě Řekové tehdejšímu poznání vtiskli určitý řád a systém nebo k tvrzením a větám doplnili důkazy, pro něj neměla rozhodující hodnotu. Dokonce o řeckých a arabských matematicích tvrdí, že nepocházejí ze svých zemí:[13]

---

[8] Například Hoefer F.: *Histoire des mathématiques*. Hachette, Paříž, 1874; Baldi B.: *Cronica de matematici*. A. A. Monticelli, Urbino, 1707.

[9] Str. 2 nečíslované předmluvy I. dílu.

[10] Viz například I. díl, str. 57, kde J. Úlehla píše o „loupežných" Řecích: *V takovém národě, v takovém ovzduší není třeba pravého úhlu, v takovém ovzduší není třeba myslitelů, kteří by zpytovali, kterými methodami pravý úhel sestrojiti se může. A proto nelze mluviti ani o řecké vědě ani o řeckém umění. Řekové ovšem milovali krásné věci. … Řekové měli krásné vásy, ale jich nedělali; oni je kradli nebo kradli lidi, kteří takové vásy uměli dělati.*

[11] Listy filologické 30(1903), str. 301–309.

[12] Listy filologické 30(1903), str. 303.

[13] I. díl, str. 3.

Jest ovšem pravda, že mathematické vědění starého světa se nám zachovalo ponejvíce v řeckém nebo arabském rouše, ale důležitější jest pravda, že ani jediný mathematik řecký se nezrodil na půdě klassického Řecka, ani jediný mathematik arabský že není původu arabského. To není náhodou, neboť nadání k vědám mathematickým nemohlo se objevovati v národě, jehož řemeslem byla válka, vražda a loupež, nýbrž jenom v národě, jenž od nepaměti se oddával pokojnému životu rolnickému a řemeslnému.

Proti tomu se recenzent A. Krejčí velmi tvrdě ohradil, kriticky narážel i na další nepřesnosti jak v obsahu, tak i ve formě:[14]

Takovýto způsob psaní jest neomluvitelný. P. spisovatel snad četl něco o nesmrtelných výtvorech řeckého umění, ale aby jen Řekům jakožto Ariům nemusil přiznati nějaké zásluhy o umění, řekne krátce, že to co měli krásného, ukradli. A právě tak je to s vědou. … Z celého způsobu psaní o klassickém starověku je patrna jednak nenávist k řečtině a latině, jednak, a to hlavně, naprostá neznalost literatury klassické i odborné literatury moderní, která jest, abych tak řekl, maskována stále se opakujícím tvrzením o neschopnosti plemene arijského pro mathematiku a vědu vůbec.

Podobně jako u recenzenta čteme o této problematice v jiných soudobých textech. V práci nazvané *O původu a rozvoji nauky o číslech* píše již zmiňovaný F. J. Studnička:[15]

Že počítání vůbec má původ svůj v praktických potřebách života rolnického a kupeckého, o tom nelze všeobecně ani pochybovati … Že tu vedle ukojení potřeb všedního života během času též se objevily výsledky bádání hlubšího, k němuž duch lidský z pouhé věduchtivosti jest puzen, lze též velmi snadno očekávati a z jednotlivých zpráv též dokázati.

Josef Úlehla však myšlenku rozvoje věd jako projev samostatné emancipace lidského rozumu v podstatě neuvažoval. Svým přesvědčením, že vědy vznikají z praktických potřeb řemeslníků, stavitelů nebo kupců, byl takřka uchvácen. Na mnoha místech své knihy zdůrazňoval význam rozvoje zemědělství, námořních cest a obchodu utvářejících se civilizací. A podle Cicerova *Inter arma silent musae* upíral duševní rozvoj společnostem, které bojovnými výpady rozšiřovaly svá impéria. Tím objevy řeckých matematiků pro Josefa Úlehlu ztrácely na hodnotě. Za svými názory si stál, přestože sám citoval ze studovaných knih:[16]

Vytýkáme to všecko důrazněji, poněvadž od nejstarších dob se udržuje pověra, které této příčinné souvislosti práce rolnické a řemeslné s rozvojem vědy počtářské neuznává, nýbrž mluví, jakoby jediný člověk mohl kdekoli na zemské kouli se zamysliti a vědu počtářskou vymysliti. Tak praví Hoefer: „Každý přirozeně myslící a přirozeně nadaný muž, bude-li pozorovati nebe a zemi, může se bez cizí pomoci postupovati od poznatku k poznatku, od zákona k zákonu, a dospěti k nejzajímavějším výsledkům počtářským." (Historie des mathématiques p. 3).

Dnes bychom Josefu Úlehlovi vytkli určitou vyhraněnost a absenci pohledu v souvislostech, ovšem on se svými závěry přesvědčoval pravděpodobně proto, že v nich nalézal „příhodné" implikace:[17]

[14] Listy filologické 30(1903), str. 307.
[15] Studnička F. J.: *O původu a rozvoji nauky o číslech*. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 4(1875), str. 2.
[16] I. díl, str. 2.
[17] I. díl, str. 2.

Kupecký život, zvláště pokročilý obchod se zeměmi zámořskými, vynucoval písmo, vynucoval peníze, váhy a míry a s tím vším také počty kupecké. Záplavy v údolích velikých řek nutily přemýšleti o tom, jak sestrojiti obdélník, jenž se rovná danému čtverci, jak rozděliti trojúhelník na dva, tři rovné díly, jak sestrojiti lichoběžník, jenž by se rovnal danému obdélníku nebo trojúhelníku.

Objasnění, jaké další motivy vedly Josefa Úlehlu k jeho závěrům, přinese pečlivé studium nejen jeho práce, ale i související dobové a současné literatury. Vraťme se však ke Krejčího recenzi. Na jeho kritiku totiž Josef Úlehla reagoval takřka okamžitě sloupkem nazvaným *Panu A. Krejčímu*. Ten vyšel 16. července 1903 v časopisu *Čas*. Nejprve se ohradil vůči formálním výtkám, a pak napsal:[18]

… že ironii považuje za pravdu, chvilkový nápad za přesvědčení, že vůbec v knize, jejíž jednotlivé stati jsou psány od r. 1878 do r. 1898 hospodaří s větami, výroky a daty, jak to člověk pravdivý činiti nesmí.

Vyprávění dějin matematiky Josef Úlehla spojoval se svými vlastními názory a dojmy, jak je to výše naznačeno. Při zmiňované absenci zdrojů jsou však Krejčího výtky zcela oprávněné a opodstatněné. To dokládá i další pokračování celé anabáze. V *Listech filologických* vyšla v roce 1903 *Odpověď p. Úlehlovi*,[19] v níž A. Krejčí svoji recenzi hájil a narážel na otištění Úlehlova sloupku, který byl zaměřen i proti samotným *Listům filologickým*. Pak se k němu přidal ještě odpovědný redaktor J. Král,[20] který Josefa Úlehlu nepřímo nazval diletantem:

Jestliže se p. Úlehla brání proti této spravedlivé úvaze nevěcným způsobem v denním listu, tedy před širokým obecenstvem, jež z valné části věc samu ani neumí posouditi, a brání-li se tvrzením, že uveřejnění takové kritiky ve vědeckém časopise značí hluboký úpadek kritiky, činí totéž, co činívají zpravidla ti, kteří výtky sobě učiněné nemohou vyvrátiti. A dilettanti zvláště mají o svém vlastním vědění vždy úsudek velmi příznivý.

