

Zdeněk Halas

VYUŽITÍ MATEMATIKY V PRAXI



Vzdělávací modul MATEMATIKA

Výukový a metodický text

Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze:
aktivně, aktuálně a s aplikacemi – projekt OPPA



Praha 2012

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu Praha – Adaptabilita (OPPA) a jeho projektu Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: aktivně, aktuálně a s aplikacemi. Řešiteli projektu jsou pracovníci Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Autor textu:

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., katedra didaktiky matematiky, MFF UK Praha
Zdenek.Halas@mff.cuni.cz

Recenzenti:

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Vydalo Nakladatelství P3K s. r. o. (www.p3k.cz) v Praze v roce 2012 v nákladu 120 ks. Vydání první.
Ze sazby dodané autorem vytiskl xPrint s. r. o.
Publikace neprošla jazykovou korekturou.

© Zdeněk Halas, 2012

Illustrations © Jana Marvánová, 2012

© Nakladatelství P3K, 2012

ISBN 978-80-87186-75-6

OBSAH

1	Místo úvodu	5
1.1	Obory čisté a aplikované matematiky	7
2	Matematika a hudba	11
2.1	Základní principy budování tónových soustav.....	13
2.2	Pýthagorejské ladění.....	15
2.3	Přirozené ladění.....	21
2.4	Rovnoměrně temperované ladění	24
2.5	Kolik tónů můžeme mít v hudbě?	27
2.6	Kytara, flétna, varhany	32
3	Astronomie a satelitní navigace	35
3.1	Zatmění Slunce	35
3.2	Zeměpisná šířka.....	39
3.3	Princip satelitní navigace	42
	Literatura.....	48

Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří přispěli k vytvoření této útlé knihy. Kresby obrázků se ujala výtvarnice Mgr. Jana Marvánová (detsky-koutek.cz, fler.cz/intro). Velmi ochotně a vzorně se zhostila nelehkého úkolu doplnit ilustracemi matematický text. Díky svému talentu a zájmu o podstatu věcí a jevů, o nichž se zde pojednává, velmi přesně vystihla, co a jak je potřeba nakreslit. Často přitom předstihla nejsmělejší představy autora textu.

Také bych chtěl poděkovat těm, kteří četli rukopis při jeho přípravě, a mnoha cennými náměty přispěli ke zvýšení jeho kvality. V tomto směru patří největší poděkování Mgr. Květoslavě Halasové, která přispěla mnoha náměty na zlepšení textu, a svým zájmem o témata v něm pojednáváná přispěla k povzbuzení k další práci. Zásahu na konečné podobě některých pasáží má také Mgr. Tereza Halasová, která díky své kvalifikaci hned v několika humanitních oborech přispěla podnětnými diskusemi, jejichž výtěžek jsem do textu zapracoval.

Poděkování patří také učitelům středních škol, kteří se účastnili seminářů na Matematicko-fyzikální fakultě, v jejichž rámci přispěli svými náměty k zařazení některých témat. Jejich zájem o aplikace matematiky nad rámec náročných povinností ve škole byl motivem pro napsání tohoto textu. Bez jejich zájmu by tato publikace vůbec nevznikla. Jim a jejich studentům je také tato kniha předně věnována.

1 Místo úvodu

Matematikou se u nás zabývá každý z nás po mnoho let. Je součástí našeho vzdělávacího systému. Kdybychom však dostali otázku: „Co je to matematika?“, co bychom odpověděli?

Jedna z možných odpovědí, kterou nabízí encyklopedické slovníky, zní: *matematika je věda, která se zabývá prostorovými a kvantitativními vztahy reálného světa*. Přestože je někdy matematika považována za disciplínu abstraktní, zcela odtrženou od praxe, vidíme, že i její slovníková charakterizace obsahuje fakt, že se zabývá vztahy světa reálného. Ať je tedy teorie sebeabstraktnější, vždy někde na počátku či v pozadí stojí náš reálný svět. Nijak nás to nepřekvapí, pokud si vybavíme množství technických objevů, které by bez matematiky nebyly vůbec možné. Technici však nejsou zdaleka jediní, kteří se bez matematiky neobejdou.

Před několika lety si na jednom neformálním setkání univerzitních profesorů všichni zúčastnění řekli, že se pokusí najít aspoň jeden obor, ve kterém se matematika nijak neuplatňuje. Po dlouhém hledání se jim nakonec takový obor najít nepodařilo. V následujících odstavcích je stručné rozvedení této myšlenky. Nejen u studentů středních škol, ale i ve společnosti se totiž občas objevuje názor, že ten, kdo se chce zaměřit na humanitní či umělecké obory, právo nebo lékařství, nebude matematiku nikdy potřebovat a nemusí jí tudíž na střední škole věnovat zvláštní pozornost.

Podíváme-li se na obory **technické**, tam je potřeba matematiky evidentní. Závisejí totiž do značné míry na fyzice, která je odedávna s matematikou spojena. Pokud si vezmeme obory **lékařské** – co by byly moderní diagnostické metody bez přístrojů (už jen například rentgen)? A jak by mohly být výsledky uspokojivě zobrazeny? Výzkum léčebných metod také vyžaduje řádné statistické zpracování. Podobně je statistika potřeba také ve farmacii, která navíc souvisí s **chemií**. Zde není třeba připomínat chemické výpočty – základy se vyučují na střední škole. Některá odvětví chemie (fyzikální chemie, chemické inženýrství, ...) vyžadují velmi pokročilý matematický aparát. Bez matematiky se neobejdeme ani v **biologii**, antropologii nebo paleontologii; namátkou můžeme jmenovat zpracování údajů naměřených na kostech, z nichž lze rekonstruovat podobu dávno vyhynulých zvířat. Podobně se bez matematiky neobejde také **geografie** – studenti geografie hned v prvním ročníku narážejí na planetární geografii, kde se navazuje zejména na goniometrii, ale používá se zde také diferenciální a integrální počet. Co se týče **geodézie** a **kartografie**, řeší se zde v podstatě matematické problémy. Základní úlohou geodézie je určení tvaru a velikosti zemského tělesa. Toto těleso je třeba vhodným způsobem zobrazit do roviny (mapa), což je opět úloha matematická. **Demografie** se neobejde bez řádného statistického zpracování údajů a jejich názorného zobrazování. U přírodních věd nemůžeme pominout **meteorologii**. Předpovědi počasí by bez náročných matematických modelů vůbec nebyly možné. Stranou nezůstává ani **sport**. Bez znalosti matematiky by nebylo možné například vyznačit startovní čáru, která musí být zakřivena tak, aby všichni běžci odstartovali ve stejné vzdálenosti od cíle. Pokročilé studium také zahrnuje studium biomechaniky.

Jistě není třeba hovořit o oborech **ekonomických** (bankovníctví, pojišťovnictví, ...). Jisté ekonomické vzdělání musí mít také **právníci** (dražba, exekuce, náklady soudního řízení) a **politologové**. Velkým problémem jsou totiž například volební systémy – bez matematiky by nebylo možné je zhodnotit (zda jsou zvýhodňovány strany malé nebo velké). Podobně v oblasti **žurnalistiky** je potřeba poměrně hodně matematiky: zpracování průzkumů veřejného mínění (kolika lidí je třeba se zeptat, jak zpracovat a zobrazit výsledky, aby nedocházelo ke zkreslení, či přímo manipulaci) nebo dosah daného periodika, na čemž dále závisí cena inzerce.

V **uměleckých oborech** nacházíme velmi mnoho vztahů, které nelze pochopit bez znalosti matematiky. V **hudbě** se jedná například o tónové soustavy, stupnice, různé způsoby ladění, akustiku hudebních nástrojů či prostorovou akustiku. Lze tedy říci, že bez dobré znalosti matematiky nelze hlubší zákonitosti hudby vůbec pochopit. Základní geometrické znalosti jsou také nezbytné při vytváření scénických návrhů. Pro práci **režiséra, scénografa a choreografa** je nezbytná prostorová představivost. Podobně **malířství** se neobejde bez znalosti geometrických zákonitostí (např. perspektivy). Totéž lze říci o **architektuře**. Zde je velmi potřebná deskriptivní geometrie a znalost ploch stavební praxe. Ti, kteří se zabývají **fotografováním**, potřebují znát principy různých druhů objektivů (např. rybí oko), způsoby ukládání fotografií v počítači a jejich vlastnosti (komprese, jpeg, png) a další poznatky, které se bez matematiky neobejdou.

Některé **humanitní obory** mají k matematice zdánlivě velmi daleko. Může se jednat o studium cizích **jazyků** nebo češtiny. Zde však studenty čekají mimo jiné teorie, které se snaží popsat jazyk z různých úhlů pohledu (teorie syntaxe, generativní gramatika, zpracování korpusu textů). Zvláštním oborem je matematická lingvistika. Teoretické výsledky studia jazyka se projevují například při tvorbě nástrojů pro strojový překlad textů nebo opravu pravopisných a gramatických chyb. Matematika dále pomáhá zjišťovat dobu oddělení jednotlivých jazyků ze společného základu, čímž přispívá k poznání vývoje např. indoevropských jazyků. Bez pomoci matematiky se neobejde ani **historie**. Historické události z období starověku máme zpravidla zaznamenány jinak, než formou data juliánského kalendáře. Taková data je potřeba (někdy velmi složitě) přepočítat na gregoriánský systém. U některých událostí jsou navíc dochované údaje velmi kusé a pomáhají nám záznamy o pozorovaných zatměních Slunce nebo Měsíce. Jelikož jsme schopni vypočítat data zatmění pozorovaná na daném místě na Zemi, můžeme na časovou osu zařadit mnohé údaje, u kterých by jinak panovala nejistota. Podobně **archeologie** nebo paleontologie se neobejde bez datovacích metod, z nichž je pak možné vypočítat stáří některých nálezů (například radiouhlíková metoda). Na oborech **psychologických, sociologických** či **pedagogických** je potřeba zvládnout mimo jiné statistiku, která předpokládá jistou matematickou vyspělost. Není řídký jev, že studentům těchto oborů jsou vráceny bakalářské, nebo dokonce magisterské práce k přepracování právě kvůli neznalosti matematiky, která se projeví nesprávným statistickým zpracováním výsledků dosažených například pomocí dotazníků. Dále můžeme zmínit **theologii**. Bez znalosti geometrie není například možné porozumět výkladům o betlémské hvězdě, jak je popsána ve druhé kapitole evangelia podle Matouše. Theologie také zasahuje do mnoha již zmíněných humanitních oborů (lingvistika, historie, ...). Podobně je tomu s **filosofií**, která má navíc k matematice zvláštní vztah, protože mnoho filosofů bylo zároveň matematiky. Při studiu theologie i filosofie je velmi užitečné

rozvinuté exaktní a kritické myšlení vytříbené matematikou, základy formální logiky, schopnost přesně definovat jednotlivé pojmy a činit správné závěry pomocí správných logických postupů. Totéž se týká studia práva. A ostatně všech oborů.

1.1 Obory čisté a aplikované matematiky

Matematika byla spojena s praxí odpradáвна. Z praxe vycházelo utváření základních aritmetických pojmů i základních vztahů geometrických. Od dob hellénistického Řecka máme doloženo, že matematika byla chápána v širším rozsahu disciplín, než je tomu dnes. Dělení na jednotlivé disciplíny se od antiky udrželo až do první poloviny 19. století.

Ukázka, kterou uvedeme, vykresluje velmi výstižně rozsah tzv. matematických věd, jak byly chápány po celou předcházející dobu a přetrvávaly do konce 19. století. Následující text je uveden v učebnici *Počátkové aritmetiky* profesora Stanislava Vydry vydané roku 1806.¹ Můžeme zde také pozorovat stav české vědecké terminologie na počátku obrozené doby. První část se týká matematiky čisté, tj. disciplín, které řadíme do matematiky i dnes. Druhá část se týká matematiky aplikované.

1. Všecko, co jest z částek smíšeno neb složeno, a může bud' rozmnoženo neb zmenšeno býti, slove velikost, quantitas. Umění pak, kteréž se s velikostí obírá, nazýváme Matematikou, mathesim.
2. To slovo mathesis je řecké, a tak mnoho v našem jazyku vyznamenává, jako *to umění, kterémuž aby bylo učeno, hodno jest. ...*
3. Velikost jiná má částky vespolek nespojené, jenž množství působí, v příkladu: hromada peněz; a taková slove velikost rozptýlená, quantitas discreta. Opět jiná jest, která jest z částek vespolek spojených tak složena, že kde jedna přestává, tu hned druhá počíná, a není mezi nimi prázdného místečka; tuto nazýváme velikostí spojenou, continuam.
4. Umění velikosti rozptýlené slove Aritmetika; umění pak velikosti spojené Geometrie, dle mnohých měření neb rozměrování země, neb měřičství. Tito jsou dva podstatní článkové celé matematiky, která v sobě všecky jiné částky toho v pravdě božského umění obsahuje...
5. Však z bodu ještě vyplývá rozdíl mezi čistou, neb rozjímající mathesis pura, a mezi smíšenou, mathesis mixta, vel applicata. Neb když kterého počtu jen v sobě beze vší věci, kteráž by jím byla vyznamenána (= označena), aneb vzdálenosti, nemajíce ohledu na místo, mezi kterýmž se nalézá, pozorujeme; tu s čistou matematikou se obíráme. Hned pak z ní pojde smíšená, když sobě spolu věcí skrz počet, neb vzdálenost míněných všímáme, ku příkladu: tři a dvě činí pět. Ta summa náleží do čisté matematiky, neb se na žádnou jistou věc neodvolává. Pakli skrz tři, tři zlaté; skrz dvě, dva zlaté míníme, tu již ta summa do smíšené matematiky bude náležeti. ...
6. Mimo aritmetiku a geometrii k čisté matematice náleží také Analyzis a Algebra. Analyzis (slovo řecké vyznamenáváje rozvázání) jest umění: které vyučuje nepovědomou věc, jakožto

¹ Text je citován podle *Antologie matematických didaktických textů (období 1360–1860)* Jaroslava Šedivého a kol. (SPN 1987), kde je Vydrova učebnice citována. Pravopis byl přiblížen současným normám.

povědomou sobě představiti, a ji z jiných daných věcí, na které se vztahuje, nalézt. Algebra pak (arabské slovo) jest umění neznámé věci skrz rovnost (aequatio) z daných věcí nalézt. Rovnost (aequatio) jest dvojnásobné vyobrazení některé věci. Též trigonometrie, neb umění z tří daných věcí některého tříhraníku (triangulum) počtem ostatní nalézt. ...

Pak učení o křivých čárkách, obzvláště o těch pruzích, kteříž na kuželce pocházejí, když ona bývá všelijak sečena (sectiones conicae).

Neméně také počítání diferenciální a integrální (calculus differentialis, & integralis), počítání velmi outlé, přetěžké, však velmi užitečné, nalezené od muže nad míru učeného Laybnice, Němce v Lipště rozeného. Nicméně v tom jej předešel učený Jezuita Gregorius a S. Vincentio, bývalý professor matematiky v Praze. [Zde se Vydra dopustil omylu, snad tradovaného na pražské univerzitě v 18. století.]

7. Rozvržení matematiky smíšené záležití v těch uměních:

V **mechanice**. Tato jedná o pohybování, obzvláště pak zjištěném, kteréhožto dosahujeme jinými nástroji, neb přípravami (machina), že buď mnohem menší silou větší tíži, však s ztrátou času, buď větší silou, než tíž jest, však s ziskem času můžeme pohnouti. V tomto umění počet vyznamenává sílu, neb tíž... Čárky pak vyznamenávají nástroje, k. p. hřidel, a sochor axis & vectis, též řízení [= směr] síly, a tíže linea directionis.

V **hydrostatice**. Toto umění jedná o rovné váze aequilibrium, věcí tekutých, k. p. vody, jak vespolek, tak i s jinými pevnými věcmi, které se nalézají v vodě.

V **aerometrii**, neb v matematické známosti všech vlastností povětří, kteréž jest vůkol Země. ... tíž, teplo, studenost, vlhkost, prudkost a tu vlastnost, že se dá stisknouti, a když může, opět jak prv se roztáhne ...

V **hydraulicce**. Toto umění jedná o pohybování všech tekutých věcí. V něm se učíme znáti a zcítiti oučinek všech nástrojů, kterýmiž může vodu na jakoukoli vejšku vyhnati.

Optika, prohledacství jedná o světle, a sice o paprscích, jež dle rovných čárek beze vsí proměny od světlého, neb osvíceného těla přicházejí. **Katoptrika**, umění o zrcadlech, od nichžto paprsky řádně odráženi bývají.

Dioptrika, kteráž v sobě obsahuje jednaní o paprscích zlámaných; nebť světlo má tu vlastnost, že když z jedné věci do druhé hustší, neb tenčí vpadá, svou předešlou cestu opustivši, jinou béře, a tudy bývá každý paprsek zlomen.

Perspektiva všechněm malířům nad míru potřebné umění, aby znali každou věc tak vyobraziti, jak již zblízka, již zdaleka spatřena jsouc v oko přichází.

Astronomie, aneb hvězdářství jedná o celém, to jest, tak o obloze nebeské, jako o Zemi, a všech planetách, neb bludných, i také stálých hvězdách. ...

Gnomonika učí sluneční hodiny dělati.

Chronologie jest času sčítání. ...

Geografia, vypsání země, jest umění... jež nás vyučuje, jak... celý svrček země na papír postaviti...

Hydrografie, aneb popsání svrčku mořského... vyučuje dělati mappy mořské. Bez tohoto umění nelze plavcům se pustiti na vysoké moře.

Taktika jedná o způsobu ležení rozbíti, vojsko bezpečně vésti, proti nepříteli tak postaviti, aby mu škodilo... V tomto umění velmi zběhlý byl náš vlastenec Žižka, a protož nad mnoha tisíci svých odporníků vždy zvítězil. O Francouzích nic nechci říci.

Artillerie učí nástrojů válečných, jací jsou ku příkladu děla, náležitě a bezpečně užívatí.

Architektura vojenská, neb stavitelství vojenské učí místa k tomu pohodlná tak upevniti, aby se v nich mohl malý počet vojska proti odporníkům mnohem silnějším dlouhý čas zachovati.

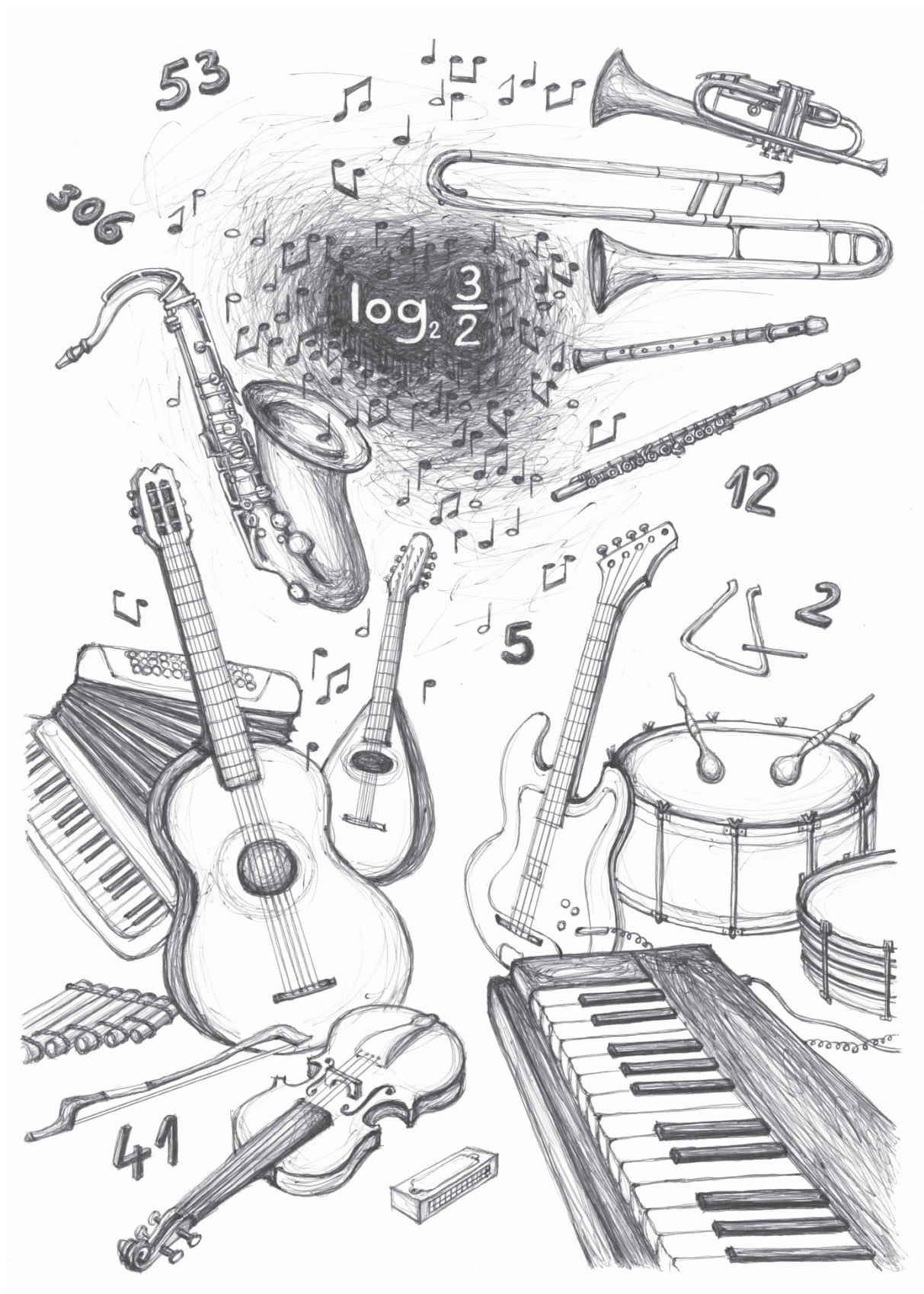
Architektura městská, stavitelství městské učí, kterak se mají města, a v nich všeliká sídla stavěti. Každé stavení má býti pevné, pohodlné, a krásné! Autor soudí, že naši předkové v tomto umění byli málo zběhlí.

8. Mimo ta překrásná, a nad míru užitečná... umění... do smíšené matematiky náleží:

- A. Umění **kmeny k stavení náležitě otesati**, a k tomu připraviti, aby se dali tak pevně vespolek spojití, by vši prudkosti větrů udělaná z nich stolice střechová mohla odolati, v latině slove ars tignaria...
- B. Umění, které jedná o **tesání kamenů**...
- C. **Muzika**, neb hudba, i toto k obveselení myslí sloužící umění jest také matematické. *Zajisté není národu pod celou oblohou nebeskou, jenž by byl k hudbě tak schopen, jako je národ český, a z té příčiny jest velmi schopen k matematickému učení.*

9. Já tedy jsem sobě umínil... jestli ne všech matematických umění, aspoň ta nejpotřebnější v češtině na světlo vydati, aby Čechové, jimž jest latina neb němčina nepovědoma, ode mne jim se naučili. Nenít mi povědomo, aby až posavád národ náš něco podobného sepsaného měl.

10. Každý zajisté rozumný člověk z toho, což jsem zde již připomenul, nevypravitedlnou cenu matematického umění seznal. Však z následujícího důvodu vždy mládeži mně svěřené chváleno a poručeno bylo a bývá. Tentot' důvod jest způsob matematický, methodus mathematica.



2 Matematika a hudba

Celá tato kapitola bude věnována vztahu matematiky a hudby. Když posloucháme krásnou skladbu nebo zpíváme písničku, tak ani nevnímáme, že není vůbec samozřejmé, z jakých tónů se tato hudba skládá. Vše plyne tak přirozeně... A přesto, podstata volby „správných“ tónů, tj. takových, aby z nich bylo možno skladby tvořit, je matematická. Panují zde zákonitosti, které alespoň zčásti odhalíme v této kapitole.

Budeme k tomu potřebovat znát ty části matematiky, které mohou vypadat na první pohled trochu samoúčelně: počítání se zlomky (Proč upravovat zlomky, když mohu dělit přímo na kalkulátoru?), mocninami, geometrickou posloupností a logaritmy.

Odpovíme si na základní otázku: „Jak vybudovat celou tónovou soustavu?“ Budeme se ptát po zákonitostech tónové soustavy umožňující komponovat skladby, které budou dobře znít. Jako důsledek našeho hledání dostaneme také odpovědi na otázku: „Proč je „naše“ hudba založena právě na dvanácti tónech?“ Nemohl by jich být jiný počet?

Celou konstrukci tónové soustavy provedeme třemi způsoby. Budeme tak přibližně kopírovat historický postup, jak byly jednotlivé způsoby ladění objevovány a teoreticky popisovány. První způsob bude nejjednodušší, nejlépe na něm bude zřetelný základní princip tvoření tónové soustavy. Bude se jednat o systém, který je připisován pýthagorejské škole, proto budeme hovořit o *pýthagorejském* způsobu ladění. Dále si ukážeme, že tento systém není nejvhodnějším pro harmonii, a úpravou předchozího systému získáme ladění *přirozené*. I zde však objevíme některé problémy, které trápily hudebníky po celá staletí. Díky nerovnoměrnému rozložení tónů totiž zněla každá tónina trochu jinak; některé zněly velmi příjemně, jiné však tak nepříjemně, že byly nepoužitelné. Řešením byl systém *rovnoměrného temperovaného* ladění, který používáme téměř výhradně dodnes.

Než začneme s první konstrukcí tónové soustavy, tak bychom měli upřesnit několik pojmů. *Tónová soustava* je konečná množina tónů vytvořená podle určitého principu, *stupnice* je postupná řada tónů získaná výběrem podle zvoleného principu a nepřesahující rozsah oktávy.²

Stupnicí je například řada tónů $c - d - e - f - g - a - h - c^1$ (stupnice C-dur). Příkladem tónové soustavy může být množina všech tónů, které se ozvou, když postupně zazní tóny příslušné všem klávesám na klavíru.

Z fyziky i z běžného života je nám dobře známo, že drkneme-li na napnutou strunu, tak tato struna začne kmitat a ozve se nějaký tón. Dobu potřebnou k vykonání jednoho kmitu nazýváme *doba kmitu* neboli *perioda*, značit ji budeme T . Počet kmitů za jednu sekundu nazýváme *frekvence*. Je-li perioda

² Pojem oktáva bude vysvětlen později v kapitole pojednávající o základních principech budování tónových soustav. Tónová soustava je vlastně souhrn všech tónů, které v rámci daného systému máme k dispozici. Stupnici získáme z tónové soustavy tak, že vybereme všechny tóny, které leží v intervalu jedné zvolené oktávy a seřadíme je podle jejich výšky.

$$T = \frac{1}{5} s,$$

bude frekvence $f = 5$ kmitů za sekundu. Mezi frekvencí a periodou tedy platí vztah

$$f = \frac{1}{T}.$$

Jednotkou frekvence je hertz (Hz), píšeme tedy $f = 5$ Hz. Lidský sluch je schopen mechanické vlnění vnímat, a to přibližně v rozsahu od 16 Hz do 16 000 Hz, při čemž se zvyšujícím se věkem se horní hranice podstatně snižuje. Lidský sluch vnímá tóny o nižší frekvenci jako nižší, tóny o vyšší frekvenci jako vyšší. Pro popis této vlastnosti tónů se tedy používá prostorová metafora, hovoříme o výšce tónu. *Absolutní výška tónu* definujeme velmi přirozeně – přímo frekvencí tohoto tónu.

Vzhledem k tomu, že lze každému tónu přiřadit jeho absolutní výšku, můžeme srovnávat výšku různých tónů. Znějí-li dva tóny, z nichž jeden má frekvenci f_1 a druhý frekvenci f_2 , můžeme vzít jejich poměr

$$\frac{f_2}{f_1}.$$

Tento poměr se nazývá *relativní výška tónu* s frekvencí f_2 k tónu s frekvencí f_1 . Častěji však hovoříme o tomto poměru absolutních frekvencí jako o *hudebním intervalu*. Níže uvidíme, proč se interval definuje právě pomocí podílu dvou frekvencí, a ne například jejich rozdílem.

Veškerý postup tvoření tónové soustavy bude vycházet z pokusů se strunou. Tyto pokusy byly prováděny už v antickém Řecku a právě na jejich základě byly vybudovány první tónové soustavy. Bude tedy užitečné se podívat, jak souvisí výška tónu, který se ozve při drnknutí na strunu, s délkou struny.

Lze ukázat, že pokud máme dokonale pružnou strunu délky l (v metrech), její hustota je ρ (v $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) a má průměr d (v metrech), kterou napneme silou F (v newtonech), tak platí Taylorův vzorec

$$f = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{F}{\pi\rho d^2}}.$$

Vidíme tedy, že pokud budeme uvažovat stejnou dokonale pružnou strunu (hustota ρ a průměr d tedy bude konstantní) a budeme-li na ni působit stále stejnou napínací silou F , bude celý výraz pod odmocninou konstantní:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\pi\rho d^2}}.$$

Za těchto předpokladů budeme moci říci, že frekvence závisí na délce struny nepřímo úměrně:

$$f = \frac{c}{l}.$$

Při drnknutí na strunu se tedy ozve tón, jehož frekvence je dána Taylorovým vzorcem, z něhož plyne, že výška tónu závisí nepřímo úměrně na délce struny. Čím delší strunu budeme mít, tím hlubší tón bude vydávat.

2.1 Základní principy budování tónových soustav

Všechny vztahy mezi výškami jednotlivých tónů budeme vyjadřovat pomocí délky struny. Intervaly proto budeme často chápat nejen jako poměr dvou frekvencí, ale také jako poměr dvou délek. Při budování tónových soustav budeme postupovat tak, že vezmeme jeden tón za základní a výšku všech ostatních tónů budeme udávat relativně k tomuto zvolenému tónu. Délku struny, která bude vydávat tento zvolený základní tón, budeme brát jako jednotkovou. Základní otázkou bude, jak zkrátit naši strunu, aby příslušné tóny společně se zvoleným základním tónem „dobře zněly“. Takovéto zadání není nijak přesné, jeho exaktní formalizaci je možno provést několika způsoby. Ty pak povedou ke zmíněným třem druhům ladění.

Budeme-li dělat pokusy se zkracováním struny, tak záhy zjistíme, že když zkrátíme strunu na polovinu, ozve se tón, který bude sice vyšší, než tón příslušný celé struně, ale oba tóny si budou velmi podobné. Necháme-li oba tyto tóny zaznít společně, zjistíme, že mnozí lidé ani nepostřehnou, že nezní tón jeden, ale dva. Bude se jednat o velmi harmonický souzvuk. Tón příslušný jedné polovině délky struny tedy zařadíme do naší tónové soustavy. Interval mezi tónem, který vydává celá struna a její polovina, se nazývá *oktáva*.³

Nyní snadno utvoříme tón o dvě oktávy vyšší. Víme, že budeme muset nechat zaznít polovinu poloviny struny, tedy její pouhou jednu čtvrtinu. Pokud bychom chtěli tón o tři oktávy vyšší, museli bychom původní strunu zkrátit na jednu osminu. Dostáváme tak jednoduchý vztah:

tón o n oktáv vyšší zazní na struně zkrácené na

$$\frac{1}{2^n}$$

původní délky. Zdá se tedy, že při budování tónových soustav bude hrát důležitou roli násobení zlomků a geometrická posloupnost.

Jelikož je tón o oktávu vyšší svým charakterem prakticky shodný s tónem původním, tak můžeme naše zkoumání omezit na tóny, které budou pouze v intervalu jedné oktávy. Všechny ostatní tóny pak budou vzhledem k nim jen o oktávu (nebo několik oktáv) vyšší či nižší. Prozkoumáme-li tedy vhodné tóny v rámci jediné oktávy, tak můžeme celou tuto situaci

³ Základem naší tónové soustavy je sedm tónů: c, d, e, f, g, a, h. Jejich pojmenování pomocí písmen se objevuje od středověku. Název oktáva vychází ze zvyku označovat vzdálenost dvou tónů v této základní tónové řadě latinskými řadovými číslovkami (v ženském rodě). Dostáváme tak postupně tyto intervaly: prima (c–c), sekunda (c–d), tercie (c–e), kvarta (c–f), kvinta (c–g), sexta (c–a), septima (c–h), oktáva (c–c¹).

„zkopírovat“ do vyšších poloh – do dalších oktáv. To dobře souhlasí s naší zkušeností například s klavírem – klaviatura obsahuje klávesy, které jsou rozděleny do zcela shodně rozložených skupin – jedná se právě o oktávy. Celá klaviatura je tak složena z kláves jediné oktávy, která je několikrát „nakopírována“. Tím pak dostaneme všechny tóny, které máme v klavírní hudbě k dispozici – tj. tónovou soustavu. V následujících odstavcích se budeme zabývat pouze hledáním vhodných tónů v rámci jediné oktávy, tedy nalezením vhodné stupnice.

Oktáva tedy bude základním mezníkem v tónové soustavě. Prakticky od každé tónové soustavy budeme požadovat, aby obsahovala tento interval.

Budeme-li v našich pokusech pokračovat, tak zjistíme, že ihned po oktávě je „nejharmoničtější“ tónem ten, který získáme zkrácením struny o třetinu. Interval mezi tónem, který vydává celá struna, a mezi tónem, který vydává struna zkrácená o třetinu, se nazývá *kvinta*. Na základě úvah s oktávou je zřejmé, že budeme-li chtít, aby zazněl tón o kvintu vyšší, budeme muset délku původní struny vynásobit zlomkem $\frac{2}{3}$. Pokud budeme od tohoto nového tónu chtít tón, který bude znít opět o kvintu výše, budeme muset délku struny opět vynásobit zlomkem $\frac{2}{3}$. Budeme-li tedy mít strunu délky 1, tak tón o dvě kvinty vyšší zazní na struně délky

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Celkem tedy budou znít dvě třetiny ze dvou třetin původní jednotkové délky struny. Jestliže budeme chtít nechat zaznít tón o n kvint vyšší, budeme muset zkrátit původní strunu na

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

původní délky.