3.2.2 Recenze druhého dílu

Druhý díl Úlehlových *Dějin mathematiky* byl recenzován ve *Věstníku Ústředního spolku učitelských jednot na Moravě* (ÚSJUM).[21] Autor recenze je podepsán iniciálou R. Jedná se o stručné upozornění na právě vyšlou knihu, v němž recenzent přiblížil její obsah a vyzdvihl Úlehlův *známý, jasný a milý způsob* vyjadřování. Nezmínil žádné zápory a chyby. Kritiku končil slovy:

Učitelstvu moravskému netřeba Úlehlu doporučovati, proto jen upozorňuji, že opět vyšla nová jeho kniha, jež nebude jistě scházeti v žádné větší knihovně školní ani učitelské.

Připomeňme, že Josef Úlehla v roce 1902 *Věstník* spoluzakládal a do roku 1907 jej redigoval. V kolektivu měl evidentně dobré jméno, což dokládá i výše uvedená nekritická recenze. Pro zajímavost dodejme, že rok před jejím otištěním byl na mnoha stranách *Věstníku* vyzdvihován Úlehlův přínos pro rozvoj výuky na měšťanských školách (viz např. přání k jeho šedesátým narozeninám).[22]

---

[18] Čas 17(1903), č. 192 ze dne 16. července 1903, str. 6.
[19] Listy filologické 30(1903), str. 397.
[20] Tamtéž.
[21] Věstník ÚSJUM 12(1913), č. 29 ze dne 18. dubna 1913, str. 868.
[22] Věstník ÚSJUM 11(1912), č. 24 ze dne 16. března 1912, str. 624–657. Odsud je převzat Úlehlův portrét uvedený v tomto článku.

Z dnešního pohledu bychom se kriticky mohli zastavit u Úlehlova pojednání o vývoji infinitezimálního počtu. Josef Úlehla sice poměrně pečlivě a podrobně popsal prehistorii, prvopočátky a vznik základů matematické analýzy, které vytvořili I. Newton a G. W. Leibniz. Porovnal přístupy a výsledky těchto matematiků a zmínil se i o známém a vleklém „prioritním sporu". Když však dospěl k jejich následovníkům, pokračovatelům a zejména pak ke svým současníkům, tedy k matematice 2. poloviny 19. století, vůbec se nezmínil o procesu zpřesňování matematického vyjadřování, o novém chápání a definování funkcí a jejich vlastností, o pojetí limit a derivací pomocí „ε a δ aritmetiky", o spojitosti atd. O význačných tvůrcích těchto výsledků (např. A.-L. Cauchy, B. Bolzano, K. Weierstrass) se sice zmínil, o jejich matematických výsledcích však již nehovořil. Poznamenejme, že „ε a δ aritmetika" zcela absentuje i v jeho učebnici infinitezimálního počtu.

4 Závěr

Úlehlův přístup ke studiu, pracovní nasazení, široký společenský rozhled nebo jeho mimoškolní aktivity jsou ukázkou toho, jak aktivně lze přistoupit k učitelskému povolání, třebaže začíná na malé „neznámé" škole. Začátky často nebývají okouzlující, snad i mohou vést ke stagnaci nebo přestupu do jiné sféry. Josef Úlehla ovšem pokračoval. Nevzdal se svého zájmu, a tak za ním zůstala nejen řada absolventů, ale i knihy, učebnice nebo články, kterými nám dovoluje do svého světa vstupovat.

V určitých směrech lze s Úlehlovou tvorbou přinejmenším polemizovat. V jeho *Dějinách mathematiky* nalézáme některé sporné, neúplné nebo dokonce chybné pasáže, jak bylo předvedeno. Díky podobným pracím a recenzím se však seznamujeme s přístupem tehdejších myslitelů a můžeme naši případnou kritiku učinit relevantnější. Přes všechny nedostatky Úlehlovy monografie vynikají svojí vstřícností ke čtenáři, mohly nejen tehdy, ale mohou i nyní oslovit široké publikum ke studiu Úlehlova odkazu, jakož i celé historie naší „královny věd".

Literatura

[1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

[2] Bečvářová M.: *Josef Úlehla*. Učitel matematiky 13(2004), str. 39–48.

[3] *Komenský, časopis paedagogický*. Orgán spolku moravských učitelů v Olomouci, Olomouc, 1873 a dále.

[4] Kopáč J.: *Josef Úlehla a moravské učitelstvo*. Universita J. E. Purkyně v Brně, Brno, 1967.

[5] *Pedagogické rozhledy*. Dědictví Komenského, Praha, 1887 až 1932.

[6] Studnička F. J.: *O původu a rozvoji nauky o číslech*. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 4(1875), str. 1–20.

[7] Táborský F.: *Několik listů Josefa Úlehly*. Radhošť, Praha, 1934.

[8] Úlehla J.: *Dějiny mathematiky. Díl I.* Dědictví Komenského, Praha, 1901.

[9] Úlehla J.: *Dějiny mathematiky. Díl II.* Dědictví Komenského, Praha, 1913.

[10] Úlehla J.: *Počet infinitesimální*. Dědictví Komenského, Praha, 1906.

[11] *Věstník Ústředního spolku učitelských jednot na Moravě*. Brno, 1902 až 1937.

[12] *Významné pedagogické osobnosti – Jan E. Kosina, Jan Lepař, Josef Úlehla a jejich podíl na utváření českého školství*. Materiály z odborné konference konané dne 6. listopadu 2002 v Přerově, Muzeum Komenského v Přerově, Přerov, 2003.

Poděkování

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*, rozvojového projektu *Doktorské studium oboru M8* a projektu *Specifický vysokoškolský výzkum* 2011-261-315.

Adresa

Mgr. Lukáš Vízek
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *lukas.vizek@seznam.cz*

MATEMATYKA NA UNIWERSYTECIE WILEŃSKIM (1579–1832)

WITOLD WIĘSŁAW

Abstract: We describe shortly the state of mathematics at Vilna University (1579–1832), i.e. at Academia Vilnensi (1579–1773), Szkoła Główna Wileńska (1773–1796) and Cesarski Uniwersytet Wileński (1796–1832).

1 Wstęp

Wśród matematyków Societatis Jesu w Rzeczypospolitej Obojga Narodów dwóch miało rangę światową: Adam Adamandy Kochański (1631–1700) i Marcin Poczobut (1728–1810), który zasłynął głównie jako astronom i wieloletni rektor Szkoły Głównej Litewskiej. Dwaj inni wyróżnili się w kraju. Stanisław Solski (1622–1701) głównie dzięki swoim książkom: *Geometra Polski* i *Archytekt Polski*, a Franciszek Narwoysz (1742–1819) dzięki działalności inżynierskiej i gospodarczej na Litwie oraz wykładom matematyki wyższej w *Alma Academia et Universitate Vilnensi*. Spośród kolegiów jezuickich w Wielkim Księstwie Litewskim wymienić należy przede wszystkim kolegia w Brześciu Litewskim, Dorpacie, Dyneburgu, Grodnie, Jurewiczach, Kamieńcu Podolskim, Kijowie, Kownie, Krożach, Krzemieńcu, Łucku, Mereczu, Mińsku, Mohylewie, Nieświeżu, Nowogródku, Orszy, Ostrogu, Owruczy, Pińsku, Połocku, Rydze, Samborze, Słonimie, Słucku, Smoleńsku, Witebsku, Żodziszkach i Żytomierzu. O matematykach tam pracujących niewiele wiadomo, jedynie poza kilkoma przypadkami. Warto też zwrócić uwagę, że wszyscy matematycy Societatis Jesu w Polsce byli bardziej lub mniej związani z Akademią Wileńską. Wynika to stąd, że w XVII wieku, po zamknięciu krakowskiego kolegium jezuickiego, Wilno stało się jedynym miejscem studiów dla jezuitów na terenie Rzeczypospolitej.

2 Matematycy wileńscy do XIX wieku

W początkowym okresie istnienia kolegium jezuickiego w Wilnie, przekształconego wkrótce w akademię, nie nadawano stopni naukowych. Piotr Skarga, pierwszy rektor Akademii Wileńskiej, posiadał tylko najniższy stopień naukowy, tytuł bakałarza, nadany w Akademii Krakowskiej. W wieku XVII *Academia Vilnensi* nadawała stopnie naukowe z filozofii, teologii i prawa (kanonicznego i cywilnego). Z filozofii nadawano stopień bakałarza nauk wyzwolonych i filozofii (*artium liberalium et philosophiae baccalareus*) i stopień magistra nauk wyzwolonych i filozofii (*artium liberalium et philosophiae magister*). W zasadzie prawo wykładania na uniwersytecie mieli tylko magistrowie, ale odstępstwa od tej zasady były dość częste. Dopiero w XVIII wieku zaczęto używać na Uniwersytecie Wileńskim terminu *doctor*. Według zapisów w *Laurae Academicae*, *Alma Academia et Universitate Vilnensi* nadała stopnie naukowe co najmniej 4067 osobom, w tym bakałarza filozofii 1810 osobom, a magistra filozofii (późniejszego doktora) 1700 osobom. Widać więc, że wydział filozofii zdecydowanie dominował na uczelni.

Wśród wykładowców matematyki odnajdujemy w Wilnie w XVII wieku kilku znanych matematyków.

Andrea Milewski uzyskał 14. X 1632 roku tytuł *Philosophiae et Liberalium Artium Magister;* wykładał teologię. Oswald Krüger zostaje odnotowany w 1639 roku w *Laureae Academicae* jako *emeritus, matheseos professor*. Albertus Tylkowski uzyskał w Wilnie magisterium nauk wyzwolonych 9. XII 1673 roku w zakresie matematyki (*professor matheseos*), a 21. IX 1685 roku Zacharias Modzelewski takież magisterium (*professor logices*). Tylkowski studiował w Wilnie. Tam też zmarł w 1695 roku. Jednak jego związek z Akademią Wileńską był raczej mały. Działalność tego wybitnego i wszechstronnego uczonego związana była z kolegiami jezuickimi w Warszawie, Płocku i Poznaniu. Natomiast w XVIII stuleciu odnajdujemy w Wilnie następujących matematyków jezuitów: Thomas Żebrowski wymieniony jest pod datą 16. XI 1752 jako *professor matheseos*. Jacobus Nakcyanowicz wymieniony jest 10. X 1759 roku jako *professor mathematicae*, a 15. X 1773 jako *professor theologiae*. Josephus Powilewicz wymieniony jest 10. XI 1759 jako *professor logices*, a w 1771 odnotowany jest jako *philosophiae doctor*. Casimirus Naruszewicz (1730–1803) odnotowany jest 3. XI 1764 roku jako *professor mechanicae*, a rok później, 12. XII 1765 jako *thypographiae praeses*, tzn. jako prefekt drukarni, coś więcej niż dyrektor wydawnictwa uniwersyteckiego, gdyż w zakres jego obowiązków wchodziła również cenzura. Był on rektorem Collegium Nobilium S. J. w Wilnie w latach 1769–1773, a od roku 1767 sekretarzem prowincji jezuitów. Martinus Poczbut (1728–1810) odnotowany jest 3. XI 1764 roku jako professor astronomii, a trzy lata później, 17. XI 1767 jako *professor astronomiae, Regiique observatori ac thypographiae praeses*, tzn. administrator Drukarni Akademickiej. Benedictus Dobszewicz (albo: Doboszewicz) odnotowany jest 14. X 1755 jako *professor arithmeticae et geometriae*, dziesięć lat później, 12. XII 1765 roku jako *professor Theologiae*. Kasata zakonu zastała go 15. X 1773 na stanowisku prorektora (*procancellarius Academiae*). Franciscus Narwoysz, odnotowany jest 9. XI 1769 jako *professor matheseos*, a 15. X 1773 jako *professor philosophiae*. Po kasacie zakonu nadal był profesorem Uniwersytetu Wileńskiego i pisał najdłuższe i najbardziej szczegółowe konspekty swoich wykładów z analizy matematycznej, wzorowanych niemal dosłownie na Newtonie. Ksiądz Josephus Mickiewicz, kuzyn ojca Adama Mickiewicza, odnotowany jest 15. X 1773 w *Laureae Academicae* jako *auditor theologiae*. Później wykładał jednak przez wiele lat fizykę; ponadto kierował Uniwersytetem Wileńskim (choć formalnie nie był rektorem) w roku 1794 i w roku akademickim1806/1807, a w XIX wieku był przez kilkanaście lat dziekanem *Oddziału Nauk Fizycznych i Matematycznych* na *Cesarskim Uniwersytecie Wileńskim*, jak wtedy mówiono.

Niżej wymienieni matematycy, autorzy zachowanych publikacji lub rozpraw naukowych, nie są wymienieni w spisie profesorów Akademii Wileńskiej: Nicolaus Casimirus Białkowski, Joannes Rudomina Dusiatski, Carolus Rahoza i Franciscus Wichert.

3 Sytuacja Wilna przed rokiem 1800. Reformy KEN na Litwie

Po trzecim rozbiorze Polski (1772) miasto podupadało. Jedynie uniwersytet nieco ożywiał atmosferę społeczną miasta. Wkrótce nowe ustawodawstwo rosyjskie zmieniło status nie tylko dawnej Akademii Wileńskiej na Cesarski Uniwersytet Wileński, ale także pozostałych pięciu uniwersytetów rosyjskich w Moskwie, Petersburgu, Kazaniu, Charkowie i Dorpacie. Ogólne przepisy dotyczące tych uniwersytetów były podobne. Jednakże na Uniwersytecie Wileńskim językiem wykładowym został, z mocy prawa, język polski, a na Uniwersytecie w Dorpacie język niemiecki. W pozostałych uniwersytetach językiem wykładowym był rosyjski. W największym uproszczeniu można powiedzieć, że na Litwie nadal były realizowane projekty Komisji Edukacji Narodowej, choć już w nowej sytuacji politycznej. Były one jednak realizowane z pewnym poślizgiem, na początku bowiem przejawiano do nich pewną niechęć, a to za sprawą Jezuitów, którzy od początku istnienia Akademii Wileńskiej odgrywali w niej najważniejszą rolę, a później, już po rozbiorach, hamowali skutecznie program reform.

Jednak na początku XIX wieku, na wzór polskich reform, Rosja postanawiła przeprowadzić podobne reformy u siebie. Utworzony w Rosji w XVIII wieku na wzór KEN, Główny Zarząd Szkół został zastąpiony w 1802 roku przez Ministerstwo Oświecenia Publicznego, w skład którego wchodził m. in. książę Adam Jerzy Czartoryski, od lat przyjaciel rodziny cara Aleksandra I. Ministrem edukacji został Piotr hr Zawadowski, a książę Adam Czartoryski, z pomocą Hieronima Stroynowskiego, rektora Uniwersytetu Wileńskiego, przygotował projekt reformy szkolnictwa w Rosji pt. *O zasadach publicznego oświecenia w Rosyjskim imperium*. Projekt przewidywał cztery stopnie szkół: parafialne, powiatowe, gubernialne i uniwersytety, z zależnością administracyjną szkół niższego od szkół wyższego szczebla. Projekt ten, wprowadzony dość szybko w życie, bardzo przypomina polską Ustawę Edukacyjną z 1783 roku. Niektóre jego fragmenty są wręcz identyczne z fragmentami tej ustawy.