Postupně začíná vysvítat základní princip, jak získat délku struny, chceme-li zvýšit či snížit tón o zadaný interval. Tóny přidáváme („sčítáme“) a délku struny dostaneme vynásobením příslušných zlomků. Začínáme zde tušit princip logaritmu – násobení se převádí na sčítání. Zvýšení odpovídá násobení příslušným zlomkem, snížení odpovídá naopak dělení. Schematicky můžeme zapsat například:

kvinta + kvinta	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
oktáva + kvinta	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$
kvinta + kvinta – oktáva	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$
tón o oktávu hlubší zazní na struně délky	$1 : \frac{1}{2}$
tón o kvintu hlubší zazní na struně délky	$1 : \frac{2}{3}$

Z právě provedeného rozboru začíná být zřejmé, že další tóny stupnice budeme získávat násobením zlomků. Když jsme zkracovali strunu o polovinu či třetinu, dostali jsme části struny, které byly vyjádřeny poměrem malých přirozených čísel. Skutečně se dá experimentálně snadno ověřit, že čím menší budou čísla, z nichž utvoříme poměr, tím harmoničtější bude příslušný interval.

Nyní můžeme přistoupit k vytvoření prvního systému ladění.

2.2 Pýthagorejské ladění



Jednoho dne byl Pýthagorás ponořen do myšlenek a uvažoval, zda by bylo možné vymyslet nějakou pomůcku pro uši, která by byla spolehlivá a bezchybná, tak jako zrak má pravítko a kružítko nebo čočku; nebo hmat má ramena vah či systém měř. Zatímco byl tímto zaměstnán, šel díky božskému řízení kolem kovárny a uslyšel kladiva, která tloukla do železa na kovadlině a dávala kombinace tónů, které byly krásně harmonické, až na jednu kombinaci. V těchto zvucích rozpoznal oktávu, kvintu a kvartu. Vnímal sice, že interval mezi kvartou a kvintou byl sám o sobě disonantní, ale jinak doplňoval větší z těchto dvou konsonancí. Nadšen vběhl do kovárny a pomocí různých pokusů zjistil, že různost zvuků měla svůj původ v hmotnosti

kladiv, ne v síle úderů nebo jejich tvaru, ani ve změně kovaného železa. Když pečlivě prozkoumal hmotnosti kladiv a jejich vliv, což bylo totéž, odešel domů.

[Dále je popisováno, jak si Pýthagorás vyrobil stejné struny, které zatížil různými závažími a vytvořil tímto způsobem tónovou soustavu.]

Na úvod této kapitoly máme citát ze šesté kapitoly spisu *Harmonicum enchiridion*, který napsal pýthagorejský filosof Níkomachos z Gerasy někdy ve 2. stol. po Kr. Popisuje se v něm, jak prý Pýthagorás objevil číselné vztahy, které panují v tónové soustavě.

Nyní se podíváme na tónovou soustavu, jejíž teoretický popis je připisován Pýthagorovi ze Samu (6. stol. př. Kr.) a jeho žákům, proto také nese dosud jeho jméno. Toto ladění je založeno na postupném skládání intervalů kvinty, proto se mu také říká kvintové.

Pro jednoduchost popisu budeme jednotlivé tóny označovat tak, jak jsme dnes v hudbě zvyklí. Zvolme si za základní tón c. Kvintovým vzestupným krokem (tj. násobením $\frac{2}{3}$) získáme tón g, kvintovým sestupným krokem (tj. dělením $\frac{2}{3}$) dostaneme tón F.

$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
F	c	g	c ¹

Přeložením tónu F o oktávu výše⁴ (tj. vynásobením $\frac{1}{2}$) dostaneme tón f a získáme stupnici o třech tónech (tzv. *tritonickou stupnici*): c – f – g (– c¹). Příslušné poměry budou následující:

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ c & f & g & c^1 \\ \text{prima} & \text{kvarta} & \text{kvinta} & \text{oktáva} \end{array}$$

Sestupným krokem kvinty jsme tak získali nový interval – kvartu:

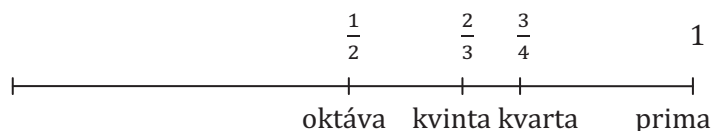
$$\left(1 : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Nabízí se také otázka, jaký je interval mezi kvartou a kvintou. Zformulováno pomocí délek struny: jak musíme zkrátit strunu, abychom dostali příslušný tón? Čím musíme vynásobit $\frac{3}{4}$, abychom dostali $\frac{2}{3}$? Z jednoduché rovnice

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{2}{3}$$

dostáváme $\frac{8}{9}$ a příslušný interval nazveme *pýthagorejský celý tón*. V úvodním úryvku se o něm píše jako o disonantním.

Všimněme si ještě jedné matematické souvislosti. Znázorníme-li tritonickou stupnici na struně, získáme následující schéma.



Kvarta a kvinta leží „někde mezi“ primou a oktávou. Harmonický průměr dvou čísel a , b je definován jako zlomek

$$\frac{2ab}{a+b}.$$

Harmonický průměr délek příslušných oktávě a primě je

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}.$$

Vidíme, že jsme dostali přesně kvintu – interval, který s původními tóny „dobře zní“, je s nimi v harmonii, odtud také pochází název tohoto průměru. Obdobně pomocí aritmetického průměru délek příslušných oktávě a primě dostaneme kvartu:

⁴ Přeložení tónu F o oktávu výše provádíme proto, aby nový tón spadl do naší základní oktávy.

$$\frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}$$

Aritmetický a harmonický průměr tedy vede přímo k základním hudebním intervalům.

Nyní můžeme řadu c – f – g rozšířit o další dva kvintové kroky vzhůru. Příslušné poměry získáme násobením $\frac{2}{3}$. Dostaneme řadu

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \left(\frac{2}{3}\right)^3 & \\ c & f & g & d^1 & a^1 & \end{array}$$

Přidané tóny opět přeložíme o oktávu níže vydělením $\frac{1}{2}$, čímž dostaneme stupnici o pěti tónech:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{8}{9} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{16}{27} & \frac{1}{2} \\ c & d & f & g & a & c^1 \end{array}$$

Tímto způsobem jsme obdrželi *pentatonickou stupnici*. Stupnice o pěti tónech byly známy prakticky u všech starověkých národů. Znali je Číňané (už v 3. tis. př. Kr.), Japonci, národy sídlící v Malé Asii. Dodnes je používána v současné lidové čínské hudbě, v hudbě afrických a zvláště amerických černochů, v lidové hudbě Skotů a Irů. Melodickou strukturou pentatoniky se nechali inspirovat také někteří novodobí hudební skladatelé (A. Dvořák, G. Puccini, B. Bartók). Pentatonickou stupnici (ovšem v dnešním ladění a transponovanou – se základním tónem cis) můžeme na klavíru snadno zahrát tak, že budeme používat pouze černé klávesy.

Budeme-li pokračovat v rozšiřování o další dva kvintové kroky vzhůru, získáme celkem sedm tónů: c – f – g – d¹ – a¹ – e² – h². Příslušné poměry získáme násobením $\frac{2}{3}$. Dostaneme řadu

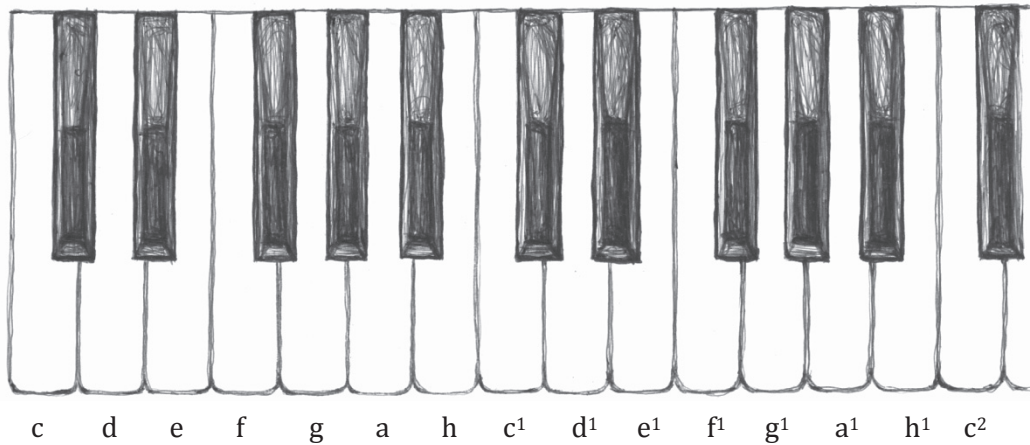
$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \left(\frac{2}{3}\right)^3 & \left(\frac{2}{3}\right)^4 & \left(\frac{2}{3}\right)^5 \\ c & f & g & d^1 & a^1 & e^2 & h^2 \end{array}$$

Přidané tóny přeložíme o dvě oktávy níže vydělením $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, čímž dostaneme stupnici o sedmi tónech a příslušné délky struny:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{8}{9} & \frac{64}{81} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{16}{27} & \frac{128}{243} & \frac{1}{2} \\ c & d & e & f & g & a & h & c^1 \end{array}$$

prima sekunda tercie kvarta kvinta sexta septima oktáva

Tímto způsobem jsme obdrželi *heptatonickou stupnici*. Na klavíru bychom všechny tyto tóny (ovšem v jiném ladění!) zahráli právě na bílých klávesách.



Prozkoumáme-li intervaly mezi jednotlivými tóny, získáme následující poměry délek struny. Kdybychom chtěli vypsát poměry frekvencí, tak by stačilo vzít z výsledných poměrů převrácenou hodnotu.

Připišme nyní ke vzniklému schématu třetí řádek, v němž budou poměry příslušné sousedním tónům (tónu a tónu předcházejícímu). Získáme tak zlomky, které budou vyjadřovat, jak musíme postupně zkracovat strunu, aby zazněly po řadě všechny tyto tóny.

c	d	e	f	g	a	h	c ¹
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$

Vidíme, že v pěti případech, konkrétně mezi tóny c – d, d – e, f – g, g – a, a – h, je interval pýthagorejského celého tónu. Mezi tóny e – f a h – c¹ se nám objevil nový interval, který je menší než celý tón. Nazývá se *malý pýthagorejský půltón* nebo také *limma*.

Pokud provedeme dvakrát vzestupný krok o malý pýthagorejský půltón, dostaneme tón poněkud hlubší, než pýthagorejský celý tón:

$$0,901 \dots = \frac{243}{256} \cdot \frac{243}{256} > \frac{8}{9} = 0,8$$

Skutečně, kdyby měla nastat rovnost, muselo by platit

$$\frac{3^{10}}{2^{16}} = \frac{2^3}{3^2}$$

I bez výpočtu příslušných hodnot je zřejmé, že tato podmínka není splněna. Napíšeme-li předchozí vztah ve tvaru

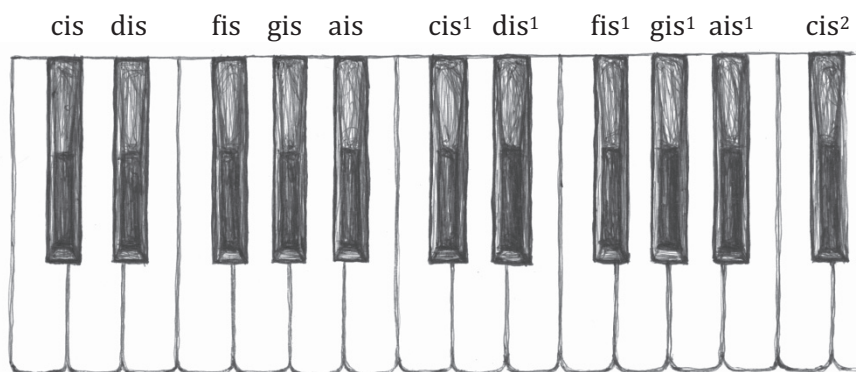
$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

můžeme mu dát hudební interpretaci: *sedm vzestupných oktávových kroků není přesně rovno dvanácti vzestupným krokům kvintovým*. Přestože tento rozdíl není příliš veliký, jsou důsledky této nerovnosti pro hudbu dalekosáhlé. Později o nich pojednáme podrobněji.

Dalším problémem je, že sice můžeme používat stupnici, kterou jsme právě vybudovali, obecně však nebude možno zahrát zvolenou melodii od jiného základního tónu, než jak bude tato melodie zapsána původně. Důvodem je nerovnoměrné rozložení půltónů a tónů. Náš tónový systém je sice použitelný, je však ještě poměrně chudý. Východiskem může být pokračování procesu, kterým jsme stávající tónový systém vytvořili. Nyní tedy budeme pokračovat v kvintových vzestupných krocích (násobením $\frac{2}{3}$ v horním řádku schématu) a každý takto vzniklý tón vždy přeložíme o tolik oktáv níže, aby spadl do naší základní oktávy (spodní řádek schématu). Navážeme tedy na poslední získaný tón h. Interval pýthagorejského celého tónu mezi sousedními tóny máme v naší stupnici celkem v pěti případech, naši stupnici tedy budeme chtít doplnit pěti novými tóny. Vzestupných kvintových kroků provedeme tedy celkem pět.

$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^6}$	$\frac{2^9}{3^7}$	$\frac{2^{10}}{3^8}$	$\frac{2^{11}}{3^9}$	$\frac{2^{12}}{3^{10}}$
h	fis ¹	cis ²	gis ²	dis ³	ais ³
$\frac{2^7}{3^5}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{2^{14}}{3^9}$	$\frac{2^{15}}{3^{10}}$

Tónům, které jsme v tomto kroku přidali, odpovídají na klaviatuře současných klávesových nástrojů černé klávesy.



Do počátku 19. století měly klávesové nástroje (cembala,...) běžně klaviaturu provedenou v inverzních barvách – naše černé klávesy byly bílé (či ze světlého dřeva) a dnešní bílé klávesy byly černé (z tmavého dřeva).

Celkově tedy máme stupnici o dvanácti tónech:

1	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2^{14}}{3^9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2^9}{3^6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2^{12}}{3^8}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{2^{15}}{3^{10}}$	$\frac{2^7}{3^5}$
c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h
	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$

Intervaly mezi jednotlivými tóny jsou naznačeny v posledním řádku tohoto schématu. Vidíme, že se nám tu objevily dva druhy pýthagorejských půltónů: *malý* a *velký*:

$$\frac{3^5}{2^8} = 0,949\ 218\ 75 \quad \text{a} \quad \frac{2^{11}}{3^7} = 0,936\ 442\ 6 \dots$$

Malému pýthagorejskému půltónu odpovídá delší struna, je tedy nepatrně hlubší než pýthagorejský půltón velký. Odtud pochází také jejich názvy. Z jejich rozložení ve stupnici můžeme ihned pozorovat, že složením velkého a malého pýthagorejského půltónu dostaneme pýthagorejský celý tón:

$$\frac{2^{11}}{3^7} \cdot \frac{3^5}{2^8} = \frac{8}{9}.$$

Pokud bychom provedli ještě jeden vzestupný kvintový krok (tj. od tónu ais³), dostali bychom tón eis⁴: $\frac{2^{13}}{3^{11}}$, po přenesení do základní oktávy

$$\frac{2^{17}}{3^{11}} = 0,7399 \dots$$

Očekávali bychom však, že se dostaneme přímo k tónu f, čímž by se kruh uzavřel. Mezi tóny eis a f však je velmi malý interval, poměr délek příslušných strun je:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2^{17}}{3^{11}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\ 441}{524\ 288} = 1,013\ 6 \dots$$

Zde se opět dostáváme k problému, na který jsme již narazili: *sedm vzestupných oktávových kroků není přesně rovno dvanácti vzestupným krokům kvintovým*. Po dvanácti kvintových vzestupných krocích jsme sice dostali stupnici, která se skládá z půltónů (i když ze dvou druhů), takže je možno melodie transponovat (hrát výše), skládat kánony apod., tato stupnice však není „uzavřená“, stále bychom mohli pokračovat ve vzestupných kvintových krocích a dostávali bychom další a další tóny. Interval mezi tóny eis a f, tedy rozdíl mezi tónem získaným dvanácti vzestupnými kvintovými kroky a tónem získaným sedmi kroky oktávovými, je vlastně roven intervalu mezi malým a velkým pýthagorejským půltónem

$$\frac{3^5}{2^8} \cdot \frac{2^{11}}{3^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}}.$$

Tento malý, přesto však dobře slyšitelný a velmi nepříjemně znějící interval se nazývá *pýthagorejské komma*.

Při odvozování pýthagorejské stupnice můžeme také postupovat kvintovými kroky směrem **sestupným**,⁵ jednotlivé členy v tomto případě získáme dělením $\frac{2}{3}$. Dostaneme tedy:

⁵ Stejný výsledek bychom získali vzestupnými kroky kvartovými, které bychom vždy překládali o oktávu níže, takže bychom násobili $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$. Pro zajímavost uveďme, že arabská šestnáctistupňová soustava byla odvozována pýthagorejským způsobem: pomocí 12 kvintových kroků sestupných a 4 vzestupných. Díky

1	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7$	$\left(\frac{3}{2}\right)^8$	$\left(\frac{3}{2}\right)^9$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$
c ⁷	f ⁶	hes ⁵	es ⁵	as ⁴	des ⁴	ges ³	ces ³	fes ²	heses ¹	eses ¹	asas

Přenesením do jediné oktávy a seřazením těchto tónů podle výšky získáme poměry:

1	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^{10}}{2^{16}}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{3^8}{2^{13}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3^6}{2^{10}}$	$\frac{3^{11}}{2^{18}}$	$\frac{3^4}{2^7}$	$\frac{3^9}{2^{15}}$	$\frac{3^2}{2^4}$	$\frac{3^7}{2^{12}}$
c	des	eses	es	fes	f	ges	asas	as	heses	hes	ces ¹

Následujícím členem v této řadě by bylo deses $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$. Po přenesení do základní oktávy dostaneme interval mezi základním tónem c a tónem deses: $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,013\ 643 \dots$, což je opět pýthagorejské komma. Interval (poměry délek struny) mezi jednotlivými tóny jsou následující:

	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{2^{11}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^8}$
c	des	eses	es	fes	f	ges	asas	as	heses	hes	ces
1	$\frac{3^5}{2^8}$	$\frac{3^{10}}{2^{16}}$	$\frac{3^3}{2^5}$	$\frac{3^8}{2^{13}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3^6}{2^{10}}$	$\frac{3^{11}}{2^{18}}$	$\frac{3^4}{2^7}$	$\frac{3^9}{2^{15}}$	$\frac{3^2}{2^4}$	$\frac{3^7}{2^{12}}$

Vidíme, že jsme dostali opět pýthagorejské velké a malé půltóny, jejich rozložení je však odlišné od stupnice budované vzestupnými kroky. Tón cis je například vyšší než tón des. Zajímavá je zde tercie: délka struny odpovídá

$$\text{u tónu e: } \frac{64}{81} = 0,790\ 12 \dots, \text{ u tónu fes: } \frac{3^8}{2^{13}} = 0,800\ 903 \dots$$

Zejména u tónu fes pozorujeme nebývalou shodu se zlomkem $\frac{4}{5}$, což nás povede k novému způsobu zavedení tercie jako tónu, který zazní při zkrácení struny o jednu pětinu. Dostáváme tak další tón pomocí poměru malých celých čísel. Pro přehled si takovéto tóny shrňme do tabulky, v níž uvádíme, o kolik je potřeba zkrátit jednotkovou strunu, aby zazněl daný interval.

$$\frac{1}{2} \text{ oktáva} \quad \frac{1}{3} \text{ kvinta} \quad \frac{1}{4} \text{ kvarta} \quad \frac{1}{5} \text{ tercie}$$

2.3 Přirozené ladění

Oktávu a kvintu jsme už použili při vytváření pýthagorejské stupnice. Kvartu jsme použili také, a to při budování pomocí sestupných kvintových kroků – tento postup je totiž ekvivalentní s vytvořením stupnice pomocí vzestupných kroků kvartových. Tercii, další libozvučný souzvuk, jsme však zatím nikde neupotřebili. A přitom se jedná o základní stavební kámen durového

tomu obsahovala tón fes ($\frac{3^8}{2^{13}} = 0,800\ 903 \dots$), který (jak uvidíme dále) odpovídá přirozené velké tercii ($\frac{4}{5} = 0,8$) s velkou přesností – chyba je menší než jedna tisícina.

kvintakordu (např. c – e – g), který je základem veškeré harmonie. Přestože jsme už vybudovali kompletní stupnici (dokonce dvěma způsoby), tak se na základě těchto úvah zdá, že by bylo užitečné vybudovat stupnici ještě jinak, totiž tak, aby obsahovala nejen čistou kvintu, ale také přirozenou tercii. Taková stupnice by měla tu dobrou vlastnost, že by byla mimořádně vhodná pro harmonii. Tento přístup teoreticky popsal jako první Aristoxenos z Tarentu (kolem r. 350 př. Kr.), významný hudební teoretik a žák Aristotelův.

Zastánci pýthagorejského přístupu ke stavbě stupnic byli nazýváni *kanónikové* podle řeckého κανών (kanón; měřicí tyčka, monochord – jednostrunný nástroj). Jednotlivé tóny a intervaly totiž zkoumali pomocí pokusů se strunou. Na tomto základě pak vytvořili systém pýthagorejského ladění založený na oktávových a kvintových krocích.

Zastánci přístupu aristoxenovského se nazývali *harmonikové*. Vycházeli totiž zejména z hudební praxe a při vytváření vlastního systému ladění přibrali do své konstrukce oproti kanónikům také interval velké a malé tercie.

Pýthagorejský přístup se udržel po celý starověk a středověk, a to zejména pro svou matematickou jednoduchost. Teprve v hudbě, která se opírala o harmonický základ, se mohly plně uplatnit přednosti Aristoxenova přístupu. Přirozené ladění se tak začalo oproti pýthagorejskému prosazovat na přelomu 15. a 16. století. Svůj název „přirozené“ získalo toto ladění právě díky libozvučnosti tercií, které byly definovány poměry malých celých čísel ($\frac{4}{5}, \frac{5}{6}$). Naproti tomu pýthagorejská velká tercie je (se svým poměrem $\frac{64}{81}$) uchu mnohem méně přijatelná.

Ukažme si nyní, jak lze vytvořit stupnici v přirozeném ladění. Vytvoříme stupnici opět se sedmi tóny, k čemuž jsme došli pýthagorejským postupem. Vyjdeme opět z toho, že je potřeba zachovat základní intervaly: oktávu, kvintu a kvartu. Tyto intervaly jsou definovány pomocí poměrů malých celých čísel, budou tedy znít libozvučně. Máme tedy:

c	d	e	f	g	a	h	c ¹
1			$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$

První, čtvrtý a pátý tón nazýváme postupně *tonika*, *subdominanta* a *dominanta*. Hudební praxe ukazuje jejich mimořádnou důležitost pro harmonii. Jednak tyto tóny získáme pomocí poměru velmi malých celých čísel, jednak také budou mít vlastnost, o které pojednáme za chvíli.

Sekundu (tj. tón d) opět vytvoříme pomocí dvou vzestupných kvintových kroků a vzniklý tón přeložíme o oktávu níže, schematicky:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{9}$$

Zbylým tónům už budou odpovídat jiné délky struny. Místo tercie pýthagorejské vezmeme *velkou přirozenou tercii*, tj. $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (tón e). Pomocí této tercie nakonec vytvoříme zbylé tóny a,

h (sextu a septimu). Sexta vznikne zvýšením kvarty o tuto tercii, podobně septima zvýšením kvinty. Schematicky zapsáno:

$$\begin{aligned} \text{sexta} &= \text{kvarta} + \text{tercie} & \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} &= \frac{3}{5}, \\ \text{septima} &= \text{kvinta} + \text{tercie} & \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Celkem tedy máme stupnici (tzv. *diatonická stupnice dur*):

c	d	e	f	g	a	h	c ¹
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Podívejme se nyní, jakou vlastnost mají tonika, subdominanta a dominanta. Zmínili jsme již jejich velikou důležitost pro harmonii. Bez nadsázky můžeme říci, že základním stavebním kamenem harmonie je kvintakord, tedy souzvuk primy, tercie a kvinty (c – e – g). Strukturu kvintakordu nejlépe uvidíme, vypíšeme-li přímo příslušné poměry. Vezmeme-li za základní tón c, dostaneme dva intervaly: c – e, e – g:

$$\frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}.$$

Kvintakord s tímto rozložením intervalů nazýváme durový kvintakord. Postavíme-li analogicky souzvuk tří tónů na tónu f (f – a – c¹), resp. g (g – h – d¹), dostaneme přesně stejné rozložení intervalů, jako v případě kvintakordu c – e – g, tedy $\frac{4}{5}$ a $\frac{5}{6}$, vznikne tedy opět durový kvintakord. Zároveň si všimněme, že každý tón naší stupnice je obsažen alespoň v jednom z těchto tří základních durových kvintakordů.

Z uvedeného matematického rozboru vyplývá, proč je aristoxenovská soustava tak vhodná pro harmonii. Celá stupnice je budována tak, aby zněl co nejlépe durový kvintakord, který lze postavit na tonice, subdominantě i dominantě.

Viděli jsme, že durový kvintakord se skládá z velké přirozené tercie (c – e, $\frac{4}{5}$) a ještě jednoho intervalu (e – g, $\frac{5}{6}$), který je větší, než sekunda, ale menší, než velká přirozená tercie:

$$\frac{8}{9} < \frac{5}{6} < \frac{4}{5},$$

budeme jej nazývat *malá přirozená tercie*. Podobně, jako jsme do základního schématu

$$c - d - f - g - c^1$$

přidali tercii, sextu a septimu zvýšením primy, kvarty a kvinty o velkou přirozenou tercii a dostali jsme tak durovou stupnici, můžeme podobně přidávat místo velké tercie tercii malou a dostaneme tak *diatonickou stupnici moll*:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$

Tóny již nemůžeme označovat písmeny c, d, ..., protože dostáváme jiné poměry mezi nimi, vzniklá stupnice je jiná. Kvintakord složený z primy, tercie a kvinty nazveme v této mollové stupnici *mollový kvintakord*. Rozložení tercií je v něm přesně opačné, než u durového kvintakordu: malá tercie – velká tercie. Podobně jako u durové stupnice bychom zjistili, že kvintakordy na tonice, subdominantě a dominantě jsou všechny mollové.

U přirozeného ladění je také zajímavý problém transponování, tj. pokusíme-li se zahrát tutéž stupnici od jiného tónu než c se stávajícími sedmi tóny v každé oktávě. Snadno se vypočte, že by to nebylo možné, dostali bychom tóny další. Bez vyřešení tohoto problému by nebylo možné přirozené ladění prakticky používat. Přesto se těmto otázkám nebudeme podrobněji věnovat, protože cílem tohoto textu je ukázat matematickou podstatu budování tónových soustav. Případného zájemce o podrobnější pojednání z hudebního i matematického hlediska tak musíme odkázat na doporučenou literaturu.

Jak vidíme, činí transponování stále potíže. U pýthagorejského ladění jsme dostali mnoho dalších tónů, některé z nich se však od sebe lišily pouze nepatrně. U přirozeného ladění by vznikla podobná situace. Tento velký počet tónů v jediné oktávě je například pro klávesové nástroje těžko myslitelný. Klaviatura by nabyla přílišné složitosti. Řešení pak spočívalo v tom, že se prováděly u všech typů ladění nějaké kompromisy. Velmi blízké tóny se ztotožnily v tón jediný, čímž se opět získala potřebná jednoduchost celé tónové soustavy.

2.4 Rovnoměrně temperované ladění

Viděli jsme, že oba způsoby ladění, kterým jsme se věnovali, měly poměrně dobré vlastnosti, pokud jsme zůstali u sedmi základních tónů v oktávě. Hudební praxe však vyžaduje soustavu bohatší, která však vedla k zesložiténí celé soustavy a následná zjednodušování pak nakonec ke kompromisům, jež některé původně dobré vlastnosti setřely buď úplně, nebo částečně. Nabízí se tedy otázka, zda nevybudovat tónovou soustavu pomocí nějakého velmi jednoduchého principu, který sice od počátku bude činit kompromisy, nebude však způsobovat problémy při transponování. Začneme-li tedy hrát nějakou melodii například o dva tóny výše, měly by být přesně zachovány všechny relativní výšky. Tohoto dosáhneme jen tehdy, když opustíme složitý systém různých půltónů a zavedeme půltón jediný. Z dvanácti stejných půltónových intervalů se pak bude skládat jedna oktáva, k čemuž nás inspiroval už pýthagorejský způsob ladění.

Matematicky lze tuto soustavu vytvořit velmi snadno. Označme hledaný půltónový interval x . Pro jednoduchost zde budeme pracovat s frekvencí tónů, tj. s převrácenou hodnotou délky struny. Interval oktávy má být tvořen dvanácti půltónovými kroky. Uvědomíme-li si, že tón o oktávu vyšší má dvojnásobnou frekvenci (zní totiž na struně zkrácené na $\frac{1}{2}$), dostáváme rovnici

$$x^{12} = 2.$$

Hledaná frekvence musí být kladné reálné číslo, dostáváme tak jediné vyhovující řešení:

$$x = \sqrt[12]{2} = 1,059\ 463 \dots$$

Jednotlivé frekvence pro rovnoměrně temperované ladění získáme pouhým násobením (vzestupným půltónovým krokem), tj. podle vzorce

$$f_n = (\sqrt[12]{2})^n, \quad n = 0, 1, \dots, 12.$$

Vidíme, že se jedná o geometrickou posloupnost s kvocientem $\sqrt[12]{2}$. Frekvence pro celou stupnici můžeme shrnout do následujícího schématu. Pro názornost je ve třetím řádku vždy vyznačen interval mezi dvěma sousedními tóny. Rovnoměrnost, kterou zde pozorujeme, dala rovnoměrně temperovanému ladění název.

c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h	c ¹
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[6]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2
	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2}$

Tato soustava je po matematické stránce elegantně jednoduchá. Nalezený půltónový interval je však reprezentován iracionálním číslem $\sqrt[12]{2}$, o poměru malých celých čísel tedy nemůže být vůbec řeč, a to ani např. u kvarty nebo kvinty složené z těchto intervalů. Prakticky bude tato soustava použitelná jen tehdy, pokud základní intervaly budou přibližně souhlasit (tj. budou-li se lišit jen „málo“) s intervaly určenými v přirozeném (příp. pythagorejském) ladění, protože tam byla určujícím prvkem právě harmonie. Srovnajme tedy diatonické stupnice v přirozeném ladění s laděním rovnoměrně temperovaným.

Tab. 1 – Srovnání přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění (RTL)

Půltón		Přirozené ladění		RTL	RTL – PŘL
0	c	1	1	1	0
1	cis			1,059 463	
2	d	9/8	1,125	1,122 462	-0,002538
3	es	6/5	1,2	1,189 207	-0,010793
4	e	5/4	1,25	1,259 921	0,009921
5	f	4/3	1,333	1,334 839	0,001839
6	fis			1,414 213	
7	g	3/2	1,5	1,498 307	-0,001693
8	as	8/5	1,6	1,587 401	-0,012599
9	a	5/3	1,666	1,681 792	0,015792
10	b	9/5	1,8	1,781 797	-0,018203
11	h	15/8	1,875	1,887 748	0,012748
12	c ¹	2	2	2	0

V tabulce (Tab. 1) udáváme jednotně frekvence, u přirozeného ladění se tedy objeví převrácené hodnoty zlomků získaných při dělení struny. Rozdíly mezi hodnotami rovnoměrně temperovaného a přirozeného ladění jsou uvedeny v posledním sloupci.

Rovnoměrně temperované ladění nebylo historicky prvním pokusem o kompromisní řešení problémů nastíněných v úvodu této podkapitoly. Rozmach těchto řešení, kdy se zachovávaly zvolené intervaly a jiné se vyrovnávaly (temperovaly) podle různých pravidel, nastal v 16. století společně s rozvojem klávesových nástrojů. Rovnoměrná temperatura, kdy byl každý interval kromě oktávy nepatrně rozladěn, se začala více uplatňovat až na počátku 18. století, přestože teoretické základy pro ni byly položeny už v pojednání *Van der Spiegeling der Sinconst* holandského fyzika S. Stevina (1548–1620). Do praktické hudby se ji snažil uvést například Andreas Werckmeister (1645–1706). Johann Sebastian Bach (1685–1750) ve svých dvou souborech 24 preludií a fug *Das wohltemperierte Klavier I, II* (1722, 1744) skvěle prokázal přijatelnost nového temperovaného ladění pro všechny tóniny.

Pokud bychom chtěli u jednotlivých tónů určit jejich absolutní výšku, potřebovali bychom kromě vztahů mezi tóny v rámci oktávy znát ještě přesnou frekvenci jednoho tónu. Ukázalo se, že nejvhodnějším tónem (zejména na základě hudební praxe) je a^1 (tzv. *komorní a*). Jednota ohledně jeho výšky však nepanovala ještě v 19. století. Různé druhy nástrojů měly různé ladičí konvence. Rozdíly byly také mezi jednotlivými národy. V 18. a 19. století kolísala absolutní výška od 409 Hz po 454,7 Hz. Ve Francii byla roku 1858 navržena frekvence 435 Hz, kterou potvrdilo také Rakousko-Uhersko, kde se tato frekvence běžně používala. Vojenské dechové hudby však používaly vyšší ladění (kolem 450 Hz). Současná frekvence *komorního a* rovná 440 Hz, na kterou jsme zvyklí a jíž se řídí hudební nástroje po celém světě, byla ustanovena až na zasedání komise ISA (International Standard Association) v Londýně roku 1939. Zkušenosti s uplatňováním tohoto frekvenčního normálu byly dobré, a tak byl potvrzen ve Stockholmu roku 1953.