4 Matematyka w Wilnie w XIX wieku

Matematykę na Cesarskim Uniwersytecie Wileńskim (1796–1832) wykładali:

ks. Tadeusz Kundzicz: mechanika, hydrostatyka, mechanika cieczy 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1801/02, 1802/03.
ks. Józef Mickiewicz: fizyka (cykl trzyletni) 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1801/02, 1802/03.
Franciszek Milikont Narwoysz: analiza matematyczna (wg Newtona) 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1801/02, 1802/03, 1805/06, 1807/08, 1808/09; algebra (wg Newtona *Arithmetica Universalis*) 1797/98, 1798/99.
Ignacy Reszka: astronomia (z trygonometrią sferyczną) 1797/98, 1798/99, 1800/01, 1802/03, 1805/06, 1807/08, 1808/09.
Karol Christian Langsdorf: algebra 1804/05, mechanika, hydrodynamika i technologia 1804/05, 1805/06.
Michał Szulc: architektura cywilna i militarna 1805/06, 1807/08, 1808/09, 1810/11, 1811/12.
Stefan Stubielewicz: fizyka 1805/06, 1807/08, 1808/09, 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14.
Zachariasz Niemczewski: wstęp do matematyki 1805/06, analiza matematyczna 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14, 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1817/18, 1818/19, 1819/20.
Michał Kado: kartografia 1805/06, 1807/08, 1808/09.
Tomasz Życki: matematyka elementarna (arytmetyka, planimetria, trygonometria płaska) 1797/98, 1798/99, 1801/1802, 1807/08, algebra z geometrią (wg książki Jana Śniadeckiego) 1797/98, 1798/99, 1808/09, 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14, 1814/15, 1815/16.
Cezary Kamieński: astronomia z trygonometria sferyczną 1810/11, 1811/12, 1812/13, 1813/14.
Kaietan Krassowski: fizyka 1814/15, 1816/17, 1817/18, 1818/19, 1820/21, rolnictwo 1821/22.
Felix Drzewiński: mineralogia 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1819/20, fizyka 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.

Wincenty Karczewski: astronomia 1814/15, 1815/16, 1816/17, 1817/18.
Ignacy Horodecki: mineralogia 1817/18, 1818/19, 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1823/24.
Antoni Wyrwicz: algebra (wg Jana Śniadeckiego) 1817/18, 1818/19, 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31; astronomia i trygonometria sferyczna (wg Jana Śniadeckiego) 1820/21, 1823/24, analiza 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.
Piotr Sławiński: astronomia i trygonometria sferyczna (wg Jana Śniadeckiego) 1818/19, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1826/27, 18 27/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.
Michał Pełka–Poliński: algebra wyższa (wg Jana Śniadeckiego) 1819/20, 1820/21, 1821/22, 1822/23, 1823/24, mechanika 1824/24, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, geometria analityczna 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31, geodezja wyższa 1820/21.
Karol Podczaszyński: architektura 1820/21, 1822/23, 1823/24, 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.
Józef Twardowski: algebra z geometrią analityczną 1822/23 (nigdy nie miał wykładów).
Michał Oczapowski: ekonomia 1822/23, 1824/25, 1827/28, 1829/30, 1830/31, rolnictwo 1823/24, 1828/29.
Walerian Górski: mechanika 22/23, mechanika praktyczna 1823/24, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.
Hipolit Rumbowicz: geometria wykreślna 1824/25, 1827/28, 1829/30, 1830/31.
Antoni Szahin: geodezja 1824/25, 1826/27, 1827/28, 1828/29, 1829/30, 1830/31.
Zygmunt Rewkowski: rachunek prawdopodobieństwa 1830/31, 1831/32.
Tomasz Życki: matematyka elementarna 1798/99.

Brak uczelni technicznych powodował, że na Uniwersytecie Wileńskim wykładano przedmioty wykładane obecnie na uczelniach techniczych.

Zasłużony bardzo dla Uniwersytetu Wileńskiego Jan Śniadecki (1756–1830), rektor tego uniwersytetu (1707–1815) nie prowadził wykładów. Przez cały okres pobytu w Wilnie pełnił funkcję astronoma obserwatora.

Bibliografia

[1] Łukaszewicz J.: *Historia szkół w Koronie i w Wielkim Księstwie Litewskim od najdawniejszych czasów aż do roku 1794*. 4 tomy. Poznań, 1849–1851.

[2] Plečkaitis R.: *Stopnie naukowe w dawnym Uniwersytecie Wileńskim*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Prace Historyczne, zeszyt 64, 1979, 29–61. (W tomie: *Studia z Dziejów Uniwersytetu Wileńskiego 1579–1979*).

[3] Więsław W.: *Matematyka polska epoki Oświecenia*. Fraszka Edukacyjna, Warszawa, 2007, str. 360.

Adres

Witold Więsław
Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyczny
Plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
e-mail: *witold.wieslaw@poczta.onet.pl*

PÉČE O FINANČNÍ GRAMOTNOST V 19., 20. A NA ZAČÁTKU 21. STOLETÍ

JAN ZAHRADNÍK

Abstract: The contribution presents themes and related problems from financial mathematics published in the Journal for Cultivation of Mathematics and Physics, Vol. 2–13, 1873–1884. Further, it gives an overview and classification of problems on financial mathematics from school-leaving examinations in mathematics at the C. k. české gymnasium in České Budějovice in the period 1899–1906, followed by the comparison of approaches to this topic in the first and second half of the 20th century. The paper is concluded with my comments on the current situation.

1 Úvod – Příspěvek k arithmetice národo-hospodářské F. J. Studničky

Častým tématem diskusí současných ekonomů je nízká úroveň finanční gramotnosti našich občanů. V tisku se dočítáme o lidech schopných vzít si úvěr s podmínkami, jejichž naplnění jim způsobuje zhroucení jejich rodinných financí, ztrátu veškerého majetku a často také rozpad rodin. Jeden z důvodů tohoto jevu je, že si lidé vůbec nedokáží ani rámcově představit, natož pak vypočítat a naplánovat, jak se bude jejich dluh vyvíjet v čase a co nastane v případě, když jej opomenou splácet. To, že tento problém není pouze jevem novodobým, že se s ním vyrovnávali i naši předkové, dokazuje výskyt článků s tématikou finančně-matematickou v dobovém odborném tisku, případně její zařazování do výuky na středních školách.

V tomto příspěvku chci ukázat, jak bylo téma finanční matematiky prezentováno v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky v sedmdesátých a osmdesátých létech devatenáctého století, jaké příklady s finančně matematickou tématikou řešili maturanti na C.k. českém gymnasiu v Českých Budějovicích na přelomu 19. a 20. století, dále chci porovnat, jak bylo toto téma zastoupeno v učebnicích a sbírkách v první a ve druhé polovině 20. století, a nakonec se krátce zmíním o současné situaci v prosazování lepší úrovně finanční gramotnosti.

Z autorů, kteří přispívali do Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky v době krátce po jeho vzniku v roce 1872, se tomuto tématu věnovali zejména František Josef Studnička a František Hoza. Stěžejními články jsou *Příspěvek k arithmetice národo-hospodářské* F. J. Studničky ([3], ročník III, 1874, str. 97–107), a poměrně komplexní článek *O složitém úrokování a počtu důchodovém*, který *pro žáky středních škol* napsal František Hoza ([3], ročník V, 1876, str. 200–215 a 261–274).

František Josef Studnička (1836–1903), rodák z jihočeského Janova u Soběslavi, profesor matematiky na pražské univerzitě a první děkan české filozofické fakulty po rozdělení univerzity na českou a německou část, byl v prvních deseti letech existence Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky jeho redaktorem. Svůj článek zahajuje Studnička objasněním významu pojmu *arithmetika národo-hospodářská*, použitého v jeho názvu. Zahrnuje pod něj *všecky úkoly početní, jež plynou přímo neb nepřímo z poměrů státních a společenských* a jako jeho účel vymezuje *dobře hospodařiti s jměním vůbec a s penězi zvlášť, aby se nikde nic neztratilo a co možná nejvíce vytěžilo.*

Jako základní problém uvádí Studnička spor o to, zda se při úročení mají používat úroky jednoduché nebo složité (*usurae simplices et compositae)*, tedy problém, zda je možné nebo lépe řečeno správné považovat nevyplacený úrok za nový kapitál. Studnička se věnuje popisu historie problému, jak se má vypočítávat tak zvané *interusurium*. Prvním, kdo hájil názor, že se *interusurium* má počítat pomocí složitého úrokování, byl podle Studničky G. W. Leibniz. Ten definuje ve svém pojednání *Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplice* z roku 1683 inkriminovaný pojem takto: *Interusurium est differentia inter pecuniam in diem certum debitam et praesentem ejus valorem.*[1]

Proti Leibnizovi stál G. A. Hoffman (ten se ve spisu *Prudentia oeconomica in formam artis redacta* zastává jednoduchého úročení způsobem, ze kterého je podle Studničky zřejmé, že Leibnizovi neporozuměl) a jeho podporovatelé, kteří mimo jiné argumentovali tím, že brát úroky z úroků je zapovězeno zákony (*anatocismus*).

Spor byl veden hlavně mezi matematiky – zastánci Lebnizovy teorie – a právníky, kteří se přikláněli k teorii Hoffmanově. Když byl nakonec výroky dvou tehdejších slavných právníků Arndtse a Vagnerova rozhodnut spor ve věci samé, tedy v otázce právní přípustnosti složitého úrokování, v Leibnizův prospěch, skončil i boj obou táborů.

Studnička souhlasí s tím, že bylo správné přenechat řešení tohoto sporu zákonu, jak říká, *juristům*. Stěžuje si však, že *právníci nyní tím méně pozornosti věnují této vědě, čím jest pro ně důležitější, zejména pro ty, kteří co zeměpanští komisaři mají dohlídku na podniky národohospodářské.* V žertu to zdůvodňuje tím, že *počítání podle Leibnice vyžaduje znalost logaritmů; snad ty byly juristům tak odporné?!*

Studnička konstatuje: *V našich dobách arci nenapadne tak snadno někomu, aby chtěl jinak počítati nežli po způsobu Leibnice.* Zabývá se dokonce myšlenkou, že doba jednoho roku jako jednotka času ve složitém úrokování je příliš dlouhá, a zvažuje používat jako nejpřirozenější úrokování nepřetržité a zdůvodňuje to tím, že dlužník půjčený kapitál užívá rovněž nepřetržitě.

Dále připomíná dle něj známý vzorec

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = K_0 q^n, \qquad (1)$$

kde K_n značí hodnotu kapitálu K_0 po n letech při celoročním složitém úrokování s úrokem p procent.

Dále se Studnička zabývá případem, který má v praxi zásadní význam, a to úlohou vypočítat, jak velký kapitál se uspoří za n let, bude-li se každým rokem ukládat kapitál K_0 na p procent. S využitím vzorce pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti dostává

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = K_0 \sum_{i=1}^{n} q^i = K_0 \frac{q^{n+1}-q}{q-1} \qquad (2)$$

a tento vzorec rozebírá s ohledem na výpočet všech tří dalších veličin, které do něj vstupují, tedy K_0, n, q.

Pro K_0 dostává jednoduše $K_0 = \frac{q-1}{q^{n+1}-q}\sum_{i=1}^{n} K_i$, což je částka, kterou musíme každoročně ukládat, chceme-li mít po n letech při p- procentním složitém úrokování našetřeno celkem $\sum_{i=1}^{n} K_i$ (tento součet budeme nadále označovat jako $\sum K_i$).

[1] *Interusurium* je rozdíl mezi dlužnou částkou v určitý den a její současnou hodnotou.

Pro řešení rovnice podle n Studnička zavádí $a = \frac{\sum K_i}{K_0}$ a po úpravě a logaritmování získává $n = \frac{\log(q(a+1)-a)}{\log q} - 1$, což představuje počet let, po který je nutné každoročně ukládat kapitál K_0 na p procent, aby se našetřil kapitál $\sum K_i$.

Chceme-li určit procentní sazbu p, řešíme rovnici (2) podle q, což vede k rovnici $q^{n+1} - (a+1)q + a = 0$, ze které po výpočtu q snadno určíme $p = 100(q-1)$. Tato rovnice je jediným případem z tohoto tématu, k jehož vyřešení nestačí znalosti současného studenta střední školy.

F. J. Studnička se dále zabývá řešením této rovnice, která jako rovnice stupně $n+1$ má v množině komplexních čísel $n+1$ kořenů, z nichž kořen rovný 1 vidíme na první pohled. Tento kořen však pro nás nemá význam, neboť pak vychází $p = 0$, což se *nesrovnává s duchem a podstatou podmínek v úloze podložených*, čímž F. J. Studnička naráží na svou přednášku *O duchu mathematickém a některých jeho zjevech*, kterou proslovil při zahájení nové činnosti Jednoty českých mathematiků 20. října 1872 a která byla publikována ve druhém ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky v roce následujícím. Je-li rovnice sudého stupně, má ještě jeden reálný kořen (větší než 1), je-li stupně lichého, má ještě další dva reálné kořeny, z nichž jeden je záporný, druhý kladný.

Výše zmíněnou rovnici řeší F. J. Studnička přibližnou metodou a jako první přibližnou hodnotu kořenu rovnice dostává $q_1 = \frac{7}{4}\sqrt[n]{\frac{a+1}{n+1}} - \frac{3}{4}$. Tato hodnota obvykle stačila pro odhad úrokové míry p. V případě potřeby přesnějšího výsledku doporučuje F. J. Studnička užít metodu regula falsi. Já pro zajímavost u všech příkladů, kde je to vhodné, uvádím, jaké řešení rovnice získáme s použitím programu DERIVE 6.

K této problematice uvádí Studnička ve svém článku následující příklad na fungování tak zvaných dědičných společností neboli tontin:

Úloha A (str. 103): *Pojišťovna „Praha“ slibuje např. ukládajícímu po 19 let každoročně 10 zl. vyplatiti pak najednou nejméně 480 zl.; jak súrokuje se tu kapitál?*[2]

Řešení: Platí: $a = 48$, $n = 19$, tedy rovnice pro q má tvar $q^{20} - 49q + 48 = 0$; první přibližná hodnota vychází $q_1 = 1{,}0845$, tedy $p = 8{,}5$ %. Program DERIVE 6 dává výsledek 8,615 %

Pokud zavedeme namísto q jeho převrácenou hodnotu q^{-1}, získáme model situace, která spočívá v časově opačném průběhu děje. Základní vzorec pak má tvar $K_n = K_0 q^{-n}$, kde K_n znamená nynější hodnotu kapitálu, který má být ve výši K_0 vyplacen za n let při p procentním složitém úrokování.

Situace analogická kumulaci kapitálu vypadá tak, že na začátku máme kapitál, ze kterého po daný čas vyplácíme rentu (důchod) nebo který jako úvěr splácíme pravidelnými splátkami (anuita) po dobu n let při současném úročení.

Příslušné vzorce pak vycházejí ve tvaru $K_0 = \sum K_i \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1}$, kde K_0 je buď renta nebo anuita a $\sum K_i$ je buď kapitál složený k vyplácení renty nebo úvěr. Pro n pak platí vztah

[2] Texty úloh uvádím v původním znění, jak jsou otištěny v časopise.