Hodnoty všech ostatních tónů v rovnoměrně temperovaném ladění získáme snadno násobením nebo dělením $^{12}\sqrt{2}$. Pro úplnost si uveďme frekvence všech tónů jednočárkované oktávy.

c^1	261,6256	g^1	391,9954
cis^1	277,1826	gis^1	415,3047
d^1	293,6648	a^1	440
dis^1	311,1270	ais^1	466,1638
e^1	329,6276	h^1	493,8833
f^1	349,2282	c^2	523,2511
fis^1	369,9944		

Na základě konstrukce pýthagorejského ladění jsme zvolili dělení oktávy na dvanáct stejných půltónových intervalů. Teoreticky jsme však mohli oktávu rozdělit na libovolný počet stejných intervalů. Nejedná se pouze o teoretickou úvahu, například na ostrovech Jáva a Bali je známa pětiténová stupnice *slendro*, jejíž oktáva je dělena do pěti rovnocenných stupňů o velikosti $x = \sqrt[5]{2} = 1,148\ 698 \dots$ Podobně ve staré indické hudbě se používala sedmistupňová stupnice *svaragama*, která vycházela z dělení na 22 stejných dílů, tj. $x = \sqrt[22]{2} = 1,032 \dots$ Pokud bychom však chtěli zachovat tóny naší běžné hudby, tak bychom se mohli soustředit na dělení půltónu.

Rozdělíme-li půltón na dva stejné intervaly, dostaneme *čtvrttón* ($x = \sqrt[24]{2} = 1,029\ 3\dots$). Čtvrttónová stupnice tak bude obsahovat 24 tónů. Podobně bychom mohli půltón rozdělit na tři stejné intervaly, tzv. *šestinotóny* ($x = \sqrt[36]{2} = 1,019\ 44\dots$), čímž bychom dostali šestinotónovou soustavu. Neznámějším skladatelem a teoretikem čtvrttónové a šestinotónové hudby, který si získal světové uznání, je bezesporu rodák z Vizovic Alois Hába (1893–1973).

2.5 Kolik tónů můžeme mít v hudbě?

U pýthagorejského ladění jsme narazili na problém, kolik kvintových vzestupných kroků je potřeba provést, aby se „kruh uzavřel“, tedy abychom získali opět základní tón, jen o několik oktáv vyšší. Kdybychom takový počet n vzestupných kvintových kroků našli, tak by už pomocí vzestupných kvintových kroků nevznikaly žádné nové tóny, situace by se po n vzestupných kvintových krocích opakovala, jen o několik oktáv výše. Postupným vršením vzestupných kvintových kroků jsme narazili na hodnotu $n = 12$, kdy sice *sedm vzestupných oktávových kroků nebylo přesně rovno dvanácti vzestupným krokům kvintovým*, tedy

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{2}{3}\right)^{12},$$

ale tyto hodnoty se od sebe lišily jen velmi málo – o malý interval⁶ zvaný pýthagorejské komma:

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\ 441}{524\ 288} = 1,013\ 643\ 264\ 770\ 507\ 812\ 5.$$

Nevychází tedy poměr přesně jedna, ale číslo nepatrně vyšší. Aby však došlo k přesné shodě oktávových a kvintových vzestupných kroků, bylo by potřeba splnit pro nějaká přirozená n a k podmínku

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Její úpravou na tvar $\frac{3}{2} = 2^{\frac{k}{n}}$ a logaritmováním při základu 2 obdržíme

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{k}{n}.$$

Jelikož je tento logaritmus iracionální číslo

$$\log_2 \frac{3}{2} = 0,584\ 962\ 500\ 721\ 156\dots,$$

nelze jej vyjádřit ve tvaru zlomku. Pýthagorejský postup vzestupných kvint tedy nevede ke konečnému počtu tónů. Můžeme se jen pokusit nalézt takové racionální číslo $\frac{k}{n}$, které bude tento

⁶ Pro srovnání: intervalu rovnoměrně temperovaného půltónu odpovídá $\sqrt[12]{2} = 1,059\dots$

logaritmus přibližně vyjadřovat. Z hudební interpretace vztahu $\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ vidíme, že n udává počet vzestupných kvintových kroků, každým získáme jeden nový tón. Číslo n (tj. jmenovatel zlomku $\frac{k}{n}$) je tedy rovno počtu různých tónů, které bude tónový systém obsahovat v intervalu jedné oktávy. Číslo k teď není příliš důležité, udává počet oktáv, kterým se (přibližně) rovná n kvint.

Otázka, před kterou nyní stojíme, je čistě matematická. Volně vyjádřeno, potřebujeme *vyjádřit zadané iracionální číslo „co nejlepším“ zlomkem*.

V tomto úkolu nám pomůže následující postup. Chceme-li například přibližně vyjádřit zlomek $\frac{87}{38}$ pomocí zlomku s menším jmenovatelem (například pro zjednodušení výpočtů), můžeme postupovat takto:

1. Odebereme celou část zadaného čísla – tj. provedeme dělení.
2. Pokud zbude po dělení nula, proces končí.
3. Zbude-li číslo mezi nulou a jedničkou, jeho převrácená hodnota je číslo větší než jedna. Můžeme tedy opět provést dělení.

Proveďme tento postup na zvoleném racionálním čísle $\frac{87}{38}$:

$$\frac{87}{38} = 2 + \frac{11}{38} = 2 + \frac{1}{\frac{38}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{11}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{11}{5}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}$$

Výraz, který jsme nakonec dostali, se nazývá *řetězový zlomek*. V čitatelích vznikajících zlomků je vždy číslo jedna, proto stačí zapisovat vždy prvního sčítance ve jmenovateli. Dostaneme tak velmi stručný zápis řetězového zlomku:

$$\frac{87}{38} = [2; 3, 2, 5].$$

Tento kondenzovaný zápis reprezentuje racionální číslo, které můžeme vypočítat například zpětnou úpravou řetězového zlomku.

Pokud bychom ve výpočtu tvaru řetězového zlomku vzali jednotlivé členy a zanedbali bychom v nich vždy druhý sčítanec v posledním jmenovateli, obdrželi bychom posloupnost zlomků:

$$2, \quad 2 + \frac{1}{3}, \quad 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}, \quad 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}$$

neboli po úpravě

$$2, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{16}{7}, \quad \frac{87}{38}.$$

Dostali jsme zlomky, které jsou čím dál tím blíže zvolenému racionálnímu číslu. Nazývají se *konvergenty*. Navíc jsou tyto zlomky střídavě větší a menší než zadané racionální číslo $\frac{87}{38}$. Tuto vlastnost má obecně každá posloupnost konvergentů. Jelikož vždy odebereme celou část, a potom pracujeme s pouhým zbytkem, zdá se, že zlomky, které postupně dostáváme, jsou těmi „nejlepšími“ s daným jmenovatelem, tj. jsou danému racionálnímu číslu nejbližší. Přesně tuto myšlenku shrnuje následující věta.

Hodnota konvergentu $\frac{P_k}{Q_k}$ racionálního čísla $\frac{p}{q}$ se od hodnoty $\frac{p}{q}$ liší méně než hodnota kteréhokoli jiného zlomku $\frac{m}{n}$, jehož jmenovatel $n < Q_k$, tj. platí nerovnost

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \left| \frac{p}{q} - \frac{m}{n} \right|.$$

Přesností, s jakou konvergent aproximuje zadané racionální číslo, rozumíme absolutní hodnotu rozdílu tohoto racionálního čísla a příslušného konvergentu. Můžeme ji snadno odhadnout pomocí této věty:

Ze dvou po sobě jdoucích konvergentů $\frac{P_i}{Q_i}$ racionálního čísla $\frac{p}{q}$ má alespoň jeden tu vlastnost, že platí

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{2 \cdot Q_k^2}.$$

Zároveň platí, že konvergenty racionálního čísla $\frac{p}{q}$ jsou jeho nejlepším přiblížením. Přesněji vyjádřeno:

Pokud budeme hledat posloupnost konvergentů k zadanému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$, bude tato posloupnost konečná – posledním členem bude právě $\frac{p}{q}$. V posloupnosti konvergentů totiž postupně vzrůstají jmenovatele, největším z nich je pak právě q . Pro racionální čísla tedy dostaneme vždy řetězový zlomek konečný.

Pro iracionální čísla vnikají řetězové zlomky nekonečné. Posloupnost konvergentů je tedy také nekonečná. Je tvořena zlomky, kde ve jmenovateli (a čitateli) jsou čím dál tím větší čísla. Konečnou být tato posloupnost nemůže – končila by totiž racionálním číslem, které by nutně nebylo rovno zadanému číslu iracionálnímu, a proces vytváření řetězového zlomku by musel pokračovat. Dá se dokázat, že vezmeme-li konkrétní iracionální číslo α , aproximuje jej konvergent $\frac{P_k}{Q_k}$ s přesností

$$\left| \alpha - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k \cdot Q_{k+1}},$$

přičemž Q_k a Q_{k+1} jsou jmenovatele dvou po sobě jdoucích konvergentů čísla α .

Velmi snadno se počítají konvergenty u odmocnin. V tomto případě nemusíme znát numerickou hodnotu zadané odmocniny na mnoho míst, stačí její celá část a usměrňování zlomků. Například:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [1; \bar{2}]\end{aligned}$$

Využili jsme zde toho, že $(\sqrt{2} - 1)$ je číslo mezi nulou a jedničkou, hraje tedy podobnou roli, jako zbytek po dělení. Vidíme, že jsme dostali řetězový zlomek periodický. V případě odmocnin je to pravidlem.

Nyní jsme již vybaveni pro řešení problému možného počtu tónů v hudbě. Viděli jsme, že je potřeba nalézt racionální číslo $\frac{k}{n}$, které bude blízké hodnotě

$$\log_2 \frac{3}{2} = 0,584\ 962\ 500\ 721\ 156 \dots$$

Vezmeme-li za základ výpočtu numerickou hodnotu (s přesností na dostatečný počet míst), dostaneme postupně následující řetězový zlomek

$$\log_2 \frac{3}{2} = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3, 1, 1, 15, 1, 9, 2, 5, 7, 1, \dots].$$

Příslušná posloupnost konvergentů pak bude

$$0, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}, \quad \frac{179}{306}, \quad \frac{389}{665}, \dots$$

Jmenovatele zlomků udávají počty tónů v jedné oktávě. Dostali jsme tedy: 1, 2, 5, 12, 41, 53, 306, 665, ... Hudba s pouhým jedním či dvěma tóny by byla velmi chudá. Částečně by to mohla vyvážit velmi výrazná rytmická složka. S pětitónovou stupnicí se setkáváme u mnoha národů (např. Čína), jedná se o pentatonickou stupnici. Další je tónový systém o dvanácti tónech – jedná se o naši běžnou hudbu. Těchto dvanáct tónů však dnes není tvořeno pomocí vzestupných kvint, ale pomocí principu rovnoměrného temperování. Vidíme, že „dokonalejší“ hudba,⁷ než je ta naše, by musela mít 41 tónů,⁸ což je pro praktické použití příliš mnoho. O větších počtech, které nám vyšly, ani nemluvě. Naše hudba o dvanácti tónech je tedy velmi dobrým kompromisem mezi bohatostí, dokonalostí a praktičností.

Pro výpočet konvergentů můžeme použít kalkulátoru. Jelikož se však jedná o větší množství rutinních výpočtů, můžeme si napsat krátký program, který udělá veškerou práci za nás. S výhodou jej pak také budeme moci použít v následující kapitole.

⁷ Ve skutečnosti bychom ještě museli ověřit, zda jsme v takové tónové soustavě dostali také lepší poměry pro tercie, tj. poměry bližší hodnotám v přirozeném ladění. Kombinací s tímto principem byly vytvořeny další tónové soustavy obsahující např. 43 tónů. Snad nejvýznamnější je soustava o 31 tónech holandského muzikologa A. D. Fokkera, který navazoval na teoretické úvahy matematika L. Eulera.

⁸ Existují počítačové simulace klaviatury, která má v každé oktávě právě těchto 41 tónů. Experimentovat s různými tóninami lze např. zde: <http://tones.wolfram.com/generate/advanced.html?pitch>

Zvolili jsme programovací jazyk Python kvůli jeho jednoduchosti a snadné dostupnosti.⁹ Uvádíme zde pro přehled kompletní program i s komentáři. V elektronické podobě se nachází také na příloženém CD.

```
import math                                     # načtení knihovny matematických funkcí (kvůli log, pow)

x = math.log(1.5) / math.log(2)               # zadáme log o základu 2 čísla 1,5
N = 9                                         # počet konvergentů, který se bude počítat

print('log_2 3/2, řetězový zlomek, konvergency, komma')
print(x)                                     # tisk zadaného čísla (pro přehlednost)

# Výpočet řetězového zlomku                x // 1 je zlomková část x (vlastně zbytek po dělení 1)
q = []                                       # pole q – zde bude uložen řetězový zlomek
for i in range(0, N):                       # cyklus pro i od 0 do N; x - (x//1) je celá část čísla x
    q.append( int(x // 1) )                 # do řetězového zlomku přidáváme jednotlivé členy
    x = 1 / ( x - (x//1) )                 # zde se tvoří řetězový zlomek

print(q)                                     # tisk řetězového zlomku

# Výpočet konvergentů K: P jsou čitatele, Q jsou jmenovatele
P = [ q[0], q[0]*q[1]+1 ]                 # první dva konvergency
Q = [ 1, q[1] ]

for i in range(2, N):                       # i-té konvergency (i = 2, 3, ..., N)
    P.append( q[i]*P[i-1] + P[i-2] )       # přidáváme další čitatele a jmenovatele do pole
    Q.append( q[i]*Q[i-1] + Q[i-2] )

# sestavení výsledných zlomků do tvaru: čítec P[i] / jmenovatel Q[i]
Konv = []
for i in range(0, N):
    Konv.append( str(P[i]) + ' / ' + str(Q[i]) )

print(Konv)                                 # tisk konvergentů

# hodnota "pýthagorejského kommatu" v příslušném tónovém systému
Komma = []
for i in range(0, N):                       # výpis bude na 7 míst
    Komma.append( '{0:.7}'.format( pow(3./2.,float(Q[i])) / pow(2.,float(P[i])) ) )

print(Komma)                               # tisk kommat: (3/2)^jmenovatel / 2^čitatelel
```

Výstupem z programu je číslo, začátek řetězového zlomku, prvních deset konvergentů a příslušná hodnota pýthagorejského kommatu:

```
log_2 3/2, řetězový zlomek, konvergency, komma
0.5849625007211562
[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2]
['0 / 1', '1 / 1', '1 / 2', '3 / 5', '7 / 12', '24 / 41', '31 / 53', '179 / 306', '389 / 665']
['1.5', '0.75', '1.125', '0.9492188', '1.013643', '0.9886025', '1.00209', '0.9989783', '1.000044']
```

⁹ K dispozici je zdarma ke stažení na <http://www.python.org/download/>

Pro přehlednost si ještě získané výsledky shrňme do tabulky.

Tab. 2 – Možný počet tónů v hudbě

Konvergent	Počet tónů	Komma
1 / 2	2	1,125
3 / 5	5	0,949 219
7 / 12	12	1,013 643
24 / 41	41	0,988 603
31 / 53	53	1,002 090
179 / 306	306	0,998 978
389 / 665	665	1,000 044
9126 / 15601	15 601	0,999 982

2.6 Kytara, flétna, varhany

S délkou struny jsme počítali za předpokladu, že je dokonale pružná. Pak pro ni platil Taylorův vzorec. Takovou strunu však na kytáře nemáme, a tak se používají různé empiricky získané vzorce pro korekce na reálnou strunu v konkrétních podmínkách daného hudebního nástroje. Proto když budeme ověřovat naše teoretické výsledky například měřením vzdáleností pražců na kytáře, tak se naměřené hodnoty nebudou úplně přesně shodovat s hodnotami vypočtenými.