$n = \dfrac{\log b - \log(1+b-q)}{\log q}$, kde $b = \dfrac{1}{a} = \dfrac{K_0}{\sum K_i}$ a rovnice pro výpočet q má tvar $q^{n+1} - (b+1)q^n + b = 0$.

Postup nalezení první přibližné hodnoty pro q je analogický předchozímu případu a vychází $q_1 = \dfrac{n(7b+4)-3}{4(n+1)}$. V textu článku uvádí Studnička k tomuto tématu následující úlohu:

Úloha B (str. 106): *Jakými procenty úročil dluh, kdo 19 ročními splátkami 10 percentními zároveň umořil kapitál?*

Řešení: Platí $b = 0{,}1$ a $n = 19$. Příslušná rovnice má tvar $q^{20} - 1{,}1\,q^{19} + 0{,}1 = 0$. Podle předchozího vzorce pro první přiblížení platí $q_1 = \dfrac{19\cdot(7\cdot 0{,}1+4)-3}{80} = 1{,}07875$. Odhadujeme, že kapitál je úročen přibližně 7,5 %. Použitím programu DERIVE 6 dostáváme p = 7,44 %.

2 Úlohy z Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky

V českém Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky [3] se v létech 1872–1884 objevuje několik příkladů, které byly zadávány k řešení čtenářům časopisu a které se věnovaly finanční matematice. Ve výběru zajímavých úloh uvádím jejich texty, včetně čísla úlohy, ročníku časopisu, ve kterém vyšly a údaje o tom, kdo zaslal do redakce jejich řešení. Dále uvádím nástin řešení, jak bylo v časopise uvedeno, a také výsledek, získaný s použitím programu DERIVE 6.

Úloha 46 ([3], ročník III, 1874, str. 143): *Nové stavby požívají nyní 25 let tak zvaného osvobození od daní; jaký kapitál představuje tato výhoda, obnáší-li prominutá daň 1000 zl. ročně, při poloročním úročení 6 % a) nyní, b) za 25 let.*

Řešení (řešení této úlohy se mezi řešeními zaslanými do redakce nevyskytuje): Na základě článku F. J. Studničky by mohlo vypadat takto: Pokud majitel domu uloží prominutou daň 1000 zl. každý rok při 6% poloročním složitém úrokování, bude mít po 25 letech ($K_0 = 1000$, q=1,03, n=50) naspořeno $\sum K_i = 1000\dfrac{1{,}03^{51} - 1{,}03}{1{,}03 - 1} = 116\,708$ zl. Přepočteme-li tuto částku na začátek času, dostaneme $K = 116\ 708 \cdot 1{,}03^{-50} = 26\ 622$ zl.

Od roku 1874 do roku 1878 nejsou úlohy pro čtenáře v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky zadávány. V roce 1878 se redakce vrací ke svému původnímu programu a zavádí opět rubriku Úlohy s *výslovným přáním, aby se jí dostalo účastenství co nejhojnějšího*. Číslování úloh začíná opět od čísla 1.

Úloha 1 ([3], ročník VII, 1878, str. 182): *Majitel domu, jehož cena se páčí na 6600 zl., stal se v 62. roce věku svého neschopným ku práci; a poněvadž z nájemného nemohl se uživiti, postoupil dům sousedovi svému, vyminiv sobě byt v ceně 100 zl. a doživotní důchod ročních 700 zl. Nebyl při tom zkrácen?*

Řešení (Zaslal Jos. Zvěřina, žák VII. tř. r. g. v Chrudimi, řešení zaslali též Matěj Vaněček z Tábora a Petrov, žák VII. tř r. g. obec. na Malé straně v Praze.): Hodnotu doživotního důchodu 800 zl. počítá řešitel podle jednoduchého vzorce

$V_m = v\frac{S_{m+1}}{s_m} = 800 \cdot \frac{67,8}{9,32} = 5819,74$ a odvolává se na Studničkovu učebnici *Algebry,* str. 192. Teoreticky tedy majitel domu utrpí škodu, avšak vzhledem k tomu, že v pojišťovně by na tento důchod musel složit nejméně 7000 zl., *poznáme, že v prakci má výhodu*, píše septimán Zvěřina.

Úloha 5. ([3], ročník VII., 1878, str. 255): *Někdo ukládá každoročně 100 zl. do spořitelny na 4% a do záložny na 6%; za kolik let bude míti v záložně jednou tolik nastřádáno co ve spořitelně?*

Řešení (Podal Jan Mayer, žák VIII. tř. gymn. v Jindř. Hradci, dále řešili Josef Kořínek z VIII. tř. téže školy, Jos. Prouza z VIII. tř. gymn. v Chrudimi.): Obsáhlejší řešení je možno shrnout takto: Ukládá-li se kapitál na začátku dob, vzroste jistina C = 100 zl. ve spořitelně postupně za n let na $C_1 = C\frac{q^{n+1} - q}{q-1}$, kde q = 1,04 a v záložně na $C_2 = C\frac{r^{n+1} - r}{r-1}$, kde r = 1,06. Podle zadání má platit $C_2 = 2 \cdot C_1$. Po dosazení a úpravě vychází rovnice $1{,}04^n - 0{,}3397436 \cdot 1{,}06^n - 0{,}66025641 = 0$. Její řešení nejprve řešitel úlohy odhadne mezi čísly 51 a 52. Po nalezení druhé přibližné hodnoty n_2 = 51,950283 pak odpovídá na zadanou otázku hodnotou 51 let a 11 měsíců, za kterýžto čas se kapitál v záložně zdvojnásobí v porovnání s kapitálem ve spořitelně. Řešením v programu DERIVE 6 dostáváme hodnotu n = 51,95088734.

3 Maturitní úlohy z finanční matematiky z přelomu 19. a 20. století

Dalším souborem úloh, ve kterých se uvedená problematika často vyskytuje, jsou úlohy zadávané při maturitní zkoušce na tehdejším C. k. českém gymnasiu v Českých Budějovicích v letech 1899–1906. Tento soubor se nachází v protokolech o maturitních zkouškách, uložených ve Státním okresním archivu v Českých Budějovicích ([1], [2]). To, že počet příkladů s finančně-matematickou tématikou tvoří téměř 8 % z celkového počtu 732 úloh, dokazuje, že jí byla věnována velká pozornost i na přelomu 19. a 20. století.

Příklady, uvedené v tomto odstavci, jsem rozdělil do skupin na základě tematického členění, které jsem převzal z článku Františka Hozy *O složitém úrokování a počtu důchodovém* ([3], ročník V, 1876, str. 200–215 a 261–274). V závorce za textem úlohy je uveden rok, kdy byl příklad zadán, jméno jeho řešitele, známka z písemné maturitní práce, známka navržená zkoušejícím profesorem za daný příklad, známka navržená za ústní zkoušku a výsledná známka z matematiky u maturitní zkoušky. Pokud byl příklad navržený k písemné maturitní zkoušce (PMZ), uvádím období (letní, zimní), variantu návrhu a údaj o tom, zda byla varianta vybrána k zadání u písemné maturitní zkoušky.

a) Prostý výpočet kapitálu, vzniklého z jistiny, uložené na p procent po dobu n let:

- *Otec uloží při narození dítěte 2000 K do spořitelny, aby dítě ve 24 letech si kapitál vyzvedlo; kolik bude mít, je-li kapitál uložen na 4 %.* (1901, Virt František, 4, 4, 4, výsl. 4)

- *Jistina 1500 K vzrostla za 12 roků o 901.5 K; na kolik % byla jistina ta uložena při celor. slož. úrokování?* (1906, PMZ letní období, var. II., vybrána)

b) Převedení hodnoty kapitálu za konec, případně na počátek času:

- *Kterou hodnotu měl kapitál 1000 zl. před 10 ti roky a kterou bude mít po 10 ti létech 4% složitého úrokování.* (1899, PMZ zimní období, var. III., nevybrána)

- *Kdosi má po 10 letech obdržeti 4560 K; kolik by dostal za ně hned při 4% slož. celoročním úrokování?* (1901, Vaculík František, 3, 4, 4, výsl. 4)

c) Výpočet kapitálu, vzniklého pravidelným ukládáním stejných úložek po n let:

- *Muž třicetiletý platí na počátku každého roku do pojišťovny 50 zl. Mnoho-li obdrží, dožije-li se 60 tého roku svého, diskontuje-li pojišťovna 5 %.* (1899, PMZ zimní období, var. I., nevybrána)

- *Kolik musí 30 letý muž ku 20 000 K ročně přidávati, aby v 60. tém roce měl 100 000 K při 4% ročním úrokování?* (1902, Balek Antonín, 4, 4, 4, výsl. 4)

d) Splácení úvěru, čerpání renty:

- *Město vydluží si 250 000 zl. na 3 % a splácí na konci každého roku 10 000 zl. na úrok i kapital. Za kolik let bude dluh ten umořen?* (1899, PMZ letní období, var. I, nevybrána)

- *Kdosi uloží a = 10.000 K do banky tak, aby sobě neb svým dědicům po 20 let pojistil peněžitou rentu n = 20 let trvající a každého roku splatnou a rok od roku o 100 K se zvětšující, zúročuje-li se 4 %; jak velká bude první renta.* (1903, Roubal Jan, 1, 1, 1, výsl. 1)

e) Tvorba a čerpání doživotní renty:

- *Muž 32ti letý chce si pojistiti roční doživotní rentu 500 zl. počínající 55. rokem věku jeho. Mnoho-li musí ročně do svého 55. roku platiti, počítá-li pojišťovna 5 % úroků složitých a 3 % na režii?* (1899, PMZ letní období, var. IV., nevybrána)

- *Osoba 31ti letá chce ročně do svého 55. tého roku platiti jistou částku peněz, aby tímto rokem počínaje dostávala doživotní roční rentu 1500 Kč. Mnoho-li jest jí ročně platiti?* (1904, PMZ letní období, var. IV., nevybrána)

2 Finanční matematika v období první republiky

Zlatým věkem výuky finanční matematiky bylo období první republiky, o čemž svědčí zastoupení tohoto tématu v učebnicích a ve sbírkách příkladů.

Příkladem učebnice je *Aritmetika pro vyšší třídy gymnasií, reál. gymnasií a ref. reál. gymnasií* od Jindřicha Muka [4], jejíž druhé vydání vyšlo nákladem Profesorského nakladatelství a knihkupectví v Praze, s.r.o., v roce 1946, ale bylo upravené podle Návrhu učebních osnov pro střední školy z roku 1933. V této učebnici je precizně vysvětlena teorie složeného úrokování a je v ní uvedeno 116 příkladů. Kromě toho se v učebnici vyskytují i příklady týkající se problémů životního pojišťovnictví. Na ukázku uvádím dva příklady:

- *V úsporném spolku půjčují členům každých 100 Kčs za náhradu 2 Kčs měsíčních, jež se musí vždy koncem měsíce platiti, jinak se připočítávají k půjčce. Kolik Kčs zaplatí člen, jenž si vypůjčil 850 Kčs a zaplatí vše za 7 měsíců? Kolik se počítá procent p. a.?* (str. 177, př. 9)

- *Sirotkovi odkázána byla jistina a uložena na 2 % p. s. Jak velká byla, dostával-li z ní na konci každého půlletí po 16 půlletí 2000 Kčs a zbylo-li mu pak ještě ke konci osmého roku 10.769 Kčs?* (str. 191, př. 10)

Jako ukázku sbírky příkladů jsem vybral *Sbírku úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol* [5], jejíž aritmetickou část zpracovali Bohumil Bydžovský, Stanislav. Teplý a František Vyčichlo, geometrickou část pak Jan Vojtěch a která vyšla nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků v roce 1946. Tato sbírka obsahuje celkem 203 příkladů včetně úloh pojišťovací aritmetiky, které zapadají do kontextu finanční matematiky lépe než v knize Mukově, kde se jedná spíše o problematiku životního pojištění. Opět uvádím dvě ukázky, na kterých můžeme smutně sledovat, jak vývoj naší země ve dvacátém století dramaticky zasahoval do životů lidí, které jistě sloužily jako vzor pro matematické příklady ve sbírce.

- *Kolik musí uložiti otec r. 1940 svému synu, má-li tento dostávati v letech 1959 až 1968 vždy 7000 Kčs? (3,5 % p. a.)* (str. 123, př. 2183)

- *Inženýr narozený r. 1905 se pojistil r. 1930 tak, že platí od r. 1930 do r. 1950 ročně určitou částku. Pro léta 1960 až 1980 si tím zajistil důchod ročně 24 000 Kčs. Jak velkou prémii platí?* (str. 141, př. 2447)

3 Finanční matematika ve druhé polovině 20. století

Dále chci ukázat, jak se s uvedenou problematikou vyrovnávala střední škola v období komunistické diktatury, kdy toto téma bylo výrazně omezeno. Jako zdroj jsem použil tehdejší sbírky příkladů.

Jako první sbírku jsem vybral *Sbírku úloh z matematiky pro SVVŠ* (na vazbě), případně pro gymnasia (na titulním listě) autorů Františka Vejsady a Františka Talafouse [6], kterou vydalo SPN v roce 1969 a která je známa generacím studentů zelenou barvou vazby a důvěrným názvem „Vejsada“. Zde najdeme celkem 19 příkladů z finanční matematiky. Dva typické příklady uvádím:

- *Kuřák prokouří ročně průměrně 1 800 Kčs. Kolik by si uspořil za 10 let, kdyby tuto částku ukládal koncem každého roku do spořitelny při 2% celoročním složeném úrokování?* (str. 260, př. 148)

- *Zaměstnanec podniku si nastřádal za osm let 42 000 Kčs na zakoupení auta. Jakou částku ukládal průměrně koncem každého roku? (3 % p. a.)* (str. 260, př. 151)

V klasické *Sbírce maturitních příkladů* [7], kterou zpracoval kolektiv autorů pod vedením Petra Bendy a kterou vydalo SPN v roce 1983, jsou tematice finanční matematiky věnovány 4 příklady. Na ukázku uvádím následující úlohy:

- *JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že je splatí dvěma stejnými splátkami, z nichž první je splatná za dva roky a druhá za čtyři roky ode dne vypůjčení. Jak velké budou splátky při 2% složeném úrokování?* (str. 123, př. 18)

- *Kolik musíme skládat počátkem každého roku po dobu 10 let, chceme-li mít koncem desátého roku nastřádáno 10 000 Kčs při 2% složeném úrokování?* (str. 123, př. 19)

Novější sbírka, *Řešené maturitní úlohy z matematiky* [8] od Ivana Buška, vydaná nakladatelstvím Prométheus ve spolupráci s JČMF roku 1999, již obsahuje více úloh na finanční matematiku s větším tématickým rozsahem. Objevuje se zde daň z úroků. Ve sbírce najdeme 7 příkladů z oboru finanční matematiky, z toho 2 řešené. Uvádím dvě úlohy (první řešená, druhá neřešená, s krátkým komentářem):

- *Občan si založil 1. října 1996 spořicí vklad s roční úrokovou mírou r % a s měsíčním úrokovacím obdobím. Při založení vkladu uložil částku V_0 a stejnou částku pak pravidelně ukládal na začátku každého dalšího měsíce až do září 1997 (včetně). Jaká částka byla na jeho spořicím vkladu po uplynutí jednoho roku, jestliže po celý rok žádný obnos nevybral, roční úroková míra se nezměnila a daň z úroků činila 15 %? Řešte nejprve obecně a pak pro $r = 9$, $V_0 = 1000$ Kč.* (str. 483, př. 48.3)

- *Banka poskytla podnikateli úvěr ve výši 2 000 000 Kč na dobu šesti let. Roční úroková míra je 14% a úrokovací období je 1 rok. Podnikatel bude splácet úvěr pravidelně ve stejných ročních splátkách, které jsou splatné vždy na konci úrokovacího období. Vypočítejte výši jedné splátky.* (str. 489, př. 48.15)

4 Finanční matematika na začátku 21. století

V současné době se v oboru finanční matematiky snad začíná blýskat na lepší časy, alespoň co do počtu a úrovně publikací, vydaných v nedávné době. Chci zmínit dvě z nich, a to *Vybrané kapitoly z finanční gramotnosti* Vladimíry Petráškové a Zuzany Horváthové [9], kterou vydala Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v roce 2010, a *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy* Oldřicha Odvárka [10], kterou vydal Prometheus v roce 2005.