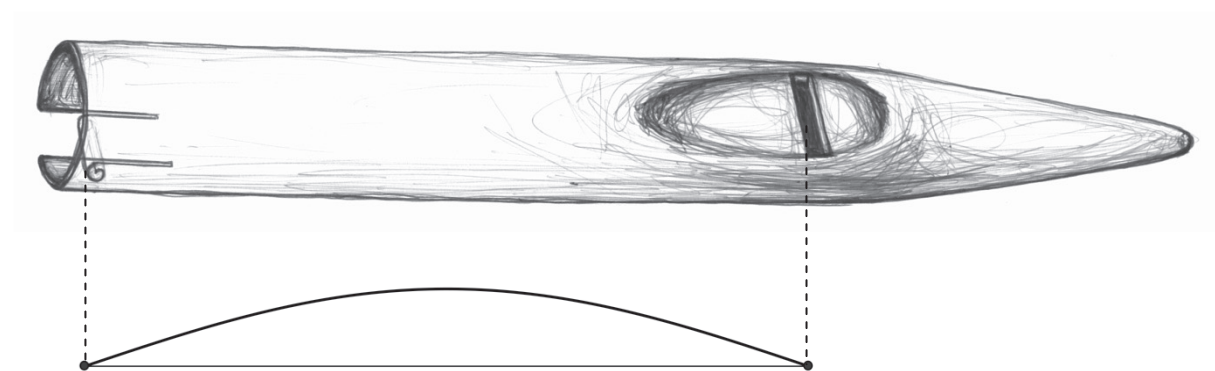
Co se týče flétny a varhanních píšťal, výpočet délky probíhá podobně jako u struny. Je však potřeba vzít v úvahu, že existují dva základní druhy varhanních píšťal: *otevřené* a *kryté*. Společné oběma typům je, že k vydání tónu je potřeba uvést ve chvění vzduchový sloupec uvnitř píšťaly. To se děje tak, že vzduch ženeme úzkou štěrbinou s ostrou hranou. Nárazem na hranu vznikne turbulentní proudění, tvoří se periodicky se opakující víry. Počet těchto vírů, které vznikají v jedné sekundě, určuje frekvenci tzv. *třetího tónu*. Ten zní sám o sobě velmi slabě, pokud není zesílen rezonancí spřaženého vzduchového sloupce. Poprvé tento druh tónů pozoroval český fyzik Čeněk Strouhal roku 1878, který také objevil vztah mezi frekvencí třetího tónu f , šířkou štěrbinou u a rychlostí proudění vzduchu v :

$$f = \frac{v}{u}.$$

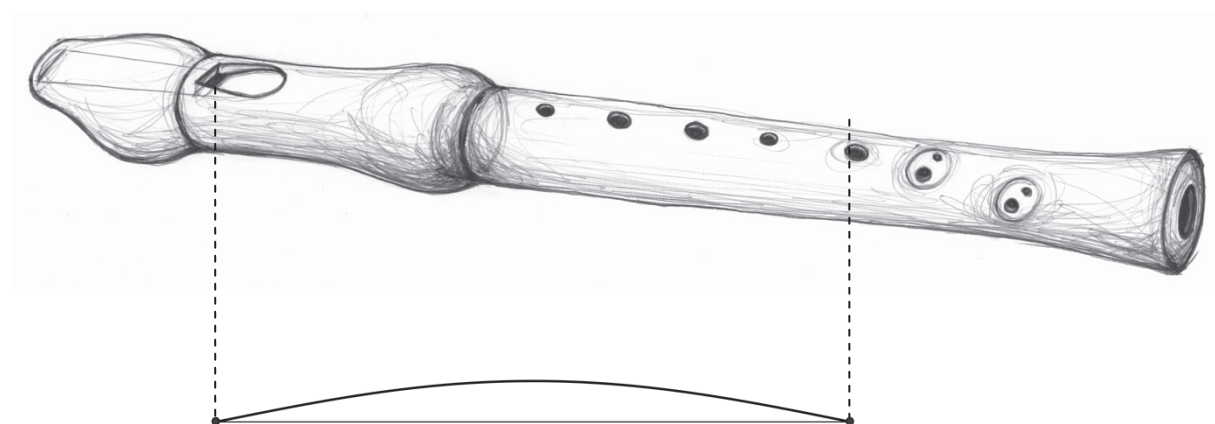
Pokud síla vzduchového proudu přesáhne určitou hranici, rozpadne se vír na dva. Počet vírů, které vzniknou v jedné vteřině, se tím zdvojnásobí a zdvojnásobí se tak frekvence tónu. Místo základního tónu píšťaly tedy zazní tón o oktávu vyšší. Tím dojde k tzv. *přefouknutí*. Při stupňování síly vhaněného vzduchového proudu se pak vír rozpadá na tři, čtyři, pět (až maximálně osm) vírů, čímž se pak ozývají tóny příslušně vyšší.

Pokud je štěrbinou i hrana spojena s chvějícím se vzdušným sloupcem, tak nabývá díky své velikosti naprosté převahy vzdušný sloupec. Ten je tedy rozhodujícím pro výšku základního tónu píšťaly. V případě otevřené píšťaly platí pro výšku tohoto tónu prakticky stejný vztah, jako

pro strunu. Pokud si totiž naznačíme (v podélném řezu) chvění vzduchového sloupce v otevřené varhanní píšťále, dostaneme stejný obrázek jako pro strunu.

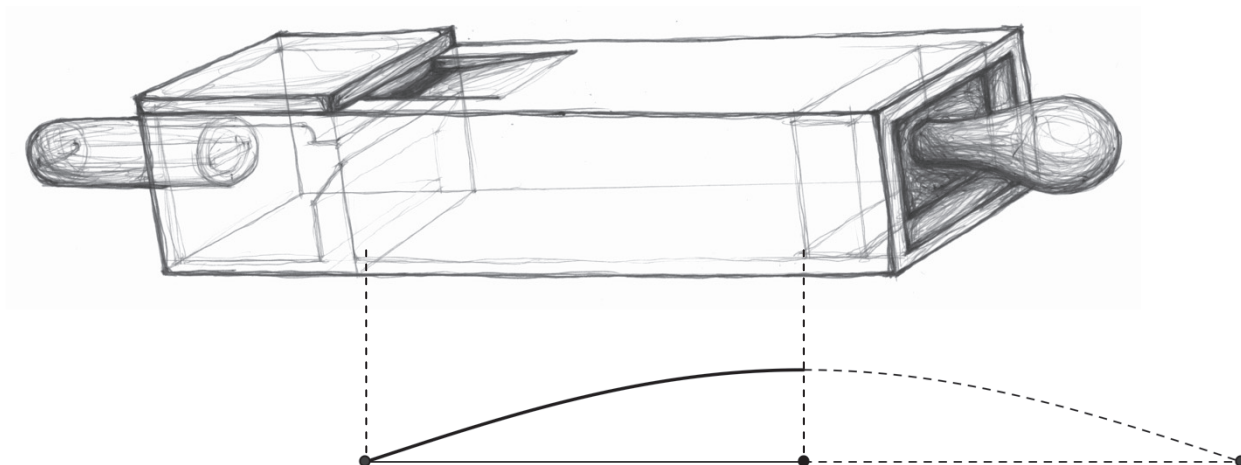


Na principu otevřené píšťaly je také založena zobcová flétna. Základní (tj. nejhlubší) tón zobcové flétny zazní při zakrytí všech otvorů. Jejich postupným odkrýváním můžeme flétnu zkracovat, a tak zní tóny vyšší – tóny diatonické stupnice dur.



Zakryjeme-li například pouze první čtyři otvory, chová se zobcová flétna jako otevřená píšťala, která končí v místě pátého otvoru, jak je naznačeno čárkovanou čarou. Pokud bychom poslední otvor zakryli pouze částečně, vznikla by malá štěrbinu, na níž by se tvořilo turbulentní proudění, které by ovlivnilo výšku tónu. Tímto způsobem lze zahrát některé půltóny, pro které nejsou na flétně speciální otvory (s výjimkou dvou otvorů na konci). Hráči na zobcovou flétnu znají také přefukování – zesílením proudu vzduchu lze zahrát tóny o oktávu vyšší, čímž se podstatně rozšiřuje tónový rozsah zobcové flétny. Vzhledem k tomu, že se při přefouknutí automaticky ozývají tóny o oktávu vyšší, lze tyto tóny zahrát opět pomocí postupného odkrývání otvorů. Hmaty pro tón a tón o oktávu vyšší jsou tedy přibližně stejné. Zejména ve vyšších polohách je však potřeba vyvažovat nepřesnosti, které při přefukování vznikají, modifikováním hmatů ze základní oktávy.

Pokud je píšťala na jednom konci uzavřená, tak se postupná vlna od tohoto konce odráží s opačnou fází a na tomto uzavřeném konci vzniká pohybový uzel. Ten tedy není uprostřed píšťaly (jako tomu bylo u píšťaly otevřené), ale až na jejím konci. To znamená, že uvnitř kryté píšťaly je pouze polovina vlny. Celá vlna tak má dvojnásobnou délku. Základní tón kryté píšťaly je proto o oktávu nižší, než je tomu u píšťaly otevřené.



Na obrázku máme nakreslenou dřevěnou krytou varhanní píšťalu a podélný řez vlny, která v této píšťale vzniká. Plnou čarou je vyznačena ta část vlny, která vzniká uvnitř píšťaly, čárkovaně je její doplnění na celou vlnu.

Pokud je píšťala takové délky, že by se do varhan v daném prostoru nevešla, je možno ji sestavit tak, že nebude rovná, ale například ve tvaru velkého řeckého písmene Γ . V případě potřeby je možno mít na píšťale takovýchto ohybů i více, nemají totiž vliv na samotný tón. Jeho výška se opět řídí celkovou délkou píšťaly. Důležité však je, aby byl zachován konstantní průřez.

Poněkud jinak se chovají hudební nástroje, v nichž dochází ke chvění vzduchového sloupce kuželového tvaru. Teorie je v tomto případě mnohem složitější. Za příklad si vezměme lesní roh. Na tomto žesťovém nástroji s velmi úzkým kuželovým vrtáním dochází velmi snadno k přefukování. Lze tak zahrát nejen tón o oktávu vyšší (tzv. *druhý harmonický tón*), ale i další harmonické tóny¹⁰ až do pořadového čísla 18. Ostatní tóny lze zahrát díky soustavě čtyř ventilů a pomocí částečného nebo úplného krytí (tj. vkládáním ruky do roztrubu).

¹⁰ První harmonický tón je tón sám, odpovídá mu interval primy. Druhý harmonický tón má dvojnásobnou frekvenci, třetí harmonický tón má frekvenci trojnásobnou. Obecně n -tý harmonický tón má n -násobnou frekvenci tónu základního.

3 Astronomie a satelitní navigace

V této kapitole se budeme věnovat některým astronomickým jevům a navigaci. Soustředíme se přitom na několik problémů. První se bude týkat periodicity zatmění Slunce. Zde využijeme řetězových zlomků, s nimiž jsme se seznámili v předchozí kapitole. Uvidíme tak sílu abstrakce v matematice – jeden postup slouží k řešení problémů ze zcela odlišných oblastí. Druhý problém bude spíše menší historickou poznámkou. Ukážeme si, jak už ve starověku byl znám ekvivalent zeměpisné šířky a podíváme se na přesnost, které tehdejší lidé dosáhli. Poslední problém se bude týkat současnosti: seznámíme se stručně s matematickou podstatou satelitní navigace, která je dnes hojně využívána v automobilech a mobilních telefonech.

3.1 Zatmění Slunce

Zatmění Slunce patří bezesporu mezi ty jevy, které poutaly pozornost lidí od nepaměti. Jejich záznamy máme z většiny starověkých kultur.¹¹ Tyto záznamy pro nás mají nesmírnou hodnotu, neboť pomocí nich můžeme datovat mnohé historické události. Zatmění Slunce (i Měsíce) byla nejen velkolepou podívanou, ale působila také zmatek v armádách. Umění předpovídat zatmění Slunce bylo nejednou využito ve prospěch těch, kteří takovéto znalosti měli. Snad nejznámějším případem je zatmění, které předpověděl antický filosof Thalés z Mílétu. Proběhlo 28. května 585 př. Kr. a Hérodotos o něm píše v první knize svých Dějin:

*Alyattés ke Kyaxarově žádosti Skythy nevydal, takže z toho potom vznikla pětiletá válka mezi Lýdy a Médy. V těch letech častokrát zvítězili Médové nad Lýdy, častokrát zase Lýdové nad Médy. Jednou došlo také k jakési noční bitvě. Když válka trvala se střídavým štěstím, došlo v šestém roce ke srážce, při které se stalo, že se po začátku boje pojednou den změnil v noc. Tuto změnu dne předpověděl Iónům Thalés z Mílétu a stanovil pro ni právě tento rok, ve kterém k ní také došlo. Když Lýdové a Médové spatřili, že nastala noc místo dne, ustali v boji a obě strany raději pospíchaly uzavřít mír. Mír sjednali syennesis z Kilikie a labynétos z Babylóna. Ti se také postarali o jeho stvrzení přísahami a sjednali vzájemné sňatky.*¹²

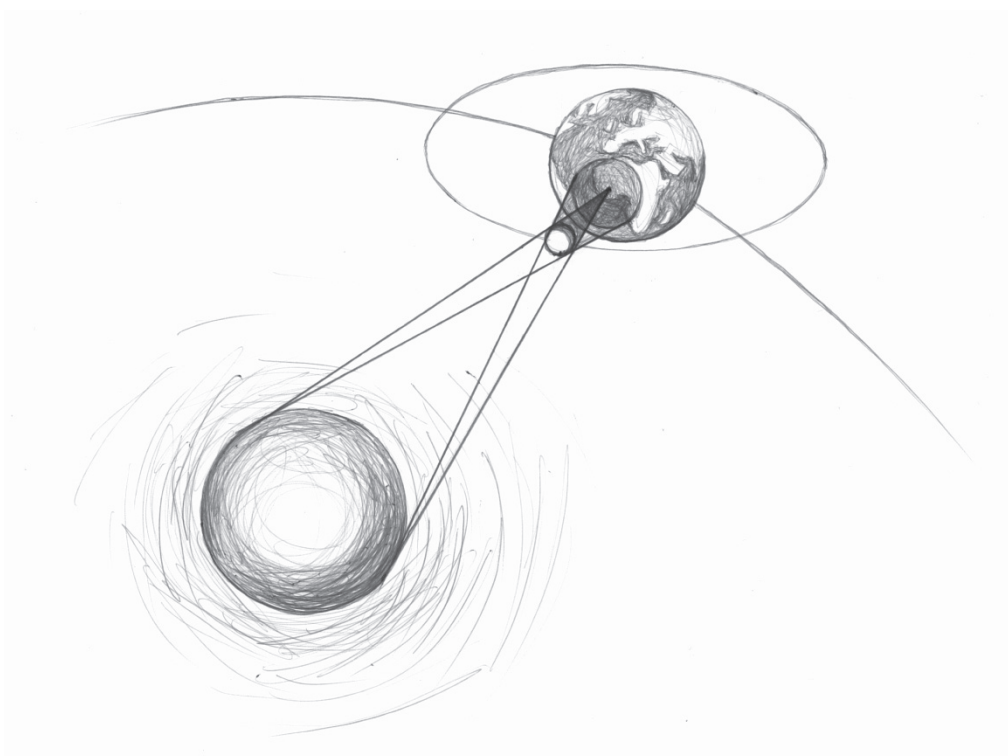
Zajímavých zatmění Slunce byla v dějinách lidstva celá řada. Přejděme však nyní k podstatě tohoto jevu. Zatmění Slunce nastává, pokud je (pro pozorovatele na Zemi) sluneční disk zakryt Měsícem. Měsíc se tedy nachází mezi Sluncem a Zemí, přičemž stín Měsíce dopadá na povrch Země. Slunce je od Země asi 400krát dále než Měsíc. Zároveň je však skutečný průměr Měsíce asi 400krát menší než průměr Slunce. Drobné odchylky ve vzdálenostech způsobených eliptičností drah Země kolem Slunce a Měsíce kolem Země pak způsobují, že může nastat zatmění *úplné* (pokud Měsíc zakryje celý sluneční disk) nebo *prstencové* (Měsíc je od Země vzdálen natolik, že měsíční disk se pak jeví menší než sluneční).

¹¹ Čína, Ugarit, Asýrie, Řecko, ... Znamé je také zatmění, které podle Lukášova evangelia 23,44–45 nastalo při ukřižování Ježíše.

¹² Citováno podle překladu Jaroslava Šonky, který vyšel v nakladatelství Academia roku 2003.

Výchozí situace je tedy pro vznik zatmění velmi příznivá. Kdyby navíc Měsíc obíhal kolem Země přesně v rovině ekliptiky¹³, nastávalo by zatmění Slunce každý měsíc. Rovina dráhy Měsíce je však oproti ekliptice skloněna o asi 5°, zatmění tedy může nastat jen tehdy, když se Měsíc nachází v rovině ekliptiky, tj. v tzv. *uzlových bodech*. Zároveň se musí nacházet mezi Zemí a Sluncem, musí tedy být v *novu*.

Díky tomu, že se Měsíc (i Země) pohybují poměrně pravidelně, nastává splnění první i druhé podmínky periodicky. V uzlovém bodě se Měsíc nachází jednou za tzv. *drakonický měsíc*, který trvá $D = 27,212\,220\,817$ dní (27 dní 5 hod. 5 min. 35,8 s). Fáze měsíce se vystřídají za tzv. *synodický měsíc*, jehož trvání je $S = 29,530\,588\,853$ dní (29 dní 12 hod. 44 min. 2,9 s).