První publikace se věnuje problematice rodinného a osobního rozpočtu, mezd, cen a měnových kurzů, ale i produktům, které mohou zhodnocovat peníze nebo které umožňují chybějící peníze získat. Obsahuje celkem 46 příkladů, řešených i neřešených. Z knihy [9] uvádím opět dva příklady:

- *Na svůj spořicí účet si uložíme 350 000 Kč. Po deseti letech je na účtu naspořeno 400 000 Kč. Úročili se naše peníze při vyšší úrokové míře než byla průměrná inflace posledních 10 let (2,71 %)?* (str. 76, př. 5.8)

- *Mladá rodina si chce pořídit větší byt. U realitního makléře zjistí, že stávající byt je možné prodat za 1 300 000 Kč. Vzhledem k tomu, že pořizovací cena nového bytu je 1 800 000 Kč, potřebují si vypůjčit 500 000 Kč. Banka mladé rodině nabídne hypotéční úvěr s dobou splatnosti 10 let, roční úrokovou mírou 5, 29%, půlročním připisováním úroků a splátky vždy na konci pololetí ve výši 32 515 Kč. Sestavte umořovací plán a zjistěte, kolik budou činit úroky tohoto hypotéčního úvěru.* (str. 100, př. 6.6)

Kniha *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy* Oldřicha Odvárka [10] je moderní učebnice, která reaguje na všechny aspekty světa financí, které přináší moderní doba. Setkáváme se v ní s rozborem jednoduchého i složeného úrokování, ale také s vysvětlením pojmů spotřebitelský úvěr, prodej na splátky, hypoteční úvěr, leasing, spoření včetně důchodových spořících programů. Obsahuje 234 příkladů, modelujících reálné situace. Na ukázku uvádím dva z nich:

- *Firma na výrobu užitkového skla získala formou finančního leasingu výrobní zařízení s pořizovací cenou 2 660 000 Kč. Akontace je 40 %, doba splácení 24 měsíců, měsíční anuita 78 527 Kč. Zjistěte úrokovou míru, se kterou je leasing poskytnut. (Zůstatkovou hodnotu ani případný poplatek za realizaci smlouvy sem nezahrnujeme.)* (str. 148, př. 4.38)

- *AP-banka úročí termínovaný vklad na 2 roky ve výši 10 000 Kč s úrokovou mírou 2 %. Jde o složené úročení, úrokovací období je čtvrt roku. Jak vysokou úrokovou míru by musela nabídnout AT-banka, která by úročila takový vklad jen jednou, v den splatnosti, aby vkladatel dosáhl stejného zisku?* (str. 106, př. 3.45)

Obě učebnice jsou velmi potřebné a jejich vydání je významným počinem v úsilí o zlepšení finanční gramotnosti.

5 Závěr

Z předcházejícího textu je vidět, že úroveň výuky finanční matematiky a z ní vyplývající finanční gramotnost závisí na tom, jak jsou uspořádány vztahy ve společnosti. Tam, kde jsou lidé jako svobodní občané odpovědní za svůj osud, tedy i za hospodaření s vlastními penězi, je její úroveň dobrá. Tak tomu bylo v období rakousko-uherské monarchie i v období první republiky. V období takzvaného reálného socialismu si stát uzurpoval nejen právo rozhodovat o osudech svých občanů, ale i o jejich hospodaření. Úlohy z finanční matematiky tehdy sloužily pouze jako nástroj k procvičování látky o geometrické posloupnosti. V současnosti, kdy na člověka útočí z médií nabídky na různé takzvaně výhodné finanční produkty, je nebezpečí zneužití finanční negramotnosti obzvláště vysoké. Návrat finanční matematiky do učebních plánů středních škol nejen jako nástroje pro rozvoj matematických dovedností, ale i jako cíle, je proto navýsost potřebný.

Literatura

[1] *Státní okresní archiv České Budějovice*: Jirsíkovo státní gymnasium, Maturitní protokoly, inv. č. 1200, signatura II/b/IV–42, 1894 až 1906, karton č. 60, 61.

[2] *Státní okresní archiv České Budějovice*: Jirsíkovo státní gymnasium, Výkaz o zkouškách maturitních 1899, Přehled výsledků zkoušek maturitních 1900–1906, inv. č. 1021–1028, signatura I/c – 1013–1020, kniha č. 1021–1028.

[3] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, ročníky II až XIII, Jednota českých mathematiků v Praze, 1873 až 1884, http://dml.cz/dmlcz/133460.

[4] Muk J.: *Aritmetika pro vyšší třídy gymnasií, reál. gymnasií a ref. reál. gymnasií.* Nákladem profesorského nakladatelství a knihkupectví v Praze, Praha, 1946.

[5] Bydžovský B., Teplý S., Vyčichlo F., Vojtěch J.: *Sbírka úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol*. Nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků, Praha, 1946.

[6] Vejsada F., Talafous F.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1969.

[7] Benda P. a kol.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983.

[8] Bušek I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. Prometheus, Praha, 1999.

[9] Petrášková V., Horváthová Z.: *Vybrané kapitoly z finanční gramotnosti*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, České Budějovice, 2010.

[10] Odvárko O.: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*. Prometheus, Praha, 2005.

Adresa

RNDr. Jan Zahradník
Katedra matematiky
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: *jzahradnik@pf.jcu.cz*

OBSAH

I. Vyzvané přednášky

II. Konferenční vystoupení

Přehled dosud vyšlých konferenčních sborníků

- M. Bečvářová (editorka): *27. mezinárodní konference Historie matematiky*, *Velké Meziříčí, 25. 8. – 29. 8. 2006*. Sborník sylabů, Praha, 2006, 74 stran.

- M. Bečvářová (editorka): *28. mezinárodní konference Historie matematiky*, *Jevíčko, 24. 8. – 28. 8. 2007*. Sborník sylabů, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2007, 120 stran, ISBN 978-80-7378-016-6.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2008, 191 stran, ISBN 978-80-7378-048-7.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21. 8. – 25. 8. 2009*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2009, 242 stran, ISBN 978-80-7378-092-0.

- J. Bečvář, M. Bečvářová (editoři): *31. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2010, 291 stran, ISBN 978-80-7378-128-6.

Elektronické verze výše uvedených sborníků a další informace o mezinárodních konferencích Historie matematiky jsou dostupné na adrese

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/hlavnindex.html.

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová (ed.)

32. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Jevíčko, 26. 8. až 30. 8. 2011

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal

MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 366. publikaci

Z připravených předloh
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání
Praha 2011

ISBN 978-80-7378-172-9