Obr. 1 – Zatmění Slunce

Naším úkolem je nyní určit periodu, se kterou nastávají obě tyto podmínky současně. Přibližně řečeno, z matematického hlediska máme najít co nejmenší přirozená čísla P, Q , pro která platí s co nejmenší odchylkou rovnost

$$P \cdot S = Q \cdot D.$$

Přesné řešení, kdy je odchylka nulová, je zřejmé:

$$\frac{P}{Q} = \frac{D}{S} = \frac{27\,212\,220\,817}{29\,530\,588\,853}$$

¹³ rovina, v níž obíhá Země kolem Slunce

Perioda v řádu miliard měsíců je však prakticky neupotřebitelná. Jelikož je číselník prvočíslo, jsou navíc obě čísla nesoudělná. Budeme tedy hledat aproximaci tohoto zlomku jiným zlomkem s co nejmenším číselníkem a jmenovatelem, která bude zároveň dostatečně přesná. Vidíme, že jsme narazili na obdobný problém, který jsme řešili v minulé kapitole: *aproximovat s co nejmenší chybou zadané číslo zlomkem s malým číselníkem a jmenovatelem*. Řešení tohoto problému tedy můžeme zredukovat na hledání konvergentů zlomku $\frac{D}{S}$. Pro výpočet použijeme program z minulé kapitoly. Rozdíl je pouze v zadané hodnotě a ve výstupu – počítáme navíc odchylku

$$P \cdot S - Q \cdot D .$$

Výpočet periody zatmění Slunce

```

Drakon = 27.212220817
Synod = 29.530588853
x = Drakon / Synod          # poměr délky drakonického a synodického měsíce
N = 9                       # počet konvergentů, který se bude počítat

print('drakonický/synodický měsíc, řetězový zlomek')
print(x)                    # tisk zadaného čísla (pro přehlednost)

# Výpočet řetězového zlomku   x // 1 je zlomková část x (vlastně zbytek po dělení 1)
q = []                     # pole q - zde bude uložen řetězový zlomek
for i in range(0, N):     # x - (x//1) je celá část čísla x
    q.append( int(x // 1) ) # do řetězového zlomku přidáváme jednotlivé členy
    x = 1 / ( x - (x//1) )  # zde se tvoří řetězový zlomek
print(q)                  # tisk řetězového zlomku

# Výpočet konvergentů K: P jsou číselníky, Q jsou jmenovatele
P = [ q[0], q[0]*q[1]+1 ] # první dva konvergenty
Q = [ 1, q[1] ]
for i in range(2, N):    # i-té konvergenty (i = 2, 3, ..., N)
    P.append( q[i]*P[i-1] + P[i-2] ) # přidáváme další číselníky a jmenovatele do pole
    Q.append( q[i]*Q[i-1] + Q[i-2] )

# Sestavení konvergentů do tvaru: číselník P[i] / jmenovatel Q[i]
# Odchylka – rozdíl P[i]*synodických a Q[i]*drakonických měsíců v minutách (24*60)
# Délka periody v letech – Synod*P[i] / délkou roku
Konvergenty = []
Odchylka = []
DelkaPeriody = []
for i in range(0, N):
    Konvergenty.append( str(P[i]) + ' / ' + str(Q[i]) )
    Odchylka.append( (Synod*P[i] - Drakon*Q[i]) * 24*60 )
    DelkaPeriody.append( Synod*P[i] / 365.2421956 )

# Tisk konvergentů, příslušné odchylky a délky periody v letech
print('\nkonvergent' + '\t\t' + 'odchylka (min.)' + '\t\t' + 'délka periody (roky)')

for i in range(0, N):
    print( Konvergenty[i] + '\t\t' + '{0:.7}'.format(Odchylka[i]) + '\t\t' + '{0:.8}'.format(DelkaPeriody[i]) )

```

Výstup z programu:¹⁴

drakonický/synodický měsíc, řetězový zlomek

0.9214926580861431

[0; 1, 11, 1, 2, 1, 4, 3, 5]

konvergent	odchylka (min.)	délka periody (roky)
0 / 1	-39185.6	0.0
1 / 1	3338.45	0.080852
11 / 12	-2462.648	0.88937
12 / 13	875.8017	0.97022
35 / 38	-711.0449	2.8298
47 / 51	164.7568	3.8
223 / 242	-52.01783	18.03
716 / 777	8.703272	57.89
3803 / 4127	-8.501472	307.48

Vezmeme-li v úvahu délku periody a velikost odchylky, nalezneme kompromis poměrně snadno. Nejvhodnějšími kandidáty jsou konvergenty

$$\frac{223}{242} \text{ a } \frac{716}{777}.$$

Následující konvergent už neznamená z hlediska odchylky výrazné zlepšení, navíc je perioda mnohem delší, než lidský život. U konvergentů předcházejících je zase délka periody sice krátká (maximálně necelé čtyři roky), odchylka je však delší než několik hodin. Posuďme tedy konvergenty $\frac{223}{242}$ a $\frac{716}{777}$. Délka periody příslušná těmto konvergentům je:

$$242 \cdot D = 6\,585,357\,437\,7 = 6\,585 \text{ dní } 8 \text{ hod. } 35 \text{ min.}$$

$$223 \cdot S = 6\,585,321\,314\,2 = 6\,585 \text{ dní } 7 \text{ hod. } 43 \text{ min.}$$

$$777 \cdot D = 21\,143,895\,574\,8 = 21\,143 \text{ dní } 21 \text{ hod. } 30 \text{ min.}$$

$$716 \cdot S = 21\,143,901\,618\,75 = 21\,143 \text{ dní } 21 \text{ hod. } 38 \text{ min.}$$

V prvním případě tedy zatmění nastane po 6 585 dnech a přibližně osmi hodinách. Země se však otáčí kolem své osy a za jednu třetinu dne (osm hodin) se otočí o třetinu plného úhlu, tj. o 120° .¹⁵ Následující zatmění tak nebude pozorovatelné na původním místě, ale na místě, které se nachází o 120° zeměpisné délky směrem na západ. Pozorovatel na témže místě uvidí zatmění po uplynutí tří period, tj. po přibližně 54 letech.

Druhý zlomek, přestože zde chyba činí necelých devět minut a délka periody téměř 58 let je také přijatelná, tuto výhodu brzkého „návratu“ zatmění na původní místo na Zemi neposkytuje. Posun zde totiž činí přibližně 324° .

¹⁴ Spustitelná podoba programu se opět nachází na příloženém CD.

¹⁵ Přesněji se jedná o asi 115° .

Hledanou nevhodnější periodou je tedy 18 let 10 dní 8 hod.¹⁶ Tato perioda byla známa už babylonským astronomům. Na základě (nesprávně interpretovaných) údajů z byzantské encyklopedie Súdai ji pojmenoval roku 1691 anglický astronom Edmond Halley jako *saros*. Tento název se mezi astronomy ujal a používá se dodnes. Jednotlivá zatmění Slunce se řadí do tzv. *sarosových řad*. Je-li pozorováno jedno zatmění Slunce na nějakém místě na Zemi, lze potom pouhým přičítáním sarosové periody snadno vytvořit příslušnou sarosovou řadu. Pozorujeme-li zatmění na jiném místě na Zemi, vznikne další sarosová řada.

Poslední úplné zatmění Slunce bylo u nás (jižně od ČR) pozorovatelné 11. srpna 1999. Toto zatmění patří do sarosové řady číslo 145.¹⁷ Příští zatmění z této řady bude pozorovatelné ve Spojených státech 21. srpna 2017 ve večerních hodinách. U nás bude pozorovatelné zatmění z této řady 12. září 2053.

3.2 Zeměpisná šířka

Než přistoupíme k výkladu matematické podstaty nejmodernější satelitní navigace, podívejme se, jak dovedli zeměpisnou šířku určovat naši předkové ve starověku. Zeměpisnou délkou se zde zabývat nebudeme – problém jejího určování byl uspokojivě vyřešen až konstrukcí přesného chronometru v 18. století. Ze starověkých dokladů určování zeměpisné šířky uvedeme krátký úryvek ze spisu *O architektuře*, který napsal koncem 1. stol. př. Kr. římský architekt Vitruvius. Ve svém díle chápe architekturu v širším smyslu, než je tomu dnes. Pojednává tedy také o stavbě válečných strojů, vodovodů, slunečních hodin a v omezené míře o tématech astronomických. V sedmé kapitole píše:¹⁸

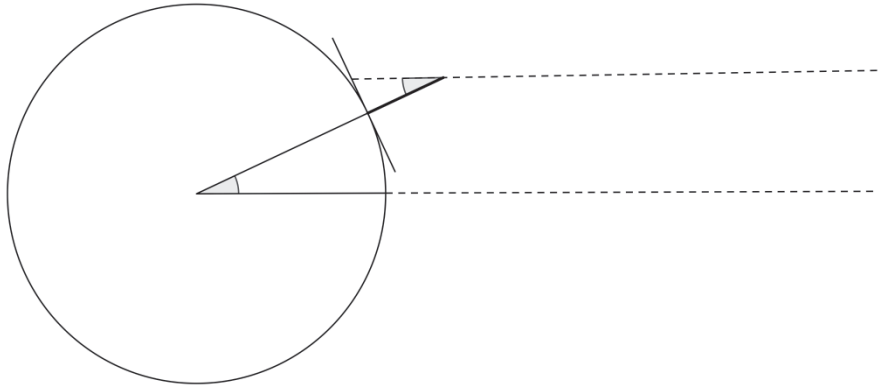
Slunce totiž v době rovnodennosti při svém průchodu Skopcem a Váhami vrhá v místech takové zeměpisné šíře, jako je Řím, stín, který měří 8/9 gnómonu. V Athénách má délka stínu 3/4 gnómonu, na Rhodu 5/7, v Tarentu 9/11, v Alexandrii 3/5, přičemž lze na všech ostatních místech zjistit, že příroda vytváří rovnodennostní stín gnómonu všude jinak.

Gnómonem rozumíme svisle postavenou tyč (sloup, obelisk), která vrhá stín na vodorovnou zemi. V době rovnodennosti se Slunce nachází přesně v rovině rovníku, v poledne tam tedy dopadají sluneční paprsky kolmo na zem. Princip určování zeměpisné šířky je znázorněn na následujícím schématu. Sluneční paprsky dopadající na Zemi můžeme považovat za vzájemně rovnoběžné vzhledem k velké vzdálenosti Země od Slunce.

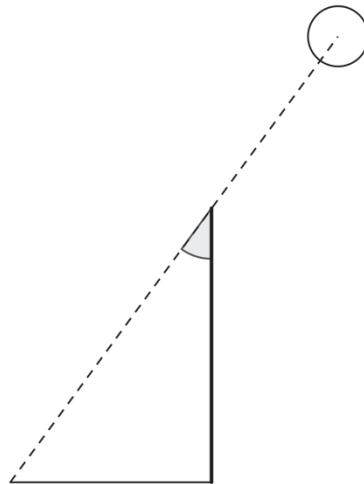
¹⁶ V závislosti na počtu přestupných roků je perioda 18 let 10 dní, nebo 18 let 11 dní.

¹⁷ Sarosovou řadu číslo 145 lze nalézt na <http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEsaros/SEsaros145.html>, kde je také možno nalézt seznam všech ostatních sarosových řad.

¹⁸ Citováno podle překladu A. Otoupalíka: *Marcus Vitruvius Pollio: Deset knih o architektuře*. Praha, Arista, 2001.



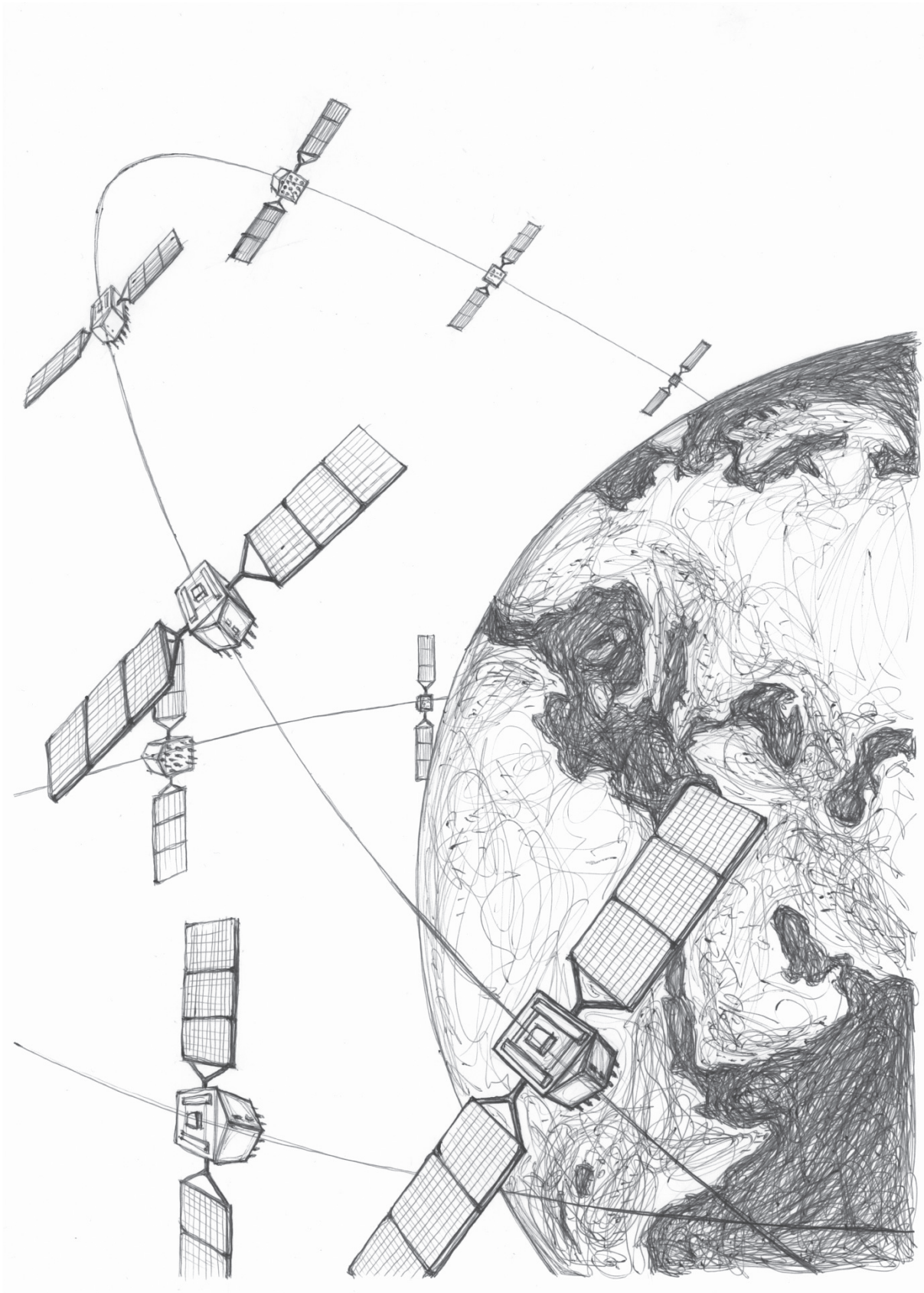
Situace pro pozorovatele na konkrétním místě na Zemi vypadá takto:



Velikost hledaného úhlu lze vypočítat pomocí funkce tangens – z poměru délky stínu k délce gnómonu. V době římské nebyla funkce tangens ještě známa, takže jsou ve Vitruviově ukázce uvedeny pouze poměry obou délek. V následující tabulce jsou shrnuty zeměpisné souřadnice míst uváděných v ukázce a v posledním sloupci jsou pro porovnání přesnosti převedeny Vitruviové údaje na velikosti příslušných úhlů.

Řím	41° 53' 25"	12° 29' 30"	$\operatorname{arctg} \frac{8}{9} = 41^\circ 38'$
Athény	37° 58'	23° 43' 35"	$\operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36^\circ 52'$
Rhodos	36° 10'	27° 55'	$\operatorname{arctg} \frac{5}{7} = 35^\circ 32'$
Tarentos	40° 28' 30"	17° 14'	$\operatorname{arctg} \frac{9}{11} = 39^\circ 17'$
Alexandrie	31° 11'	29° 54'	$\operatorname{arctg} \frac{3}{5} = 30^\circ 58'$

Přestože jsou Vitruviové údaje vyjádřeny pomocí poměrů malých celých čísel (snadno získaných měření), vykazují obdivuhodnou přesnost.



3.3 Princip satelitní navigace

V současné době je nejpoužívanějším systémem satelitní navigace GPS (Global Positioning System). Nachází velmi širokého užití: od automobilů, záchranné služby, přes navádění lodí a letadel až po finanční sektor, kde slouží k přesnému určování času jednotlivých transakcí. Kromě navigace jsou globální navigační systémy důležité pro přesný čas (UTC – Universal Time Coordinated) a jeho šíření po celém světě. Přestože dnes GPS nachází široké civilní uplatnění, jedná se původně o systém vojenský. Měl totiž sloužit asi 40 000 vojenských uživatelů, nyní jej však využívá přes 20 milionů civilních a vojenských uživatelů po celém světě.

Zrod satelitní navigace můžeme datovat do začátku 60. let, kdy námořnictvo Spojených států rozhodlo vytvořit systém pro účely přesné navigace. Nazýval se *Navy Navigation Satellite System* neboli TRANSIT. Motivací byly zejména obtíže při dlouhodobém řízení ponorek – musely pravidelně obnovovat informace o své poloze. Dalším důvodem bylo usnadnění navádění balistických střel. Tento systém byl ještě velmi odlišný od současného GPS. Jeho provoz byl ukončen roku 1996.

V roce 1964 vytvořila výzkumná laboratoř *Naval Centre for Space Technologies* (NCST) program TIMATION (TIME/navigATION). Výsledkem byly dva satelity vypuštěné v letech 1967 a 1969. Právě tyto satelity otevřely cestu k GPS. Určování pozice už bylo založeno na podobném principu, na jakém je založeno GPS. V rámci programu TIMATION byly v letech 1974 a 1977 vypuštěny další dva satelity NTS I a NTS II (Navigation Technology Satellite). Byly to první satelity, na nichž byly instalovány atomové hodiny – rubidiové a cesiové. Tím se staly prototypy satelitů GPS. V únoru roku 1978 pak byly v rámci programu NAVSTAR GPS vypuštěny první satelity GPS. Vše bylo tehdy pod kontrolou armády. Základní motto tehdy znělo:

*vypustit 5 bomb do téhož kráteru,
vybudovat levný (tj. pod 10 000 dolarů) systém pro navigaci.*

Po nehodě raketoplánu Challenger roku 1986 byl tento přístup přehodnocen.

První generace satelitů GPS byla tvořena dvanácti satelity. Tato konstelace, označovaná jako Block I, byla vypuštěna v letech 1978 až 1985. Další devět satelitů bylo vypuštěno v letech 1989 a 1990 (Block II). První velký test GPS proběhl v letech 1990 a 1991 při válce v Perském zálivu. Šestnáct satelitů GPS tehdy řídilo operaci Pouštní bouře s přesností asi 30 metrů. Přehled všech fází vypouštění satelitů je uveden v následující tabulce.

Tab. 3 – Vypouštění satelitů GPS

Série	Období	satelitů
Block I	1978–1985	10
Block II	1989–1990	9
Block IIA	1990–1997	19
Block IIR	1997–2004	12
Block III	od 2014	32

Roku 1993 začala snaha o co největší civilní využívání GPS. Signál pro terminály civilních uživatelů byl však narušen záměrnou systematickou chybou (tzv. Selective Availability – SA, která byla implementována kvůli možnému zneužití proti USA). Přesnost tak byla omezena na 100 metrů. Brzy se však ukázalo, že taková přesnost nebyla pro zamýšlená použití přiměřená. Vypnutí SA oznámil 1. května 2000 americký prezident Bill Clinton.¹⁹ Hlavním důvodem byla jednak nevyhovující přesnost GPS s SA (například při záchranných akcích), jednak také technický pokrok, který umožnil snížení přesnosti lokálně. V případě válečného konfliktu by tedy bylo možné snížit přesnost jen na vymezeném území.

Od roku 2005 se na oběžných drahách pohybuje 32 satelitů, z nichž by mělo být v činnosti alespoň 24. Jednotlivé satelity jsou umístěny v 6 orbitálních rovinách, které mají oproti rovině rovníku sklon 55°. Vzdálenost satelitů od zemského povrchu je přibližně 20 000 km.

GPS není jediným systémem satelitní navigace. V bývalém Sovětském svazu vznikl za studené války systém GLONASS (Глобальная Навигационная Спутниковая Система). Jeho kořeny sahají také až do šedesátých let. Vypouštění satelitů bylo zahájeno 12. října 1982, oficiálně však tento systém začal pracovat až 24. září 1993. V druhé polovině roku 1996 bylo schváleno civilní užití se zachováním přesnosti.

Posledním systémem satelitní navigace je GALILEO. Jedná se o systém čistě civilní, evropský a díky pozdějšímu datu svého vzniku také bude přesnější a modernější. Realizace byla započata v roce 2001. Systém je však výrazně dražší, než se původně očekávalo. Spuštění se tak stále odsouvá, termín je stanoven na rok 2014. Evropský úřad pro dohled nad globálním navigačním družicovým systémem Galileo (GSA) bude sídlit v pražských Holešovicích.

Podívejme se nyní na podstatu fungování GPS. Na oběžných drahách²⁰ ve výšce asi 20 000 km nad zemským povrchem se pohybují satelity,²¹ které oběhnou Zemi za necelých dvanáct hodin. Základní výbavou každého z těchto satelitů jsou troje až čtyři atomové hodiny pro určování přesného²² času a vysílač signálu. Do vybavení satelitů také patří systém NUDET (Nuclear Detonation) pro detekci a lokalizaci jaderných výbuchů.

Satelity GPS vysílají dva druhy signálů. Označují se *C/A-code* (Coarse Acquisition) a *P-code* (Precision). První je rychlejší, slouží zejména k prvnímu odhadu pozice. Druhý signál je pomalejší, poskytuje však velmi přesné informace o poloze.²³ Signál, který satelit vysílá, obsahuje zejména informace o jeho pozici a přesný čas.²⁴

¹⁹ K vypnutí SA došlo hned následujícího dne.

²⁰ Tyto eliptické dráhy jsou téměř kruhové, hlavní poloosa měří 26 578 km.

²¹ Hmotnost jednoho satelitu se pohybuje kolem 1 100 kg, u novějších modelů kolem 1 700 kg. Každý z rozměrů jednoho satelitu (bez solárních panelů) je téměř 2 metry.

²² Přesnost je řádově 10^{-13} s. Srovnáním údajů z více hodin lze snáze odhadnout a korigovat chybu.

²³ P-code je dostupný pouze *autorizovaným uživatelům*, tj. vojenskému sektoru (USA a spojenci) a geodetům (v zemích, kde nehrozí nebezpečí vojenského zneužití).

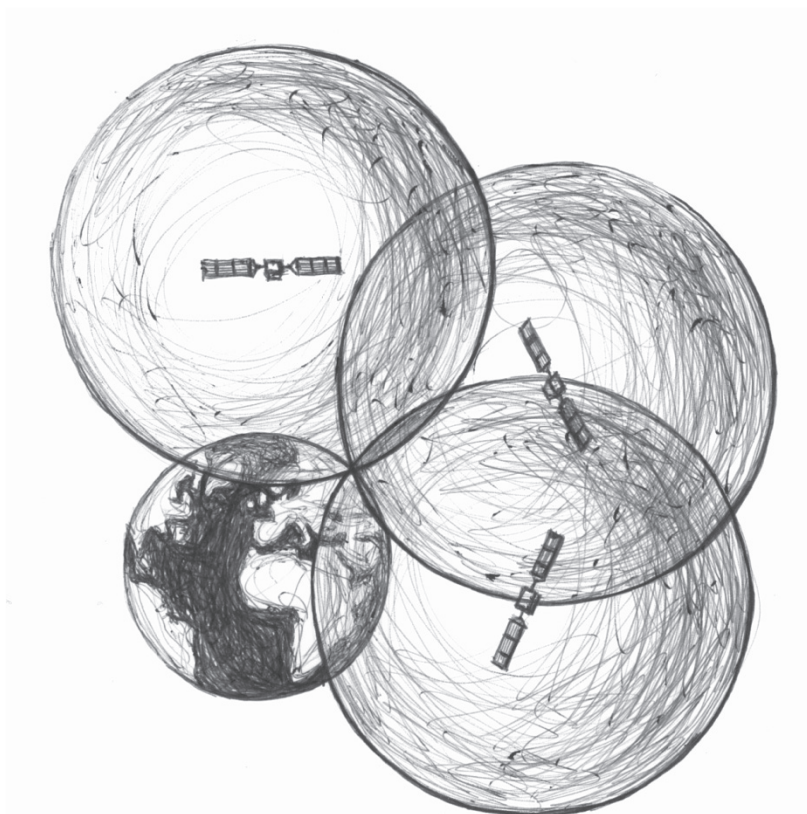
²⁴ Právě na znepřesnění údajů o čase a o pozici satelitu bylo založeno SA. V období války v Perském zálivu byla SA vypnuta.

Na pěti místech na Zemi jsou umístěny stanice, které monitorují satelity na oběžných drahách. Informace se posílají do řídicího centra v Coloradu, kde se na jejich základě určují přesné polohy a odchylky v určování času jednotlivých satelitů. Ty jsou také vybaveny malými raketovými motory, které umožňují drobné korekce dráhy.

Přesný čas a znalost pozice satelitu je pro určení polohy uživatele zásadní. Přijímač porovná čas, kdy byl signál ze satelitu vyslán, s časem, kdy jej přijal. Signál se šíří rychlostí světla c , proto lze snadno z rozdílu t těchto časů vypočítat vzdálenost r satelitu od přijímače:

$$r = c \cdot t.$$

Jeden takovýto údaj není postačující, protože množina všech bodů v zadané vzdálenosti tvoří kulovou plochu. Pokud přidáme údaje z dalšího satelitu, dostaneme průnik dvou kulových ploch. To stále není postačující pro přesnou lokalizaci. Teprve z průniku alespoň tří²⁵ kulových ploch můžeme získat aktuální pozici přijímače na zemském povrchu. Situace je zakreslena na následujícím obrázku.



Z matematického hlediska se jedná o úlohu nalézt průsečík tří kulových ploch. Ve středu každé z těchto kulových ploch se nachází satelit, jehož poloha je známá. Řešení provedeme pomocí analytické geometrie. Úloha tak přejde na soustavu tří kvadratických rovnic o třech neznámých.

²⁵ Jelikož není GPS přijímač přesně synchronizován se satelity, je pro určení polohy potřeba znát vzdálenosti přijímače od alespoň čtyř satelitů.

Zvolme nejprve kartézskou soustavu souřadnic tak, že její počátek se bude nacházet ve středu Země. Za osu z zvolíme zemskou osu. Rovinu xy ztotožníme s rovinou zemského rovníku. Za kladnou poloosu x přitom vezmeme poloosu procházející nultým poledníkem a za kladnou poloosu y zvolíme²⁶ poloosu procházející 90° východní délkou. Označme dále polohu i -tého satelitu $[a_i, b_i, c_i]$, $i = 1, 2, 3$. Označíme-li poloměry příslušných kulových ploch po řadě r_1, r_2, r_3 , dostaneme příslušnou soustavu kvadratických rovnic, která odpovídá průniku všech tří kulových ploch:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 = c^2 t_1^2$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 = c^2 t_2^2$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 t_3^2$$

Odečtením třetí rovnice od první a druhé rovnice odstraníme z těchto prvních dvou rovnic druhé mocniny neznámých:

$$(2a_3 - 2a_1)x + (2b_3 - 2b_1)y + (2c_3 - 2c_1)z = D_1$$

$$(2a_3 - 2a_2)x + (2b_3 - 2b_2)y + (2c_3 - 2c_2)z = D_2$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = c^2 t_3^2,$$

kde

$$D_1 = c^2(t_1^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2$$

$$D_2 = c^2(t_2^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2$$

jsou konstanty. První dvě rovnice jsou lineární, lze tedy snadno vyjádřit neznámé x a y pomocí z . Výrazy $x(z)$ a $y(z)$, které tak vzniknou, dosadíme do třetí rovnice a získáme tak kvadratickou rovnici s jedinou neznámou z . Tato rovnice má dvě řešení. Jedno však můžeme zcela vyloučit, protože se nachází příliš vysoko nad zemským povrchem. Tím dostaneme jediné vyhovující řešení (x_0, y_0, z_0) .

Nyní zbývá ze získaného řešení, které jsme počítali v kartézské soustavě souřadnic, vypočítat zeměpisnou šířku φ , zeměpisnou délku λ a nadmořskou výšku v . Připomeňme, že

$$\varphi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle \quad \text{a} \quad \lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle.$$

Zároveň vzdálenost bodu (x_0, y_0, z_0) od středu Země je

$$h = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

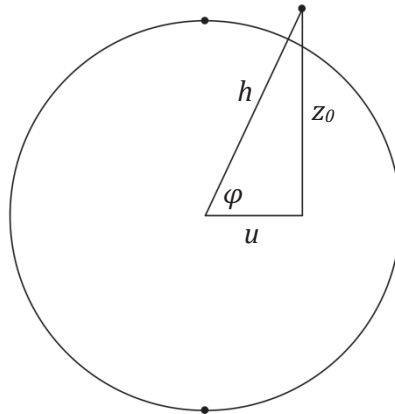
Nadmořskou výšku pak získáme jako rozdíl vzdálenosti h a poloměru²⁷ Země $R = 6\,378,137$ m:

²⁶ Přesněji se v systému GPS volí kladná poloosa y tak, aby společně s poloosami x a z tvořila pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic.

²⁷ Zemi zde bereme pro jednoduchost jako kouli; v GPS se používá referenční elipsoid a celý systém korekcí.

$$v = h - R.$$

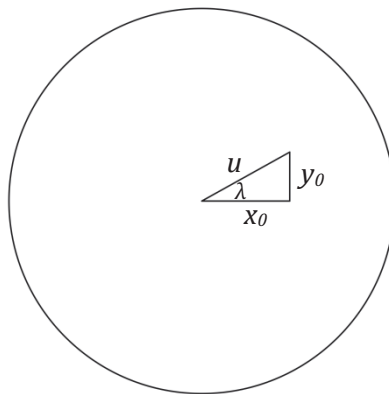
Znázorníme-li řez zeměkoulí oběma póly a naší výslednou pozicí (x_0, y_0, z_0) , dostaneme



odkud plyne vztah $z_0 = h \cdot \sin \varphi$. Zeměpisnou šířku lze tedy vypočítat podle vztahu

$$\varphi = \arcsin \frac{z_0}{h}.$$

Poznamenejme ještě, že úsečka u se nachází v rovině rovníku, tj. v rovině xy . Tam vypadá situace následovně:



Vzhledem k tomu, že $u = h \cdot \cos \varphi$, dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} x_0 &= h \cdot \cos \varphi \cos \lambda \\ y_0 &= h \cdot \cos \varphi \sin \lambda, \end{aligned}$$

z nichž už lze dopočítat zeměpisnou délku λ . Tím jsme převedli kartézské souřadnice polohy přijímače na zeměpisnou šířku, délku a nadmořskou výšku.

V současné době dosahují běžné přijímače přesnosti 10–15 metrů. Pomocí dalších technických vylepšení lze tuto přesnost zvýšit až na desítky centimetrů. Poměrně velký vliv na konečnou přesnost má zemská atmosféra, kterou musí projít signál vyslaný satelitem. Největší problémy

činí troposféra²⁸ (do 20 km nad povrchem Země) a ionosféra²⁹ (60–1000 km nad zemským povrchem). Vysoká koncentrace volných elektronů v ionosféře má vliv na amplitudu i na fázi signálu, jenž se díky tomu může zpoždit o 2–50 nanosekund. Pokud je satelit nízko nad obzorem, tak signál prochází ionosférou mnohem déle a zpoždění tak může vzrůst až na trojnásobek, tj. 150 ns, což odpovídá chybě 45 m. To je jeden z důvodů, proč se raději satelity, které jsou méně než 5° nad obzorem, neberou v úvahu.

Troposféra a ionosféra mají na signál GPS negativní vliv, každá z těchto vrstev poněkud jiný. Do jisté míry jej lze snížit volbou vhodné frekvence. Požadavky na frekvenci jsou však v obou případech odlišné, takže nejlepší volba je vždy otázkou kompromisu. GPS pracuje na dvou frekvencích. Základní frekvencí je $f_0 = 10,23$ MHz, druhá je jejím 154násobkem.

Volba dvou různých frekvencí má velkou výhodu – umožňuje mimo jiné minimalizaci důsledků negativního vlivu ionosféry na GPS signál. Tento vliv je totiž závislý na frekvenci signálu. Porovnáním údajů příslušných dvěma frekvencím je možné jej poměrně přesně odhadnout a korigovat.

Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, GPS není nevyužíváno pouze pro určování polohy. Své aplikace nachází také velmi přesný čas, na němž je tento systém založen. Čas GPS (GPS system time) byl nastaven podle světového koordinovaného času (UTC, Universal Time Coordinated) 6. ledna 1980. Světový koordinovaný čas je však na rozdíl od času GPS korigován vkládáním³⁰ nebo odečítáním přestupných sekund tak, aby se lišil od času daného zemskou rotací o méně než 0,9 sekundy. Při využívání přesného času z GPS je tedy potřeba připočítat přestupné vteřiny, aby bylo dosaženo souhlasu se světovým koordinovaným časem.

²⁸ Jedná se o nejnižší vrstvu atmosféry. Právě zde se odehrávají změny atmosféry, které nazýváme počasím. V troposféře se nachází téměř všechna atmosférická voda. Signálu GPS působí potíže zejména postupné změny teploty a tlaku vzduchu a rozložení vody.

²⁹ Tato část atmosféry je vodivá a ionizovaná. Je udržována rentgenovým a ultrafialovým zářením Slunce. Stupeň ionizace tedy závisí zejména na sluneční činnosti; v průběhu dne značně kolísá.

³⁰ Reálně dochází ke vkládání. Sekunda byla totiž původně definována na základě zemské rotace měřené mezi lety 1756 a 1895. Rychlost zemské rotace se však stále snižuje. Koncem 20. století bylo vkládáno průměrně 9 sekund za jedno desetiletí.

Literatura

- Benson, D. *Music: A Mathematical Offering*. Aberdeen, 2008.
[online: www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/math-music.html]
- Gawłowicz, J. *Povídání o navigaci*. LiberaBooks, 2009.
- Geist, B. *Akustika. Jevy a souvislosti v hudební teorii a praxi*. Praha, Muzikus, 2005.
- Horský, Z., Plavec, M. *Poznávání vesmíru*. MME 37. Praha, Orbis, 1962.
- Kůst, J. *Sférická trigonometrie*. Praha, SPN, 1964.
- Marcus Vitruvius Pollio. *Deset knih o architektuře*. Přel. A. Otoupalík. Praha, Arista, 2001.
- Seeber, G. *Satellite Geodesy*. 2nd ed. Berlin, Walter de Gruyter, 2003.
- Špelda, A. *Hudební akustika*. Praha, SPN, 1978.
- Taschner, R. *Numbers at Work. A Cultural Perspective*. Wellesley, A K Peters, 2007.
- Vít, P. *Řetězové zlomky*. ÚV MO. Praha, Mladá fronta, 1982.